ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2023, т. 323, с. 196–203

УДК 517.984.64

О наилучшем восстановлении семейства операторов на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$

Г. Г. Магарил-Ильяев[а,б,в], **Е. О. Сивкова**[в,г]

Поступило 10.05.2023; после доработки 20.06.2023; принято к публикации 14.07.2023

Для однопараметрического семейства операторов на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ решена задача наилучшего восстановления оператора при данном значении параметра по неточной информации об операторах при других значениях параметра из некоторого компакта. Построено семейство наилучших методов восстановления. В качестве следствий получены семейства наилучших методов восстановления решений уравнения теплопроводности и задачи Дирихле для полупространства.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4358

В работе рассматривается однопараметрическое семейство линейных непрерывных операторов из $L_2(\mathbb{M})$ в $L_2(\mathbb{M})$, где $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$, $\mathbb{R}$ — прямая, $\mathbb{T}$ — единичная окружность, n — натуральное число, m — целое неотрицательное. Для этого семейства ставится задача о наилучшем (оптимальном) восстановлении оператора при данном значении параметра по приближенной информации об операторах с другими значениями параметра, пробегающего некоторый компакт. Для рассматриваемого семейства найдены явные выражения для оптимальных методов восстановления. Эти методы линейны и используют не всю имеющуюся информацию, а лишь информацию о не более чем двух измерениях, причем предварительно ее “сглаживая”. В качестве непосредственных следствий доказанного результата получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности и решения задачи Дирихле для полупространства.

Многообразие $\mathbb{M}$ является локально компактной абелевой группой. Двойственной к ней является группа $\widehat{\mathbb{M}} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$. Нормы функций в $L_2(\mathbb{M})$ и $L_2(\widehat{\mathbb{M}})$ определяются формулами

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})} = \left(\int\limits_{\mathbb{M}} |f(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$, и

$$\|g(\cdot)\|_{L_2(\widehat{\mathbb{M}})} = \left(\int\limits_{\widehat{\mathbb{M}}} |g(\xi,k)|^2\,d\xi\,dk\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(\xi,k)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $(\xi,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$, соответственно.

[а] Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

[б] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

[в] Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия.

[г] Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”, Москва, Россия.

E-mail: magaril@mech.math.msu.su (Г.Г. Магарил-Ильяев), sivkova_elena@inbox.ru (Е.О. Сивкова).

Теорема Планшереля утверждает, что преобразование Фурье $F\colon L_2(\mathbb{M}) \to L_2(\widehat{\mathbb{M}})$ является изометрическим изоморфизмом, т.е. если $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{M})$ и $F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$, то

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})} = \|F[f](\cdot)\|_{L_2(\widehat{\mathbb{M}})}.$$

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная функция, заданная на $\widehat{\mathbb{M}}$, такая, что $a(0,0)=0$, $|a(\xi,k)| \ge |(\xi,k)|$ ($|(\xi,k)| = |\xi| + |k|$, где $|\xi|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$, $k = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{Z}^m$) для всех $(\xi,k) \in \widehat{\mathbb{M}}$, $a(\xi,k) \to +\infty$ при $|(\xi,k)| \to +\infty$ и $a(\xi_1,0) \le a(\xi_2,0)$, если $|\xi_1| \le |\xi_2|$.

Определим семейство операторов $T(t)\colon L_2(\mathbb{M}) \to L_2(\mathbb{M})$, $t \ge 0$, действующих в образах Фурье для п.в. $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^m$ и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{M})$ по формулам

$$F[T(t)f](\xi,k) = e^{-ta(\xi,k)}F[f](\xi,k).$$

Очевидно, что это линейные непрерывные операторы из $L_2(\mathbb{M})$ в $L_2(\mathbb{M})$.

Мы ставим задачу восстановления (по возможности наилучшим образом) значений оператора $T(\tau)$ на $L_2(\mathbb{M})$ по приближенно известным значениям операторов $T(t)$, где t принадлежит некоторому компакту K на полупрямой $\mathbb{R}_+$, а $\tau \notin K$.

