ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ–СОБОЛЕВА

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе предложен общий подход к построению оптимальных методов восстановления линейных функционалов по известному решению двойственной экстремальной задачи, основанный на некоторой параметризации этого решения. С помощью предложенного подхода удается решить ряд задач оптимального восстановления функций на классах Харди–Соболева таких, как восстановление значений функции по информации о коэффициентах Фурье или о значениях в некоторой системе узлов в периодическом и непериодическом случаях.

1. Постановка задачи и метод параметризации

Пусть W — некоторое множество из линейного пространства X. Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала L на этом множестве по значениям линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$. Положим для $x \in W$

$$Ix := (l_1 x, \dots, l_n x).$$

Оператор $I\colon W \to K^n$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, вещественное или комплексное линейное пространство X, называется *информационным* оператором. Величина

$$e(L, W, I) := \inf_{S\colon K^n \to K} \sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)|$$

называется *погрешностью* оптимального восстановления функционала L на множестве W. Всякий метод S_0, для которого

$$\sup_{x \in W} |Lx - S_0(Ix)| = e(L, W, I),$$

будем называть *оптимальным* методом восстановления.

С. А. Смоляком [1] было доказано, что в вещественном случае для выпуклого и центрально-симметричного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный и имеет место равенство

$$e(L, W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix = 0}} |Lx|. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №99-01-01181 и №00–15–96109).

Аналогичный результат в комплексном случае для выпуклого и уравновешенного множества W был доказан в работе [2] (более общие постановки задач восстановления и соответствующие результаты можно найти в работе [3] и цитируемой там литературе).

Всякий элемент $x_0 \in W$, для которого $Ix_0 = 0$ и

$$|Lx_0| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|,$$

будем называть *экстремальным*. Задача нахождения экстремального элемента чаще оказывается более простой, чем задача нахождения оптимального метода восстановления. Цель данной работы — предложить способ, позволяющий по экстремальному элементу (при наличии некоторой его параметризации) получать оптимальный метод восстановления, и построить ряд оптимальных методов восстановления, используя предложенную схему.

Теорема 1. *Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X и x_0 — экстремальный элемент в задаче оптимального восстановления линейного функционала L на множестве W по значениям линейных функционалов $l_1x, \dots, l_nx$. Предположим, что при всех $M = (t_1, \dots, t_{s+n}) \in \mathbb{R}^{n+s}$ из некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^{n+s}$ существуют $x(M) \in X$ такие, что $x(M_0) = x_0$ и для заданных функций $\psi_1(M), \dots, \psi_s(M)$ таких, что $\psi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, s$, при всех M из окрестности M_0, удовлетворяющих условию $\psi_j(M) = 0$, $j = 1, \dots, s$, $x(M) \in W$ (в случае $s = 0$ будем считать, что при всех M из окрестности M_0 $x(M) \in W$). Тогда, если функции $\varphi(M) := Lx(M)$, $\varphi_j(M) := l_jx(M)$, $j = 1, \dots, n$, и $\psi_j(M)$, $j = 1, \dots, s$, имеют в окрестности M_0 непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы*

$$J(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_s}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n+s}} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n+s}} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t_{n+s}} & \dots & \dfrac{\partial \psi_s}{\partial t_{n+s}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0, то единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$Lx \approx \sum_{j=1}^{n} C_j l_j x,$$

где $C_1, \dots, C_n$ — решения системы

$$J(M_0)\mathbf{C} = \operatorname{grad} \varphi\big|_{M_0},$$

в которой $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n+s})$.

Доказательство. Пусть

$$Lx \approx \sum_{j=1}^{n} C_j l_j x$$

— оптимальный метод восстановления. Тогда в силу того, что x_0 экстремальный элемент, имеем при всех $x \in W$

$$|Lx - \sum_{j=1}^{n} C_j l_j x| \leq |Lx_0|.$$

Следовательно, при всех M из некоторой окрестности M_0 таких, что $\psi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, s$, выполнено неравенство

$$|\varphi(M) - \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(M)| \leq |\varphi(M_0)|.$$

Поскольку $\varphi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, то отсюда легко вытекает, что функция

$$\varphi(M) - \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(M)$$

имеет относительный экстремум в точке M_0. Метод Лагранжа приводит к необходимым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^{s} C_{n+j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_m} = 0, \quad m = 1, \dots, n+s,$$

из которых однозначно определяются $C_1, \dots, C_n$. □

Приведем один простейший пример. Пусть $\mathcal{H}_\infty^{\mathbb{R}}$ пространство функций, аналитических в единичном круге

$$D := \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\},$$

ограниченных в нем и вещественных на интервале $(-1, 1)$. В качестве множества W рассмотрим $H_\infty^{\mathbb{R}}$ — множество функций из $\mathcal{H}_\infty^{\mathbb{R}}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leq 1.$$

Для задачи оптимального восстановления функций из $H_\infty^{\mathbb{R}}$ в точке $\tau \in (-1, 1)$ по их значениям в нуле двойственная экстремальная задача (1) решается сразу же с помощью леммы Шварца:

$$\sup_{\substack{f \in H_\infty^{\mathbb{R}} \\ f(0)=0}} |f(\tau)| = |\tau|.$$

Тем самым функция $f_0(z) = z$ является экстремальной для рассматриваемой задачи. Положим

$$f_1(z, t) = \frac{z + t}{1 + tz}.$$

Легко убедиться, что $f_1(z,t) \in H_\infty^{\mathbb{R}}$ при всех $t \in (-1,1)$. Кроме того, $f_1(z,0) = f_0(z)$ и $f_1(0,t) = t$. Из теоремы 1 получаем, что единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$f(\tau) \approx \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(0,0)\right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial t}(\tau,0) f(0) = (1-\tau^2) f(0).$$

Более общие результаты относительно рассмотренной задачи можно найти в [2] и [4] (они также могут быть получены предлагаемым методом).

