ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2015, т. 291, с. 215–230

УДК 517.977.52

Принцип максимума Понтрягина. Ab ovo usque ad mala[1,2]

Г. Г. Магарил-Ильяев[3]

Поступило 15 декабря 2014 г.

Приводится доказательство принципа максимума Понтрягина для достаточно общей задачи оптимального управления, базирующееся на теореме о неявной функции и теореме о разрешимости конечномерной системы нелинейных уравнений. Изложение замкнуто в себе: все необходимые предварительные факты доказаны. Основные из них, связанные со свойствами решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, выводятся как следствия теоремы о неявной функции, которая, в свою очередь, есть непосредственное следствие метода Ньютона решения нелинейных уравнений.

DOI: 10.1134/S0371968515040160

1. ВВЕДЕНИЕ

Литература, посвященная доказательству принципа максимума Понтрягина для различных постановок задачи оптимального управления, весьма обширна. В данной работе принцип максимума доказывается для задачи оптимального управления достаточно общего вида и при этом делается попытка выделить существо дела, отделив его от вещей вспомогательных, технических. Непосредственное доказательство занимает около шести страниц. Оно опирается на два факта: свойства решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и лемму о разрешимости конечномерной системы нелинейных уравнений. Оба эти факта приведены с полными доказательствами, и в этом смысле изложение замкнуто в себе (что отражено в названии). Цель доказательства утверждений о свойствах решений указанных дифференциальных уравнений не только в том, чтобы сделать изложение замкнутым, но и в том, чтобы показать, что все эти утверждения суть непосредственные следствия теоремы о неявной функции, которая, в свою очередь, есть немедленное следствие модифицированного метода Ньютона решения нелинейных уравнений. Другими словами, мы хотим показать, что традиционно "сложная" техническая часть доказательства принципа максимума, связанная с дифференциальными уравнениями, в основе своей чрезвычайно проста.

Доказательство леммы о разрешимости системы нелинейных уравнений основано на теореме Брауэра о неподвижной точке. Если ограничиться кусочно непрерывными управлениями, то лемму о разрешимости можно доказать, опираясь снова на метод Ньютона.

Общая схема доказательства основного результата близка к рассуждениям из [1], но свободна от каких-либо топологических построений. Она реализована в работе [2] для менее общей задачи и без доказательства аналога первой леммы данной работы.

[1] "Ab ovo usque ad mala" означает "от начала до конца" (дословно "от яйца до яблок"; древние римляне начинали обед с яиц и заканчивали фруктами).

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-01-12447, 14-01-00456, 14-01-00744).

[3] Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.
E-mail: magaril@mech.math.msu.su

Дальнейшее изложение состоит из двух разделов. В разд. 2 формулируются основной результат, две вспомогательные леммы и на их основе доказывается принцип максимума. Раздел 3 посвящен доказательствам лемм.

2. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $[t_0,t_1]$ — отрезок прямой, G — открытое подмножество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,[4] U — непустое подмножество $\mathbb{R}^r$, функция $f\colon G\times \operatorname{cl} U\to\mathbb{R}$ ($\operatorname{cl} U$ обозначает замыкание U) и отображение $\varphi\colon G\times\operatorname{cl} U\to\mathbb{R}^n$ непрерывны на $G\times\operatorname{cl} U$, Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $h_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_1$, и $l_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_2$, — непрерывные функции. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered} J(x(\cdot),u(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\,dt\to\min,\qquad \dot x=\varphi(t,x,u),\\ h_i(x(t_0),x(t_1))\le 0,\quad i=1,\dots,m_1,\qquad l_i(x(t_0),x(t_1))=0,\quad i=1,\dots,m_2,\\ u(t)\in U. \end{gathered}\tag{2.1}$$

Пару $(x(\cdot),u(\cdot))\in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$, где $\mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ — совокупность абсолютно непрерывных вектор-функций на $[t_0,t_1]$, назовем *допустимым процессом* в задаче (2.1), если $\{(t,x(t))\colon t\in[t_0,t_1]\}\subset G$, $(x(t_0),x(t_1))\in\Omega$, равенство $\dot x(t)=\varphi(t,x(t),u(t))$ и включение $u(t)\in U$ выполняются для п.в. $t\in[t_0,t_1]$, $h_i(x(t_0),x(t_1))\le 0$, $i=1,\dots,m_1$, и $l_i(x(t_0),x(t_1))=0$, $i=1,\dots,m_2$.

Допустимый процесс $(\widehat x(\cdot),\widehat u(\cdot))$ называется *оптимальным процессом* (или *сильным минимумом*), если существует такое $\varepsilon>0$, что для всякого допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, для которого $\|x(\cdot)-\widehat x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$ справедливо неравенство $J(x(\cdot),u(\cdot))\ge J(\widehat x(\cdot),\widehat u(\cdot))$.

Обозначим через $H(t,x,u,\lambda_0,p(t))=\langle p(t),\varphi(t,x,u)\rangle-\lambda_0 f(t,x,u)$ *функцию Понтрягина задачи* (2.1), где $p(\cdot)\colon[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$ и $\lambda_0\in\mathbb{R}$.

Отображения $h\colon\Omega\to\mathbb{R}^{m_1}$ и $l\colon\Omega\to\mathbb{R}^{m_2}$, действующее соответственно по формулам

$$h(x(t_0),x(t_1))=\big(h_1(x(t_0),x(t_1)),\dots,h_{m_1}(x(t_0),x(t_1))\big)^{\mathrm T}$$

и

$$l(x(t_0),x(t_1))=\big(l_1(x(t_0),x(t_1)),\dots,l_{m_2}(x(t_0),x(t_1))\big)^{\mathrm T},$$

рассматриваем как функции двух переменных $\zeta_1\in\mathbb{R}^n$ и $\zeta_2\in\mathbb{R}^n$.

Если фиксирована пара $(\widehat x(\cdot),\widehat u(\cdot))$, то для сокращения записи пишем $\widehat h_{\zeta_i}=h_{\zeta_i}(\widehat x(t_0),\widehat x(t_1))$ и $\widehat l_{\zeta_i}=l_{\zeta_i}(\widehat x(t_0),\widehat x(t_1))$, $i=1,2$ (частные производные[5] h и l по ζ_i в точке $(\widehat x(t_0),\widehat x(t_1))$), а также $\widehat\varphi(t)=\varphi(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$, $\widehat f(t)=f(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$ и аналогично для производных по x этих функций: $\widehat\varphi_x(t)=\varphi_x(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$, $\widehat f_x(t)=f_x(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$.

[4] $\mathbb{R}^n$ — совокупность вектор-столбцов, $(\mathbb{R}^n)^*$ — сопряженное к $\mathbb{R}^n$, отождествляемое с вектор-строками; если $a=(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}^n)^*$, $x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^n$, то $\langle a,x\rangle=\sum_{i=1}^n a_ix_i$ — значение линейного функционала a на элементе x. Через $|\cdot|$ обозначаем евклидову норму элемента из $\mathbb{R}^n$ или $(\mathbb{R}^n)^*$.

[5] Всюду ниже, если X и Y — нормированные пространства, V — окрестность точки $\widehat x\in X$ и $F\colon V\to Y$, дифференцируемость и производная отображения F в $\widehat x$ понимаются в смысле Фреше. Если X и Y — конечномерные пространства, то производную (линейный оператор) отождествляем с матрицей этого оператора в стандартных базисах данных пространств. Если отображение F определено на произведении пространств, то естественным образом определяются его частные производные.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ *— оптимальный процесс в задаче* (2.1). *Если функция* $f\colon G\times \mathrm{cl}\,U\to\mathbb{R}$ *и отображение* $\varphi\colon G\times \mathrm{cl}\,U\to\mathbb{R}^n$ *непрерывны вместе со своими частными производными по* x *на* $G\times\mathrm{cl}\,U$, *функции* $h_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_1$, *и* $l_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m_2$, *непрерывны в окрестности точки* $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1))$ *и дифференцируемы в этой точке, то найдутся число* λ_0, *векторы* $\lambda_i\in(\mathbb{R}^{m_i})^*$, $i=1,2$, *и функция* $p(\cdot)\in\mathrm{AC}([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$ *такие, что*

$$\lambda_0\ge 0,\qquad \lambda_1\ge 0\qquad \text{и}\qquad \lambda_0+|\lambda_1|+|\lambda_2|\ne 0,$$

функция $p(\cdot)$ *является решением краевой задачи*

$$-\dot p=p\,\widehat{\varphi}_x(t)-\lambda_0\widehat{f}_x(t),\qquad p(t_0)=\lambda_1\widehat{h}_{\zeta_1}+\lambda_2\widehat{l}_{\zeta_1},\qquad p(t_1)=-\lambda_1\widehat{h}_{\zeta_2}-\lambda_2\widehat{l}_{\zeta_2}$$

и для п.в. $t\in[t_0,t_1]$ *выполняется равенство*

$$\max_{u\in U}H\bigl(t,\widehat{x}(t),u,\lambda_0,p(t)\bigr)=H\bigl(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),\lambda_0,p(t)\bigr).$$

Теперь сформулируем две леммы, на базе которых с использованием конечномерной теоремы отделимости для выпуклых множеств будет доказан основной результат. Мы, как правило, будем иметь дело с отображениями, определенными на неполной окрестности точки. Приведем здесь естественную модификацию понятия дифференцируемости для этого случая (обобщающее стандартное определение односторонней производной).