Точная постановка такова. Пусть для каждого элемента $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{M})$ нам известны отображение $g\colon K \to L_2(\mathbb{M})$, которое числу $t \in K$ ставит в соответствие элемент $g_t(\cdot) \in L_2(\mathbb{M})$, и положительная функция $\delta\colon K \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\|T(t)f(\cdot) - g_t(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})} \le \delta(t) \qquad \forall\, t \in K,$$

т.е. для каждого $t \in K$ мы имеем возможность “измерить” с точностью до $\delta(t)$ значение оператора $T(t)$ на некотором элементе (который нам неизвестен). По этой информации мы хотим восстановить значения оператора $T(\tau)$ на $L_2(\mathbb{M})$.

Обозначим через $G(K, L_2(\mathbb{M}))$ множество всех отображений $g\colon K \to L_2(\mathbb{M})$. Под методом восстановления понимаем любое отображение $\varphi\colon G(K, L_2(\mathbb{M})) \to L_2(\mathbb{M})$. Погрешность этого метода определим по формуле

$$e(T(\tau),K,\delta(\cdot),\varphi) = \sup_{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{M})} \sup_{\substack{g\in G(K,L_2(\mathbb{M}))\\ \|T(t)f(\cdot)-g_t(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})}\le\delta(t),\ t\in K}} \|T(\tau)f(\cdot) - \varphi(g)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})}.$$

Нас интересует величина

$$E(T(\tau),K,\delta(\cdot)) = \inf_{\varphi} e(T(\tau),K,\delta(\cdot),\varphi),$$

где нижняя грань берется по всем методам $\varphi\colon G(K, L_2(\mathbb{M})) \to L_2(\mathbb{M})$, которую называем *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т.е. такие методы, что

$$E(T(\tau),K,\delta(\cdot)) = e(T(\tau),K,\delta(\cdot),\widehat{\varphi}).$$

Эти методы будем называть *оптимальными методами восстановления.*

Такая общая постановка мотивирована в основном задачей восстановления решения эволюционного уравнения (определяемого однозначно начальным условием, которое нам неизвестно, — функцией $f(\cdot)$ в общей постановке) в фиксированный момент времени по приближенно известным его значениям в другие промежутки времени.

Далее будем предполагать, что функция $\delta\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Перед формулировкой основного результата приведем некоторые определения. На двумерной плоскости рассмотрим множество

$$M = \operatorname{co}\left\{\left(t, \ln\frac{1}{\delta(t)}\right),\ t \in K\right\} + (\mathbb{R}_+, 0),$$

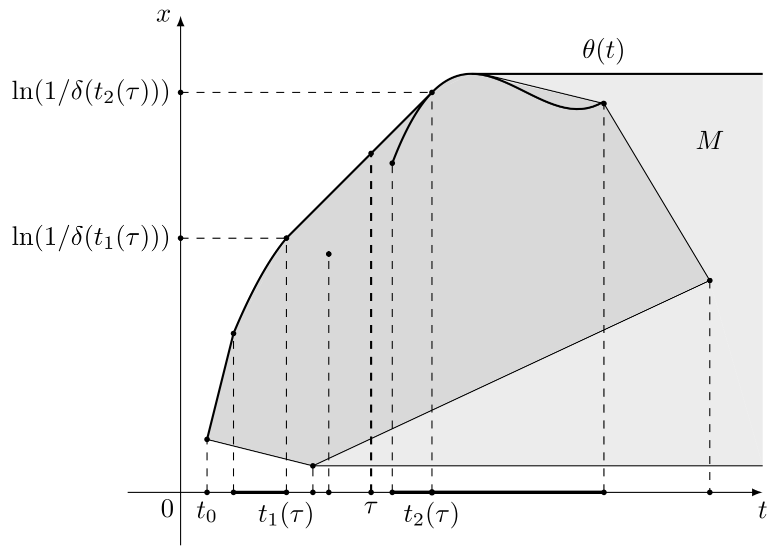

Рис. 1

являющееся алгебраической суммой выпуклой оболочки графика функции $t \mapsto \ln(1/\delta(t))$ и положительной полупрямой (рис. 1). Это, очевидно, выпуклое замкнутое множество.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на интервале $[t_0, +\infty)$, где $t_0 = \min\{t \in \mathbb{R}\colon t \in K\}$, по правилу $\theta(t) = \max\{x \in \mathbb{R}\colon (t, x) \in M\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая неубывающая функция.

