

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

---

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Курсовая работа  
студента 532 группы  
Караваева П.Н.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ  
ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Научный руководитель:  
профессор Магарил-Ильяев Г. Г.

Москва – 2016

## Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Оценка снизу	5
4	Оценка сверху	7
5	Теорема	8
6	Список литературы	9

# 1 Введение

В данной курсовой работе рассматривается следующая задача. Нам известен некий конечный набор коэффициентов Фурье функции, заданной на двумерном торе. Необходимо узнать, какой минимальный набор из имеющихся в нашем распоряжении коэффициентов достаточно знать для восстановления самой функции, а какие данные не несут важного значения, и ими можно пренебречь. Таким образом, нашей задачей является поиск погрешности оптимального восстановления функции и нахождение оптимального метода, который мы избавим от лишних входящих данных, при этом не теряя точности восстановления.

Пусть  $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$  - двумерный тор. Обозначим через  $L_2(\mathbb{T}^2)$  пространство функций  $f(\cdot)$ , для которых конечна норма

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \left( \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Далее, рассмотрим пространство Соболева  $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}^2)$  функций, имеющих кусочно-непрерывные частные производные по каждой переменной. Через  $W_2^1(\mathbb{T}^2)$  обозначим функции  $f(\cdot)$  из  $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}^2)$  с дополнительным условием:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \left( a_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + a_2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2 \leq 1, \quad \text{где } a_1, a_2 > 0.$$

Для каждой функции из указанного пространства справедливо разложение в ряд Фурье:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1, k_2} \cdot e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)},$$

где коэффициенты Фурье выражаются формулами

$$c_{k_1, k_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции  $f(\cdot)$  из пространства  $W_2^1(\mathbb{T}^2)$  по заданному набору значений ее коэффициентов Фурье:  $c_{k_1, k_2}(f)$  в метрике  $L_2(\mathbb{T}^2)$ . Пусть  $C$  - набор векторов  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  и  $\text{card}(C) = N$ . О каждой функции  $f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2)$  нам известны ее коэффициенты Фурье  $c_{k_1, k_2}(f)$ , где  $(k_1, k_2) \in C$ . По этой информации мы хотим восстановить функцию  $f(\cdot)$  в метрике  $L_2(\mathbb{T}^2)$ .

Методом восстановления назовем произвольное отображение  $m : \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2)$ . Погрешностью такого метода назовем следующую величину:

$$e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m) = \sup_{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)} \|f(\cdot) - m(I_C f)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)},$$

где  $(I_C f)(\cdot) = \{c_{k_1, k_2}(f)\}_{(k_1, k_2) \in C}$ . Ищется такой метод, чтобы эта погрешность была минимальной, то есть чтобы она совпадала с погрешностью оптимального восстановления:

$$E(W_2^1, I_C) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2)} e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m).$$

Метод  $\tilde{m}$ , на котором достигается нижняя грань назовем оптимальным:

$$e(W_1^2(\mathbb{T}^2), I_C, \tilde{m}) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2)} e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m).$$

### 3 Оценка снизу

Сначала найдем оценку снизу на погрешность оптимального восстановления. Пусть  $m : \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2)$  – произвольный метод восстановления и  $f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2)$ . Имеем

$$\begin{aligned} 2\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} &= \|f(\cdot) - m(0) - (-f(\cdot) - m(0))\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \leq \\ &\leq \|f(\cdot) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} + \|-f(\cdot) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \leq 2e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m). \end{aligned}$$

По определению погрешность  $e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m)$  метода  $m$  не меньше, чем  $\|f(\cdot) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}$  и  $\|-f(\cdot) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}$ , то есть:

$$2e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m) \geq \|f(\cdot) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} + \|-f(\cdot) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \geq 2\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Исходя из того, что предыдущее неравенство справедливо для любой  $f(\cdot)$  из  $W_2^1(\mathbb{T}^2)$ , у которой коэффициенты Фурье равны 0, для произвольного метода  $m$  получаем:

$$e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m) \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2), \\ I_C f = 0}} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Неравенство выполнено для любого метода, а значит также будет верно:

$$E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2), \\ I_C f = 0}} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Для нахождения искомой оценки снизу остается найти значение верхней грани в правой части неравенства, для чего рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 \rightarrow \max, \quad f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2), \quad I_C f = 0.$$