Пусть V_1 — окрестность точки $\widehat{x}\in\mathbb{R}^k$, V_2 — окрестность точки $\widehat{y}\in\mathbb{R}^s$. Говорят, что отображение $\Phi\colon(V_1\cap(\widehat{x}+\mathbb{R}^k_+))\times V_2\to\mathbb{R}^m$ дифференцируемо в $(\widehat{x},\widehat{y})$, если существует такой линейный оператор $\Lambda\colon\mathbb{R}^{k+s}\to\mathbb{R}^m$, что для любого $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s$, для которого $(\widehat{x}+h_1,\widehat{y}+h_2)\in(V_1\cap(\widehat{x}+\mathbb{R}^k_+))\times V_2$, справедливо представление $\Phi(\widehat{x}+h_1,\widehat{y}+h_2)=\Phi(\widehat{x},\widehat{y})+\Lambda h+r(h)$, где $|r(h)|/|h|\to 0$ при $h\to 0$. Матрица Λ, определяемая этим представлением однозначно, называется производной отображения Φ в точке $(\widehat{x},\widehat{y})$ и обозначается через $\Phi'(\widehat{x},\widehat{y})$.

Лемма 1 (о пакете иголок и производной функционала). *Пусть* $[t_0,t_1]$ *— отрезок прямой,* G *— открытое подмножество* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, U *— непустое подмножество* $\mathbb{R}^r$, *функция* $f\colon G\times\mathrm{cl}\,U\to\mathbb{R}$ *и отображение* $\varphi\colon G\times\mathrm{cl}\,U\to\mathbb{R}^n$ *непрерывны вместе со своими частными производными по* x *на* $G\times\mathrm{cl}\,U$. *Пусть, далее,* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ *— допустимый процесс в задаче* (2.1), $\mathcal{N}_k$ *— совокупность пар (пакет иголок)* $(\tau_i,v_i)\in[t_0,t_1]\times U$, $1\le i\le k$, *где* $t_0<\tau_1<\ldots<\tau_k<t_1$ *и* $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^k_+$. *Положим*

$$u(t,\alpha;\mathcal{N}_k)=\begin{cases}\widehat{u}(t), & \text{если }\ t\notin\bigcup\limits_{i=1}^{k}[\tau_i-\alpha_i,\tau_i),\\ v_i, & \text{если }\ t\in[\tau_i-\alpha_i,\tau_i),\ 1\le i\le k,\end{cases}$$

где α_i *столь малы, что* $\tau_{i-1}<\tau_i-\alpha_i$, $1\le i\le k$, *и* $\tau_0=t_0$.

Тогда найдутся такие окрестности W_0 *и* W_1 *нуля в* $\mathbb{R}^k$ *и точки* $\widehat{x}(t_0)\in\mathbb{R}^n$ *соответственно, что*

1) *для любой пары* $(\alpha,x_0)\in(W_0\cap\mathbb{R}^k_+)\times W_1$ *задача Коши*

$$\dot x=\varphi(t,x,u(t,\alpha;\mathcal{N}_k)),\qquad x(t_0)=x_0 \tag{2.2}$$

имеет единственное решение $x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$, *определенное на всем отрезке* $[t_0,t_1]$, *и при этом отображение* $(\alpha,x_0)\mapsto x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$ *из* $(W_0\cap\mathbb{R}^k_+)\times W_1$ *в* $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ *непрерывно на* $(W_0\cap\mathbb{R}^k_+)\times W_1$;

2) *если* $\tau_1,\dots,\tau_k$ — *точки Лебега*[6] *функции* $\widehat{\varphi}(\cdot)$ *и* $t\in[t_0,t_1]\setminus\{\tau_1,\dots,\tau_k\}$, *то отображение* $(\alpha,x_0)\mapsto x(t,\alpha,x_0;\mathcal N_k)$ *дифференцируемо в точке* $(0,\widehat{x}(t_0))$. *При этом для п.в.* $t\in[\tau_i,t_1]$ *его частная производная*[7] *по* α_i, $1\le i\le k$, *в этой точке, которую обозначим через* $y_{\tau_i,v_i}(t)$, *удовлетворяет уравнению*

$$\dot y_{\tau_i,v_i}(t)=\widehat{\varphi}_x(t)y_{\tau_i,v_i}(t),\qquad y_{\tau_i,v_i}(\tau_i)=\varphi(\tau_i,\widehat{x}(\tau_i),v_i)-\widehat{\varphi}(\tau_i),\tag{2.3}$$

а частная производная по x_0, *которую обозначим через* $w(t)$, *для п.в.* $t\in[t_0,t_1]$ *удовлетворяет уравнению*

$$\dot w(t)=\widehat{\varphi}_x(t)w(t),\qquad w(t_0)=E,\tag{2.4}$$

где E — *единичная матрица*;

3) *функция* $(\alpha,x_0)\mapsto J(x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal N_k),u(\cdot,\alpha;\mathcal N_k))$ *непрерывна на* $(W_0\cap\mathbb R^k_+)\times W_1$ *и если* $\tau_1,\dots,\tau_k$ — *точки Лебега* $\widehat{\varphi}(\cdot)$ *и* $\widehat{f}(\cdot)$, *то эта функция дифференцируема в точке* $(0,\widehat{x}(t_0))$ *и ее частная производная по* (α_i,x_0), $1\le i\le k$, *действует на* $\mathbb R\times\mathbb R^n$ *по правилу*

$$(\alpha_i,x_0)\mapsto\left(f\big(\tau_i,\widehat{x}(\tau_i),v_i\big)-f\big(\tau_i,\widehat{x}(\tau_i),\widehat{u}(\tau_i)\big)+\int\limits_{\tau_i}^{t_1}\big\langle\widehat{f}_x(t),y_{\tau_i,v_i}(t)\big\rangle\,dt\right)\alpha_i+$$
$$+\left\langle\int\limits_{t_0}^{t_1}\widehat{f}_x(t)w(t)\,dt,\;x_0\right\rangle.\tag{2.5}$$

Лемма 2 (о разрешимости системы уравнений). *Пусть* V_1 — *окрестность точки* $\widehat{x}\in\mathbb R^k$, V_2 — *окрестность точки* $\widehat{y}\in\mathbb R^s$, K — *выпуклый замкнутый конус в* $\mathbb R^s$, *отображение* $\Phi\colon(V_1\cap(\widehat{x}+\mathbb R^k_+))\times V_2\to\mathbb R^m$ *непрерывно на* $(V_1\cap(\widehat{x}+\mathbb R^k_+))\times V_2$, *дифференцируемо в* $(\widehat{x},\widehat{y})$ *и* $\Phi'(\widehat{x},\widehat{y})(\mathbb R^k_+\times K)=\mathbb R^m$. *Тогда существуют окрестность* W *точки* $F(\widehat{x},\widehat{y})$ *и константа* $\kappa>0$ *такие, что для любого* $z\in W$ *найдется элемент* $(x(z),y(z))\in(V_1\cap(\widehat{x}+\mathbb R^k_+))\times(V_2\cap(\widehat{y}+K))$, *для которого*

$$\Phi(x(z),y(z))=z\qquad\text{и}\qquad|(x(z),y(z))-(\widehat{x},\widehat{y})|\le\kappa|z-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|.$$

Доказательство теоремы. Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ — оптимальный процесс в задаче (2.1). Обозначим через T множество точек Лебега функций $\widehat{\varphi}(\cdot)$ и $\widehat{f}(\cdot)$ на интервале (t_0,t_1), и пусть $(\tau,v)\in T\times U$. Пусть, далее, $u(\cdot,\alpha;\tau,v)$ — вариация $\widehat{u}(\cdot)$ одной иголкой, т.е. $\mathcal N_1=(\tau,v)$ ($\alpha\ge0$ и $t_0<\tau-\alpha$).

Согласно лемме 1 для достаточно малых $\alpha\ge0$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$, существует единственное решение задачи Коши (2.2) на $[t_0,t_1]$, которое обозначим через $x(\cdot,\alpha,x_0;\tau,v)$.

Тогда для малых $\alpha\ge0$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$, а также для любых $\nu_0\in\mathbb R$ и $\nu\in\mathbb R^{m_1}$ в силу леммы 1 и условий на h и l определено отображение F, которое четверке (α,x_0,ν_0,ν) ставит в соответствие вектор из $\mathbb R^{m_1+m_2+1}$ по правилу

$$F(\alpha,x_0,\nu_0,\nu;\tau,v)=\Big(J\big(x(\cdot,\alpha,x_0;\tau,v),u(\cdot,\alpha;\tau,v)\big)+\nu_0,\;h\big(x(t_0,\alpha,x_0;\tau,v),x(t_1,\alpha,x_0;\tau,v)\big)+\nu,$$
$$l\big(x(t_0,\alpha,x_0;\tau,v),x(t_1,\alpha,x_0;\tau,v)\big)\Big)^{\mathrm T},\tag{2.6}$$

[6]Напомним, что τ — точка Лебега измеримой интегрируемой функции $g(\cdot)$, если $g(\tau)\ne\pm\infty$ и выполнено равенство $\lim_{h\to0}\int_\tau^{\tau+h}|g(s)-g(\tau)|\,ds=0$. Совокупность точек Лебега образует множество полной меры [3, гл. IX, § 4, теорема 5].

[7]В точке τ_i имеется в виду производная справа.

причем F непрерывно на множестве указанных параметров и дифференцируемо в точке $(0,\widehat{x}(t_0),0,0)$. Его производную в этой точке обозначим через $F'(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau,v)$ и рассмотрим множество

$$C=\operatorname{conv}\bigl\{F'\bigl(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau,v\bigr)\bigl(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+\bigr)\colon\ (\tau,v)\in T\times U\bigr\},$$

где $\operatorname{conv}A$ — выпуклая коническая оболочка множества A, т.е. совокупность всех линейных комбинаций элементов из A с неотрицательными коэффициентами.