Пусть $\tau \notin K$. Тогда существует интервал V, содержащий τ, который не принадлежит K. На этом интервале функция $\theta(\cdot)$, очевидно, совпадает с некоторой аффинной функцией $p(t) = ct + d$, $t \in \mathbb{R}$, где $c \ge 0$. Введем обозначения $t_1(\tau) = \max\{t \in K\colon t < \tau, \theta(t) = p(t)\}$ и $t_2(\tau) = \min\{t \in K\colon t > \tau, \theta(t) = p(t)\}$, считая, что $t_2(\tau) = +\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.

Пусть $\tau \notin K$ и $t_2(\tau) < +\infty$. Положим

$$\lambda_1(\tau) = \frac{t_2(\tau) - \tau}{t_2(\tau) - t_1(\tau)} \left(\frac{\delta(t_1(\tau))}{\delta(t_2(\tau))}\right)^{-\frac{2(\tau - t_1(\tau))}{t_2(\tau) - t_1(\tau)}}, \qquad \lambda_2(\tau) = \frac{\tau - t_1(\tau)}{t_2(\tau) - t_1(\tau)} \left(\frac{\delta(t_1(\tau))}{\delta(t_2(\tau))}\right)^{\frac{2(t_2(\tau) - \tau)}{t_2(\tau) - t_1(\tau)}}.$$

Легко видеть, что это положительные числа и $\lambda_1(\tau) < 1$. Определим еще множество

$$B(\tau) = \left\{(\xi, k) \in \mathbb{M}\colon\ a(\xi, k) \le -\frac{\ln \lambda_1(\tau)}{2(\tau - t_1(\tau))}\right\}.$$

Теорема. *Пусть $\tau \notin K$. Справедливы следующие утверждения.*

1. $E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) = e^{-\theta(\tau)}$.

2. *Если $t_2(\tau) < +\infty$, то множество функций $\omega(\cdot)$ на $\widehat{\mathbb{M}}$, измеримых при каждом $k \in \mathbb{Z}^m$ и равных нулю вне $B(\tau)$, для которых выполняется неравенство*

$$\frac{|\omega_0(\xi, k)|^2}{\lambda_1(\tau)} + \frac{|\omega(\xi, k)|^2}{\lambda_2(\tau)} \le 1 \tag{1}$$

при всех $(\xi, k) \in B(\tau)$, где $\omega_0(\xi, k) = e^{-(\tau - t_1(\tau))a(\xi,k)} - \omega(\xi, k)e^{-(t_2(\tau) - t_1(\tau))a(\xi,k)}$, непусто. Для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ метод $\widehat{\varphi}_\omega$, определенный формулой

$$\widehat{\varphi}_\omega(g(\cdot))(\cdot) = (R_1 * g_{t_1(\tau)})(\cdot) + (R_2 * g_{t_2(\tau)})(\cdot), \tag{2}$$

где $F[R_1](\xi, k) = \omega_0(\xi, k)$ и $F[R_2](\xi, k) = \omega(\xi, k)$, является оптимальным.

3. *Если $t_2(\tau) = \infty$, то метод $\widehat{\varphi}$, определенный формулой $\widehat{\varphi}(g(\cdot))(\cdot) = (R * g_{t_1(\tau)})(\cdot)$, где $F[R](\xi) = e^{-(\tau - t_1(\tau))a(\xi,k)}$, является оптимальным.*

Отметим, что формулы для оптимальных методов определены корректно. Действительно, функции $\omega(\cdot)$, очевидно, ограничены на ограниченном множестве $B(\tau)$ и равны нулю вне этого множества, поэтому они принадлежат $L_2(\mathbb{M})$. Отсюда и из свойств функции $a(\cdot)$ следует, что ядра R_1 и R_2 принадлежат $L_2(\mathbb{M})$.