2. Восстановление по коэффициентам Фурье

Классом Харди–Соболева $H^r_{\infty,\beta}$ будем называть множество 2π-периодических функций, аналитических в полосе $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ и удовлетворяющих условию $|f^{(r)}(z)| \le 1$, $z \in S_\beta$. Через $H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$ будем обозначать класс функций из $H^r_{\infty,\beta}$, вещественных на вещественной оси. В случае $r = 0$ эти классы будем обозначать через $H_{\infty,\beta}$ и $H^{\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$, соответственно.

Положим

$$\begin{aligned} a_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos jx\, dx, \quad j = 0, 1, \dots\ , \\ b_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin jx\, dx, \quad j = 1, 2, \dots\ , \end{aligned}$$

где $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $f \in H^r_{\infty,\beta}$, $\xi \in \mathbb{T}$, по значениям информационного оператора

$$If = (a_0(f), a_1(f), \dots, a_{n-1}(f), b_1(f), \dots, b_{n-1}(f)).$$

В силу инвариантности рассматриваемого класса относительно сдвига погрешность оптимального восстановления не зависит от точки ξ. Будем обозначать ее через $e(H^r_{\infty,\beta}, I)$.

Решение исследуемой задачи дается в терминах теории эллиптических функций. Напомним некоторые определения из этой теории. Полными эллиптическими интегралами первого рода для модулей k и $k' := \sqrt{1-k^2}$ называются величины

$$K := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

В дальнейшем будем считать, что k выбрано из условия

$$\frac{\pi K'}{2K} = \beta.$$

При этом k определяется равенством (см., например, [5])

$$k = 4e^{-\beta}\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\beta m(m+1)}}{1+2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\beta m^2}}\right)^2.$$

Мы будем использовать стандартные обозначения $\operatorname{sn}(z,k)$, $\operatorname{cn}(z,k)$ и $\operatorname{dn}(z,k)$ для эллиптических функций Якоби, опуская зависимость их от модуля, когда последний равен k.

Положим

$$\Phi_{n,0}^{\beta}(z) := \sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z,\lambda\right), \quad \Phi_{n,r}^{\beta} := D_r * \Phi_{n,0}, \quad r \geq 1,$$

где Λ — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ, определяемого равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2n\frac{K'}{K} = \frac{4\beta n}{\pi},$$

$$D_r(t) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mt-\pi r/2)}{m^r}, \quad r = 1,2,\dots\ ,$$

— ядро Бернулли, а

$$(f*g)(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(z-t)g(t)\,dt.$$

Функции $\Phi_{n,r}^{\beta}$, введенные в работе [6], обладают свойствами, аналогичными свойствам идеальных сплайнов Эйлера (см., например, [7, стр. 72]). Идеальные сплайны Эйлера являются решениями ряда классических экстремальных задач на классах Соболева (о точных значениях поперечников, о неравенстве для производных колмогоровского типа и др.), а функции $\Phi_{n,r}^{\beta}$ оказываются решениями аналогичных задач для аналитических функций из классов Харди–Соболева. Из работы [6] следует, что

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{n,r}^{\beta}(z) &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin((2m+1)nz-\pi r/2)}{(2m+1)^r\operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)},\\ \|\Phi_{n,r}^{\beta}\|_\infty &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r\operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)},\end{aligned}\right\} \quad r = 0,1,\dots$$

(через $\|\cdot\|_\infty$ мы обозначаем стандартную норму в $L_\infty(\mathbb{T})$).

В [8] было доказано, что

$$e(H^r_{\infty,\beta}, I) = \|\Phi_{n,r}^{\beta}\|_\infty,$$

а экстремальной функцией для задачи оптимального восстановления значения $f(0)$ на классе $H^r_{\infty,\beta}$ по информационному оператору I является функция

$$\varphi_{n,r}^{\beta}(z) := \begin{cases}\Phi_{n,r}^{\beta}\left(z+\dfrac{\pi}{2n}\right), & r = 2l,\\ \Phi_{n,r}^{\beta}(z), & r = 2l+1.\end{cases}$$

Однако вопрос о само́м оптимальном методе восстановления остался открытым. Пользуясь теоремой 1, мы построим линейный оптимальный метод восстановления для этой задачи.

Докажем сначала один вспомогательный результат. Положим

$$\operatorname{ctn} z := \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}.$$

Лемма 1. *При всех $0 \le t_1 < \ldots < t_{2n} < 2K$ система функций*

$$1, \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_1\right), \ldots, \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_{2n}\right)$$

является чебышевской на множестве $\mathbb{T} \setminus \{\pi t_1/K, \ldots, \pi t_{2n}/K\}$.

Доказательство. Предположим, что существуют вещественные числа $C_0, C_1, \ldots, C_{2n}$, не все равные нулю, для которых функция

$$C_0 + \sum_{j=1}^{2n} C_j \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right)$$

имеет $2n+1$ нулей на множестве $\mathbb{T} \setminus \{\pi t_1/K, \ldots, \pi t_{2n}/K\}$. Тогда функция

$$\begin{aligned} g(z) = {} & C_0 \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right) \\ & + \sum_{m=1}^{2n} C_m \operatorname{cn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m\right) \operatorname{dn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne m}}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right) \end{aligned}$$

должна иметь не менее $2n+1$ нулей на $\mathbb{T}$. Функция $g(z)$ — эллиптическая функция с периодами 2π, $2\pi K'/K$. Из теоремы Лиувилля (см. [5, стр. 14]) следует, что число нулей $g(z)$ в параллелограмме периодов, подсчитанное с учетом кратностей, совпадает с числом полюсов. Число полюсов у функции $g(z)$ в параллелограмме периодов не превосходит $2n+1$. Поскольку число нулей с учетом кратности 2π-периодической функции $g(z)$ должно быть четным, то оно не превосходит $2n$, что противоречит сделанному предположению. □