Покажем, что равенство $C=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ противоречит оптимальности процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Действительно, пусть $C=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$. Тогда с помощью теоремы Каратеодори (см., например, [4, п. 2.6.1]) нетрудно доказать, что существует конечный набор векторов из множества в фигурных скобках, выпуклая коническая оболочка которых также совпадает с $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$, т.е. найдутся такие $(\tau_i,v_i)\in T\times U$ и $(\widehat{\alpha}_i,\widehat{x}_{0i},\widehat{\nu}_{0i},\widehat{\nu}_i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+$, $i=1,\dots,k$, что

$$\operatorname{conv}\bigl\{F'\bigl(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau_i,v_i\bigr)(\widehat{\alpha}_i,\widehat{x}_{0i},\widehat{\nu}_{0i},\widehat{\nu}_i),\ i=1,\dots,k\bigr\}=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}. \tag{2.7}$$

Нетрудно также проверить, что точки τ_i, $1\le i\le k$, можно считать различными, т.е. можно немного “раздвинуть” иголки, оставляя справедливым равенство (2.7) и то, что $\tau_i\in T$, $1\le i\le k$.

Рассмотрим пакет иголок $\mathcal{N}_k$, образованный парами (τ_i,v_i), $1\le i\le k$. Определим соответствующую функцию $u(\cdot,\alpha;\mathcal{N}_k)$, и тогда снова из леммы 1 следует, что для всех достаточно малых по норме $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^k_+$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$, существует единственное решение $x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$ задачи Коши (2.2) на $[t_0,t_1]$. Аналогично предыдущему определим отображение Φ, которое четверке (α,x_0,ν_0,ν), где $\alpha\in\mathbb{R}^k_+$ мало по норме, x_0 близко к $\widehat{x}(t_0)$, а $\nu_0\in\mathbb{R}$ и $\nu\in\mathbb{R}^{m_1}$ любые, ставит в соответствие вектор из $\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ по формуле

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha,x_0,\nu_0,\nu;\mathcal{N}_k)=\Bigl(&J\bigl(x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k),u(\cdot,\alpha;\mathcal{N}_k)\bigr)+\nu_0,\ h\bigl(x(t_0,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k),x(t_1,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)\bigr)+\nu,\\ &l\bigl(x(t_0,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k),x(t_1,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)\bigr)\Bigr)^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Из леммы 1 и свойств отображений h и l следует, что существуют окрестность нуля V_1 в $\mathbb{R}^k$ и окрестность V_2 точки $(\widehat{x}(t_0),0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m_1}$ такие, что отображение Φ непрерывно на $(V_1\cap\mathbb{R}^k_+)\times V_2$ и дифференцируемо в точке $(0,\widehat{x}(t_0),0,0)$. Обозначим через $\Phi'(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k)$ его производную в этой точке.

Покажем, что из (2.7) вытекает равенство

$$\Phi'\bigl(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\bigr)\bigl(\mathbb{R}^k_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+\bigr)=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}. \tag{2.9}$$

Действительно, из формулы (2.3) следует, что частная производная по α_i отображения $(\alpha,x_0)\mapsto x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0))\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ совпадает с частной производной по α отображения $(\alpha,x_0)\mapsto x(\cdot,\alpha,x_0;\tau_i,v_i)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Частные производные по x_0 этих отображений в данных точках, очевидно, совпадают. Отсюда следует, что частная производная по α_i отображения $(\alpha,x_0,\nu_0,\nu)\mapsto\Phi(\alpha,x_0,\nu_0,\nu;\mathcal{N}_k)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0),0,0)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m_1}$ совпадает с частной производной по α отображения $(\alpha,x_0,\nu_0,\nu)\mapsto F(\alpha,x_0,\nu_0,\nu;\tau_i,v_i)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0),0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m_1}$, и ясно, что у этих отображений совпадают частные производные по x_0, ν_0 и ν в соответствующих точках.

Учитывая эти замечания, вернемся к равенству (2.7). Оно означает, что для любого вектора $y\in\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ найдется вектор $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_k)^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^k_+$ такой, что

$$\begin{aligned}y&=\sum_{i=1}^k F'\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau_i,v_i\big)(\widehat{\alpha}_i,\widehat{x}_{0i},\widehat{\nu}_{0i},\widehat{\nu}_i)\beta_i=\\&=\sum_{i=1}^k F_\alpha\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau_i,v_i\big)\widehat{\alpha}_i\beta_i+\sum_{i=1}^k F_{x_0}\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau_i,v_i\big)\widehat{x}_{0i}\beta_i+\\&\quad+\sum_{i=1}^k F_{\nu_0}\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau_i,v_i\big)\widehat{\nu}_{0i}\beta_i+\sum_{i=1}^k F_\nu\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\tau_i,v_i\big)\widehat{\nu}_i\beta_i=\\&=\Phi_\alpha\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)(\widehat{\alpha}_1\beta_1,\dots,\widehat{\alpha}_k\beta_k)^{\mathrm T}+\Phi_{x_0}\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)(\beta_1\widehat{x}_{01}+\ldots+\beta_k\widehat{x}_{0k})+\\&\quad+\Phi_{\nu_0}\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)(\widehat{\nu}_{01}\beta_1+\ldots+\widehat{\nu}_{0k}\beta_k)+\Phi_\nu\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)(\beta_1\widehat{\nu}_1+\ldots+\beta_k\widehat{\nu}_k).\end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\begin{aligned}&\Phi_\alpha\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)\mathbb{R}^k_++\Phi_{x_0}\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)\mathbb{R}^n+\\&\qquad+\Phi_{\nu_0}\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)\mathbb{R}_++\Phi_\nu\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)\mathbb{R}^{m_1}_+=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1},\end{aligned}$$

и, значит, справедливо соотношение (2.9).

Теперь применим лемму 2 к отображению Φ, заданному формулой (2.8) на множестве $(V_1\cap\mathbb{R}^k_+)\times V_2$ (окрестности V_1 и V_2 определены выше), где $\widehat{x}=0$, $\widehat{y}=(\widehat{x}(t_0),0,0)$, $K=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+$, а равенство (2.9) означает, что $\Phi'(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k)(\mathbb{R}^k_+\times K)=\mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$. Согласно этой лемме существуют окрестность W точки $\Phi(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k)$ и число $\kappa>0$ такие, что для любого $z\in W$ найдется набор $(\alpha(z),x_0(z),\nu_0(y),\nu(y))$ из $(V_1\cap\mathbb{R}^k_+)\times(V_2\cap(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+))$, для которого выполнены соотношения

$$\Phi\big(\alpha(z),x_0(z),\nu_0(z),\nu(z);\mathcal{N}_k\big)=z \tag{2.10}$$

и

$$\big|\big(\alpha(z),x_0(z),\nu_0(z),\nu(z)\big)-(0,\widehat{x}(t_0),0,0)\big|\le\kappa\big|z-\Phi\big(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k\big)\big|. \tag{2.11}$$

Так как очевидно, что $\Phi(0,\widehat{x}(t_0),0,0;\mathcal{N}_k)=(J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)),0,0)$, для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ вектор $z_\varepsilon=(J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))-\varepsilon,0,0)$ принадлежит W. Тогда из (2.10) следует, что найдется четверка $(\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon),\nu_0(z_\varepsilon),\nu(z_\varepsilon))\in(V_1\cap\mathbb{R}^k_+)\times(V_2\cap(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1}_+))$ такая, что

$$J\big(x\big(\cdot,\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k\big),u(\cdot,\alpha(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k)\big)+\nu_0(z_\varepsilon)=J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))-\varepsilon,$$
$$h\big(x\big(t_0,\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k\big),x\big(t_1,\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k\big)\big)+\nu(z_\varepsilon)=0$$

и

$$l\big(x\big(t_0,\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k\big),x\big(t_1,\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k\big)\big)=0.$$

Из последних двух соотношений (с учетом неравенства $\nu(z_\varepsilon)\ge0$) вытекает, что пара $(x(\cdot,\alpha(z_\varepsilon),x_0(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k),u(\cdot,\alpha(z_\varepsilon);\mathcal{N}_k))$ допустима в задаче (2.1), а из первого соотношения следует ($\nu_0(z_\varepsilon)\ge0$), что на этой паре минимизируемый функционал в (2.1) меньше, чем на $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Далее, из (2.11) следует, что $|(\alpha(z_\varepsilon), x_0(z_\varepsilon)) - (0, \widehat{x}(t_0))| \le \kappa\varepsilon$, т.е. $\alpha(z_\varepsilon) \to 0$ и $x_0(z_\varepsilon) \to \widehat{x}(t_0)$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, $x(\cdot, \alpha(z_\varepsilon), x_0(z_\varepsilon); \mathcal{N}_k) \to \widehat{x}(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$ по лемме 1. Это означает, что, какова бы ни была окрестность $\mathcal{O}$ точки $\widehat{x}(\cdot)$, найдется допустимая в задаче (2.1) пара $(x(\cdot, \alpha(z_\varepsilon), x_0(z_\varepsilon); \mathcal{N}_k), u(\cdot, \alpha(z_\varepsilon); \mathcal{N}_k))$, на которой минимизируемый функционал в (2.1) меньше, чем на $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, и $x(\cdot, \alpha(z_\varepsilon), x_0(z_\varepsilon); \mathcal{N}_k) \in \mathcal{O}$, что противоречит оптимальности процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

Итак, случай $C = \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$ невозможен.