Заметим также, что оптимальные методы линейны и используют не более двух измерений, которые предварительно "сглаживают".

Можно показать, что утверждение 1 теоремы на самом деле справедливо и для $\tau \in K$, а тогда, как видно из рисунка, для некоторых точек из K можно получить лучшую оценку, чем та, что дает измерение.

Доказательство теоремы. Общая схема рассуждений такова. Мы докажем, что справедливо неравенство

$$E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq e^{-\theta(\tau)}, \tag{3}$$

а затем, предварительно установив, что множество функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1), непусто, покажем, что погрешность методов из формулировки теоремы не превосходит $e^{-\theta(\tau)}$. Отсюда, очевидно, будут следовать все утверждения теоремы.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\|T(\tau)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})} \to \sup, \qquad \|T(t)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \delta(t), \qquad t \in K, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{M}). \tag{4}$$

Обозначим через $S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot))$ ее значение, т.е. верхнюю грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Покажем, что

$$E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq S(T(\tau), K, \delta(\cdot)). \tag{5}$$

Для краткости далее часто будем писать f вместо $f(\cdot)$ и аналогично поступать для других функций. Пусть функция f_0 допустима в задаче (4) (т.е. удовлетворяет ограничениям этой задачи). Тогда, очевидно, функция $-f_0$ также допустима и для любого метода $\varphi\colon G(K, L_2(\mathbb{M})) \to$ $\to L_2(\mathbb{M})$ мы имеем

$$\begin{aligned} 2\|T(\tau)f_0\|_{L_2(\mathbb{M})} &= \big\|T(\tau)f_0 - \varphi(0) - \big(T(\tau)(-f_0) - \varphi(0)\big)\big\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \\ &\leq \|T(\tau)f_0 - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{M})} + \|T(\tau)(-f_0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{M}) \\ \|T(t)f\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \delta(t),\ t \in K}} \|T(\tau)f - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{M}),\ g \in G(K, L_2(\mathbb{M})) \\ \|T(t)f - g_t\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \delta(t),\ t \in K}} \|T(\tau)f - \varphi(g_t)\|_{L_2(\mathbb{M})} = 2e(T_a(\tau), K, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (4), а затем справа к нижней грани по всем методам φ, получим

$$\sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{M}) \\ \|T_a(t)f\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq \delta(t),\ t \in K}} \|T_a(\tau)f\|_{L_2(\mathbb{M})} \leq E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)),$$

т.е. справедливо неравенство (5).

Покажем теперь, что

$$S(T(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq e^{-\theta(\tau)}. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда $t_2(\tau) < +\infty$. Далее для краткости будем часто писать t_1 и t_2 вместо $t_1(\tau)$ и $t_2(\tau)$.

Согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (4) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\tau a(\xi,k)}|F[f](\xi,k)|^2\,d\xi\to\max,\\ \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2ta(\xi,k)}|F[f](\xi,k)|^2\,d\xi\le\delta^2(t),\qquad t\in K,\quad f(\cdot)\in L_2(\mathbb{M}).\end{gathered}\tag{7}$$

Как сказано выше, на отрезке $[t_1,t_2]$ функция $\theta(\cdot)$ совпадает с аффинной функцией, которая в данном случае, очевидно, имеет вид

$$p(t)=\frac{\ln(1/\delta(t_2))-\ln(1/\delta(t_1))}{t_2-t_1}(t-t_1)+\ln\frac{1}{\delta(t_1)}=\ln\Big[(\delta(t_1))^{\frac{t-t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{t_1-t}{t_2-t_1}}\Big].\tag{8}$$

Ясно, что если $(t,x)\in M$, то $p(t)\ge x$ и, в частности, $p(t)\ge\ln\delta^{-1}(t)$ при $t\in K$.