Выражение,

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \left( a_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + a_2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2 \leq 1$$

согласно равенству Парсеваля равносильно следующему

$$\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2) |c_{k_1, k_2}|^2 \leq 1.$$

Тогда можем переписать экстремальную задачу следующим образом:

$$\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} |c_{k_1, k_2}|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2) |c_{k_1, k_2}|^2 \leq 1, \quad I_C f = 0, \quad f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2).$$

Рассмотрим свободный член ряда Фурье  $c_{0,0}$ . Предположим, что его значение нам не дано, то есть  $(0, 0) \notin C$ . В этом случае на этот коэффициент нет никаких ограничений, соответственно, взяв  $f(\cdot) = \text{const}$  и максимизируя  $c_{0,0}$ , приходим к тому, что значение экстремальной задачи, а следовательно, и погрешности оптимального восстановления равно  $+\infty$ .

Иными словами, если  $(0, 0) \notin C$ , то любой произвольный метод  $m$  будем оптимальным и  $E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) = +\infty$ .

В дальнейшем будем рассматривать те случаи, когда коэффициент  $c_{0,0}$  нам известен.

Тогда экстремальную задачу можно переписать в виде:

$$\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} |c_{k_1, k_2}|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2) |c_{k_1, k_2}|^2 \leq 1, \quad f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2).$$

Найдем минимальное значение выражения  $a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2$  на множестве  $\mathbb{Z}^2 \setminus C$ . Пусть оно достигается при  $k_1 = \tilde{k}_1$ ,  $k_2 = \tilde{k}_2$ , также обозначим  $p = a_1 \tilde{k}_1^2 + a_2 \tilde{k}_2^2$ . Следовательно,  $p \leq a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2$  для любого  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus C$ .

Тогда имеем следующую оценку:

$$\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} |c_{k_1, k_2}|^2 \leq \frac{1}{p} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2) |c_{k_1, k_2}|^2 \leq \frac{1}{p}.$$

Найденная оценка достигается на функции  $\tilde{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{i(\tilde{k}_1 x_1 + \tilde{k}_2 x_2)}$ , так как  $\|\tilde{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \frac{1}{\sqrt{p}}$ . То есть значение экстремальной задачи равно  $\frac{1}{\sqrt{p}}$ .

С учетом предыдущего оценка снизу для погрешности оптимального восстановления найдена:

$$E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \geq \frac{1}{\sqrt{a_1 \tilde{k}_1^2 + a_2 \tilde{k}_2^2}}.$$

## 4 Оценка сверху

Выберем для рассмотрения следующее семейство методов:

$$m(I_C)(x_1, x_2) = \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \\ a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 < p}} c_{k_1, k_2} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$$

Для всех  $f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2)$  получаем:

$$\|f(\cdot) - m(I_C f)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \sum_{a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 \geq p} |c_{k_1, k_2}|^2 \leq \frac{1}{p} \sum_{a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 \geq p} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2) |c_{k_1, k_2}|^2 \leq \frac{1}{p}$$

Отсюда следует, что

$$e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Следовательно,

$$E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \leq \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{a_1 \tilde{k}_1^2 + a_2 \tilde{k}_2^2}}$$

и доказана следующая теорема.

## 5 Теорема

Пусть  $C$  - конечное подмножество  $\mathbb{Z}^2$ . Если  $(0, 0) \notin C$ , то  $E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) = +\infty$  и любой метод является оптимальным. Если  $(0, 0) \in C$ , то  $E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) = \frac{1}{\sqrt{a_1 \tilde{k}_1^2 + a_2 \tilde{k}_2^2}}$ , где  $a_1 \tilde{k}_1^2 + a_2 \tilde{k}_2^2 = \min_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2)$ . При этом в качестве оптимального метода

можно взять  $m(I_C)(x_1, x_2) = \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \\ a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 < a_1 \tilde{k}_1^2 + a_2 \tilde{k}_2^2}} c_{k_1, k_2} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$ .



## 6 Список литературы

- [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. "Элементы теории функций и функционального анализа"
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. "Выпуклый анализ и его приложения"
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление операторов по неточной информации"