Пусть $C \neq \mathbb{R}^{m_1+m_2+1}$. Согласно стандартной конечномерной теореме отделимости можно отделить выпуклый конус C от любой точки, ему не принадлежащей, и тогда получим, что существует ненулевой вектор $\overline{\lambda} = (\mathbb{R}^{m_1+m_2+1})^*$ такой, что

$$\begin{gathered}\bigl\langle \overline{\lambda}, F'\bigl(0, \widehat{x}(t_0), 0, 0; \tau, v\bigr)(\alpha, x_0, \nu_0, \nu)\bigr\rangle \ge 0 \\ \text{для всех} \quad (\tau, v) \in T \times U, \quad \alpha \ge 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \nu_0 \ge 0, \quad \nu \in \mathbb{R}^{m_1}_+.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Запишем это подробнее. Отображение F определено формулой (2.6). Производные отображений $(\alpha, x_0) \mapsto h(x(t_0, \alpha, x_0; \tau, v), x(t_1, \alpha, x_0; \tau, v))$ и $(\alpha, x_0) \mapsto l(x(t_0, \alpha, x_0; \tau, v), x(t_1, \alpha, x_0; \tau, v))$ в точке $(0, \widehat{x}(t_0))$ действуют (согласно правилу дифференцирования сложной функции с учетом (2.3), (2.4) и того, что $x(t_0, \alpha, x_0; \tau, v) = x_0$; см. (2.2)) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ по правилу

$$\begin{aligned}(\alpha, x_0) &\mapsto \widehat{h}_{\zeta_1} x_0 + \widehat{h}_{\zeta_2} y_{\tau,v}(t_1)\alpha + \widehat{h}_{\zeta_2} w(t_1) x_0, \\ (\alpha, x_0) &\mapsto \widehat{l}_{\zeta_1} x_0 + \widehat{l}_{\zeta_2} y_{\tau,v}(t_1)\alpha + \widehat{l}_{\zeta_2} w(t_1) x_0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Представляя вектор $\overline{\lambda}$ в виде $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_i \in (\mathbb{R}^{m_i})^*$, $i = 1, 2$, и учитывая вид производной функционала (см. (2.5)), соотношение (2.12) можем записать так:

$$\begin{aligned}\lambda_0 \left(f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - \widehat{f}(\tau) + \int_\tau^{t_1} \langle \widehat{f}_x(t), y_{\tau,v}(t)\rangle\, dt \right)\alpha + \lambda_0 \left\langle \int_{t_0}^{t_1} \widehat{f}_x(t) w(t)\, dt,\ x_0 \right\rangle + \\ + \lambda_0\nu_0 + \bigl\langle \lambda_1, \widehat{h}_{\zeta_2} y_{\tau,v}(t_1)\bigr\rangle\alpha + \bigl\langle \lambda_1, \widehat{h}_{\zeta_1} x_0 + \widehat{h}_{\zeta_2} w(t_1) x_0\bigr\rangle + \\ + \langle \lambda_1, \nu\rangle + \bigl\langle \lambda_2, \widehat{l}_{\zeta_2} y_{\tau,v}(t_1)\bigr\rangle\alpha + \bigl\langle \lambda_2, \widehat{l}_{\zeta_1} x_0 + \widehat{l}_{\zeta_2} w(t_1) x_0\bigr\rangle \ge 0\end{aligned} \tag{2.14}$$

для всех $(\tau, v) \in T \times U$, $\alpha \ge 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\nu_0 \ge 0$ и $\nu \in \mathbb{R}^k_+$.

Пусть $\alpha = 0$, $x_0 = 0$ и $\nu = 0$. Тогда из (2.14) следует, что $\lambda_0 \ge 0$.

Если $\alpha = 0$, $x_0 = 0$ и $\nu_0 = 0$, то из (2.14) получаем, что $\lambda_1 \ge 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $x_0 = 0$, $\nu_0 = 0$ и $\nu = 0$. Тогда из (2.14) в силу произвольности $\alpha \ge 0$ следует, что

$$\lambda_0 \left(f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - \widehat{f}(\tau) + \int_\tau^{t_1} \langle \widehat{f}_x(t), y_{\tau,v}(t)\rangle\, dt \right) + \bigl\langle \lambda_1, \widehat{h}_{\zeta_2} y_{\tau,v}(t_1)\bigr\rangle + \bigl\langle \lambda_2, \widehat{l}_{\zeta_2} y_{\tau,v}(t_1)\bigr\rangle \ge 0 \tag{2.15}$$

для всех $(\tau, v) \in T \times U$.

Обозначим через $p(\cdot)$ решение линейного уравнения

$$-\dot{p} = p\,\widehat{\varphi}_x(t) - \lambda_0 \widehat{f}_x(t), \qquad p(t_1) = -\lambda_1 \widehat{h}_{\zeta_2} - \lambda_2 \widehat{l}_{\zeta_2}. \tag{2.16}$$

Подставим в (2.15) вместо функции $\lambda_0\widehat{f}_x(\cdot)$ ее выражение из (2.16), а затем вместо функции $\widehat{\varphi}_x(\cdot)y_{\tau,v}(\cdot)$ ее выражение из (2.3) и, учитывая начальные условия в (2.3) и (2.16), будем иметь

$$0 \le \lambda_0\big(f(\tau,\widehat{x}(\tau),v)-\widehat{f}(\tau)\big)+\int\limits_{\tau}^{t_1}\big(\langle\dot{p}(t),y_{\tau,v}(t)\rangle+\langle p(t),\dot{y}_{\tau,v}(t)\rangle\big)\,dt+$$
$$+\big\langle\lambda_1,\widehat{h}_{\zeta_2}y_{\tau,v}(t_1)\big\rangle+\big\langle\lambda_2,\widehat{l}_{\zeta_2}y_{\tau,v}(t_1)\big\rangle=$$
$$=\lambda_0\big(f(\tau,\widehat{x}(\tau),v)-\widehat{f}(\tau)\big)+\langle p(t),y_{\tau,v}(t)\rangle\big|_{\tau}^{t_1}+\big\langle\lambda_1,\widehat{h}_{\zeta_2}y_{\tau,v}(t_1)\big\rangle+\big\langle\lambda_2,\widehat{l}_{\zeta_2}y_{\tau,v}(t_1)\big\rangle=$$
$$=\lambda_0\big(f(\tau,\widehat{x}(\tau),v)-\widehat{f}(\tau)\big)-\big\langle p(\tau),\varphi(\tau,\widehat{x}(\tau),v)-\widehat{\varphi}(\tau)\big\rangle,$$

или

$$\big\langle p(\tau),\varphi(\tau,\widehat{x}(\tau),v)\big\rangle-\lambda_0 f(\tau,\widehat{x}(\tau),v)\le\langle p(\tau),\widehat{\varphi}(\tau)\rangle-\lambda_0\widehat{f}(\tau)$$

для всех $(\tau,v)\in T\times U$. Но множество T имеет полную меру на отрезке $[t_0,t_1]$ и тем самым последнее неравенство равносильно третьему утверждению теоремы — условию максимума.

Пусть, наконец, $\alpha=0$, $\nu_0=0$ и $\nu=0$ в соотношении (2.14). Тогда в силу произвольности $x_0\in\mathbb{R}^n$ получаем

$$\lambda_0\int\limits_{t_0}^{t_1}\widehat{f}_x(t)w(t)\,dt+\lambda_1\widehat{h}_{\zeta_1}+\lambda_1\widehat{h}_{\zeta_2}w(t_1)+\lambda_2\widehat{l}_{\zeta_1}+\lambda_2\widehat{l}_{\zeta_2}w(t_1)=0. \tag{2.17}$$

Подставляя в интеграл вместо функции $\lambda_0\widehat{f}_x(\cdot)$ ее выражение из (2.16), а затем вместо функции $\widehat{\varphi}_x(\cdot)w(\cdot)$ ее выражение из (2.4), будем иметь

$$\lambda_0\int\limits_{t_0}^{t_1}\widehat{f}_x(t)w(t)\,dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(\dot{p}(t)w(t)+p(t)\dot{w}(t)\big)\,dt=p(t)w(t)\big|_{t_0}^{t_1}=p(t_1)w(t_1)-p(t_0)w(t_0)=$$
$$=p(t_1)w(t_1)-p(t_0)=-\lambda_1\widehat{h}_{\zeta_2}w(t_1)-\lambda_2\widehat{l}_{\zeta_2}w(t_1)-p(t_0).$$

Подставляя это в (2.17), получаем

$$p(t_0)=\lambda_1\widehat{h}_{\zeta_1}+\lambda_2\widehat{l}_{\zeta_1}.$$

Отсюда и из (2.16) следует второе утверждение теоремы, и тем самым ее доказательство завершено. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММ

Мы начинаем с теоремы о неявной функции. Ее доказательство основано на методе Ньютона решений нелинейных уравнений.

Теорема (о неявной функции). *Пусть Σ — топологическое пространство, X и Y — банаховы пространства, $\widehat{\sigma}\in\Sigma$, V — окрестность точки $\widehat{x}\in X$ и $F\colon V\times\Sigma\to Y$. Если*

1) $F(\widehat{x},\widehat{\sigma})=0$;
2) *F непрерывно на $V\times\Sigma$;*

3) *F дифференцируемо*[8] *по x в точке $(\widehat{x},\widehat{\sigma})$ и для каждого $\varepsilon>0$ существуют окрестности $V(\varepsilon)\subset V$ и $U(\varepsilon)$ точек $\widehat{x}$ и $\widehat{\sigma}$ такие, что для всех $x,x'\in V(\varepsilon)$ и $\sigma\in U(\varepsilon)$ выполняется соотношение*

$$\big\|F(x,\sigma)-F(x',\sigma)-F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})(x-x')\big\|_Y\le\varepsilon\|x-x'\|_X;$$

4) *$F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})$ — обратимый оператор,*

то найдутся окрестности $V_0\subset V$ и U_0 точек $\widehat{x}$ и $\widehat{\sigma}$ и непрерывное отображение $\psi\colon U_0\to V_0$ такие, что

$$F(\psi(\sigma),\sigma)=0\qquad\forall\,\sigma\in U_0.$$

Равенство $F(x,\sigma)=0$ на $V_0\times U_0$ возможно лишь тогда, когда $x=\psi(\sigma)$.