Положим

$$\sigma(z) := \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z, \lambda\right) \operatorname{ctn}\frac{K}{\pi}z.$$

Теорема 2. *Для всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод*

$$f(\xi) \approx d_0 \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} d_j (a_j(f) \cos j\xi + b_j(f) \sin j\xi),$$

где

$$d_j = \frac{2}{n a_j(\sigma)} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K \cos j \frac{2m-1}{2n}\pi,$$

$$j = 0, \ldots, n-1,$$

является оптимальным на классе $H_{\infty,\beta}$. *При* $r \geq 1$ *для всех* $\xi \in \mathbb{T}$ *оптимальным методом на классе* $H^r_{\infty,\beta}$ *является метод*

$$f(\xi) \approx \frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^r d_{jr}}{a_j(\sigma)} (a_j(f)\cos j\xi + b_j(f)\sin j\xi),$$

где

$$d_{jr} = \begin{cases} (-1)^{r/2} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} (D_r * \sigma)\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right) \cos j \frac{2m-1}{2n}\pi, & r = 2l, \\ (-1)^{(r-1)/2} \displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} (D_r * \sigma)\left(\frac{m}{n}\pi\right) \sin j \frac{m}{n}\pi, & r = 2l+1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу об оптимальном восстановлении значения $f(0)$ на классе $H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$ по информационному оператору

$$I_0 f := (a_0(f), a_1(f), \ldots, a_{n-1}(f)).$$

Имеем

$$e(H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}, I_0) = \sup_{\substack{f \in H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta} \\ I_0 f = 0}} |f(0)| \geq |\varphi^{\beta}_{n,r}(0)|.$$

С другой стороны, если $f \in H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$ и $I_0 f = 0$, то, положив

$$f_0(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2},$$

получаем, что $f_0 \in H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$, $I_0 f_0 = 0$ и, кроме того, поскольку f_0 четная функция, $b_m(f) = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$f(0) = f_0(0) \leq \sup_{\substack{f \in H^{r}_{\infty,\beta} \\ I f = 0}} |f(0)| = |\varphi^{\beta}_{n,r}(0)|.$$

Тем самым

$$e(H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}, I_0) = |\varphi^{\beta}_{n,r}(0)|.$$

С помощью первого главного преобразования эллиптических функций $2n$-й степени можно показать (см. [9]), что

$$\varphi^{\beta}_{n,0}(z) = \sqrt{\lambda}\, \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi} z + \Lambda, \lambda\right) = k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi} z - \frac{2m-1}{2n} K\right).$$

Положим для $M=(t_1,\dots,t_n)$

$$h_M(z):=k^n\prod_{m=1}^{n}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z-t_m\right)\prod_{m=n+1}^{2n}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z-\frac{2m-1}{2n}K\right).$$

Тогда при всех $M\in[0,2K)^n$ $h_M\in H^{\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$, а для

$$t_m^0:=\frac{2m-1}{2n}K$$

и $M_0:=(t_1^0,\dots,t_n^0)$ $h_{M_0}=\varphi^{\beta}_{n,0}$.

Пусть $r=0$. Покажем, что определитель матрицы $J(M_0)$, состоящей из элементов

$$\frac{\partial}{\partial t_m}a_j(h_M)\Big|_{M_0}=a_j\left(\frac{\partial h_M}{\partial t_m}\Big|_{M_0}\right),\quad m=1,\dots,n,\ j=0,\dots,n-1,$$

отличен от нуля. Если предположить противное, то найдутся вещественные числа $C_1,\dots,C_n$, не все равные нулю, такие, что для функции

$$g=\sum_{m=1}^{n}C_m\frac{\partial h_M}{\partial t_m}\Big|_{M_0}$$

будут выполнены равенства $a_0(g)=\ldots=a_{n-1}(g)=0$. Следовательно, для четной функции $g_0(z):=g(z)+g(-z)$ будут выполняться равенства

$$a_0(g_0)=a_1(g_0)=b_1(g_0)=\ldots=a_{n-1}(g_0)=b_{n-1}(g_0)=0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial h_M}{\partial t_m}(z)=-h_M(z)\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z-t_m\right),$$

то в силу четности функции h_{M_0} имеем

$$\begin{aligned}g_0(z)&=-h_{M_0}(z)\sum_{m=1}^{n}C_m\left(\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z-t_m^0\right)-\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z+t_m^0\right)\right)\\&=-h_{M_0}(z)\sum_{m=1}^{n}C_m\left(\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z-t_m^0\right)-\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z-\tau_m^0\right)\right),\end{aligned}$$

где $\tau_m^0=2K-t_m^0$. Положим

$$F:=g_0-C_0h_{M_0},$$

где $C_0=g_0(0)/h_{M_0}(0)$. Для функции F выполняются равенства

$$a_0(F)=a_1(F)=b_1(F)=\ldots=a_{n-1}(F)=b_{n-1}(F)=0.$$

В силу того, что тригонометрическая система

$$1,\cos x,\sin x,\dots,\cos(n-1)x,\sin(n-1)x$$

является чебышевской, функция F должна иметь не менее $2n$ перемен знака на $\mathbb{T}$ (см. [10, стр. 41]). Кроме того, функция $F(z)$

в силу четности имеет нуль при $z = 0$ без перемены знака. Тем самым у функции F не менее $2n+1$ различных нулей на $\mathbb{T}$, что противоречит лемме 1.

