ЛЕММА ШВАРЦА В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И БЕРГМАНА НА ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ИЗ $\mathbf{C}^n$

К. Ю. Осипенко

Классическая лемма Шварца утверждает, что если функция f голоморфна в единичном круге $D := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, не превосходит там по модулю единицы и $f(0) = 0$, то для всех $z \in D$ $|f(z)| \le 1$. Тем самым

$$\sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ f(0)=0}} |f(z)| = |z|, \tag{1}$$

где BH_∞ — единичный шар *пространства Харди* H_∞, определяемого как множество голоморфных в D функций, для которых

$$\| f \|_{H_\infty} := \sup_{z \in D} | f(z) | < \infty.$$

Экстремальные задачи типа (1) часто возникают в связи с оптимальным восстановлением функций. Приведем одну из возможных постановок задачи восстановления.

Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области Ω. Предположим, что для функций из этого класса известны значения в фиксированных точках $z_1, \mathbf{K}, z_n \in \Omega$. Положим для $f \in W$

$$If := \left(f(z_1), \mathbf{K}, f^{(k_1-1)}(z_1), \mathbf{K}, f(z_n), \mathbf{K}, f^{(k_n-1)}(z_n) \right).$$

Оператор I, называемый *информационным*, в многомерной ситуации содержит значения функций f и ее частных производных в системе точек $z_1, \mathbf{K}, z_n$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления функций из класса W в фиксированной точке z по значениям If. *Погрешностью оптимального восстановления* назовем величину

$$e(z, W, I) := \inf_A \sup_{f \in W} | f(z) - A(If) |, \tag{2}$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $A : \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}$, $N = k_1 + \mathbf{K} + k_n$ (или $A : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ в вещественном случае). Метод A_0, на котором достигается нижняя грань в (2), называется *оптимальным*.

В работе [1] было доказано, что для выпуклого уравновешенного класса W имеет место равенство

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №96-01-00325, №96-15-96072 и №96-01-10035).

$$e(z,W,I) := \sup_{\substack{f\in W\\ If=0}} |f(z)| \tag{3}$$

Если рассмотреть задачу восстановления функций из BH_∞ в точке z по их значениям в нуле ($If = I_1 f := f(0)$), то в силу (3) с помощью леммы Шварца легко вычисляется погрешность оптимального восстановления

$$e(z,BH_\infty,I_1) := \sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ f(0)=0}} |f(z)| = |z|. \tag{4}$$

Естественно рассмотреть более общую задачу, когда информационный оператор имеет вид

$$If = I_r f := \left(f(0), f'(0), \mathbf{K}, f^{(r-1)}(0)\right).$$

Иными словами мы хотим найти оптимальный метод восстановления и его погрешность по «тейлоровской» информации. Аналогично (4) и здесь легко получить ответ

$$e(z,BH_\infty,I_r) := \sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ f(0)=f'(0)=\mathbf{K}=f^{(r-1)}(0)=0}} |f(z)| = |z|^r . \tag{5}$$

Заметим, что нахождение оптимального метода восстановления, как правило, требует несколько больших усилий по сравнению с нахождением его погрешности. Например, в рассматриваемом случае довольно естественный метод, при котором функция заменяется на ее отрезок ряда Тейлора

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z^k}{k!} f^{(k)}(0),$$

не является оптимальным. Оптимальным здесь является метод

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z^k}{k!} \left(1 - |z|^{2(r-k)}\right) f^{(k)}(0),$$

построенный в работе [2].

Решение ряда более общих задач восстановления и связанных с ними экстремальных задач на классах голоморфных функций рассматривались в работах [3, 4, 5].

Целью данной работы является решение экстремальных задач типа (5) для голоморфных функций многих переменных.

Пусть B — единичный шар в $\mathbf{C}^n$ и S — его граница:

$$B := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z|^2 := \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 < 1 \right\}, \quad S := \{ z \in \mathbf{C}^n : |z| = 1 \}.$$

Пространством Харди H_p называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\| f \|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\int_S | f(rz) |^p \, d\sigma(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 < p < \infty,$$
$$\| f \|_{H_\infty} := \sup_{z \in B} | f(z) | < \infty, \quad p = \infty,$$

где σ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно вращений. *Пространством Бергмана* A_p называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\| f \|_{A_p} := \left(\int_B | f(z) |^p \, d\nu(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 < p < \infty,$$

где ν — мера Лебега в $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, нормированная так, что $\nu(B) = 1$. При $p = \infty$ $A_\infty = H_\infty$. Через BH_p и BA_p будем обозначать единичные шары в пространствах H_p и A_p.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — *мультииндекс*, т. е. упорядоченный набор неотрицательных целых чисел α_j, $1 \le j \le n$. Положим

$$D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|.$$

Введем также следующие обозначения

$$Q_n(\rho, u) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k + \rho/2} \binom{n-1}{k} u^k,$$
$$\lambda_n(\rho) := \min\{ |u| : Q_n(\rho, u) = 0 \},$$
$$\Phi_n(u, r, p) := \frac{u^r}{(1-u^2)^{n/p}} \left(\frac{\Gamma(n + rp/2)}{\Gamma(n)\Gamma(rp/2)} Q_n(rp, u^2) \right)^{1/p}.$$

Теорема. *Для всех* $1 \le p < \infty$ *и* $z \in B$

1) *при* $|z| < \lambda_n(rp)$

$$\sup_{\substack{f \in BH_p \\ (D^\alpha f)(0) = 0, \quad |\alpha| \le r-1}} | f(z) | = \Phi_n(|z|, r, p), \tag{6}$$

2) *при* $|z| < \lambda_{n+1}(rp)$

$$\sup_{\substack{f \in BA_p \\ (D^\alpha f)(0)=0, \quad |\alpha| \le r-1}} |f(z)| = \Phi_{n+1}(|z|, r, p). \tag{7}$$

Доказательство этой теоремы, обобщающей лемму Шварца на случай голоморфных функций из классов Харди и Бергмана, основано на построении воспроизводящего ядра для функций из H_p с весом $|z_n|^{r(p-2)}$. Случай $r = 1$ был рассмотрен в работе [6].

Отметим, что при $1 \le n \le 5$ в [6] было доказано, что при всех $1 \le p < \infty$ $\lambda_n(p) > 1$. Тем самым для $1 \le n \le 5$ экстремальные задачи (6) и (7) решены для всех $z \in B$

Список литературы

[1] К. Ю. Осипенко, *Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек*, Мат. заметки **19 (**1976), 29–40.

[2] К. Ю. Осипенко, *Оптимальная интерполяция аналитических функций*, Мат. заметки **12 (**1972), 465–476.

[3] Ю. Осипенко, *О точных значениях* n*-поперечников на классах, задаваемых операторами, не увеличивающими осцилляции*, Мат. сб. **188 (**1997), 113–126.

[4] K. Yu. Osipenko, K. Wilderotter, *Optimal information for approximating periodic analytic functions*, Math. Comput. **66** (1997),1579–1592.

[5] K. Yu. Osipenko, Exact n-widths of Hardy–Sobolev classes, Constr. Approx. **13** (1997), 17–27.

[6] K. Yu. Osipenko, M. I. Stessin, *On optimal recovery of a holomorphic function in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Constr. Approx. **8** (1992), 141–159.