Кроме того, если Σ — окрестность $\widehat{\sigma}$ в нормированном пространстве и отображение F дифференцируемо по σ в точке $(\widehat{x},\widehat{\sigma})$, то отображение ψ дифференцируемо в точке $\widehat{\sigma}$ и

$$\psi'(\widehat{\sigma})=-(F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma}))^{-1}F_\sigma(\widehat{x},\widehat{\sigma}).$$

Доказательство. Для краткости введем обозначение $\Lambda=F_x(\widehat{x},\widehat{\sigma})$. Пусть $\varepsilon_0=1/(2\|\Lambda^{-1}\|)$ и $V(\varepsilon_0)$ и $U(\varepsilon_0)$ — окрестности точек $\widehat{x}$ и $\widehat{\sigma}$, соответствующие ε_0 (см. условие 3) теоремы). Пусть, далее, $\delta>0$ таково, что[9] $U_X(\widehat{x},\delta)\subset V(\varepsilon_0)$. Положим $V_0=U_X(\widehat{x},\delta)$, а окрестность U_0 выберем так, что $U_0\subset U(\varepsilon_0)$ и $\|F(\widehat{x},\sigma)\|_Y<\delta/(2\|\Lambda^{-1}\|)$, если $\sigma\in U_0$.

Пусть $\sigma\in U_0$. Рассмотрим последовательность (модифицированный метод Ньютона)

$$x_n=x_{n-1}-\Lambda^{-1}F(x_{n-1},\sigma),\qquad n\in\mathbb{N},\qquad x_0=\widehat{x}. \tag{3.1}$$

Докажем, что эта последовательность принадлежит $U_X(\widehat{x},\delta)$ и фундаментальна. Первое доказываем по индукции. Ясно, что $x_0=\widehat{x}\in U_X(\widehat{x},\delta)$. Пусть $x_k\in U_X(\widehat{x},\delta)$, $1\le k\le n$. Применяя к обеим частям (3.1) оператор Λ, получим

$$\Lambda(x_n-x_{n-1})+F(x_{n-1},\sigma)=0. \tag{3.2}$$

Используя последовательно (3.1), (3.2), условие 3) теоремы и затем итерируя процедуру, будем иметь

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-x_n\|_X\le\|\Lambda^{-1}\|\cdot\|F(x_n,\sigma)\|_Y=\|\Lambda^{-1}\|\cdot\big\|F(x_n,\sigma)-F(x_{n-1},\sigma)-\Lambda(x_n-x_{n-1})\big\|_Y\le\\ \le\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|_X\le\ldots\le\frac{1}{2^n}\|x_1-\widehat{x}\|_X.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Далее в силу неравенства треугольника, (3.3), (3.1), формулы для суммы геометрической прогрессии и согласно определению окрестности U_0 получаем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-\widehat{x}\|_X&\le\|x_{n+1}-x_n\|_X+\ldots+\|x_1-\widehat{x}\|_X\le\\ &\le\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+1\right)\|x_1-\widehat{x}\|_X<2\|\Lambda^{-1}\|\cdot\|F(\widehat{x},\sigma)\|_Y<\delta,\end{aligned} \tag{3.4}$$

т.е. $x_{n+1}\in U_X(\widehat{x},\delta)$, и, значит, вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит $U_X(\widehat{x},\delta)$.

[8]Напомним, что дифференцируемость понимается в смысле Фреше.

[9]$U_X(x,r)$ — открытый шар в X с центром в x радиуса r.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, используя (3.3) и рассуждая, как в предыдущем неравенстве, для всех $n, m \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\|x_{n+m} - x_n\|_X \le \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\|_X + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\|_X \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2^{n+m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\|x_1 - \widehat{x}\|_X < \frac{\|x_1 - \widehat{x}\|_X}{2^{n-1}} < \frac{\delta}{2^{n-1}}. \tag{3.5}$$

Ясно, что x_n суть функции на U_0. Для каждого $\sigma \in U_0$ положим $\psi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} x_n(\sigma)$. Переходя в (3.4) к пределу при $n \to \infty$, получаем $\psi(\sigma) \in U_X(\widehat{x}, \delta) = V_0$. Тем самым определено отображение $\psi\colon U_0 \to V_0$.

Переходя к пределу в (3.2) при $n \to \infty$ и учитывая непрерывность F, приходим к соотношению $F(\psi(\sigma), \sigma) = 0$.

Из условия 2) теоремы и (3.1) следует, что функции x_n на U_0 непрерывны. Переходя в (3.5) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что отображение ψ есть равномерный предел непрерывных функций и, значит, само непрерывно.

Пусть $(x, \sigma) \in V_0 \times U_0$ и $F(x, \sigma) = 0$. Тогда, используя условие 3) теоремы, имеем

$$\|x - \psi(\sigma)\|_X = \|\Lambda^{-1}\Lambda(x - \psi(\sigma))\|_X \le \|\Lambda^{-1}\| \cdot \|\Lambda(x - \psi(\sigma))\|_Y =$$
$$= \|\Lambda^{-1}\| \cdot \big\|F(x, \sigma) - F(\psi(\sigma), \sigma) - \Lambda(x - \psi(\sigma))\big\|_Y \le \frac{1}{2}\|x - \psi(\sigma)\|_X,$$

т.е. $x = \psi(\sigma)$.

Доказательство второй части теоремы совершенно стандартно (см., например, [4, п. 2.3.4]), и поэтому мы его опускаем. $\square$

Доказательство леммы 1. Пусть W — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$ такая, что если $\alpha \in W \cap \cap \mathbb{R}^k_+$, то функция $u(\cdot, \alpha; \mathcal{N}_k)$ корректно определена, и пусть фиксирована точка $\tau_0 \in [t_0, t_1]$.

Применим теорему о неявной функции к случаю, когда $\Sigma = (W \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^n$, $X = Y = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $\widehat{\sigma} = (0, \widehat{x}(t_0))$, $\widehat{x} = \widehat{x}(\cdot)$, $V = \{x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)\colon (t, x(t)) \in G\ \forall\, t \in [t_0, t_1]\}$, а отображение F определено формулой

$$F(x(\cdot), \alpha, \xi)(t) = x(t) - \xi - \int\limits_{\tau_0}^{t} \varphi\big(s, x(s), u(s, \alpha; \mathcal{N}_k)\big)\, ds \tag{3.6}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Проверим выполнение условий этой теоремы.

1. Функция $F(\widehat{x}(\cdot), 0, \widehat{x}(t_0))(\cdot)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$, и ее производная почти всюду равна нулю, поскольку $\widehat{x}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = \varphi(t, x, \widehat{u}(t))$. Но $F(\widehat{x}(\cdot), 0, \widehat{x}(t_0))(\tau_0) = 0$, и поэтому $F(\widehat{x}(\cdot), 0, \widehat{x}(t_0))(\cdot) = 0$.

2. Покажем, что отображение F непрерывно на $V \times (W \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^n$. Пусть $(\overline{x}(\cdot), \overline{\alpha}, \overline{x}_0) \in \in V \times (W \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Существует $0 < \delta_0 \le \varepsilon/4$ такое, что компакт $\mathcal{K} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x - \overline{x}(t)| \le \delta_0,\ t \in [t_0, t_1]\}$ содержится в G. Положим $\gamma = \max\{\|\widehat{u}(\cdot)\|_{L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}, |v_1|, \ldots, |v_k|\}$. Отображение φ непрерывно на компакте $\mathcal{K} \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0, \gamma))$. Положим $C = \max\{|\varphi(t, x, u)|\colon (t, x, u) \in \mathcal{K} \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0, \gamma))\}$. Так как φ и равномерно непрерывно на этом компакте, найдется такое $0 < \delta_1 \le \delta_0$, что $|\varphi(t, x_1, u_1) - \varphi(t, x_2, u_2)| < \varepsilon/(4(t_1 - t_0))$ для всех $(t, x_i, u_i) \in \in \mathcal{K} \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0, \gamma))$, $i = 1, 2$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и $|u_1 - u_2| < \delta_1$.

Простая проверка показывает, что $\int_{t_0}^{t_1} |u(t, \alpha; \mathcal{N}_k) - u(t, \overline{\alpha}; \mathcal{N}_k)|\, dt \le \sum_{i=1}^k |v_i| \cdot |\alpha_i - \overline{\alpha}_i|$ и тем самым отображение $\alpha \mapsto u(\cdot, \alpha; \mathcal{N}_k)$ как отображение из $W \cap \mathbb{R}^k_+$ в $L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ непрерывно в $\overline{\alpha}$. Следовательно, существует такая окрестность $V(\overline{\alpha}) \subset W \cap \mathbb{R}^k_+$ точки $\overline{\alpha}$, что если

$\alpha \in V(\overline{\alpha})$, то $u(\cdot,\alpha;\mathcal{N}_k) \in U_{L_1([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}(u(\cdot,\overline{\alpha};\mathcal{N}_k),\varepsilon\delta_1/(8C))$. Для каждого такого α положим $E_{\delta_1}(\alpha) = \{t \in [t_0,t_1]\colon |u(t,\alpha;\mathcal{N}_k) - u(t,\overline{\alpha};\mathcal{N}_k)| \geq \delta_1\}$. Тогда

$$\delta_1 \operatorname{mes} E_{\delta_1}(\alpha) \leq \int\limits_{E_{\delta_1}(\alpha)} |u(t,\alpha;\mathcal{N}_k) - u(t,\overline{\alpha};\mathcal{N}_k)|\, dt \leq \|u(\cdot,\alpha;\mathcal{N}_k) - u(\cdot,\overline{\alpha};\mathcal{N}_k)\|_{L_1([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)} < \frac{\varepsilon\delta_1}{8C}$$

и, значит, $\operatorname{mes} E_{\delta_1(\alpha)} < \varepsilon/(8C)$.