Из теоремы 1 (при $s = 0$) вытекает, что для нахождения оптимального метода остается решить систему

$$(2)\quad \sum_{j=0}^{n-1} C_j a_j\left(\frac{\partial h_M}{\partial t_m}\Big|_{M_0}\right) = \frac{\partial h_M(0)}{\partial t_m}\Big|_{M_0} = \sqrt{\lambda}\operatorname{ctn}\frac{2m-1}{2n}K, \qquad m = 1,\dots,n.$$

Имеем

$$a_j\left(\frac{\partial h_M}{\partial t_m}\Big|_{M_0}\right) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} h_{M_0}(z)\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m^0\right)\cos jz\,dz$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} h_{M_0}\left(z+\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\operatorname{ctn}\frac{K}{\pi}z\cos j\left(z+\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\,dz$$
$$= (-1)^{m+1}\sqrt{\lambda}a_j(\sigma)\cos j\frac{2m-1}{2n}\pi.$$

Из того, что определитель системы (2) отличен от нуля, вытекает, что $a_j(\sigma)\neq 0$, $j = 0,\dots,n-1$. Тем самым система (2) эквивалентна системе

$$(3)\quad \sum_{j=0}^{n-1} C_j a_j(\sigma)\cos j\frac{2m-1}{2n}\pi = (-1)^{m+1}\operatorname{ctn}\frac{2m-1}{2n}K, \qquad m = 1,\dots,n.$$

В силу ортогональности системы функций $1, \cos x, \dots, \cos(n-1)x$ на сетке $\frac{2m-1}{2n}\pi$, $m = 1,\dots,n$, получаем, что $C_0 = d_0/2$, $C_j = d_j$, $j = 1,\dots,n-1$.

Пусть теперь $r\geq 1$. Рассмотрим функцию

$$h_{P,r}(z) := \begin{cases} \dfrac{t_0}{2} + (D_r * h_M)(z), & r = 2l,\\[2mm] \dfrac{t_0}{2} + (D_r * h_M)\left(z - \dfrac{\pi}{2n}\right), & r = 2l+1,\end{cases}$$

где $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. При всех P таких, что

$$\psi(P) := a_0(h_M) = 0,$$

$h_{P,r}\in H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$ и, кроме того, для $P_0 := (0, t_1^0, \dots, t_n^0)$ $\;h_{P_0,r} = \varphi^{\beta}_{n,r}$. Из теоремы 1 (теперь уже с $s = 1$) следует, что для нахождения оптимального метода восстановления надо решить систему

$$(4)\quad \sum_{j=0}^{n-1} C_j\frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_m}\Big|_{P_0} + C_n\frac{\partial\psi}{\partial t_m} = \frac{\partial h_{P,r}(0)}{\partial t_m}\Big|_{P_0}, \quad m = 0,\dots,n.$$

Имеем (все частные производные вычисляются в точке P_0)

$$\frac{\partial a_0(h_{P,r})}{\partial t_0}=1,\quad \frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_0}=0,\ j=1,\dots,n-1,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t_0}=0,$$
$$\frac{\partial a_0(h_{P,r})}{\partial t_m}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t_m}=(-1)^{m+1}\sqrt{\lambda}a_0(\sigma),\quad m=1,\dots,n,$$

$$\frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_m}=\begin{cases}(-1)^{r/2+m+1}\dfrac{\sqrt{\lambda}a_j(\sigma)}{j^r}\cos j\dfrac{2m-1}{2n}\pi, & r=2l,\\[2ex] (-1)^{r/2+m-1/2}\dfrac{\sqrt{\lambda}a_j(\sigma)}{j^r}\sin j\dfrac{m}{n}\pi, & r=2l+1,\end{cases}$$
$$j=1,\dots,n-1,\ m=1,\dots,n.$$

При $r=2l$ система (4) принимает вид: $C_0=1/2$,

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{r/2}\frac{a_j(\sigma)}{j^r}C_j\cos j\frac{2m-1}{2n}\pi+a_0(\sigma)C_n$$
$$=(D_r*\sigma)\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\quad m=1,\dots,n,$$

и решается аналогично системе (2).

Если $r=2l+1$, то система (4) сводится к следующей: $C_0=1/2$,

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{(r-1)/2}\frac{a_j(\sigma)}{j^r}C_j\sin j\frac{m}{n}\pi-a_0(\sigma)C_n$$
$$=(D_r*\sigma)\left(\frac{m}{n}\pi\right),\quad m=1,\dots,n.$$

Пользуясь ортогональностью системы функций $\sin x,\dots,\sin(n-1)x$ на сетке $m\pi/n$, $m=1,\dots,n-1$, получаем решение этой системы.

Докажем, что построенный метод (обозначим его через S) является оптимальным на классе $H^r_{\infty,\beta}$. Предположим, что найдется функция $f_0\in H^r_{\infty,\beta}$, для которой

$$|f_0(0)-S(I_0f_0)|>e(H^r_{\infty,\beta},I_0). \tag{5}$$

Тогда для функции $\overline{f_0(\overline{z})}\in H^r_{\infty,\beta}$ также выполнено неравенство (5). Без ограничения общности можно считать, что $f_0(0)-S(I_0f_0)>0$. Следовательно, для функции

$$g(z):=\frac{f_0(z)+\overline{f_0(\overline{z})}}{2}\in H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$$

имеем

$$g(0)-S(I_0g)>e(H^r_{\infty,\beta},I_0)\ge e(H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta},I_0),$$

что невозможно в силу оптимальности метода S на классе $H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$.

