

## О НАИЛУЧШЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Работа посвящена построению наилучших (оптимальных) методов восстановления функций по их приближенно заданным коэффициентам Фурье. Такие методы строятся сразу для целого класса функций, что определяет их важную специфику: используются, вообще говоря, не все доступные для измерения (точного или неточного) коэффициенты Фурье, а те, которые используются, подвергаются некоторому “сглаживанию”. Это полностью согласуется с тем, что происходит в инженерной практике, связанной с цифровой обработкой сигналов: высокие частоты отбрасываются, а низкие тем или иным способом фильтруются.

Предлагаемый подход к определению оптимального метода идейно восходит к работам А. Н. Колмогорова о нахождении наилучшего подпространства среди всех подпространств фиксированной размерности, аппроксимирующего данный класс функций. Этот подход можно было бы назвать колмогоровской регуляризацией. Он является определенной альтернативой регуляризации по А. Н. Тихонову, где рассматриваются индивидуальные объекты и при этом не учитывается конкретное значение погрешности измерения (которое может быть и не близким к нулю) и не обсуждается вопрос о наилучших методах.

Структура статьи следующая. Мы начинаем с рассмотрения одного примера тихоновской регуляризации в задаче восстановления функции в точке по ее неточно заданным коэффициентам Фурье. Пример взят из классического университетского учебника по математическому анализу ([1]). Затем мы даем свой вариант решения данной задачи, основанный на колмогоровской регуляризации. После этого приводятся точные решения ряда задач оптимального восстановления функций и их производных в среднеквадратической метрике по точно или неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье. Отметим, что в работах [2]–[7] изучались задачи близкие к изложенным здесь, а именно, задачи оптимального восстановления функций (периодических и заданных на  $\mathbb{R}^d$ ) и операторов от них по неточно заданному спектру.

Библиография: 7 названий.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №13-01-12447 и №14-01-92004).

**Ключевые слова:** оптимальное восстановление, периодическая функция, экстремальная задача, коэффициенты Фурье

1. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

В [1] рассматривается следующая задача. Пусть  $2\pi$ -периодическая функция  $x(\cdot)$  такова, что ее ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где

$$\begin{aligned} a_k = a_k(x(\cdot)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ b_k = b_k(x(\cdot)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

сходится к  $x(\cdot)$  равномерно.

Вместо точных значений коэффициентов Фурье функции  $x(\cdot)$  известны их приближенные значения  $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$  такие, что

$$\frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2) \leq \delta^2,$$

где  $\delta > 0$ . По этой информации требуется восстановить значение функции  $x(\cdot)$  в некоторой точке  $\tau$ .

Нетрудно доказать, что как бы быстро не сходилась исходный ряд к  $x(\tau)$  и как бы не было мало  $\delta > 0$ , можно указать такие числа  $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ , что сумма ряда

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$$

будет отличаться от  $x(\tau)$  на любое наперед заданное число или даже расходиться.

Для решения проблемы восстановления функции  $x(\cdot)$  в точке  $\tau$  предлагается следующая процедура. В качестве приближенного значения  $x(\tau)$  рассматривается ряд

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha k^2} (\tilde{a}_k \cos k\tau + \tilde{b}_k \sin k\tau),$$

где  $\alpha$  того же порядка малости, что и  $\delta$  (например, можно положить  $\alpha = \delta$ ).

Доказывается, что если  $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$  (здесь и далее под  $\mathbb{T}$  понимается отрезок  $[-\pi, \pi]$  с идентифицированными концами) и  $x(\cdot)$  непрерывна в  $\tau$ , то данный ряд сходится к  $x(\tau)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

В заключительном замечании авторы учебника пишут: “... *должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при **имеющейся точности** измерения частотных характеристик извлечь **максимальную** информацию об изучаемом процессе.*” (Выделено жирным шрифтом нами.)

Подход, который мы называем колмогоровской регуляризацией, предполагает наличие некоторой априорной информации о функции  $x(\cdot)$ . Но тогда появляется возможность учитывать имеющуюся фиксированную точность измерения и ставить вопрос о нахождении наилучшего метода среди всех возможных.

Перейдем к точной постановке задачи. Обозначим через  $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$  пространство абсолютно непрерывных  $2\pi$ -периодических функций  $x(\cdot)$ , у которых производная  $\dot{x}(\cdot)$  принадлежит  $L_2(\mathbb{T})$ . Норма функции  $x(\cdot)$  в  $L_2(\mathbb{T})$  определяется так

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Если  $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ , то в каждой точке  $t \in \mathbb{T}$  функция  $x(\cdot)$  разлагается в ряд Фурье, который сходится к ней равномерно.

В пространстве  $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$  рассмотрим класс функций

$$W_2^1(\mathbb{T}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) : \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Обозначим через  $l_2$  пространство суммируемых с квадратом вещественных последовательностей со скалярным произведением

$$\langle y, y' \rangle = \frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k y'_k,$$

где  $y = (y_0, y_1, \dots)$ ,  $y' = (y'_0, y'_1, \dots)$  и с соответствующей нормой

$$\|y\|_{l_2} = \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Если функция  $x(\cdot)$  принадлежит  $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ , то ее коэффициенты Фурье принадлежат  $l_2$ . Пусть  $F: \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow l_2$  — преобразование Фурье  $x(\cdot)$ , т. е.  $Fx(\cdot) = (a_0(x(\cdot)), a_1(x(\cdot)), b_1(x(\cdot)), \dots)$  — набор коэффициентов Фурье функции  $x(\cdot)$ .

Предположим, что о каждой функции  $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$  нам известны приближенно ее коэффициенты Фурье, а именно, известен вектор

$$y = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots) \in l_2$$

такой, что

$$\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta,$$

где  $\delta > 0$ .