По построению функция $\theta(\cdot)$ не убывает, поэтому коэффициент при $t-t_1$ в выражении для $p(\cdot)$ неотрицателен. Следовательно, в силу свойств функции $a(\cdot)$ найдется вектор $\xi_0 = (\xi_{01},\dots,\xi_{0n})\in\mathbb{R}^n$ такой, что

$$a(\xi_0,0)=\frac{\ln(1/\delta(t_2))-\ln(1/\delta(t_1))}{t_2-t_1}.\tag{9}$$

Для каждого $s\in\mathbb{N}$ обозначим через $\square_s$ куб в $\mathbb{R}^n$, образованный векторами $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, для которых $\xi_{0i}\le\xi_i\le\xi_{0i}+1/s$, если $\xi_{0i}\ge0$, и $\xi_{0i}-1/s\le\xi_i\le\xi_{0i}$, если $\xi_{0i}<0$.

Определим функции $\psi_s(\cdot)$, $s\in\mathbb{N}$, по формулам $\psi_s(\cdot,k)=0$, если $k\ne0$, и

$$\psi_s(\xi,0)=\begin{cases}(2\pi s)^{n/2}(\delta(t_1))^{\frac{t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{-t_1}{t_2-t_1}}, & \xi\in\square_s,\\ 0, & \xi\notin\square_s.\end{cases}$$

Ясно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{M})$. Положим $\varphi_s=F^{-1}[\psi_s]$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{M})$, и покажем, что функции φ_s, $s\in\mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Действительно, если $\xi\in\square_s$, то легко видеть, что $|\xi_0|\le|\xi|\le|\xi_0|+\sqrt{n}/s$, и тогда, учитывая неравенство $e^{-2ta(\xi,0)}\le e^{-2ta(\xi_0,0)}$, формулу (9) и то, что $p(t)\ge\ln\delta^{-1}(t)$ при $t\in K$, будем иметь

$$\begin{aligned}\|T(t)\varphi_s(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{M})}&=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2ta(\xi,k)}|F[\varphi_s](\xi,k)|^2\,d\xi=\\ &=s^n(\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}}\int\limits_{\square_s}e^{-2ta(\xi,0)}\,d\xi\le(\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}}e^{-2ta(\xi_0,0)}=\\ &=(\delta(t_1))^{2\frac{t_2-t}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{2\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}=e^{-2p(t)}\le e^{-2\ln\delta^{-1}(t)}=\delta^2(t)\end{aligned}$$

для любого $t\in K$, т.е. функции φ_s, $s\in\mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях не больше значения самой задачи, поэтому снова, используя теорему Планшереля и формулу (9), получим

$$\begin{aligned}S^2(T_a(\tau),K,\delta(\cdot))\ge\|T(\tau)\varphi_s(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{M})}&=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\tau a(\xi,k)}|F[\varphi_s](\xi,k)|^2\,d\xi=\\ &=s^n(\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}}\int\limits_{\square_s}e^{-2\tau a(\xi,0)}\,d\xi\ge\\ &\ge(\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}}e^{-2\tau a(\xi_0,0)}e^{-2\tau\sqrt{n}/s}=e^{-2p(\tau)}e^{-2\tau\sqrt{n}/s}.\end{aligned}\tag{10}$$

Выражение справа стремится к величине $e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}$ при $s \to \infty$, и тем самым доказана оценка (6), которая вместе с (5) доказывает неравенство (3) для случая $t_2(\tau) < +\infty$.