Для нахождения оптимального метода восстановления значения $f(\xi)$ достаточно рассмотреть оптимальный метод восстановления в нуле для функции $F(z) = f(z+\xi)$. $\square$

Следствие 1. *Для всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод*

$$f(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{|j| \le n-1} \left(\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \frac{e^{ij\xi}}{c_j(\sigma)} c_j(f)$$

является оптимальным методом восстановления на классе $H_{\infty,\beta}$ по значениям коэффициентов Фурье

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ijt}\, dt, \quad |j| \le n-1.$$

При $r \ge 1$ для всех $\xi \in \mathbb{T}$ оптимальным методом на классе $H^r_{\infty,\beta}$ является метод

$$f(\xi) \approx c_0(f) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{|j| \le n-1 \\ j \ne 0}} |j|^r d_{|j|r} \frac{e^{ij\xi}}{c_j(\sigma)} c_j(f).$$

3. Восстановление по значениям в точках

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $f \in H^r_{\infty,\beta}$, $\xi \in \mathbb{T}$, по значениям информационного оператора

$$I_\tau := (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{2n})),$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{2n})$, $0 \le \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$. Будем считать, что $r \ge 1$ (при $r = 0$ решение рассматриваемой задачи было получено в [8]).

Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *При всех $0 \le \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$ найдутся такие $0 \le \theta_1 < \dots < \theta_{2n} < 2\pi$, что для функции $f_0 \in H^r_{\infty,\beta}$, имеющей вид*

$$f_0 = c + D_r * B_0,$$

где $c \in \mathbb{R}$, а

$$B_0(t) = k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi}(t - \theta_j) \right),$$

$a_0(B_0) = 0$ *и* $f_0(\tau_1) = \dots = f_0(\tau_{2n}) = 0$.

Доказательство. Напомним, что произведением Бляшке порядка m для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется функция вида

$$B(z) = \varepsilon \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} P(z, \zeta_j) \right),$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ — точки из Ω, $|\varepsilon| = 1$, $P(z,\zeta) = u(z,\zeta) + iv(z,\zeta)$, $u(z,\zeta)$ — функция Грина области Ω с особенностью в точке ζ, а

$v(z,\zeta)$ — сопряженная к $u(z,\zeta)$ функция (в общем случае многозначная). Обозначим через $\mathcal{B}_{2n}$ множество однозначных произведений Бляшке в кольце $\Omega_\beta = \{z \in \mathbb{C} : e^{-\beta} < |z| < e^{\beta}\}$ степени не выше $2n$, вещественных на единичном круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В работе [11] с помощью обобщенной задачи Неванлинны–Пика было построено нечетное и непрерывное в топологии равномерной сходимости на компактах из Ω_β отображение $\sigma\colon S^{2n} \to \mathcal{B}_{2n}$, где

$$S^{2n} = \{\, x = (x_0, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : \sum_{j=0}^{2n+1} |x_j|^2 = 1 \,\}.$$

Положим для $x \in S^{2n}$

$$\sigma_0(x) = (a_0(B), f_B(\tau_2) - f_B(\tau_1), \dots, f_B(\tau_{2n}) - f_B(\tau_1)),$$

где $B(t) = \sigma(x)(e^{it})$, а $f_B = D_r * B$. Тогда отображение $\sigma_0\colon S^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ является нечетным и непрерывным, а следовательно, по теореме Борсука существует $x_0 \in S^{2n}$, для которого $\sigma_0(x_0) = 0$. Тем самым построена функция $\widehat{B}(t) := \sigma(x_0)(e^{it})$, для которой $a_0(\widehat{B}) = 0$, и функция $\widehat{f} := a + D_r * \widehat{B}$, для которой при $a = -(D_r * \widehat{B})(\tau_1)$

$$\widehat{f}(\tau_1) = \ldots = \widehat{f}(\tau_{2n}) = 0.$$

Поскольку $\widehat{f}^{(r)} = \widehat{B}$, то из теоремы Ролля вытекает, что $\widehat{B}$ имеет не менее $2n$ различных нулей на $\mathbb{T}$, а в силу того, что $\sigma(x_0) \in \mathcal{B}_{2n}$, $\widehat{B}$ имеет ровно $2n$ нулей на $\mathbb{T}$. Остается заметить, что из вида произведений Бляшке для кольца с нулями на единичной окружности (см. [9]) вытекает равенство

$$\widehat{B}(t) = \varepsilon B_0(t),$$

где $\varepsilon = 1$ или -1. Положив $f_0 = \varepsilon \widehat{f}$, получим утверждение леммы. $\square$

Предложение 1. *Пусть $0 \le \tau_1 < \ldots < \tau_{2n} < 2\pi$ и f_0 — функция из леммы 2. Тогда для любого $\xi \in \mathbb{T}$ и любой функции $f \in H^r_{\infty,\beta}$ такой, что $f(\tau_1) = \ldots = f(\tau_{2n}) = 0$ выполнено неравенство*

$$|f(\xi)| \le |f_0(\xi)|.$$

Доказательство. Предположим, что при некотором $\xi \in \mathbb{T} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{2n}\}$ найдется функция $g \in H^r_{\infty,\beta}$, для которой $g(\tau_1) = \ldots = g(\tau_{2n}) = 0$ и $|g(\xi)| > |f_0(\xi)|$. Так как для функции $\widehat{g}(z) = g(z)\exp(-i\arg g(\xi))$ выполнены те же условия, можно без ограничения общности считать, что $g(\xi) > 0$. Положим

$$g_0(z) := \frac{g(z) + \overline{g(\overline{z})}}{2}.$$

Очевидно, что $g_0 \in H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$ и $g_0(\xi) = g(\xi)$. Рассмотрим функцию

$$F := f_0 - \rho g_0, \quad \rho = \frac{f_0(\xi)}{g_0(\xi)}.$$

Эта функция имеет нули в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}, \xi$. Следовательно, по теореме Ролля $F^{(r)}$ имеет не менее $2n+1$ нулей на $\mathbb{T}$. Отсюда вытекает, что однозначная и аналитическая в кольце Ω_β функция $F^{(r)}\left(\frac{1}{i}\ln w\right)$ имеет в этом кольце не менее $2n+1$ нулей. Поскольку произведение Бляшке на границе Ω_β удовлетворяет условию

$$\left|B_0\left(\frac{1}{i}\ln w\right)\right| = 1, \quad w \in \partial\Omega_\beta,$$

