ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА [1]

© **Е. О. Сивкова**

Неравенства для степеней различных операторов играют важную роль в анализе, теории приближений и теории дифференциальных уравнений. Здесь приводится точное неравенство, связывающее дробные степени оператора Лапласа функции и ее преобразование Фурье.

Пусть Δ — оператор Лапласа на $\mathbb{R}^d$, то есть Δ сопоставляет гладкой функции $f(\cdot)$ функцию

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x).$$

Если существует преобразование Фурье F функций $f(\cdot)$ и $\Delta f(\cdot)$, то нетрудно видеть, что $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2\, Ff(\xi)$, где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2$.

Для каждого $\alpha \geqslant 0$ оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$, действующий по правилу $(-\Delta)^{\alpha/2}f(x) = F^{-1}(|\xi|^\alpha Ff(\xi))(x)$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье, называется *α-ой степенью оператора Лапласа*. Ясно, что $(-\Delta)^0$ — тождественный оператор.

Рассмотрим следующее пространство

$$\mathcal{W}^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid Ff(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d),\ (-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)\,\}.$$

Т е о р е м а. *Пусть $0 \leqslant \beta < \alpha$. Для всех $f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant K\|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2(\alpha-\beta)}{d+2\alpha}}\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d+2\beta}{d+2\alpha}},$$

где

$$K = K(\beta,\alpha,d) = \frac{(d+2\alpha)^{d+2\beta}}{\sqrt{d+2\beta}}\left(\frac{2^{1-d}}{(\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Точность данного неравенства означает, что константу K нельзя уменьшить.

Приведем краткую схему доказательства. Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим экстремальную задачу на $\mathcal{W}^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$:

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Ff(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta, \quad \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1. \tag{1}$$

Если перейти к образам Фурье, то по теореме Планшереля, квадрат значения данной задачи (то есть величина верхней грани максимизируемого функционала) будет равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \to \max, \quad |Ff(\xi)|^2 \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \leqslant 1, \tag{2}$$

где неравенство в первом ограничении выполняется для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Относительно переменной $|Ff(\cdot)|^2$ данная задача является задаче выпуклого программирования. Используя стандартные методы выпуклой оптимизации (см., напр., [1]) можно доказать, что функция $\widehat{f}(\cdot)$ такая, что

$$F\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \delta, & |\xi| \leqslant \sigma; \\ 0, & |\xi| > \sigma, \end{cases}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-90200)

где

$$\sigma = \left(\frac{2^{d-1}\pi^{d/2}(d+2\alpha)\Gamma(d/2)}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{d+2\alpha}},$$

является ее решением. Подставляя эту функцию в максимизируемый функционал в (2), а затем извлекая квадратный корень, получаем, что значение S задачи (1) таково

$$S = \frac{(d+2\alpha)^{d+2\beta}}{\sqrt{d+2\beta}} \left(\frac{\delta^2 2^{1-d}}{(\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Пусть теперь $f(\cdot)$ — произвольная функция из $\mathcal{W}^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$, отличная от нуля. Положим $g(\cdot) = f(\cdot)/\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$. Тогда ясно, что $\|(-\Delta)^{\alpha/2}g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$ и $\|Fg(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)} = \|Ff(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}/\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, то есть $g(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи (1) с $\delta = \|Ff(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}/\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$. Следовательно,

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}} \leqslant S.$$

Подставляя $\delta = \|Ff(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}/\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в выражение для S, получаем после несложных преобразований требуемое неравенство. На функции $\widehat{f}(\cdot)$, как легко убедиться, оно обращается в равенство и поэтому константа K — наименьшая из возможных.

Подобные неравенства, но когда вместо степеней оператора Лапласа рассматриваются производные, изучались в работе [2]. Доказательство данного неравенства следует рассуждениям из этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. Москва, Эдиториал УРСС, 2003 (2-ое изд).

2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. Москва, 2003. Т. 37. Вып. 3. С. 51-64.

Сивкова Елена Олеговна
Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет)
Россия, Москва
e-mail: sivkova_elena@inbox.ru

The exact inequality for fractional powers of Laplace operator
Elena Sivkova