Любой метод восстановления  $x(\tau)$  должен сопоставлять вектору (наблюдению)  $y$  число, которое, согласно данному методу, есть некоторое приближение к  $x(\tau)$ . Таким образом, любой метод — это некоторая функция  $\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . *Погрешностью* данного метода назовем величину

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), y \in l_2 \\ \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Нас интересует величина

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = \inf_{\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}} e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод  $\widehat{\varphi}$ , на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т. е. такой метод  $\widehat{\varphi}$ , что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \widehat{\varphi}).$$

**Теорема 1.** *Для любого  $\delta > 0$*

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = (\widehat{a} + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \widehat{a}k^2)^2} \right)^{1/2},$$

где  $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta)$  — *единственное решение уравнения*

$$\frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} = \delta^2.$$

*Метод  $\widehat{\varphi}$ , действующий по правилу*

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \widehat{a}k^2} (\widetilde{a}_k \cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau),$$

*является оптимальным.*

Как видно из формулировки теоремы, для любого  $\delta > 0$  метод регуляризации, предложенный в [1], является оптимальным на классе  $W_2^1(\mathbb{T})$  при  $\alpha = \widehat{a}(\delta)$ . Кроме того, минимальная ошибка оценивания  $x(\tau)$  дается величиной  $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$ , которая стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ .

Заметим еще, что информация о функции  $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ , заключающаяся в том, что известен вектор  $y \in l_2$  такой, что  $\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta$  равносильна, в силу равенства Парсеваля, тому, что известна функция  $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$  такая, что  $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta$ .

*Доказательство теоремы 1.* Покажем сначала, что погрешность оптимального восстановления  $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$  не меньше значения задачи

$$x(\tau) \rightarrow \max, \quad x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), \quad \|Fx(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta, \quad (2)$$

т. е. величины верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть  $\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольный метод восстановления,  $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$  (тогда и  $-x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ ) и  $\|Fx(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta$ . Имеем

$$\begin{aligned} 2x(\tau) &\leq |x(\tau) - \varphi(0) - (-x(\tau) - \varphi(0))| \leq |x(\tau) - \varphi(0)| \\ &\quad + |-x(\tau) - \varphi(0)| \leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}) \\ \|Fx(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta}} |x(\tau) - \varphi(0)| \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), y \in l_2 \\ \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta}} |x(\tau) - \varphi(y)| = 2e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем указанным  $x(\cdot)$ , а затем справа по всем методам  $\varphi$ , получаем требуемое.

Теперь найдем значение задачи (2) (и тем самым получим оценку снизу для погрешности оптимального восстановления). Для этого удобно переписать задачу в терминах коэффициентов Фурье. Если  $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ , то согласно равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \|Fx(\cdot)\|_{l_2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \\ \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \|F\dot{x}(\cdot)\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

где  $a_k = a_k(x(\cdot))$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , и  $b_k = b_k(x(\cdot))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и тогда задача (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \leq 1, \\ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \delta^2. \quad (3) \end{aligned}$$

Заметим, что эта задача как задача на последовательностях  $(a_0, a_1, b_1, \dots)$  (всюду далее такую последовательность обозначаем  $\{a_k, b_k\}$ ) из  $l_2$ , для которых последовательность  $\{ka_k, kb_k\}$  также принадлежат  $l_2$  (обозначим пространство таких последовательностей через  $l_2^1$ ), равносильно задаче (2) в том смысле, что если  $\{a_k, b_k\} \in l_2^1$ , то существует единственная функция  $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ ,

для которой  $\{a_k, b_k\}$  — последовательность ее коэффициентов Фурье. Ограничения в (3) переходят в ограничения в (2),  $x(\tau)$  — это максимизируемый функционал в (3).

Если мы найдем решение задачи (3), то тем самым найдем и ее значение. Эта задача является выпуклой. Воспользуемся достаточными условиями существования решения. Функция Лагранжа задачи (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \lambda_1, \lambda_2) = & -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \\ & + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) + \lambda_2 \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

Если найдется допустимая в (3) (т. е. удовлетворяющая ограничениям) последовательность  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$  и множители Лагранжа  $\hat{\lambda}_1 \geq 0$ ,  $\hat{\lambda}_2 \geq 0$  такие, что

$$(a) \quad \min_{\{a_k, b_k\} \in l_2^1} \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}_1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - 1 \right) = 0, \quad \hat{\lambda}_2 \left( \frac{\hat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - \delta^2 \right) = 0,$$

то  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$  — решение задачи (3).

Проверка этого достаточно проста. Действительно, для любой допустимой последовательности  $\{a_k, b_k\}$ , используя условия (a) и (b), будем иметь

$$\begin{aligned} & -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \geq -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \\ & \quad + \hat{\lambda}_1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) - 1 \right) + \hat{\lambda}_2 \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) - \delta^2 \right) \\ & = \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 \delta^2 \geq \mathcal{L}(\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 \delta^2 \\ & = \frac{\hat{a}_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k \cos k\tau + \hat{b}_k \sin k\tau) + \hat{\lambda}_1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - 1 \right) \\ & \quad + \hat{\lambda}_2 \left( \frac{\hat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - \delta^2 \right) = -\frac{\hat{a}_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k \cos k\tau + \hat{b}_k \sin k\tau), \end{aligned}$$

т. е.  $(\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\})$  — решение задачи (3).

Далее рассуждаем эвристически, пытаясь понять, какой вид должна иметь последовательность  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$  и множители Лагранжа

$\widehat{\lambda}_1 \geq 0$ ,  $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$ , если они удовлетворяют условиям (a) и (b). Функция Лагранжа, как функция последовательности  $\{a_k, b_k\}$  является гладкой и из условия (a) следует, что производная этой функции в точке  $\{\widehat{a}_k, \widehat{b}_k\}$  равна нулю. Формально вычисляя эту производную, приходим к тому, что для любой последовательности  $\{a_k, b_k\}$  должно выполняться тождество

$$-\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) + 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\widehat{a}_k a_k + \widehat{b}_k b_k) + 2\widehat{\lambda}_2 \left( \frac{\widehat{a}_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k a_k + \widehat{b}_k b_k) \right) = 0. \quad (4)$$

Отсюда, беря последовательности вида  $(1, 0, \dots)$ ,  $(0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ , получаем, что

$$\widehat{a}_0 = \frac{1}{2\widehat{\lambda}_2}, \quad \widehat{a}_k = \frac{\cos k\tau}{2(\widehat{\lambda}_1 k^2 + \widehat{\lambda}_2)}, \quad \widehat{b}_k = \frac{\sin k\tau}{2(\widehat{\lambda}_1 k^2 + \widehat{\lambda}_2)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Если считать, что  $\widehat{\lambda}_1 > 0$  и  $\widehat{\lambda}_2 > 0$ , то для выполнения условия (b) необходимо, чтобы выражения в скобках в этом условии равнялись нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(\widehat{\lambda}_1 k^2 + \widehat{\lambda}_2)^2} = 1$$

и

$$\frac{\widehat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2\widehat{\lambda}_2^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\widehat{\lambda}_1 k^2 + \widehat{\lambda}_2)^2} \right) = \delta^2.$$

Обозначая  $a = \widehat{\lambda}_1 / \widehat{\lambda}_2$  и деля второе уравнение на первое, получаем, что

$$\frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} = \delta^2. \quad (6)$$

Теперь рассуждаем точно. Выражение в левой части (6) определяет функцию  $f$  (переменного  $a$ ) на  $(0, \infty)$ . Покажем, что для любого  $\delta > 0$  существует единственное  $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta) > 0$  такое, что  $f(\widehat{a}) = \delta^2$ . Для этого сначала докажем, что  $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$  и  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $n \geq 6$  таково, что  $1/n < \varepsilon$ . Так как, очевидно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + ak^2)^2} \right) = \frac{1}{2} + n < 2n + 1$$

и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} > n(2n+1),$$

то существует такое  $a_0 > 0$ , что для всех  $0 < a < a_0$  справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+ak^2)^2} < 2n+1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} > n(2n+1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+ak^2)^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}.$$

Далее, ясно, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}.$$

Складывая полученные неравенства и затем деля одно на другое, получаем, что для всех  $0 < a < a_0$

$$f(a) = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

т. е.  $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$ .

С другой стороны, для любого  $a > 0$

$$f(a) = \frac{\frac{a^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^{-1} + k^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^{-1} + k^2)^2}} > \frac{a^2}{2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}},$$

откуда сразу следует, что  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$ .

Для доказательства единственности покажем, что  $f$  строго монотонно возрастает на  $(0, \infty)$ . Для этого достаточно показать, что она строго монотонно возрастает на любом отрезке  $[a_0, a_1]$ , где  $0 < a_0 < a_1 < \infty$ . На каждом таком отрезке выполнены стандартные условия о почленном дифференцировании рядов, входящих в определение  $f$ , и мы имеем для  $a \in [a_0, a_1]$

$$f'(a) = \frac{2g(a)}{\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} \right)^2},$$

где

$$\begin{aligned}
g(a) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(1+ak^2)^3} \\
&> - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(1+ak^2)^3} = - \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} + \sum_{j,k=1}^{\infty} \beta_{jk},
\end{aligned}$$

а

$$\alpha_{jk} = \frac{j^2 k^2}{(1+aj^2)^3 (1+ak^2)^2}, \quad \beta_{jk} = \frac{k^4}{(1+aj^2)^2 (1+ak^2)^3}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
-\alpha_{jk} + \beta_{kj} &= \frac{j^2(j^2 - k^2)}{(1+aj^2)^3 (1+ak^2)^2}, \\
-\alpha_{kj} + \beta_{jk} &= \frac{k^2(k^2 - j^2)}{(1+ak^2)^3 (1+aj^2)^2}
\end{aligned}$$

и тогда получаем, что

$$\begin{aligned}
& -\alpha_{jk} + \beta_{kj} - \alpha_{kj} + \beta_{jk} \\
&= \frac{j^2 - k^2}{(1+aj^2)^2 (1+ak^2)^2} \left( \frac{j^2}{1+aj^2} - \frac{k^2}{1+ak^2} \right) \\
&= \frac{(j^2 - k^2)^2}{(1+aj^2)^3 (1+ak^2)^3} \geq 0.
\end{aligned}$$

Тем самым  $g(a) > 0$  и значит,  $f'(a) > 0$  для любого  $a \in (0, \infty)$ . Единственность доказана.

Пусть  $\delta > 0$  и  $\hat{a} = \hat{a}(\delta)$  — единственное решение уравнения  $f(a) = \delta^2$ . Полагаем

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_2(\hat{a}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+\hat{a}k^2)^2} \right)^{1/2},$$

$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1(\hat{a}) = \hat{a} \hat{\lambda}_2$  и пусть с данными  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  числа  $\hat{a}_0, \hat{a}_k, \hat{b}_k, k \in \mathbb{N}$ , определены формулами (5).

Последовательность  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$ , как легко видеть, принадлежат  $l_2^1$  и элементарный подсчет показывает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) = 1, \quad \frac{\hat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) = \delta^2, \quad (7)$$

так что она допустима в задаче (3).

Вторая и третья суммы в выражении (4) являются скалярными произведениями соответственно последовательностей  $\{k\widehat{a}_k, k\widehat{b}_k\}$ ,  $\{ka_k, kb_k\}$  и  $\{\widehat{a}_k, \widehat{b}_k\}$ ,  $\{a_k, b_k\}$  и поэтому имеют смысл. Подставляя в (4) выражения для  $\widehat{\lambda}_1$ ,  $\widehat{\lambda}_2$  и  $\widehat{a}_0$ ,  $\widehat{a}_k$ ,  $\widehat{b}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , после элементарных преобразований видим, что это верное равенство для любой последовательности  $\{a_k, b_k\} \in l_2^1$ .

Пусть функция  $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$  такова, что  $\{\widehat{a}_k, \widehat{b}_k\}$  — последовательность ее коэффициентов Фурье. Тогда (4), вместе с равенством Парсеваля, означает, что для любой функции  $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$  справедливо равенство

$$x(\tau) = 2\widehat{\lambda}_1 \langle F\widehat{x}(\cdot), Fx(\cdot) \rangle + 2\widehat{\lambda}_2 \langle F\widehat{x}(\cdot), Fx(\cdot) \rangle. \quad (8)$$

Если подставить сюда вместо  $x(\cdot)$  функцию  $\widehat{x}(\cdot)$ , то получим

$$\widehat{x}(\tau) = (\widehat{a} + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \widehat{a}k^2)^2} \right)^{1/2}.$$

Величина слева — значение максимизируемого функционала в задаче (2) на функции  $\widehat{x}(\cdot)$  и поэтому значение самой задачи не меньше этой величины.

По доказанному, погрешность оптимального восстановления  $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$  не меньше значения задачи (2) и значит,

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) \geq (\widehat{a} + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \widehat{a}k^2)^2} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Заметим, что на самом деле, функция  $\widehat{x}(\cdot)$  являются решением задачи (2), но нам это не нужно и поэтому на этом не будем останавливаться.

Оценим теперь сверху величину  $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$  и проверим, что метод  $\widehat{\varphi}$  из формулировки теоремы является оптимальным. Оценим погрешность этого метода. Пусть  $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ ,  $y = (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1, \dots) \in l_2$  и  $\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta$ . Нетрудно убедиться, что  $\widehat{\varphi}(y) = 2\widehat{\lambda}_2 \langle F\widehat{x}(\cdot), y \rangle$ . Тогда в силу тождества (8), неравенства Коши–Буняковского, равенства Парсеваля, равенств (7) и условий на  $x(\cdot)$  и  $y$  имеем

$$\begin{aligned} |x(\tau) - \widehat{\varphi}(y)| &= |2\widehat{\lambda}_1 \langle F\widehat{x}(\cdot), Fx(\cdot) \rangle + 2\widehat{\lambda}_2 \langle F\widehat{x}(\cdot), Fx(\cdot) - y \rangle| \\ &\leq 2\widehat{\lambda}_1 \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{l_2} \|Fx(\cdot)\|_{l_2} + 2\widehat{\lambda}_2 \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{l_2} \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \\ &\leq 2\widehat{\lambda}_2 \widehat{a} + 2\widehat{\lambda}_2 \delta^2 = (\widehat{a} + \delta^2) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \widehat{a}k^2)^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и (9) следует оптимальность метода  $\widehat{\varphi}$  и нужное выражение для величины  $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$ .  $\square$

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

В предыдущем параграфе информация о коэффициентах Фурье состояла в том, что все они приближенно известны в метрике  $l_2$ . С практической точки зрения более естественной представляется ситуация, когда имеется возможность измерить приближенно каждый из некоторого конечного набора коэффициентов Фурье функции. В данном параграфе рассматривается именно этот случай, причем восстанавливать функцию и ее производные мы будем не в точке, а “целиком” в метрике  $L_2(\mathbb{T})$ . При этом возникает интересный эффект, заключающийся в том, что не все приближенно измеренные коэффициенты Фурье используются в оптимальном методе восстановления. Для того, чтобы показать, что этот эффект связан не только с наличием погрешности в исходных данных, мы сначала рассматриваем случай, когда известен конечный набор точно измеренных коэффициентов Фурье.

**2.1. Восстановление в среднеквадратической метрике по точным значениям коэффициентов Фурье.** Пусть  $n$  — натуральное. Обозначим через  $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$  пространство  $2\pi$ -периодических функций  $x(\cdot)$ , у которых  $(n-1)$ -ая производная абсолютно непрерывна и  $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ . В пространстве  $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$  рассмотрим класс функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}) \mid \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Мы ставим следующую задачу. Пусть  $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  и  $B \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  — конечные множества (одно из них может быть пустым) и о каждой функции  $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$  нам известны ее коэффициенты Фурье  $\{a_k\}_{k \in A}$  и  $\{b_k\}_{k \in B}$ , т. е.  $x(\cdot)$  соответствует набор  $F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_k\}_{k \in A}, \{b_k\}_{k \in B})$  из  $N$  чисел, где  $N = \text{card } A + \text{card } B$ . Как наилучшим образом восстановить функции из  $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$  и их  $r$ -ые производные,  $1 \leq r \leq n-1$ , в метрике  $L_2(\mathbb{T})$ , используя данную информацию? Поступаем следующим образом. Любой метод  $\varphi$ , призванный восстановить  $x^{(r)}(\cdot)$  ( $0 \leq r \leq n-1$ ) по набору  $F_{A,B}x(\cdot)$ , сопоставляет этому набору функцию  $\varphi(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ , т. е.  $\varphi$  есть отображение из  $\mathbb{R}^N$  в  $L_2(\mathbb{T})$ .

Погрешностью метода  $\varphi$  назовем величину

$$e(D^r, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \varphi) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})} \|x^{(r)}(\cdot) - \varphi(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

( $D^r$  символизирует оператор  $r$ -кратного дифференцирования,  $D^0$  — тождественный оператор), представляющую собой максимальное на классе  $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$  отклонение функции  $x^{(r)}(\cdot)$  от функции, которая ее “восстанавливает” согласно данному методу.

Нас, как и раньше, интересует тот метод, погрешность которого минимальна. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \varphi),$$

которую мы называем *погрешностью оптимального восстановления* и те методы, на которых нижняя грань достигается, т. е. такие методы  $\widehat{\varphi}$ , что

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \widehat{\varphi}).$$

Подобные методы будем называть *оптимальными методами восстановления*.

Свяжем со множествами  $A$  и  $B$  число

$$k_0 = k_0(A, B) = \min\left\{ \min_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k, \min_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k \right\}.$$

Обозначим через  $\chi_r$  функцию на  $\mathbb{Z}_+$ , равную единице в нуле и нулю в остальных точках.

**Теорема 2.** *Если  $0 \notin A$ , то*

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = +\infty.$$

*Если  $1 \leq r \leq n - 1$  или  $r = 0$  и  $0 \in A$ , то*

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \frac{1}{k_0^{n-r}}$$

*и для любых наборов чисел  $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in A}$  и  $\beta = \{\beta_k\}_{k \in B}$  таких, что*

$$|\alpha_k - 1| \leq \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n-r}, \quad k \in A, \quad |\beta_k - 1| \leq \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n-r}, \quad k \in B,$$

*метод*

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}(F_{A,B}x(\cdot))(t) = & \frac{a_0}{2} \chi_r + \sum_{k \in A \setminus \{0\}} k^r \alpha_k a_k \cos(kt + \pi r/2) \\ & + \sum_{k \in B} k^r \beta_k b_k \sin(kt + \pi r/2) \end{aligned}$$

*является оптимальным.*

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

1. Условие  $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = +\infty$ , если  $0 \notin A$  означает, что никаким способом нельзя восстановить функции из класса  $W_2^n(\mathbb{T})$ , и в этом смысле любой метод оптимален.

2. Все оптимальные методы линейны и существует оптимальный метод, который использует коэффициенты Фурье только с номерами до  $k_0 - 1$  (нетрудно проверить, что при  $k \geq k_0$  коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  можно положить равными нулю). При этом, если  $k_0 = 1$  и  $r \geq 1$ , то оптимальный метод нулевой.

3. Среди оптимальных методов есть “естественные”, когда  $\alpha_k = \beta_k = 1$ , т. е. в ряд Фурье подставляются известные коэффициенты Фурье.

*Доказательство теоремы 2.* Пусть  $0 \leq r \leq n - 1$ . Как и при доказательстве предыдущей теоремы, начнем с оценки снизу величины  $E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B})$ . Те же, фактически, рассуждения, что и раньше приводят к соотношению

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}) \\ F_{A,B}x(\cdot) = 0}} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \quad (10)$$

Пусть  $r = 0$ . Если  $0 \notin A$ , то любая функция  $x(\cdot)$ , являющаяся константой, удовлетворяет условиям:  $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$  и  $F_{A,B}x(\cdot) = 0$ , а величина  $\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$  может быть сделана сколь угодно большой. Тогда из (10) следует, что  $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = +\infty$ .

Пусть теперь  $0 \in A$ . Если  $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus A\}$ , то рассмотрим функцию  $t \mapsto x_0(t) = k_0^{-n} \cos k_0 t$ . Легко проверить, что  $x_0(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ ,  $F_{A,B}x_0(\cdot) = 0$  и  $\|x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = k_0^{-n}$ . Если же  $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus B\}$ , то надо рассмотреть функцию  $t \mapsto k_0^{-n} \sin k_0 t$ , которая обладает теми же свойствами. Таким образом, правая часть (10) не меньше  $k_0^{-n}$  и значит,

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) \geq \frac{1}{k_0^n}. \quad (11)$$

Оценим теперь сверху величину  $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B})$  и проверим оптимальность методов  $\widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}$  из формулировки теоремы.

Пусть  $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ . Используя равенство Парсеваля, будем иметь

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \varphi_{\alpha,\beta}(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{k \in A \setminus \{0\}} (1 - \alpha_k)^2 a_k^2 + \sum_{k \in B} (1 - \beta_k)^2 b_k^2 \\ &+ \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A} a_k^2 + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B} b_k^2 \leq \max_{k \in A \setminus \{0\}} \frac{(1 - \alpha_k)^2}{k^{2n}} \sum_{k \in A \setminus \{0\}} k^{2n} a_k^2 \\ &+ \max_{k \in B} \frac{(1 - \beta_k)^2}{k^{2n}} \sum_{k \in B} k^{2n} b_k^2 + \frac{1}{k_0^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k^{2n} a_k^2 + \frac{1}{k_0^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k^{2n} b_k^2. \end{aligned}$$

Учитывая условия на векторы  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем, что для любого метода  $\widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}$  с такими наборами  $\alpha$  и  $\beta$

$$\|x(\cdot) - \widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq \frac{1}{k_0^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{k_0^{2n}},$$

справедливому для всех  $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ . Следовательно,

$$e(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}) \leq \frac{1}{k_0^n}.$$

Сравнивая это с оценкой (11), получаем утверждения теоремы для случая, когда  $r = 0$  и  $0 \in A$ .

Пусть теперь  $1 \leq r \leq n - 1$ . Беря те же функции  $t \mapsto k_0^{-n} \cos k_0 t$  и  $t \mapsto k_0^{-n} \sin k_0 t$ , что и выше, получаем, что величина справа в (10) не меньше  $k_0^{-(n-r)}$  и значит,

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) \geq \frac{1}{k_0^{n-r}}. \quad (12)$$

Оценка погрешности метода  $\widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}$  получается совершенно аналогично тому как это сделано выше для  $r = 0$ .  $\square$

**2.2. Восстановление в среднеквадратической метрике по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью.** Здесь рассматривается задача восстановления функции и ее производных на том же классе  $W_2^n(\mathbb{T})$ , с теми же множествами  $A$  и  $B$ , но вместо точных значений коэффициентов Фурье  $a_k = a_k(x(\cdot))$ ,  $k \in A$  и  $b_k = b_k(x(\cdot))$ ,  $k \in B$ , функции  $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$  известны их приближенные значения, т. е. такие числа  $\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}$  и  $\{\tilde{b}_k\}_{k \in B}$ , что

$$|a_k - \tilde{a}_k| \leq \delta, \quad k \in A, \quad |b_k - \tilde{b}_k| \leq \delta, \quad k \in B.$$

Удобно записать это по другому. Обозначим через  $l_\infty^N$  пространство  $\mathbb{R}^N$  с нормой  $\|y\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N-1} |y_j|$ , где  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ .

Будем считать, для определенности, что

$$F_{A,B}x(\cdot) = (a_{k_0}, a_{k_1}, \dots, a_{k_{N_1}}, b_{l_1}, \dots, b_{l_{N_2}}),$$

где  $k_0 < \dots < k_{N_1}$  и  $l_1 < \dots < l_{N_2}$ ,  $N_1 + 1 + N_2 = N$ . Тогда можно сказать, что нам известен вектор  $y = (y_0, \dots, y_N)$  такой, что  $\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_\infty \leq \delta$ .

*Погрешностью* метода  $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$  в рассматриваемом случае называется величина

$$e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}), y \in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_\infty \leq \delta}} \|x^{(r)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

*Погрешностью оптимального восстановления* назовем величину

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi: l_\infty^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi),$$

а метод  $\widehat{\varphi}$ , на котором достигается нижняя грань, будем по-прежнему называть *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$\widehat{p} = \widehat{p}(\delta) = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^{2n} < 1 \right\}$$

и  $p_0 = p_0(A, B, \delta) = \min\{\widehat{p}, k_0 - 1\}$ , где  $k_0 = k_0(A, B)$  определено перед теоремой 2.

Функция  $\chi_r$  на  $\mathbb{Z}_+$  также определена перед теоремой 2.

**Теорема 3.** Если  $0 \notin A$ , то

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty.$$

Если  $1 \leq r \leq n-1$  или  $r=0$  и  $0 \in A$ , то

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\frac{1}{(p_0+1)^{2(n-r)}} + \frac{\delta^2}{2}\chi_r + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} k^{2r} \left(1 - \left(\frac{k}{p_0+1}\right)^{2(n-r)}\right)}$$

и метод

$$\widehat{\varphi}(\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B})(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2}\chi_r + \sum_{k=1}^{p_0} \left(1 - \left(\frac{k}{p_0+1}\right)^{2(n-r)}\right) k^r (\tilde{a}_k \cos(kt + \pi r/2) + \tilde{b}_k \sin(kt + \pi r/2))$$

является оптимальным.

Важно отметить, что если  $\widehat{p} \leq k_0 - 1$ , то коэффициенты Фурье с номерами большими  $\widehat{p}$  можно отбросить — оптимальный метод их не использует.

Заметим еще, что при  $\delta = 0$  формально получается значение погрешности оптимального восстановления из предыдущей теоремы, так как в этом случае естественно считать, что  $p_0 = k_0 - 1$ . Кроме того, при  $\delta = 0$  получается один из методов, указанных в теореме 2, а именно, когда

$$\alpha_k = \beta_k = 1 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^{2(n-r)}, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1,$$

а остальные  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  равны нулю.

*Доказательство теоремы 3.* Пусть  $0 \leq r \leq n-1$ . Пользуясь тем же приемом, что и при доказательстве теоремы 1, нетрудно показать, что справедлива следующая оценка для погрешности оптимального восстановления

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}) \\ \|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty \leq \delta}} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \quad (13)$$

Пусть  $r = 0$ . Заметим, что если  $0 \notin A$ , то для любой функции  $x(\cdot)$ , являющейся константой, выполняются условия  $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$  и  $\|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty \leq \delta$  ( $F_{A,B}x(\cdot)$  — нулевой вектор) и тем самым правая часть в (13) может быть сделана сколь угодно большой, т. е.  $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty$ .

Пусть теперь  $0 \in A$ . Найдем значение величины справа в (13). Рассмотрим для этого следующую экстремальную задачу

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \rightarrow \max, \quad x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}), \quad \|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty \leq \delta. \quad (14)$$

Мы найдем решение этой задачи, а тем самым и найдем значение указанной величины.

Переходя к коэффициентам Фурье, используя равенство Парсеваля, получим, что квадрат значения задачи (14) равен значению такой задачи

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) \leq 1, \\ a_k^2 \leq \delta^2, \quad k \in A, \quad b_k^2 \leq \delta^2, \quad k \in B, \quad (15)$$

где  $a_k = a_k(x(\cdot))$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  и  $b_k = b_k(x(\cdot))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и  $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$ .

Заметим, аналогично тому как это было сделано относительно задач (2) и (3), что задача (15), как задача на последовательностях  $\{a_k, b_k\}$  из  $l_2$  таких, что последовательность  $\{k^n a_k, k^n b_k\}$  также принадлежит  $l_2$  (обозначим множество таких последовательностей через  $l_2^n$ ), равносильна задаче (14) с заменой  $\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$  на  $\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2$ .

Задача (15) является выпуклой. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \lambda, \{\lambda_k\}_{k \in A}, \{\mu_k\}_{k \in B}) = -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \\ + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k \in A} \lambda_k a_k^2 + \sum_{k \in B} \mu_k b_k^2.$$

Если найдется допустимая в задаче (15) последовательность  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$  и множители Лагранжа  $\hat{\lambda} \geq 0$ ,  $\hat{\lambda}_k \geq 0$ ,  $k \in A$  и  $\hat{\mu}_k \geq 0$ ,  $k \in B$ , такие, что

$$(a) \quad \min_{\{a_k, b_k\} \in l_2^n} \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \hat{\lambda}, \{\hat{\lambda}_k\}_{k \in A}, \{\hat{\mu}_k\}_{k \in B}) \\ = \mathcal{L}(\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}, \hat{\lambda}, \{\hat{\lambda}_k\}_{k \in A}, \{\hat{\mu}_k\}_{k \in B}),$$

$$(b) \quad \hat{\lambda} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - 1 \right) = 0, \quad \hat{\lambda}_k (\hat{a}_k^2 - \delta^2) = 0, \quad k \in A, \\ \hat{\mu}_k (\hat{b}_k^2 - \delta^2) = 0, \quad k \in B,$$

то  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$  — решение задачи (15). Проверка этого факта проводится точно так же, как и в предыдущем параграфе.

Предъявим теперь последовательность  $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$ , допустимую в (15) и множители Лагранжа  $\hat{\lambda} \geq 0$ ,  $\hat{\lambda}_k \geq 0$ ,  $k \in A$  и  $\hat{\mu}_k \geq 0$ ,  $k \in B$ , такие, что выполнены условия (a) и (b).

Пусть  $p_0 = \widehat{p} < k_0 - 1$ . Положим  $\widehat{a}_k = \delta$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_0$ ,  $\widehat{b}_k = \delta$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ ,  $\widehat{a}_{p_0+1} = \widehat{b}_{p_0+1} = \alpha$ , где

$$\alpha = \frac{\sqrt{1/2 - \delta^2 \sum_{k=0}^{p_0} k^{2n}}}{(p_0 + 1)^n}$$

и  $\widehat{a}_k = \widehat{b}_k = 0$ , если  $k > p_0 + 1$ .

Проверим, что  $\alpha \leq \delta$ . Если это не так, то мы имели бы неравенство

$$1 - 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0} k^{2n} > 2\delta^2 (p_0 + 1)^{2n},$$

или

$$2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0+1} k^{2n} < 1$$

в противоречие с тем, что  $p_0 = \widehat{p}$ .

Далее

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n} + \frac{1 - 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0} k^{2n}}{(p_0 + 1)^{2n}} (p_0 + 1)^{2n} = 1$$

и тем самым  $\{\widehat{a}_k, \widehat{b}_k\}$  — допустимая последовательность в задаче (15).

Пусть теперь  $p_0 = k_0 - 1$ . Если  $k_0 = \min_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k$  ( $k_0 = \min_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k$ ), то полагаем  $\widehat{a}_k = \delta$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_0$ ,  $\widehat{b}_k = \delta$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ ,  $\widehat{a}_{p_0+1} = \sqrt{2}\alpha$  ( $\widehat{b}_{p_0+1} = \sqrt{2}\alpha$ ), а остальные коэффициенты нулевые.

Эти последовательности допустимы в задаче (15). Проверка такая же, как в предыдущем случае, но в данной ситуации  $p_0 + 1 = k_0 \notin A$  и поэтому неравенство  $|\sqrt{2}\alpha| \leq \delta$  не обязательно выполняется.

Положим теперь  $\widehat{\lambda} = (p_0 + 1)^{-2n}$ ,  $\widehat{\lambda}_0 = 1/2$ ,  $\widehat{\lambda}_k = \widehat{\mu}_k = 1 - \widehat{\lambda}k^{2n}$ ,  $k = 1, \dots, p_0$  и  $\widehat{\lambda}_k = \widehat{\mu}_k = 0$ ,  $k > p_0$ . Легко видеть, что все множители Лагранжа неотрицательны. Проверим выполнимость условия (а). Для всех последовательностей  $\{a_k, b_k\} \in l_2^n$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \widehat{\lambda}, \{\widehat{\lambda}_k\}_{k \in A}, \{\widehat{\mu}_k\}_{k \in B}) &= \sum_{k=1}^{p_0} (-1 + \widehat{\lambda}k^{2n} + \widehat{\lambda}_k) a_k^2 \\ &+ \sum_{k=1}^{p_0} (-1 + \widehat{\lambda}k^{2n} + \widehat{\mu}_k) b_k^2 + \sum_{k=p_0+1}^{\infty} (-1 + \widehat{\lambda}k^{2n}) (a_k^2 + b_k^2) \\ &= \sum_{k=p_0+1}^{\infty} (-1 + \widehat{\lambda}k^{2n}) (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=p_0+2}^{\infty} (-1 + \widehat{\lambda}k^{2n}) (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Выражение справа неотрицательно в силу определения  $\widehat{\lambda}$ . С другой стороны, рассмотренных выше последовательности функций  $\{\widehat{a}_k, \widehat{b}_k\}$ , начиная с номера  $p_0 + 2$ , нулевые и поэтому функция Лагранжа на этих функциях равна нулю. Это доказывает условие (a).

Справедливость условия (b) проверяется элементарно.

Итак, последовательности  $\{\widehat{a}_k, \widehat{b}_k\}$  являются решениями задачи (15) (для соответствующих случаев) и ее значение для любого из этих случаев таково

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) &= \frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{1 - 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n}}{(p_0 + 1)^{2n}} \\ &= \frac{\delta^2}{2} + \widehat{\lambda} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} (1 - \widehat{\lambda} k^{2n}) = \widehat{\lambda} + \delta^2 \left( \widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda} + \delta^2 \left( \widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \right)}. \quad (16)$$

Займемся теперь оценкой сверху и построение оптимальных методов. Если метод  $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$  оптимален, то это означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\|x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \rightarrow \max, \quad \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{\infty} \leq \delta, \quad y \in l_{\infty}^N, \\ x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}) \quad (17)$$

равна  $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta)$ .

Каждым наборам  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p_0})$  и  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{p_0})$  сопоставим метод  $\varphi_{\alpha, \beta}: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ , действующий по правилу

$$\varphi_{\alpha, \beta}(y)(t) = \frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} (\alpha_k y_k \cos kt + \beta_k y_{N_1+k} \sin kt),$$

где  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ . Будем искать оптимальные методы среди методов именно такого вида (если  $p_0 = 0$ , то сумма в определении метода нулевая).

Переходя к коэффициентам Фурье, квадрат значения задачи (17) для метода  $\varphi_{\alpha, \beta}$  равен, согласно равенству Парсеваля, значению

такой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{(a_0 - y_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} ((a_k - \alpha_k y_k)^2 + (b_k - \beta_k y_{N_1+k})^2) \\ & + \sum_{k=p_0+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \rightarrow \max, \quad y = (y_0, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{R}^N, \\ & \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{\infty} \leq \delta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) \leq 1, \quad (18) \end{aligned}$$

где  $\{a_k, b_k\} \in l_2^n$ .

Оценим по неравенству Коши–Буняковского слагаемые под знаком первой суммы в максимизируемом функционале, учитывая, что  $\widehat{\lambda} > 0$  и  $\widehat{\lambda}_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ ,

$$\begin{aligned} (a_k - \alpha_k y_k)^2 &= \left( \frac{1 - \alpha_k}{\sqrt{\widehat{\lambda}}} \sqrt{\widehat{\lambda}} k^n a_k + \frac{\alpha_k}{\sqrt{\widehat{\lambda}_k}} \sqrt{\widehat{\lambda}_k} (a_k - y_k) \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\widehat{\lambda} k^{2n}} + \frac{\alpha_k^2}{\widehat{\lambda}_k} \right) (\widehat{\lambda} k^{2n} a_k^2 + \widehat{\lambda}_k (a_k - y_k)^2) \end{aligned}$$

и аналогично

$$(b_k - \beta_k y_{N_1+k})^2 \leq \left( \frac{(1 - \beta_k)^2}{\widehat{\lambda} k^{2n}} + \frac{\beta_k^2}{\widehat{\lambda}_k} \right) (\widehat{\lambda} k^{2n} b_k^2 + \widehat{\lambda}_k (b_k - y_{N_1+k})^2).$$

Складывая полученные оценки и обозначая

$$S_{\alpha, \beta} = \max_{1 \leq k \leq p_0} \left( \frac{(1 - \alpha_k)^2}{\widehat{\lambda} k^{2n}} + \frac{\alpha_k^2}{\widehat{\lambda}_k}, \frac{(1 - \beta_k)^2}{\widehat{\lambda} k^{2n}} + \frac{\beta_k^2}{\widehat{\lambda}_k} \right),$$

получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{p_0} ((a_k - \alpha_k y_k)^2 + (b_k - \beta_k y_{N_1+k})^2) \\ & \leq S_{\alpha, \beta} \left( \widehat{\lambda} \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k ((a_k - y_k)^2 + (b_k - y_{N_1+k})^2) \right) \\ & \leq S_{\alpha, \beta} \left( \widehat{\lambda} \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \right). \end{aligned}$$

Далее, если  $k \geq p_0 + 1$ , то  $k^{-2n} \leq (p_0 + 1)^{-2n} = \widehat{\lambda}$  и поэтому

$$\sum_{p_0+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{p_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \widehat{\lambda} \sum_{p_0+1}^{\infty} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Если наборы  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что  $S_{\alpha, \beta} \leq 1$ , то из полученных оценок вытекает, что максимизируемый функционал в (18) не превосходит

ВЕЛИЧИНЫ

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^2}{2} + \widehat{\lambda} \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k + \widehat{\lambda} \sum_{p_0+1}^{\infty} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) \\
&= \frac{\delta^2}{2} + \widehat{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \leq \frac{\delta^2}{2} + \widehat{\lambda} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \\
&= \widehat{\lambda} + \delta^2 \left( \widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \right),
\end{aligned}$$

т. е.

$$e(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) \leq \sqrt{\widehat{\lambda} + \delta^2 \left( \widehat{\lambda}_0 + 2 \sum_{k=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_k \right)}.$$

Вместе с оценкой (16) это означает, что метод  $\varphi_{\alpha,\beta}$  оптимален.

Покажем, что наборы  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых  $S_{\alpha,\beta} \leq 1$ , существуют. Для каждого  $k = 1, \dots, p_0$  выберем  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  так, чтобы они доставляли минимум выражениям в скобках в определении  $S_{\alpha,\beta}$ . Легко подсчитать, что минимум достигается в точках

$$\alpha_k = \beta_k = \frac{\widehat{\lambda}_k}{\widehat{\lambda}_k + \widehat{\lambda} k^{2n}} = 1 - \left( \frac{k}{p_0 + 1} \right)^{2n}, \quad k = 1, \dots, p_0. \quad (19)$$

Тогда для таких  $\alpha$  и  $\beta$

$$S_{\alpha,\beta} = \max_{1 \leq k \leq p_0} \frac{1}{\widehat{\lambda}_k + \widehat{\lambda} k^{2n}} = 1.$$

Итак, если векторы  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p_0})$  и  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{p_0})$  определены равенством (19), то соответствующий метод является оптимальным. Это в точности тот метод, который указан в теореме, если перейти к обозначениям  $\widetilde{a}_k$  и  $\widetilde{b}_k$ . Утверждения теоремы для  $r = 0$  доказаны.

Если  $1 \leq r \leq n - 1$ , то схема доказательства та же, что и для случая  $r = 0$ , поэтому мы ограничимся лишь несколькими короткими замечаниями. Для нахождения величины справа в (13) рассматриваем аналог задачи (14), но с максимизируемым функционалом  $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$ , квадрат которого в терминах коэффициентов Фурье имеет вид  $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2)$ . Затем естественным образом определяется функция Лагранжа аналога задачи (15). Далее пользуемся достаточными условиями минимума, причем соответствующие множители Лагранжа таковы:  $\widehat{\lambda} = (p_0 + 1)^{-2(n-r)}$ ,  $\widehat{\lambda}_0 = 0$  (если  $0 \in A$ ),  $\widehat{\lambda}_k = \widehat{\mu}_k = k^{2r} - \widehat{\lambda} k^{2n}$ ,  $k = 1, \dots, p_0$  и  $\widehat{\lambda}_k = \widehat{\mu}_k = 0$ ,  $k > p_0$ . Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и построение оптимальных методов также проходит по той же схеме, что и выше,

и оптимальные методы ищутся среди методов вида

$$\varphi_{\alpha,\beta}(y)(t) = \sum_{k=0}^{p_0} k^r (\alpha_k y_k \cos(kt + \pi r/2) + \beta_k y_{N_1+k} \sin(kt + \pi r/2)).$$

□

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1973.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 3. С. 79–100.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 67–82.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 59–67.
- [7] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 4. С. 119–130.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА, ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА РАН

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО, ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВЛАДИКАВКАЗСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН