Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.5 MSC2000: 41A45,41A46

О.Ю. Агарева

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПО НЕТОЧНОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

1. Постановки

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода с ядром, зависящим от модуля разности аргументов:

$$\mathrm{f}(t)+\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t-x|\,f(x)\,d\,x=g(t). \tag{1}$$

Считаем, что функция $g(t)$ — четная, тогда ее ряд Фурье:

$$g(t)=\frac{\mathrm{a}_0\,(g)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a}_n\,(g)\cos\,nt, \tag{2}$$

где коэффициенты Фурье

$$\mathrm{a}_{\,n}\,(g)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}g\,(x)\cos\,nx\,dx.$$

Ряд Фурье для ядра уравнения (1) имеет вид:

$$|t-x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2n+1)\,(t-x)\right)}{(2n+1)^2}. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда:

$$f(t)=\frac{\mathrm{c}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{c}_n\cos\,nt. \tag{4}$$

Подставляем (2), (3), (4) в (1), получаем коэффициенты Фурье:

$$\mathrm{c}_0=\frac{\mathrm{a}_0\,(g)}{1+\pi^2};\quad \mathrm{c}_{2n}=\mathrm{a}_{2n}\,(g)\,;\quad \mathrm{c}_{2n+1}=\frac{\mathrm{a}_{2n+1}\,(g)}{1-\frac{4}{(2n+1)^2}}.$$

Тогда точное решение (4) задачи (1) запишется в виде:

$$f(t)=\frac{\mathrm{a}_0\,(g)}{2\,(1+\pi^2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a}_{2n}\,(g)\cos\,2nt+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{a}_{2n+1}\,(g)\cos\,(2n+1)\,t}{1-\frac{4}{(2n+1)^2}}. \tag{5}$$

Предположим, что $g(t)\in W_2^r([-\pi,\pi])$, где

$$W_2^r([-\pi,\pi])=\{\,f(\cdot)\in L_2([-\pi,\pi]):f^{(r-1)}(\cdot)\text{ абс. непр. на }[-\pi,\pi],\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2([-\pi,\pi])}\le 1\,\},$$

а

$$\|g\,(\cdot)\|_{\,L_2([-\pi;\pi])}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g\,(t)|^2\,dt}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых $N+1$ коэффициентов Фурье функции $g(\cdot)$, $y_0, y_1, \ldots, y_N$, причем

$$\sum_{i=0}^{N} |\mathrm{a}_i(g) - y_i|^2 \leq \delta^2, \quad \delta > 0. \tag{6}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (1) на классе $W_2^r\ ([-\pi;\pi])$ по информационному оператору F_δ^{N+1}, который каждой функции $g(t) \in W_2^r\ ([-\pi;\pi])$ сопоставляет множество векторов $y = (y_0, y_1, \ldots, y_N)$, удовлетворяющих условию (6).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi:\ R^{N+1} \to L_2\ ([-\pi;\pi])$. Погрешностью восстановления для данного метода φ назовем величину

$$e\left(W_2^r\ ([-\pi;\pi]),\ F_\delta^{N+1},\ \varphi\right) = \\ = \sup_{\substack{g(t)\in W_2^r\ ([-\pi;\pi]),\ y=(y_0,\ldots,y_N)\in R^{N+1} \\ \sum_{i=0}^{N} |\ \mathrm{a}_i(g)-y_i|^2 \leq \delta^2}} \|f(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([-\pi,\pi])}.$$

Величина

$$E\left(W_2^r\ ([-\pi;\pi]),\ F_\delta^{N+1}\right) = \inf_{\varphi:\ \mathrm{R}^{N+1}\to L_2\ ([-\pi;\pi])} e\left(W_2^r\ ([-\pi;\pi]),\ F_\delta^{N+1},\ \varphi\right)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

2. Основные результаты

Следуя работам [2],[3], и используя выводы теоремы 1 работы [1], нетрудно получить следующие результаты.

Случай 1. $r = 1$.

I).При $\delta \geq \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$ $E = \frac{3}{5}$, *а метод* $f(t) \approx 0$ *— оптимальный.*

II). При $\delta < \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$.