Пусть теперь $x(\cdot) \in U_{C([t_0,t_1],\mathbb{R})}(\overline{x}(\cdot),\delta_1)$, $\alpha \in V(\overline{\alpha})$ и $|\xi - \overline{\xi}| < \varepsilon/4$. Для любого $t \in [t_0,t_1]$ имеем (ниже для сокращения записи пишем $u(\cdot,\alpha)$ вместо $u(\cdot,\alpha;\mathcal{N}_k)$)

$$\begin{aligned}
&\bigl|F(x(\cdot),\alpha,\xi)(t) - F(\overline{x}(\cdot),\overline{\alpha},\overline{\xi})(t)\bigr| = \\
&\qquad = \left| x(t) - \overline{x}(t) + \overline{\xi} - \xi - \int\limits_{\tau_0}^{t} \bigl(\varphi(s,x(s),u(s,\alpha)) - \varphi(s,\overline{x}(s),u(s,\overline{\alpha}))\bigr)\, ds \right| \leq \\
&\qquad \leq |x(t) - \overline{x}(t)| + |\xi - \overline{\xi}| + \int\limits_{[t_0,t_1]\setminus E_{\delta_1}(\alpha)} \bigl|\varphi(s,x(s),u(s,\alpha)) - \varphi(s,\overline{x}(s),u(s,\overline{\alpha}))\bigr|\, ds + \\
&\qquad\quad + \int\limits_{E_{\delta_1}(\alpha)} \bigl|\varphi(s,x(s),u(s,\alpha)) - \varphi(s,\overline{x}(s),u(s,\overline{\alpha}))\bigr|\, ds < \\
&\qquad < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4(t_1-t_0)}(t_1-t_0) + 2C\frac{\varepsilon}{8C} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

т.е. F непрерывна в точке $(\overline{x}(\cdot),\overline{\alpha},\overline{\xi})$ и, значит, на $V \times (W \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^n$.

3. Проверим условие 3) теоремы. Легко видеть, что отображение Λ, задаваемое формулой

$$\Lambda[h(\cdot)](t) = h(t) - \int\limits_{\tau_0}^{t} \widehat{\varphi}_x(s)h(s)\, ds, \qquad t \in [t_0,t_1],$$

есть линейный непрерывный оператор, отображающий пространство $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ в себя.

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся окрестности $V(\varepsilon)$, $U_1(\varepsilon) \subset W$ и $U_2(\varepsilon)$ точек $\widehat{x}(\cdot) \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, $0 \in \mathbb{R}^k$ и $\widehat{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ соответственно такие, что для всех $x(\cdot), x'(\cdot) \in V(\varepsilon)$, $\alpha \in U_1(\varepsilon) \cap \mathbb{R}^k_+$, $\xi \in U_2(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\bigl\|F(x(\cdot),\alpha,\xi)(\cdot) - F(x'(\cdot),\alpha,\xi)(\cdot) - \Lambda[x(\cdot) - x'(\cdot)](\cdot)\bigr\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}. \tag{3.7}$$

Отсюда при $x'(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$, $\alpha = 0$ и $\xi = \widehat{x}(t_0)$ будет следовать, что $\Lambda = F_{x(\cdot)}(\widehat{x}(\cdot),0,\widehat{x}(t_0))$ — производная по $x(\cdot)$ отображения F в точке $(\widehat{x}(\cdot),0,\widehat{x}(t_0))$, и тем самым будет доказано условие 3) теоремы.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$. Существует $\rho_0 > 0$ такое, что компакт $\mathcal{K}_1 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x - \widehat{x}(t)| \leq \rho_0,\ t \in [t_0,t_1]\}$ содержится в G. Отображение φ_x непрерывно на компакте $\mathcal{K}_1 \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0,\gamma))$. Пусть $C_1 = \max\{\|\varphi_x(t,x,u)\|\colon (t,x,u) \in \mathcal{K}_1 \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0,\gamma))\}$. Так как φ_x также и равномерно непрерывно на этом компакте, найдется такое $0 < \rho_1 \leq \rho_0$, что $\|\varphi_x(t,x_1,u_1) - \varphi_x(t,x_2,u_2)\| < \varepsilon/(2(t_1-t_0))$ для всех $(t,x_i,u_i) \in \mathcal{K}_1 \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0,\gamma))$, $i = 1,2$, для которых $|x_1 - x_2| < \rho_1$ и $|u_1 - u_2| < \rho_1$.

По тем же соображениям, что и в предыдущем пункте, существует такая окрестность нуля $V_1(0) \subset W$, что если $\alpha \in V_1(0) \cap \mathbb{R}^k_+$, то $u(\cdot,\alpha) \in U_{L_1([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}(\widehat{u}(\cdot),\varepsilon\rho_1/(4C_1))$. Для таких α

положим $E_{\rho_1}(\alpha) = \{t \in [t_0, t_1]\colon |u(t,\alpha) - \widehat{u}(t)| \ge \rho_1\}$. Тогда так же, как и выше, получаем $\operatorname{mes} E_{\rho_1(\alpha)} < \varepsilon/(4C_1)$.

Пусть теперь $V(\varepsilon) = U_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}(\widehat{x}(\cdot), \rho_1)$ и $U_1(\varepsilon) = V_1(0) \cap \mathbb{R}^k_+$, $U_2(\varepsilon) = \mathbb{R}^n$, и пусть $x(\cdot), x'(\cdot) \in V(\varepsilon)$, $\alpha \in U_1(\varepsilon)$ и $\xi \in U_2(\varepsilon)$. Для каждого $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\bigl|F(x(\cdot),\alpha,\xi)(t) - F(x'(\cdot),\alpha,\xi)(t) - \Lambda[x(\cdot) - x'(\cdot)](t)\bigr| = \\
&\qquad = \left|\int\limits_{\tau_0}^{t} \bigl(\varphi(s,x(s),u(s,\alpha)) - \varphi(s,x'(s),u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)(x(s) - x'(s))\bigr)\,ds\right| \le \\
&\qquad \le \int\limits_{t_0}^{t_1} \bigl|\varphi(s,x(s),u(s,\alpha)) - \varphi(s,x'(s),u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)(x(s) - x'(s))\bigr|\,ds. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Оценим интеграл справа. Пусть $s \in [t_0, t_1]$ и $u(s,\alpha) \in U$. По теореме о среднем, примененной к отображению $x \mapsto \varphi(s,x,u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)x$, для любого $x \in [x(s), x'(s)]$ будем иметь

$$\begin{aligned}
&\bigl|\varphi(s,x(s),u(s,\alpha)) - \varphi(s,x'(s),u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)(x(s) - x'(s))\bigr| \le \\
&\qquad\qquad \le \|\varphi_x(s,x,u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)\| \cdot |x(s) - x'(s)|.
\end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство, получаем, что интеграл справа в (3.8) не превосходит величины

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t_1} \|\varphi_x(s,x,u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)\| \cdot |x(s) - x'(s)|\,ds = \\
&\qquad = \int\limits_{[t_0,t_1]\setminus E_{\rho_1}(\alpha)} \|\varphi_x(t,x,u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)\| \cdot |x(s) - x'(s)|\,ds + \\
&\qquad\quad + \int\limits_{E_{\rho_1}(\alpha)} \|\varphi_x(s,x,u(s,\alpha)) - \widehat{\varphi}_x(s)\| \cdot |x(s) - x'(s)|\,dt \le \\
&\qquad \le \frac{\varepsilon}{2(t_1 - t_0)}(t_1 - t_0)\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} + \frac{\varepsilon}{4C_1} 2C_1 \|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} = \\
&\qquad = \varepsilon\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.8) следует (3.7).

4. Проверка обратимости оператора $F_{x(\cdot)}(\widehat{x}(\cdot), 0, \widehat{x}(\tau_0))$ есть стандартное рассуждение (см., например, [4, п. 2.5.4, 2.5.7]), и поэтому его не приводим.

Итак, все условия теоремы о неявной функции выполнены. Следовательно, найдутся окрестности $V_0 \subset V$ и $U_0 \subset (W \cap \mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^n$ точек $\widehat{x}(\cdot)$ и $(0, \widehat{x}(\tau_0))$ и непрерывное отображение $\psi\colon U_0 \to V_0$ такие, что выполнено соотношение

$$F(\psi(\alpha,\xi)(\cdot),\alpha,\xi)(\cdot) = 0$$

для всех $(\alpha,\xi) \in U_0$, или, что равносильно,

$$\psi(\alpha,\xi)(t) - \xi - \int\limits_{\tau_0}^{t} \varphi\bigl(s,\psi(\alpha,\xi)(s),u(s,\alpha)\bigr)\,ds = 0$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех $(\alpha, \xi) \in U_0$. При этом равенство $F(x(\cdot), \alpha, \xi) = 0$ на $V_0 \times U_0$ возможно лишь тогда, когда $x(\cdot) = \psi(\alpha, \xi)(\cdot)$.

Это означает, что для любой пары $(\alpha, \xi) \in U_0$ функция $x(\cdot, \alpha, \xi; \mathcal{N}_k) = \psi(\alpha, \xi)(\cdot)$ есть единственное решение задачи Коши

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t, \alpha; \mathcal{N}_k)), \qquad x(\tau_0) = \xi. \tag{3.9}$$

В частности, взяв $\tau_0 = t_0$ (при этом окрестности V_0 и U_0, вообще говоря, изменятся) и обозначив переменную ξ через x_0, получим утверждение 1) леммы, где, например, W_0 и W_1 таковы, что $W_0 \times W_1 \subset U_0$.

Докажем утверждение 2) леммы. Покажем сначала, что частная производная по ξ отображения $(\alpha, \xi) \mapsto x(\cdot, \alpha, \xi)$ в точке $(0, \widehat{x}(\tau_0))$, которую обозначим через $w(\cdot, \tau_0)$, удовлетворяет для п.в. $t \in [t_0, t_1]$ дифференциальному уравнению

$$\dot{w}(t, \tau_0) = \widehat{\varphi}_x(t) w(t, \tau_0), \qquad w(\tau_0, \tau_0) = E, \tag{3.10}$$

где E — единичная матрица.

Действительно, частная производная отображения F по ξ в точке $(\widehat{x}(\cdot), 0, \widehat{x}(\tau_0))$ легко вычисляется и может быть отождествлена с матрицей $-E$. Тогда, применяя оператор $F_{x(\cdot)}(\widehat{x}(\cdot), 0, \widehat{x}(\tau_0))$ к обеим частям формулы для неявной функции, сразу получаем (3.10).