Пусть $t_2(\tau) = +\infty$. Ясно, что в этой ситуации на луче $[t_1(\tau), +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ совпадает с горизонтальной прямой $p(t) = \ln \delta^{-1}(t_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда, полагая $\xi_0 = 0$, $\psi_s(\xi, 0) = (2\pi s)^{n/2}\delta(t_1)$, если $\xi \in \square_s$, и $\psi_s(\xi, 0) = 0$, если $\xi \notin \square_s$, а также $\psi_s(\cdot\,, k) = 0$ при $k \neq 0$, будем иметь для любого $t \in K$ (учитывая, что $a(0,0) = 0$ и $p(t) \geq \ln \delta^{-1}(t)$, если $t \in K$)

$$\|T(t)\varphi_s(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{M})} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2ta(\xi,0)} |F[\varphi_s](\xi)|^2\, d\xi = s^n \delta^2(t_1) \int\limits_{\square_s} e^{-2ta(\xi,0)}\, d\xi \leq$$

$$\leq \delta^2(t_1) e^{-2ta(0,0)} = \delta^2(t_1) = e^{-2\ln \delta^{-1}(t_1)} = e^{-2p(t)} \leq e^{-2\ln\delta^{-1}(t)} = \delta^2(t),$$

т.е. функции φ_s, $s \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Далее, проводя те же оценки, что и в (10), получаем для данного случая $S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geq$ $\geq e^{-\theta(\tau)}$. Вместе с (5) это доказывает неравенство (3) при $t_2(\tau) = +\infty$. Таким образом, неравенство (3) справедливо для любого $\tau \notin K$.

Противоположное неравенство докажем одновременно с оптимальностью методов из утверждений 2 и 3 теоремы.

Пусть $t_2(\tau) < +\infty$. Покажем, что множество функций, удовлетворяющих условию (1), непусто. Для этого предварительно докажем, что

$$\lambda_1(\tau) e^{-2(t_1-\tau)a(\xi,k)} + \lambda_2(\tau) e^{-2(t_2-\tau)a(\xi,k)} - 1 \geq 0 \tag{11}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{Z}^m$.

Рассмотрим функцию

$$h(\alpha) = \lambda_1(\tau) e^{-2(t_1-\tau)\alpha} + \lambda_2(\tau) e^{-2(t_2-\tau)\alpha} - 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Эта функция дифференцируема и выпукла, как сумма выпуклых функций. Несложная проверка показывает, что если $\alpha_0 = a(\xi_0, 0)$ (см. (9)), то $h(\alpha_0) = h'(\alpha_0) = 0$, откуда следует, что $h(\alpha) \geq 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно, по неравенству Йенсена для выпуклых функций (см. [5]) имеем

$$h(\alpha_0 + \gamma(\alpha - \alpha_0)) = h((1-\gamma)\alpha_0 + \gamma\alpha) \leq (1-\gamma)h(\alpha_0) + \gamma h(\alpha) = \gamma h(\alpha)$$

для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < \gamma < 1$. Деля обе части этого неравенства на γ и переходя к пределу при $\gamma \to 0$, получаем $h(\alpha) \geq h'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) = 0$. Следовательно, неравенство (11) справедливо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{Z}^m$.

Выделяя полный квадрат, нетрудно убедиться, что соотношение (1) равносильно следующему неравенству:

$$\left|\omega(\xi,k) - \frac{\lambda_2(\tau) e^{-(\tau-t_1)a(\xi,k)}}{\lambda_1(\tau) e^{(t_2-t_1)a(\xi,k)} + \lambda_2(\tau) e^{-(t_2-t_1)a(\xi,k)}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau)}\, e^{t_2 a(\xi,k)}}{\lambda_1(\tau) e^{(t_2-t_1)a(\xi,k)} + \lambda_2(\tau) e^{-(t_2-t_1)a(\xi,k)}} \sqrt{\lambda_1(\tau) e^{-2t_1 a(\xi,k)} + \lambda_2(\tau) e^{-2t_2 a(\xi,k)} - e^{-2\tau a(\xi,k)}}$$

для всех $(\xi, k) \in B(\tau)$, причем выражение под знаком последнего корня неотрицательно, поскольку оно отличается от выражения слева в (11) на положительный множитель $e^{-2\tau a(\xi,k)}$. Отсюда, очевидно, следует, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1), непусто.

Перейдем теперь к доказательству оптимальности методов, определенных в утверждении 2 теоремы. Пусть измеримая функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (1) для $(\xi, k) \in B(\tau)$ и равна нулю вне $B(\tau)$. Оценим погрешность метода $\widehat{\varphi}_\omega$.