а) Если N*— четное, то* $E = \sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2 + \frac{1-9\pi\delta^2}{(N-3)^2}}$, *а оптимальный метод*

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} + \\ + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left((1 + b(N)\nu_{2n})^{-1} \mathrm{y}_{2n} \,\mathrm{cos 2nt} + \frac{(2n-1)^2 (1+b(N)\nu_{2n-1})^{-1} \mathrm{y}_{2n-1} \cos(\mathrm{2n-1})\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)}\right), \\ b(N) = \frac{1}{9\pi\left(\left[\frac{3(N-1)(N+3)}{5(N+1)}\right]^2 - 1\right)},\ \nu_k = \pi k^2.$$

б) Если N*— нечетное, то* $E = \sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2 + \frac{1-9\pi\delta^2}{(N+1)^2}}$, *а оптимальный метод*

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} + \\ + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left((1 + b(N)\nu_{2n})^{-1} \mathrm{y}_{2n} \,\mathrm{cos 2nt} + \frac{(2n-1)^2 (1+b(N)\nu_{2n-1})^{-1} \mathrm{y}_{2n-1} \cos(\mathrm{2n-1})\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)}\right), \\ b(N) = \frac{1}{9\pi\left(\left[\frac{3(N+1)}{5}\right]^2 - 1\right)},\ \nu_k = \pi k^2.$$

Случай 2. $r \geq 2 (r \neq \infty)$.

I). При $\delta \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $E = \frac{1}{3}$, *а метод* $f(t) \approx 0$ *— оптимальный.*

II). а) При $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \leq \delta < \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $E = \sqrt{\frac{\pi\delta^2(2^{2r}-9)+8}{2^{2r}-1}}$, *а оптимальный метод*

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} + (1+b)^{-1}\,\mathrm{y}_1\cos\mathrm{t} + \left(1+b2^{2r}\right)^{-1}\mathrm{y}_2\cos 2\mathrm{t},$$
$$b = \frac{8}{(2^{2r}-9)}.$$

б) При $\frac{1}{3\sqrt{\pi}} \le \delta < \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ $\quad E = \sqrt{\frac{\pi\delta^2(25\cdot3^{2r}-81\cdot2^{2r})+56}{25(3^{2r}-2^{2r})}}$ *, а оптимальный метод*

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} - \frac{1}{3}(1+b)^{-1}\,\mathrm{y}_1\cos\mathrm{t} + \left(1+b2^{2r}\right)^{-1}\mathrm{y}_2\cos 2\mathrm{t} +$$
$$+\frac{9}{5}\left(1+b3^{2r}\right)^{-1}\mathrm{y}_3\cos 3\mathrm{t},$$
$$b = \frac{56}{(25\cdot3^{2r}-81\cdot2^{2r})}.$$

III). При $\delta < \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$

а) Если N— четное, то $E = \sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2 + \frac{1-3^{2r}\pi\delta^2}{(N-1)^2(N+3)^2(N+1)^{2r-4}}}$*, а оптимальный метод*

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}\left(\left(1+b(N)\nu_{2n}\right)^{-1}\mathrm{y}_{2n}\,\mathrm{cos2nt} + \frac{(2n-1)^2\left(1+b(N)\nu_{2n-1}\right)^{-1}\mathrm{y}_{2n-1}\cos(\mathrm{2n-1})\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)}\right)$$
$$b(N) = \frac{1}{\pi\left(\left[\frac{9(N-1)(N+3)(N+1)^{r-2}}{5}\right]^2 - 3^{2r}\right)},\ \nu_k = \pi k^{2r}.$$

б) Если N— нечетное, то $E = \sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2 + \frac{1-3^{2r}\pi\delta^2}{(N+1)^{2r}}}$*, а оптимальный метод*

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}}\left(\left(1+b(N)\nu_{2n}\right)^{-1}\mathrm{y}_{2n}\,\mathrm{cos2nt} + \frac{(2n-1)^2\left(1+b(N)\nu_{2n-1}\right)^{-1}\mathrm{y}_{2n-1}\cos(\mathrm{2n-1})\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)}\right),$$

$$b(N) = \frac{1}{\pi\left(\frac{81(N+1)^{2r}}{25} - 3^{2r}\right)},\ \nu_k = \pi k^{2r}.$$

Список литературы

[1] Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным* // Матем. заметки – 2007. – 81, вып.6 – с.803-815.

[2] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье,заданным с погрешностью* // Матем. сб. – 2002. – Т.193,–№3 – с.79-100.

[3] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных* // Функ. анализ и его прил. – 2003. – Т.37, – с.51-64.