ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ Г. Г., ОСИПЕНКО К. Ю.

Многие проблемы (в математике, технике, экономике) формулируются (или могут быть сформулированы) как задачи выбора наилучшего (в том или ином смысле) способа достижения цели в условиях неполной и/или неточной информации, т. е. в условиях неопределенности. Например, простейшая задача о квадратурах заключается в том, чтобы наилучшим образом приблизить (восстановить) интеграл от функции по неполной информации о самой функции, а именно, зная ее значения лишь в конечном наборе точек. Параметры математических моделей, описывающих реальные физические или технологические процессы известны, как правило, неточно, скажем, приближенно известны коэффициенты дифференциального уравнения, а мы хотим восстановить как можно точнее его решение. Мы наблюдаем на экране значение непрерывного сигнала в дискретные моменты времени, а хотим, по возможности точнее, знать (восстановить) его значение в какой-то промежуточный момент времени. Список подобных примеров можно продолжать сколь угодно долго.

Приведем общую постановку задачи оптимального восстановления, которая охватывает значительное число задач, представляющих теоретический и прикладной интерес. Пусть задано множество (класс) C и отображение $f\colon C \to Z$, где (Z, d) — метрическое пространство. Принадлежность элемента классу C составляет "глобальную" информацию о нем. Кроме того, о самом элементе имеется "локальная" (индивидуальная) информация, состоящая в том, что известно отображение (вообще говоря, многозначное, что соответствует информации, заданной неточно) $F\colon C \to Y$, где Y — некоторое множество. Отображение F назовем *информационным оператором.* Задача состоит в том, чтобы *восстановить по возможности наилучшим способом значение $f(x)$, $x \in C$, по информации $y \in F(x)$.* В это вкладывается следующий смысл. Любое

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00-15-96109 и №02-01-00386), программы "Университеты России" (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S.CRDF–R.F.Ministry of Education Award VZ-0100-0.

отображение $m\colon F(C)\to Z$ назовем *методом восстановления*. Погрешностью такого метода назовем величину

$$e(f,C,F,m)=\sup_{x\in C,\ y\in F(x)} d(f(x),m(y)),$$

а *погрешность оптимального восстановления* (f на C по F), которую обозначим $E(f,C,F)$, определим как значение следующей экстремальной задачи:

$$e(f,C,F,m)\to\inf, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям $m\colon F(C)\to Z$. Метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань в (1), называется *оптимальным методом восстановления*.

В докладе будет рассмотрен ряд примеров, где найден оптимальный метод восстановления и вычислена погрешность оптимального восстановления. Здесь же, в качестве иллюстрации, приведем задачу об оптимальном восстановлении в метрике L_2 производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье. Пусть C — это соболевский класс $W_2^2(\mathbb{T})$, т. е. совокупность 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых первая производная $\dot{x}(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\|\ddot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\le 1$. На этом классе рассмотрим задачу восстановления первой производной функции $x(\cdot)$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье $x_j=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}x(t)e^{-ijt}\,dt$, заданным с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot)\in W_2^2(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j, $|j|\le N$, такие, что $|x_j-y_j|\le\delta$, $|j|\le N$, $\delta>0$. Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot)\in W_2^2(\mathbb{T})$ множество $F_\delta^N x(\cdot)=\{y=\{y_j\}_{|j|\le N}:|x_j-y_j|<\delta\}$. Задача заключается в нахождении величины

$$E(\dot{x}(\cdot),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N)=\inf_{m\colon\mathbb{C}^{2N+1}\to L_2(\mathbb{T})}\ \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^2(\mathbb{T})\\ y\in F_\delta^N x(\cdot)}}\|\dot{x}(\cdot)-m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

и соответствующего оптимального метода.

Теорема 1. *Пусть*

$$p_0=\max\Big\{\,p\in\mathbb{Z}_+:\delta^2\sum_{|j|\le p}j^4<1,\ 0\le p\le N\,\Big\}.$$

Тогда

$$E(\dot{x}(\cdot),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N)=\frac{\Big(1+\delta^2\sum_{|j|\le p_0}(j^2(p_0+1)^2-j^4)\Big)^{1/2}}{p_0+1},$$

а метод

$$\dot{x}(t)\approx\sum_{|j|\le N}ij\widehat{x}_je^{ijt}=\sum_{|j|\le p_0}ij\left(1-\left(\frac{j}{p_0+1}\right)^2\right)y_je^{ijt}$$

является оптимальным.

Отметим, что если $p_0 < N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье, известных с той же погрешностью, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
E-mail address: georg@magaril.mccme.ru

"МАТИ" — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского
E-mail address: konst@osipenko.mccme.ru