Из формулы (3.10) при $\tau_0 = t_0$ следует формула (2.4) для частной производной по x_0 отображения $(\alpha, x_0) \mapsto x(\cdot, \alpha, x_0; \mathcal{N}_k)$ в точке $(0, \widehat{x}(t_0))$. В этом случае вместо $w(\cdot, t_0)$ мы пишем просто $w(\cdot)$.

Дифференцируемость отображения $(\alpha, x_0) \mapsto x(t, \alpha, x_0; \mathcal{N}_k)$, $t \in [t_0, t_1] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, в точке $(0, \widehat{x}(t_0))$ будем доказывать индукцией по числу иголок.

Пусть $k = 1$, т.е. $\mathcal{N}_1 = (\tau_1, v_1)$. Если $t \in [t_0, \tau_1)$, то $t < \tau_1 - \alpha_1$ для достаточно малых $\alpha_1 > 0$. Тогда $u(\cdot, \alpha_1; \mathcal{N}_1) = \widehat{u}(\cdot)$ на $[t_0, t]$, и функция $x(\cdot, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1)$ на этом отрезке в силу единственности зависит только от переменной x_0. Обозначим ее через $x(\cdot, x_0)$. Дифференцируемость этой функции по x_0 в точке $(0, \widehat{x}(t_0))$ только что доказана.

Пусть $t \in (\tau_1, t_1]$. Тогда $x(t, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1)$ есть значение в точке t решения уравнения

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t, \alpha_1; \mathcal{N}_1)), \qquad x(\tau_1) = x(\tau_1, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1) \tag{3.11}$$

для всех достаточно малых $\alpha_1 \geq 0$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$.

Покажем сначала, что отображение $(\alpha_1, x_0) \mapsto x(\tau_1, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1)$ дифференцируемо в точке $(0, \widehat{x}(t_0))$ и производная действует на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ по правилу

$$(\alpha_1, x_0) \mapsto \bigl(\varphi(\tau_1, \widehat{x}(\tau_1), v_1) - \widehat{\varphi}(\tau_1)\bigr)\alpha_1 + w(\tau_1)x_0. \tag{3.12}$$

Действительно, учитывая, что $x(\tau_1 - \alpha_1, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1) = x(\tau_1 - \alpha_1, x_0)$, будем иметь

$$\bigl|x(\tau_1, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1) - \widehat{x}(\tau_1) - (\varphi(\tau_1, \widehat{x}(\tau_1), v_1) - \widehat{\varphi}(\tau_1))\alpha_1 - w(\tau_1)(x_0 - \widehat{x}(t_0))\bigr| =$$
$$= \left| x(\tau_1 - \alpha_1, x_0) + \int\limits_{\tau_1 - \alpha_1}^{\tau_1} \bigl(\varphi(s, x(s, \alpha_1, x_0; \mathcal{N}_1), v_1) - \varphi(\tau_1, \widehat{x}(\tau_1), v_1)\bigr)\, ds - \right.$$
$$\left. - \widehat{x}(\tau_1 - \alpha_1) - \int\limits_{\tau_1 - \alpha_1}^{\tau_1} (\widehat{\varphi}(s) - \widehat{\varphi}(\tau_1))\, ds - w(\tau_1)(x_0 - \widehat{x}(t_0)) \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau_1-\alpha_1}^{\tau_1} \big|\varphi\big(s, x(s,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1), v_1\big) - \varphi(\tau_1, \widehat{x}(\tau_1), v_1)\big|\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau_1-\alpha_1}^{\tau_1} |\widehat{\varphi}(s) - \widehat{\varphi}(\tau_1)|\,ds + \big|x(\tau_1-\alpha_1, x_0) - \widehat{x}(\tau_1-\alpha_1) - w(\tau_1)(x_0 - \widehat{x}(t_0))\big|. \quad (3.13)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Оценим слагаемые справа в (3.13). Существует такое $\delta_0 > 0$, что компакт $\mathcal{K} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x - \widehat{x}(t)| \leq \delta_0,\ t \in [t_0,t_1]\}$ содержится в G. Отображение $(t,x) \mapsto \varphi(t,x,v_1)$ равномерно непрерывно на $\mathcal{K}$. Следовательно, найдется такое $0 < \delta \leq \delta_0$, что

$$|\varphi(t_1,x_1,v_1) - \varphi(t_2,x_2,v_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $(t_i,x_i) \in \mathcal{K}$, $i = 1,2$, для которых $|t_1 - t_2| < \delta$ и $|x_1 - x_2| < \delta$. Функция $\widehat{x}(\cdot)$ непрерывна, и поэтому существует такое $\delta_1 \leq \delta$, что $|\widehat{x}(s) - \widehat{x}(\tau_1)| < \delta/2$, если $|s - \tau_1| < \delta_1$.

Поскольку $x(\cdot,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$ сходится равномерно к $\widehat{x}(\cdot)$ при $\alpha_1 \to 0$ и $x_0 \to \widehat{x}(t_0)$, имеем $|x(s,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1) - \widehat{x}(s)| < \delta/2$ для всех $s \in [t_0,t_1]$ и всех достаточно малых $0 \leq \alpha_1 < \delta_1$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$. Если α_1 и x_0 таковы и $s \in [\tau_1 - \alpha_1, \tau_1]$, то $|s - \tau_1| \leq \alpha_1 < \delta_1 \leq \delta$ и, кроме того, $|x(s,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1) - \widehat{x}(\tau_1)| \leq |x(s,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1) - \widehat{x}(s)| + |\widehat{x}(s) - \widehat{x}(\tau_1)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$. Отсюда следует, что первый интеграл справа в (3.13) не превосходит $(\varepsilon/2)\alpha_1$.

Так как τ_1 — точка Лебега функции $\widehat{\varphi}(\cdot)$, для достаточно малых $\alpha_1 \geq 0$ второй интеграл справа не превосходит $(\varepsilon/2)\alpha_1$.

Оценим третье слагаемое справа в (3.13):

$$\big|x(\tau_1-\alpha_1,x_0) - \widehat{x}(\tau_1-\alpha_1) - w(\tau_1)(x_0 - \widehat{x}(t_0))\big| =$$

$$= \left| x(\tau_1,x_0) - \int\limits_{\tau_1-\alpha_1}^{\tau_1} \varphi(s, x(s,x_0), \widehat{u}(s))\,ds - \widehat{x}(\tau_1) + \int\limits_{\tau_1-\alpha_1}^{\tau_1} \widehat{\varphi}(s)\,ds - w(\tau_1)(x_0 - \widehat{x}(t_0)) \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau_1-\alpha_1}^{\tau_1} \big|\varphi(s, x(s,x_0), \widehat{u}(s)) - \widehat{\varphi}(s)\big|\,ds + \big|x(\tau_1,x_0) - \widehat{x}(\tau_1) - w(\tau_1)(x_0 - \widehat{x}(t_0))\big|. \quad (3.14)$$

Оценка для интеграла справа получается аналогично оценке для первого интеграла справа в (3.13) (и даже проще): надо рассмотреть непрерывную функцию $(t,x,u) \mapsto \varphi(t,x,u)$ на компакте $\mathcal{K} \times (\operatorname{cl} U \cap B_{\mathbb{R}^r}(0,\gamma_0))$, где $\gamma_0 = \|\widehat{u}(\cdot)\|_{L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)}$, воспользоваться ее равномерной непрерывностью по x и равномерной сходимостью $x(\cdot,x_0)$ к $\widehat{x}(\cdot)$ при $x_0 \to \widehat{x}(t_0)$. В итоге получаем, что интеграл может быть сделан меньше $(\varepsilon/2)|x_0 - \widehat{x}(t_0)|$, если x_0 достаточно близко к $\widehat{x}(t_0)$.

Последнее слагаемое может быть сделано меньше $(\varepsilon/2)|x_0 - \widehat{x}(t_0)|$, если x_0 достаточно близко к $\widehat{x}(t_0)$, в силу дифференцируемости отображения $x_0 \mapsto x(\tau_1,x_0)$ в точке $\widehat{x}(t_0)$.

В силу полученных оценок правая часть (3.13) не превосходит $\varepsilon(\alpha_1 + |x_0 - \widehat{x}(t_0)|)$ для всех достаточно малых $\alpha \geq 0$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$, и тем самым функция $(\alpha_1,x_0) \mapsto x(\tau_1,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$ дифференцируема в точке $(0,\widehat{x}(t_0))$.

Дифференцируемость отображения $(\alpha_1,x_0) \mapsto x(t,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0))$ теперь следует из дифференцируемости отображения $(\alpha_1,x_0) \mapsto x(\tau_1,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$ в этой точке и дифференцируемости решения уравнения (3.11) по начальному значению в точке $\widehat{x}(\tau_1)$.

Вычислим частную производную по α_1 отображения $(\alpha_1,x_0) \mapsto x(t,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0))$. В силу (3.12) частная производная по α_1 отображения $(\alpha_1,x_0) \mapsto x(\tau_1,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$

в точке $(0,\widehat{x}(t_0))$ имеет вид $\varphi(\tau_1,\widehat{x}(\tau_1),v_1)-\widehat{\varphi}(\tau_1)$, а производная отображения $x_0\mapsto x(t,x_0)$ в точке $\widehat{x}(\tau_1)$ удовлетворяет уравнению (3.10) при $\tau_0=\tau_1$. Следовательно, $y_{\tau_1,v_1}(t)=w(t,\tau_1)\times$ $\times\,(\varphi(\tau_1,\widehat{x}(\tau_1),v_1)-\widehat{\varphi}(\tau_1))$ — частная производная по α_1 отображения $(\alpha_1,x_0)\mapsto x(t,\alpha_1,x_0;\mathcal{N}_1)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0))$ и для п.в. $t\in[t_0,t_1]$ она удовлетворяет уравнению (2.3) при $k=1$.