Для любых $f \in L_2(\mathbb{M})$ и $g \in G(K, L_2(\mathbb{M}))$ таких, что $\|T(t)f - g_t\|_{L_2(\mathbb{M})} \le \delta(t)$, $t \in K$, по теореме Планшереля имеем

$$\begin{aligned}\|T(\tau)f - \widehat{\varphi}_\omega(g)\|^2_{L_2(\mathbb{M})} &= \big\|T(\tau)f - (R_1 * g_{t_1}) - (R_2 * g_{t_2})\big\|^2_{L_2(\mathbb{M})} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| e^{-\tau a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - \big(e^{-(\tau - t_1)a(\xi,k)} - \omega(\xi,k) e^{-(t_2 - t_1)a(\xi,k)}\big) F[g_{t_1}](\xi,k) - \\ &\quad - \omega(\xi,k) F[g_{t_2}](\xi,k)\Big|^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big|\omega_0(\xi,k)\big(e^{-t_1 a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - F[g_{t_1}](\xi,k)\big) + \\ &\quad + \omega(\xi,k)\big(e^{-t_2 a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - F[g_{t_2}](\xi,k)\big)\Big|^2 d\xi. \qquad (12)\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$z_i(\xi,k) = e^{-t_i a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - F[g_{t_i}](\xi,k), \qquad i = 1, 2.$$

Тогда, оценивая по неравенству Коши–Буняковского выражение под интегралом справа в (12), получим

$$\begin{aligned}\big|\omega_0(\xi,k) z_1(\xi,k) + \omega(\xi,k) z_2(\xi,k)\big|^2 &= \left|\frac{\omega_0(\xi,k)}{\sqrt{\lambda_1(\tau)}}\sqrt{\lambda_1(\tau)}\, z_1(\xi,k) + \frac{\omega(\xi,k)}{\sqrt{\lambda_2(\tau)}}\sqrt{\lambda_2(\tau)}\, z_2(\xi,k)\right|^2 \le \\ &\le \left(\frac{|\omega_0(\xi,k)|^2}{\lambda_1(\tau)} + \frac{|\omega(\xi,k)|^2}{\lambda_2(\tau)}\right)\big(\lambda_1(\tau)|z_1(\xi,k)|^2 + \lambda_2(\tau)|z_2(\xi,k)|^2\big) \qquad (13)\end{aligned}$$

для п.в. $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{Z}^m$. Согласно (1) первый множитель в правой части этого неравенства не превосходит единицы, если $(\xi,k) \in B(\tau)$. Если же $(\xi,k) \notin B(\tau)$, то $\omega(\cdot) = 0$ и тогда этот множитель равен $e^{-2(\tau - t_1)a(\xi,k)}/\lambda_1(\tau)$. Но так как $(\xi,k) \notin B(\tau)$, то $a(\xi,k) > -(\ln\lambda_1(\tau))/[2(\tau - t_1(\tau))]$, а это равносильно тому, что $e^{-2(\tau - t_1)a(\xi,k)}/\lambda_1(\tau) < 1$. Таким образом, первый множитель в правой части (13) не превосходит единицы для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{Z}^m$.

Ввиду этой оценки и того, что в силу теоремы Планшереля

$$\|z_i(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{M})} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|e^{-t_i a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - F[g_{t_i}](\xi,k)\big|^2 d\xi = \|T(t_i)f - g_{t_i}\|^2_{L_2(\mathbb{M})} \le \delta^2(t_i)$$

при $i = 1, 2$, выражение справа в (12) не превосходит $\lambda_1(\tau)\delta^2(t_1) + \lambda_2(\tau)\delta^2(t_2)$.