а $f_0^{(r)} = B_0$, то при $w \in \partial\Omega_\beta$

$$\left|f_0^{(r)}\left(\frac{1}{i}\ln w\right) - F^{(r)}\left(\frac{1}{i}\ln w\right)\right| = \left|\rho g_0^{(r)}\left(\frac{1}{i}\ln w\right)\right| \\ \le |\rho| < 1 = \left|f_0^{(r)}\left(\frac{1}{i}\ln w\right)\right|.$$

Так как у $B_0\left(\frac{1}{i}\ln w\right)$ ровно $2n$ нулей в области Ω_β, то по теореме Руше точно такое же число нулей должно быть и у функции $F^{(r)}\left(\frac{1}{i}\ln w\right)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Теорема 3. *При всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{2n} C_j(\xi) f(\tau_j),$$

в котором $C_1(\xi), \dots, C_{2n}(\xi)$ являются решениями системы

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ f_1(\tau_1) & \dots & f_1(\tau_{2n}) & a_0(g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{2n}(\tau_1) & \dots & f_{2n}(\tau_{2n}) & a_0(g_{2n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ \vdots \\ C_{2n+1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\xi) \\ \vdots \\ f_{2n}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$f_m = (D_r * g_m), \quad g_m(t) = B_0(t)\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - \theta_m)\right), \quad m = 1, \dots, 2n,$$

а функция B_0 с нулями θ_m определена в лемме 2, является оптимальным на классе $H^r_{\infty,\beta}$. При этом для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(\xi, H^r_{\infty,\beta}, I_\tau) = |(D_r * B_0)(\xi) - (D_r * B_0)(\tau_1)|.$$

Доказательство. Положим $\theta_0 := -(D_r * B_0)(\tau_1)$ и

$$B_P(t) := k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j)\right), \quad f_P := t_0 + D_r * B_P,$$

где $P = (t_0, t_1, \dots, t_{2n})$. Тогда при $P = P_0 := (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n})$ в силу соотношения двойственности (1) и предложения 1 функция f_{P_0} является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения $f(\xi)$ на классе $H^r_{\infty,\beta}$, а также и на классе $H^{r,\mathbb{R}}_{\infty,\beta}$. Положим $\tau_0 := \xi$,

$$\varphi_j(P) := f_P(\tau_j), \ j = 0, \dots, 2n, \quad \psi(P) := a_0(B_P).$$

Имеем

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_0} = 1, \ j = 0, \dots, 2n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = 0,$$

и при всех $m = 1, \dots, 2n$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m}\Big|_{P_0} = -\frac{K}{\pi} f_m(\tau_j), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_m}\Big|_{P_0} = -\frac{K}{\pi} a_0(g_m).$$

Из теоремы 1 вытекает, что коэффициенты оптимального метода восстановления определяются из системы (6) при условии, что определитель этой системы отличен от нуля. Если предположить противное, то должны найтись вещественные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$, не все равные нулю, для которых функция

$$g = \alpha_0 + D_r * \left(\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j\right)$$

обращается в нуль в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$ и, кроме того,

$$a_0\left(\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j\right) = 0.$$

Пусть $\tau_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{2n}\}$. Рассмотрим функцию

$$F := g - \rho f_{P_0}, \quad \rho = \frac{g(\tau_0)}{f_{P_0}(\tau_0)}.$$

Функция F имеет нули в точках $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{2n}$. Следовательно, по теореме Ролля $F^{(r)}$ имеет не менее $2n+1$ нулей на $\mathbb{T}$. Имеем

$$F^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j(t) - \rho B_0(t) = B_0(t)\left(\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - \theta_j)\right) - \rho\right).$$

Из леммы 1 вытекает, что $F^{(r)}$ не может иметь более, чем $2n$ нулей на $\mathbb{T}$. Полученное противоречие доказывает, что определитель системы (6) отличен от нуля.

Для доказательства оптимальности построенного метода на классе $H^r_{\infty,\beta}$ можно воспользоваться теми же рассуждениями, которые были проведены в доказательстве теоремы 2. $\square$

Обозначим матрицу системы (6) через A. Тогда оптимальный метод, построенный в теореме 3, будет иметь вид

$$f(\xi) \approx (A^{-1}\mathbf{G}(\xi), \mathbf{f}) = (\mathbf{G}(\xi), (A^*)^{-1}\mathbf{f}),$$

где $\mathbf{G}(\xi) = (1, f_1(\xi), \dots, f_{2n}(\xi))$, $\mathbf{f} = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{2n}), 0)$, а A^* — матрица, сопряженная к A (здесь $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n+1}$). Тем самым оптимальный метод может быть записан в виде

$$f(\xi) \approx d_0 + \sum_{m=1}^{2n} d_m (D_r * g_m)(\xi),$$

где $d_0, d_1, \dots, d_{2n}$ — решения системы

$$\begin{cases} d_0 + \displaystyle\sum_{m=1}^{2n} d_m (D_r * g_m)(\tau_j) = f(\tau_j), \quad j = 1, \dots, 2n, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{2n} d_m a_0(g_m) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть X^θ_{2n} — множество функций вида

$$c_0 + \sum_{n=1}^{2n} c_m (D_r * g_m),$$

где $c_1, \dots, c_{2n}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{2n} c_m a_0(g_m) = 0.$$