Пусть теперь имеется $k+1$ иголок и утверждения леммы справедливы для первых k иголок. Положим $\overline{\alpha}=(\alpha,\alpha_{k+1})^{\mathrm T}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\alpha_{k+1})^{\mathrm T}$. Если $t\in(\tau_k,\tau_{k+1})$, то для достаточно малых α_{k+1} справедливо равенство $x(t,\overline{\alpha},x_0;\mathcal{N}_{k+1})=x(t,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$ и тем самым по предположению отображение $(\overline{\alpha},x_0)\mapsto x(t,\overline{\alpha},x_0;\mathcal{N}_{k+1})$ дифференцируемо в точке $(0,\widehat{x}(t_0))\in\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^n$.

Пусть $t\in(\tau_{k+1},t_1]$. Тогда $x(t,\overline{\alpha},x_0;\mathcal{N}_{k+1})$ есть значение в точке t решения дифференциального уравнения

$$\dot{x}=\varphi(t,x,u(t,\overline{\alpha};\mathcal{N}_{k+1})),\qquad x(\tau_{k+1})=x(\tau_{k+1},\overline{\alpha},x_0;\mathcal{N}_{k+1}).\tag{3.15}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые были при $k=1$, а именно: так же, как и выше (см. (3.12) и (3.13)), проверяется, что отображение $(\overline{\alpha},x_0)\mapsto x(\tau_{k+1},\overline{\alpha},x_0;\mathcal{N}_{k+1})$ дифференцируемо в точке $(0,\widehat{x}(t_0))\in\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^n$ и его производная на $\mathbb{R}^k_+\times\mathbb{R}^n$ действует по правилу

$$(\overline{\alpha},x_0)\mapsto A\alpha+\big(\varphi(\tau_{k+1},\widehat{x}(\tau_{k+1}),v_{k+1})-\widehat{\varphi}(\tau_{k+1})\big)\alpha_{k+1}+w(\tau_{k+1})x_0,$$

где A обозначает частную производную по α отображения $(\alpha,x_0)\mapsto x(\tau_{k+1},\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$ в точке $(0,\widehat{x}(t_0))\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ (которое дифференцируемо по предположению). Затем вследствие дифференцируемости решения уравнения (3.14) по начальным данным ($\tau_0=\tau_{k+1}$) получаем, что отображение $(\overline{\alpha},x_0)\mapsto x(t,\overline{\alpha},x_0;\mathcal{N}_{k+1})$ дифференцируемо в точке $(0,\widehat{x}(t_0))$.

Вычисление частной производной по α_i сводится к вычислению производной, когда есть только одна иголка, а это уже было сделано. Утверждение 2) леммы доказано.

Утверждение 3) леммы следует из уже доказанного. Действительно, пусть $x_0\in\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}\dot{x}=\varphi(t,x,u(t,\alpha;\mathcal{N}_k)), & x(t_0)=x_0,\\ \dot{y}=f(t,x,u(t,\alpha;\mathcal{N}_k)), & y(t_0)=0.\end{cases}\tag{3.16}$$

Если $\alpha=0$ (тем самым $u(t,\alpha;\mathcal{N}_k)=\widehat{u}(\cdot)$) и $x_0=\widehat{x}(t_0)$, то пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{y}(\cdot))$, где

$$\widehat{y}(t)=\int\limits_{t_0}^{t}f(s,\widehat{x}(s),\widehat{u}(s))\,ds,\qquad t\in[t_0,t_1],$$

очевидно, есть решение этой задачи.

Отображение $(\varphi,f)\colon G\times\operatorname{cl}U\to\mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет тем же условиям, что и отображение $\varphi\colon G\times\operatorname{cl}U\to\mathbb{R}^n$. Следовательно, рассматривая (3.16) вместо (2.2), получаем, что для достаточно малых по норме $\alpha\in\mathbb{R}^k_+$ и x_0, близких к $\widehat{x}(t_0)$, существует единственное решение $(\widetilde{x}(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k),\widetilde{y}(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k))^{\mathrm T}$ уравнения (3.16). Но в силу единственности решения задачи Коши (2.2) (первого уравнения в (3.16)) $\widetilde{x}(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)=x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)$. Таким образом, все свойства функции

$$(\alpha,x_0)\mapsto\widetilde{y}(t_1,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k)=J\big(x(\cdot,\alpha,x_0;\mathcal{N}_k),u(\cdot,\alpha;\mathcal{N}_k)\big)$$

из утверждения 3) леммы являются непосредственным следствием предыдущих рассуждений. $\square$

Доказательство леммы 2. Введем обозначение $\Lambda=\Phi'(\widehat{x},\widehat{y})$ и покажем сначала, что существуют непрерывное отображение $R\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k_+\times K$ и константа $\gamma>0$ такие, что $\Lambda R(z)=z$ и $|R(z)|\le\gamma|z|$ для всех $z\in\mathbb{R}^m$.

Действительно, пусть $e_1,\dots,e_m$ — базис в $\mathbb{R}^m$. По предположению найдутся такие $f_i \in \mathbb{R}^k_+ \times K$, $1\le i\le 2m$, что $\Lambda f_i = e_i$ и $\Lambda f_{m+i} = -e_i$, $1\le i\le m$. Для каждого $z=\sum_{i=1}^m z_ie_i\in\mathbb{R}^m$ положим $R(z)=\sum_{i=1}^m |z_i|g_i$, где $g_i=f_i$, если $z_i\ge 0$ и $g_i=f_{m+i}$, если $z_i<0$. Ясно, что R непрерывно, $R(z)\in\mathbb{R}^k_+\times K$, $\Lambda R(z)=\sum_{i=1}^m |z_i|\Lambda g_i=\sum_{i=1}^m z_ie_i=z$ и $|R(z)|\le\sum_{i=1}^m |z_i|\cdot|g_i|\le \max_{1\le i\le m}|z_i|\sum_{i=1}^{2m}|f_i|\le\gamma|z|$, где $\gamma=\sum_{i=1}^{2m}|f_i|$.

Так как отображение Φ дифференцируемо в точке $(\widehat{x},\widehat{y})$, существует $\delta>0$ такое, что $U_{\mathbb{R}^{k+s}}((\widehat{x},\widehat{y}),\delta)\subset V_1\times V_2$ и для всех $(x,y)\in U_{\mathbb{R}^{k+s}}((\widehat{x},\widehat{y}),\delta)\cap((\widehat{x}+\mathbb{R}^k_+)\times\mathbb{R}^s)$ справедливо неравенство

$$\bigl|\Phi(x,y)-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})-\Lambda((x,y)-(\widehat{x},\widehat{y}))\bigr|\le\frac{1}{2\gamma}|(x,y)-(\widehat{x},\widehat{y})|. \tag{3.17}$$

Положим $W=U_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}),\delta/(2\gamma))$, и пусть $z\in W$. Если $z=\Phi(\widehat{x},\widehat{y})$, то, полагая $(x(z),y(z))=(\widehat{x},\widehat{y})$, получаем утверждения леммы. Пусть $z\ne\Phi(\widehat{x},\widehat{y})$. Введем обозначение $\beta=|z-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|$ и покажем, что отображение

$$w\to G_z(w)=z+w-\Phi\bigl((\widehat{x},\widehat{y})+R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\bigr)$$

непрерывно переводит шар[10] $B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}),2\beta)$ в себя. Пусть $w\in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}),2\beta)$. Поскольку

$$|R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))|\le\gamma|w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|\le\gamma\cdot 2\beta<\gamma\cdot 2\frac{\delta}{2\gamma}=\delta,$$

имеем

$$(\widehat{x},\widehat{y})+R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\in U_{\mathbb{R}^{k+s}}((\widehat{x},\widehat{y}),\delta)\cap((\widehat{x}+\mathbb{R}^k_+)\times\mathbb{R}^s)$$

и тем самым отображение G_z определено корректно и, очевидно, непрерывно. Далее, учитывая (3.17), имеем

$$\begin{aligned}|G_z(w)-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|&=\bigl|z-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})-\Phi\bigl((\widehat{x},\widehat{y})+R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\bigr)+\Phi(\widehat{x},\widehat{y})+\Lambda R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\bigr|\le\\ &\le|z-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|+\bigl|\Phi\bigl((\widehat{x},\widehat{y})+R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\bigr)-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})-\Lambda R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))\bigr|\le\\ &\le\beta+\frac{1}{2\gamma}|R(w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))|\le\beta+\frac{1}{2\gamma}\gamma|w-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|\le\beta+\frac{1}{2}2\beta=2\beta,\end{aligned}$$

т.е. $G_z(w)\in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}),2\beta)$. По теореме Брауэра о неподвижной точке существует такое $\overline{w}=\overline{w}(z)\in B_{\mathbb{R}^m}(\Phi(\widehat{x},\widehat{y}),2\beta)$, что $G_z(\overline{w})=\overline{w}$, или $\Phi((\widehat{x},\widehat{y})+R(\overline{w}-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})))=z$. Положим $(x(z),y(z))=(\widehat{x},\widehat{y})+R(\overline{w}-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))$. Тогда $\Phi(x(z),y(z))=z$ и

$$|(x(z),y(z))-(\widehat{x},\widehat{y})|=|R(\overline{w}-\Phi(\widehat{x},\widehat{y}))|\le\gamma|\overline{w}-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|\le\gamma 2\beta=\kappa|z-\Phi(\widehat{x},\widehat{y})|,$$

где $\kappa=2\gamma$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Магарил-Ильяев Г.Г.* Принцип максимума Понтрягина. Формулировка и доказательство // ДАН. 2012. Т. 442, №1. С. 20–23.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
4. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[10] $B_{\mathbb{R}^s}(x,r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^s$ с центром в x радиуса r.