Простой подсчет показывает, что

$$\lambda_1(\tau)\delta^2(t_1) + \lambda_2(\tau)\delta^2(t_2) = (\delta(t_1))^{\frac{2(t_2 - \tau)}{t_2 - t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{2(\tau - t_1)}{t_2 - t_1}}.$$

Но в силу (8) правая часть этого равенства равна $e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}$. Тогда отсюда и из (12) следует, что для любых $f \in L_2(\mathbb{M})$ и $g \in G(K, L_2(\mathbb{M}))$ таких, что $\|T(t)f - \varphi(g_t)\|_{L_2(\mathbb{M})} \le \delta(t)$, $t \in K$, справедлива оценка

$$\|T(\tau)f - \widehat{\varphi}_\omega(g)\|^2_{L_2(\mathbb{M})} \le e^{-2\theta(\tau)},$$

и, значит,

$$e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega) \le e^{-\theta(\tau)}. \qquad (14)$$

Напомним, что эта оценка получена для случая, когда $t_2(\tau) < +\infty$. Из нее и доказанного неравенства (3) заключаем, что

$$e^{-\theta(\tau)} \le E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) \le e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega) \le e^{-\theta(\tau)} \tag{15}$$

и тем самым

$$E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) = e^{-\theta(\tau)}$$

и $E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) = e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega)$. Таким образом, если $t_2(\tau) < +\infty$, то утверждения 1 и 2 теоремы доказаны.

Пусть $t_2(\tau) = +\infty$. Покажем, что для погрешности метода $\widehat{\varphi}$ из утверждения 3 теоремы справедлива оценка (14). Рассуждая так же, как и в (12), получим

$$\begin{aligned}
\|T(\tau)f - \widehat{\varphi}(g)\|^2_{L_2(\mathbb{M})} &= \|T(\tau)f - (R * g_{t_1})\|^2_{L_2(\mathbb{M})} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\tau a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - e^{-(\tau - t_1)a(\xi,k)} F[g_{t_1}](\xi,k)\right|^2 d\xi = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-(\tau - t_1)a(\xi,k)} \big(e^{-t_1 a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - F[g_{t_1}](\xi,k)\big)\right|^2 d\xi \le \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-t_1 a(\xi,k)} F[f](\xi,k) - F[g_{t_1}](\xi,k)\right|^2 d\xi = \\
&= \|T(t_1)f - g_{t_1}\|^2_{L_2(\mathbb{M})} \le \delta^2(t_1) = e^{-2\ln\delta^{-1}(t_1)} = e^{-2\theta(\tau)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, следует, что для данного метода справедлива оценка (14). Поскольку неравенство (3) доказано для любого $\tau \notin K$, соотношение (15) имеет место и для случая $t_2(\tau) = +\infty$. Таким образом, доказаны утверждение 1 теоремы для любого $\tau \notin K$ и оптимальность метода из утверждения 3 теоремы; тем самым теорема полностью доказана. $\square$

Если в исходной постановке $m > 0$ и $a(\xi, k) = |\xi|^2 + |k|^2$, то нетрудно показать, что $T(t)f(\cdot)$ для каждого $t > 0$ есть решение уравнения теплопроводности на многообразии $\mathbb{M}$ с начальной функцией $f(\cdot)$. Частный случай этой постановки, когда $n = m = 1$ и компакт K состоит из конечного числа точек, рассмотрен в работе [3]. Если $m = 0$, $a(\xi, k) = |\xi|^2$ и K также состоит из конечного числа точек, то эта задача (об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности на $\mathbb{R}^n$) решена в работе [2], но там построен только один оптимальный метод. Если в данной ситуации $a(\xi, k) = |\xi|$, то это задача об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле для полупространства на гиперплоскости по неточным его измерениям на других параллельных ей гиперплоскостях. Она решена в работе [1]. Частный случай общей постановки, когда $n = 1$, $m = 0$ и K состоит из двух точек, рассмотрен в работе [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамова Е.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Сивкова Е.О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60, № 10. С. 1711–1720.
2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54.
3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Сивкова Е.О.* Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям // Тр. МИАН. 2021. Т. 312. С. 216–223.
4. *Magaril-Il'yaev G.G., Sivkova E.O.* Optimal recovery of semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Math. J. 2019. V. 10, N 4. P. 75–84.
5. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. 5-е изд. М.: УРСС, 2020.