УДК 517.5

О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ $\mathbf{H}_p$

Д. ф-м. н., проф. К. Ю. Осипенко[1]

Пространством Харди H_p, $1 \le p \le \infty$, называется множество аналитических в единичном диске $D := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ функций, для которых

$$\| f \|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2p} \int_0^{2p} | f(re^{it}) |^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\| f \|_{H_\infty} := \sup_{z \in D} | f(z) | < \infty, \quad p = \infty.$$

Через BH_p будем обозначать замкнутый единичный нар H_p

$$BH_p := \{ f \in H_p : \| f \|_{H_p} \le 1 \}.$$

На классе BH_p мы рассматриваем задачу оптимального восстановления интеграла

$$\int_a^b f(x) p(x) dx \tag{1}$$

по значениям информационного оператора

$$If := (f(x_1), \mathbf{K}, f^{(n_1-1)}(x_1), \mathbf{K}, f(x_n), \mathbf{K}, f^{(n_n-1)}(x_n)),$$

где $p(x)$ – неотрицательная весовая функция, $x_1, \mathbf{K}, x_n$ – различные точки из интервала $(-1,1)$ и $(a,b) \subset (-1,1)$.

Для $n = (n_1, \mathbf{K}, n_n)$ положим

$$t_n := \begin{pmatrix} x_1 \, \mathbf{K} \, x_n \\ n_1 \, \mathbf{K} n_n \end{pmatrix}.$$

Погрешностью оптимального восстановления интеграла (1) на классе BH_p назовем величину

[1] Работа поддержана грантами РФФИ (№96-01-10035, №99-01-01181) и государственной программой поддержки ведущих научных школ России (№96-15-96072).

$$E_p(t_n) := \inf_{\varphi:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}} \sup_{f\in BH_p} \left| \int_a^b f(x)p(x)dx - \varphi(If) \right|. \tag{2}$$

Метод восстановления, на котором достигается нижняя грань в (2), будем называть *оптимальным*.

Из общих результатов, касающихся оптимального восстановления линейных функционалов (см., например, [1]), вытекает, что

$$E_p(t_n) := \sup_{\substack{f\in BH_p \\ If=0}} \left| \int_a^b f(x)p(x)dx \right|, \tag{3}$$

и, кроме того, существует линейный оптимальный метод восстановления. Иными словами, существует квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)p(x)dx \approx \varphi_0(If) := \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{n_j-1} a_{jm} f^{(m)}(x_j),$$

для которой

$$\sup_{f\in BH_p} \left| \int_a^b f(x)p(x)dx - \varphi_0(If)) \right| = E_p(t_n).$$

Такая квадратурная формула называется *наилучшей* для данной системы узлов t_n.

Построению наилучших, а также оптимальных квадратурных формул (под оптимальными квадратурными формулами понимаются квадратурные формулы, погрешность которых минимизируется за счет выбора узлов) посвящено довольно много работ, большая часть которых касается классов гладких функций (см. [2]). Для классов аналитических функций известно значительно меньше результатов. В частности, наилучшие квадратурные формулы для классов Харди BH_p известны лишь при $p=\infty$ ([3, 4]).

В данной работе строится наилучшая квадратурная формула на классах Харди при всех $1\le p\le\infty$ для случая, когда $n_1,\ldots,n_n$ – четные числа. При этом коэффициенты наилучшей квадратурной формулы выражаются через экстремальную функцию, являющуюся решением задачи (3). Существование такой функции, а также ряд важных свойств этой функции вытекают из следующей леммы.

Лемма. *Положим*

$$B(x) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x-x_j}{1-x_j x} \right)^{n_j}.$$

Предположим, что $n_1,\mathbf{K},n_n$ *– четные числа,* $1<p\le\infty$ *или* $p=1$ *и* $-1<a<b<1$. *Тогда*

(1) *существует единственная функция* $g_{t_n,p}\in BH_p$, *такая что*

$$E_p(t_n)=\int_a^b g_{t_n,p}(x)B(x)p(x)dx,$$

(2) $g_{t_n,p}$ *не имеет нулей в диске* D *и* $g_{t_n,p}(x)>0$ *при* $x\in(-1,1)$,

(3) *при всех* $1<p<\infty$ *и всех* $q\in[0,2p]$

$$E_p(t_n)\,|\,g_{t_n,p}(e^{iq})\,|^p=\int_a^b g_{t_n,p}(x)B(x)P(e^{iq},x)p(x)dx,$$

где $P(e^{iq},x)$ *– ядро Пуассона.*

При $p=\infty$ легко убедиться, что $g_{t_n,\infty}(z)\equiv1$. Функция $g_{t_n,2}$ также может быть найдена в явном виде. Действительно, используя формулу Коши, имеем

$$\sup_{g\in BH_2}\left|\int_a^b g(x)B(x)p(x)dx\right|=\sup_{g\in BH_2}\left|\int_a^b\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{f(e^{iq})}{1-xe^{-iq}}dq\,B(x)p(x)dx\right|=\sup_{g\in BH_2}\left|(g,y)_{H_2}\right|,$$

где

$$y(z)=\int_a^b\frac{B(x)}{1-xz}p(x)dx,$$

а

$$(g,y)_{H_2}=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}g(e^{iq})\overline{y(e^{iq})}dq$$

– скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_2. Таким образом,

$$g_{t_n,2}(z)=\frac{y(z)}{\|y\|_{H_2}}.$$

Теорема. *Пусть* $n_1,\mathbf{K},n_n$ *– четные числа,* $1<p\le\infty$ *или* $p=1$ *и* $-1<a<b<1$. *Тогда квадратурная формула*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx\approx\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{n_j-1}a_{jm}f^{(m)}(x_j),$$

в которой

$$a_{jm}=\int_a^b c_{jm}(x)p(x)dx\,,$$

$$c_{jm}(x)=\frac{B(x)g_{t_n,p}(x)(1-x^2)}{m!(n_j-m-1)!}\left(\frac{(1-x_jz)^{n_j}}{w_j(z)g_{t_n,p}(z)(x-z)(1-xz)}\right)^{(n_j-m-1)}_{|z=x_j},$$

$$w_j(x)=\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}\left(\frac{x-x_s}{1-x_sx}\right)^{n_s},$$

является наилучшей на классе BH_p *для системы узлов* t_n.

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным. // Мат. заметки, 1991, 50. – с. 85-93.
2. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979. – 256 стр.
3. Bojanov B. D. Best quadrature formula for a certain class of analytic functions. // Zastos. Math. 1974, 14. - p. 441-447.
4. Осипенко К. Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций. // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1988, 52. - с. 79-99.

АННОТАЦИЯ

В данной работе мы находим наилучшую квадратурную формулу в пространствах Харди H_p, $1 \le p \le \infty$. Коэффициенты этой формулы даны в терминах экстремальной функции для погрешности наилучшей квадратурной формулы.

ON BEST QUADRATURE FORMULAS ON THE HARDY SPACES $\mathbf{H}_\mathbf{p}$

K. Yu. Osipenko

In this paper we find a best quadrature formula for the Hardy spaces H_p, $1 \le p \le \infty$. The coefficients of this formula are given in terms of an extremal function for the error of a best quadrature formula.

Осипенко Константин Юрьевич

Зав. каф. “Высшая математика”, профессор, доктор физико-математических наук

тел. 141-94-38, 141-94-04 (раб.)
433-89-21 (дом.)