Тогда, учитывая (7), получаем

Следствие 2. *Пусть $0 \le \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$, а $0 \le \theta_1 < \dots < \theta_{2n} < 2\pi$ — определены леммой 2. Тогда функция $g(\xi) \in X^\theta_{2n}$, интерполирующая f в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$, является оптимальным методом восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{T}$, на классе $H^r_{\infty,\beta}$ по значениям в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$.*

Рассмотрим задачу оптимального восстановления для равномерной сетки

$$\tau^0_m := \frac{m-1}{n}\pi, \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Положим

$$t_{mr} := \begin{cases} \tau^0_m, & r = 2l, \\ \tau^0_m + \dfrac{\pi}{2n}, & r = 2l+1, \end{cases} \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Теорема 4. *При всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод*

$$f(\xi) \approx \widehat{f}_1 + \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\left(\sum_{j=2}^{2n}\frac{\widehat{f}_j}{\widehat{c}_j}e^{-i(m-1)(j-1)\pi/n}\right)(D_r*\sigma)(\xi - t_{mr}),$$

где

$$\left.\begin{aligned}\widehat{f}_j &= \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n} f(\tau_m^0)e^{i(m-1)(j-1)\pi/n},\\ \widehat{c}_j &= \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}(D_r*\sigma)(t_{mr})e^{i(m-1)(j-1)\pi/n},\end{aligned}\right\} \quad j = 1,\dots,2n,$$

является оптимальным методом восстановления на классе $H^r_{\infty,\beta}$, использующим информацию о значениях функции в равномерной сетке τ_m^0, $m = 1,\dots,2n$.

Доказательство. Пусть $r = 2l$. Тогда $\Phi^\beta_{n,r}(\tau_m^0) = 0$, $m = 1,\dots,2n$. Поскольку

$$\Phi^\beta_{n,r} = (D_r * \varphi^\beta_{n,0})\left(z - \frac{\pi}{2n}\right),$$

а

$$\varphi^\beta_{n,0}\left(z - \frac{\pi}{2n}\right) = -k^n\prod_{m=1}^{2n}\operatorname{sn}\left(\frac{k}{\pi}(z - \tau_m^0)\right),$$

то для системы точек τ_m^0 точки θ_m из леммы 2 совпадают с τ_m^0. Тем самым

$$g_m(z) = (-1)^{m+1}\sqrt{\lambda}\sigma(z - \tau_m^0).$$

Система (7) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} d_0 + \sqrt{\lambda}\displaystyle\sum_{m=1}^{2n}(-1)^{m+1}d_m(D_r*\sigma)(\tau_j^0 - \tau_m^0) = f(\tau_j), \quad j = 1,\dots,2n,\\ \displaystyle\sum_{m=1}^{2n}(-1)^{m+1}d_m = 0.\end{cases}$$

Положив $x_0 = d_0$, $x_m = \sqrt{\lambda}(-1)^{m+1}d_m$, $c_m = (D_r*\sigma)(\tau_m^0)$ и пользуясь периодичностью и четностью функции $D_r*\sigma$, приходим к системе

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_{2n}\\ 1 & c_{2n} & c_1 & \dots & c_{2n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & c_2 & c_3 & \dots & c_1\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_{2n-1}\\ x_{2n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\tau_1^0)\\ f(\tau_2^0)\\ \vdots\\ f(\tau_{2n}^0)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Сложив первые $2n$ равенств этой системы и пользуясь последним равенством, находим, что $x_0 = \widehat{f}_1$. Далее решение легко может быть найдено с помощью равенства

$$U^*CU = \begin{pmatrix} \widehat{c}_1 & & & 0 \\ & \widehat{c}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widehat{c}_{2n} \end{pmatrix},$$

где

$$U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{i(j-1)(m-1)\pi/n} \right\}_{j,m=1}^{2n}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{2n} \\ c_{2n} & c_1 & \dots & c_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

Если $r = 2l+1$, то

$$\Phi_{n,r}^{\beta} \left(\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) = 0, \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Поскольку

$$\Phi_{n,r}^{\beta} \left(z + \frac{\pi}{2n} \right) = (D_r * \varphi_{n,0}^{\beta})(z),$$

а

$$\varphi_{n,0}^{\beta}(z) = k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} \left(z - \left(\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right),$$

то точки θ_m из леммы 2 совпадают в этом случае с точками $\tau_m^0 + \dfrac{\pi}{2n}$. Следовательно,

$$g_m(z) = (-1)^m \sqrt{\lambda} \sigma \left(z - \left(\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) \right).$$

Далее рассуждения проводятся аналогично четному случаю. $\square$

4. Непериодический случай

В непериодическом случае классом Харди–Соболева H_∞^r будем называть множество функций, аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию $|f^{(r)}(z)| < 1$, $z \in D$. Через $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ обозначим класс функций из H_∞^r, вещественных в интервале $(-1,1)$. При $r = 0$ класс H_∞^r будем обозначать через H_∞.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in (-1,1)$, по значениям информационного оператора

$$I_\tau f = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+r})),$$

где $-1 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n+r} < 1$. В случае $r = 0$ решение рассматриваемой задачи было получено в работе [2], поэтому будем считать, что $r \geq 1$.

Для функций f, аналитических в единичном круге, положим

$$(T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z-\zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Очевидно, что $(T_r f)^{(r)} = f$, и, следовательно, $T_r f \in H_\infty^r$ при всех $f \in H_\infty$.

Из работы [12] вытекает следующий результат.

Предложение 2. *При всех* $-1 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n+r} < 1$ *найдутся такие* $\tau_1 < z_1 < \ldots < z_n < \tau_{n+r}$, *что для функции* $f_0 \in H_\infty^r$, *имеющей вид*

$$f_0 = P_{r-1} + T_r B_0,$$

где P_{r-1} *— полином степени* $r-1$, *а* B_0 *— произведение Бляшке порядка* n

$$B_0(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - z_j z},$$

выполняются равенства

$$f_0(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n+r.$$

Кроме того, при всех $\xi \in (-1, 1)$

$$\sup_{\substack{f \in H_\infty^r \\ f(\tau_1) = \ldots = f(\tau_{n+r}) = 0}} |f(\xi)| = |f_0(\xi)|. \tag{8}$$

Из равенства (8) сразу следует, что для погрешности оптимального восстановления значения $f(\xi)$ на классе H_∞^r справедливо равенство

$$e(\xi, H_\infty^r, I_\tau) = |f_0(\xi)|.$$

Оптимальный метод восстановления и в этом случае может быть получен с помощью теоремы 1.

Теорема 5. *При всех* $\xi \in (-1, 1)$ *метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n+r} C_j(\xi) f(\tau_j),$$

в котором $C_1(\xi), \ldots, C_{n+r}(\xi)$ *являются решениями системы*

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \tau_1 & \ldots & \tau_{n+r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{r-1} & \ldots & \tau_{n+r}^{r-1} \\ (T_r g_1)(\tau_1) & \ldots & (T_r g_1)(\tau_{n+r}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (T_r g_n)(\tau_1) & \ldots & (T_r g_n)(\tau_{n+r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ \vdots \\ C_{n+r}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \vdots \\ \xi^{r-1} \\ (T_r g_1)(\xi) \\ \vdots \\ (T_r g_n)(\xi) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$g_m(z) = B_0(z) \frac{1 - z^2}{(z - z_m)(1 - z_m z)}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

а функция B_0 *с нулями* z_m *определена в предложении* 2, *является оптимальным на классе* H_∞^r.

Доказательство. Для $P = (a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+r}$ положим

$$f_P(z) := \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + (T_r B_P)(z),$$

где

$$B_P(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - t_j}{1 - t_j z}.$$

Пусть полином P_{r-1} из предложения 2 имеет вид

$$P_{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^0 z^j.$$

Тогда при $P = P_0 := (a_0^0, a_1^0, \ldots, a_{r-1}^0, z_1, \ldots, z_n)$ функция f_{P_0} является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения $f(\xi)$ на классах H_∞^r и $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$. Положим $\tau_0 := \xi$,

$$\varphi_j(P) := f_P(\tau_j), \quad j = 0, \ldots, n+r.$$

Имеем при всех $j = 0, \ldots, n+r$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial a_m} = \tau_j^m, \quad m = 0, \ldots, r-1,$$
$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} = (T_r g_m)(\tau_j), \quad m = 1, \ldots, n+r.$$

Для получения оптимального метода на классе $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ остается применить теорему 1, предварительно проверив, что определитель системы (9) отличен от нуля. Если предположить, что этот определитель равен нулю, то найдутся $C_1, \ldots, C_{n+r}$, не все равные нулю, такие, что функция

$$F(z) := \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} z^j + \sum_{j=1}^{n} C_{j+r} (T g_j)(z)$$

обращается в нуль в точках $\tau_1, \ldots, \tau_{n+r}$. Тогда по теореме Ролля найдутся точки $\tau_1 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < \tau_{n+r}$, в которых $F^{(r)}$ обращается в нуль. Тем самым

$$F^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} C_{j+r} g_j(\xi_m) = 0, \quad m = 1, \ldots, n.$$

В [13] было доказано, что система функций

$$\frac{1}{(z - \xi_m)(1 - \xi_m z)}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

является чебышевской на множестве $(-1,1) \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Следовательно, $g_1, \ldots, g_m$ — чебышевская система на множестве $(-1,1)$ и $C_{r+1} = \ldots = C_{n+r} = 0$. Отсюда вытекает, что и $C_1 = \ldots = C_r = 0$.

Доказательство оптимальности построенного метода на классе H^r_∞ проводится по той же схеме, которая использовалась в теореме 2. $\square$

Для фиксированных $-1 < z_1 < \ldots < z_n < 1$ положим

$$X^{\mathbf{z}}_{n+r} := \operatorname{span}\{1, z, \ldots, z^{r-1}, (T_r g_1)(z), \ldots, (T_r g_n)(z)\}.$$

Аналогично следствию 2 получаем

Следствие 3. *Пусть $-1 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n+r} < 1$, а $\tau_1 < z_1 < \ldots < z_n < \tau_{n+r}$ — определены предложением 2. Тогда функция $g(\xi) \in X^{\mathbf{z}}_{n+r}$, интерполирующая f в точках $\tau_1, \ldots, \tau_{n+r}$, является оптимальным методом восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in (-1, 1)$, на классе H^r_∞ по значениям в точках $\tau_1, \ldots, \tau_{n+r}$.*

Литература

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19. №1. С. 29–40.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50 №6. С. 85–93.

[4] *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. №4. P. 789–801.

[5] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

[6] *Osipenko K. Yu.* Exact values of n-widths of Hardy-Sobolev classes // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 17–27.

[7] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.

[8] *Osipenko K. Yu., Wilderotter K.* Optimal information for approximating periodic functions // Math. Comput. 1997 V. 66. №220. P. 1579–1592.

[9] *Осипенко К. Ю.* Об n-поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. №4. С. 55–79.

[10] *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[11] *Wilderotter K.* Optimal approximation of periodic analytic functions with integrable boundary values // J. Approx. Theory. 1996. V. 84. №2. P. 236–246.

[12] *Fisher S. D.* Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions // Constr. Approx. 1989. V. 5. №2. P. 171–187.

[13] *Bojanov B. D., Grozev G. R.* A note on the optimal recovery of functions in H^∞ // J. Approx. Theory. 1988. V. 53. №1. P. 67–77.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского