Е. О. Сивкова, Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье, *Владикавк. матем. журн.*, 2012, том 14, номер 4, 63–72

Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 63–72

УДК **517.518.8**

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ЛАПЛАСИАНА ФУНКЦИИ ПО ЕЕ НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

Е. О. Сивкова

Работа посвящена задаче оптимального восстановления дробной степени оператора Лапласа функции на $\mathbb{R}^d$ по приближенно известному в метрике L_∞ ее преобразованию Фурье на некотором выпуклом множестве. Найден оптимальный метод восстановления. Этот метод не использует информацию о преобразовании Фурье за пределами некоторого шара с центром в нуле.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, лапласиан, преобразование Фурье, выпуклая задача.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Преобразование Фурье лапласиана $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ достаточно гладкой и быстро убывающей функции f на $\mathbb{R}^d$ имеет вид

$$(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2$. Это позволяет (по крайней мере формально) определить дробную степень оператора Лапласа: для каждого $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ на «хороших» функциях в образах Фурье действует по правилу:

$$F(-\Delta)^{\alpha/2} f(\xi) = |\xi|^\alpha Ff(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^d$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ — сопряженное пространство (пространство обобщенных функций). Положим для каждого $\alpha > 0$

$$\mathscr{W}^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \ Ff \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \ (-\Delta)^{\alpha/2} f \in L_2(\mathbb{R}^d) \Big\},$$

где F — преобразование Фурье в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, и

$$W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in \mathscr{W}^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d) : \ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1 \Big\}.$$

Пусть A — непустое подмножество $\mathbb{R}^d$. Предположим, что функции из $W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ известны приближенно, а именно, о каждой функции $f \in W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ известна лишь функция $g \in L_\infty(A)$ такая, что $\|Ff - g\|_{L_\infty(A)} \leqslant \delta$. По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) сами функции f из $W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ и $(-\Delta)^{\beta/2} f$ (если $\beta < \alpha$) в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Любое отображение $m\colon L_\infty(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления $((-\Delta)^{\beta/2}f$ по данной информации). Его погрешность определяем по формуле

$$e\big((-\Delta)^{\beta/2},W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),A,\delta,m\big)=\sup_{\substack{f\in W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),\ g\in L_\infty(A),\\ \|Ff-g\|_{L_\infty(A)}\leqslant\delta}}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f-m(g)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Величину

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2},W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),A,\delta\big)=\inf_m e\big((-\Delta)^{\beta/2},W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),A,\delta,m\big)$$

(где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_\infty(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$) называем *погрешностью оптимального восстановления*, а методы, на которых достигается нижняя грань, — *оптимальными методами восстановления.*

Первоначальная постановка задачи оптимального восстановления (но для линейных функционалов и в конечномерной ситуации) принадлежит С. А. Смоляку [1]. Идея отыскания оптимальных методов сразу для всех функций из данного класса восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о наилучших методах приближения классов функций. Заметим, что с практической точки зрения естественно считать, что мы располагаем некоторой априорной информацией, которая и выделяет соответствующий класс функций. В дальнейшем тематика, связанная с оптимальным восстановлением, развивалась в разных направлениях. Определенное представление об этом можно получить из работ [2–8]. Задачи, близкие к той, которая изучается здесь, но для функций одного переменного (периодических и на прямой), рассматривались в работах [9, 10]. Что касается многомерного случая, то отметим работы [11, 12].

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Всюду далее $B(x,r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r>0$, а $\langle x,y\rangle$ — скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^d$.

Пусть A — подмножество $\mathbb{R}^d$ и $0\in\operatorname{int}A$. Положим $r_A=\sup\{\,r>0:\ B(0,r)\subset A\,\}$. Ясно, что $0<r_A<\infty$, если A — собственное подмножество и $r_A=+\infty$, если $A=\mathbb{R}^d$.

Для каждых $\alpha>0$ и $\delta>0$ обозначим

$$\widehat{r}=\widehat{r}(\alpha,\delta)=\left(\frac{2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2\alpha)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Теорема. *Пусть $0\leqslant\beta<\alpha$, $\delta>0$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\operatorname{int}A\neq\varnothing$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если $0\notin\operatorname{int}A$, то $E\big((-\Delta)^{\beta/2},W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),A,\delta\big)=+\infty$;*

2) *если $0\in\operatorname{int}A$, то*

$$E\big((-\Delta)^{\beta/2},W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),A,\big)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\delta^2 2^{2-d}(\alpha-\beta)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2\alpha)(d+2\beta)}\,r_A^{d+2\beta}+\frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A\leqslant\widehat{r},\\[2ex] \sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}}\left(\frac{\delta^2 2^{1-d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}, & r_A\geqslant\widehat{r}.\end{cases}$$

Метод

$$\widehat{m}(g)(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\leqslant r_0}|\xi|^\beta\left(1-\left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}\right)g(\xi)e^{i\langle\xi,t\rangle}\,d\xi,$$

где $r_0=\min(r_A,\widehat{r})$, является оптимальным.

Первое утверждение теоремы означает, что если $0 \notin \operatorname{int} A$, то погрешность любого метода бесконечна, и значит никаким способом нельзя восстановить соответствующий оператор на всем классе с конечной погрешностью.

Если $0 \in \operatorname{int} A$ и преобразование Фурье функции f на A известно с точностью до $\delta > 0$, то погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса вписанного шара в A, но лишь до определенного предела: при $r_A \geqslant \widehat{r}$ эта погрешность постоянна. Таким образом, за пределами шара $B(0, \widehat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса оказывается лишней. Оптимальный метод использует информацию о преобразовании Фурье только на шаре $B(0, r_0)$ и при этом, данную (полезную) информацию «сглаживает». Сам оптимальный метод есть $(-\Delta)^{\beta/2}\varphi$, где преобразование Фурье φ совпадает со сглаженным наблюдением на шаре $B(0, r_0)$ и равно нулю за пределами этого шара.

Неравенство $r_A \leqslant \widehat{r}$ можно переписать так: $\delta^2 r_A^{d+2\alpha} \leqslant 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2\alpha)$, и его можно трактовать как своеобразный «принцип неопределенности», связывающий объем полезной информации (преобразование Фурье на шаре $B(0, r_0)$) и погрешность ее измерения.

2. Доказательство теоремы

Начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения следующей задачи

$$\left\|(-\Delta)^{\beta/2} f\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Ff\|_{L_\infty(A)} \leqslant \delta, \quad f \in W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала в (1).

Пусть f_0 — допустимая функция в (1) (т. е. f_0 удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-f_0$ также допустима и мы имеем для любого $m\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($m(0)$ — образ нулевой функции при отображении m)

$$2\left\|(-\Delta)^{\beta/2} f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left\|(-\Delta)^{\beta/2} f_0 - m(0)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \left\|(-\Delta)^{\beta/2}(-f_0) - m(0)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leqslant 2 \sup_{\substack{f \in W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),\\ \|Ff\|_{L_\infty(A)} \leqslant \delta}} \left\|(-\Delta)^{\beta/2} f - m(0)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2 \sup_{\substack{f \in W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),\, g \in L_\infty(A),\\ \|Ff - g\|_{L_\infty(A)} \leqslant \delta}} \left\|(-\Delta)^{\beta/2} f - m(g)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), а справа к нижней грани по всем методам m, получаем требуемое.

В образах Фурье, согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (1) равен значению такой задачи

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff(\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \quad \|Ff\|_{L_\infty(A)} \leqslant \delta, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant 1, \quad f \in \mathscr{W}^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), \end{gathered} \tag{2}$$

1) Докажем первое утверждение теоремы. Для этого, в силу полученной оценки снизу для погрешности оптимального восстановления, достаточно показать, что значение задачи (2) равно $+\infty$. Так как $0 \notin \operatorname{int} A$, то согласно конечномерной теореме отделимости

(см., например, [13]), можно отделить нуль от выпуклого множества $\operatorname{int} A$, т. е. существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_d^2} = 1$, что $\sup_{\xi \in \operatorname{int} A} \langle \lambda, \xi \rangle \leqslant 0$. Но тогда, очевидно, справедливо и такое неравенство:

$$\sup_{\xi \in A} \langle \lambda, \xi \rangle \leqslant 0. \tag{3}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим шар $B(\varepsilon\lambda, \varepsilon/2)$, который, для краткости, обозначим B_ε. Тогда $B_\varepsilon \cap A = \varnothing$, так как, если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi - \varepsilon\lambda| \leqslant \varepsilon/2$, откуда легко выводится, что $\langle \lambda, \xi \rangle > 0$, и значит $\xi \notin A$ согласно (3). Пусть функция φ_ε определена по формуле

$$\varphi_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \Big(\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} \, d\eta \Big)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon; \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, $\varphi_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $f_\varepsilon = F^{-1}\varphi_\varepsilon$. Эта функция допустима в задаче (2). Действительно, $Ff_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и понятно, что функция $\xi \mapsto |\xi|^\alpha Ff_\varepsilon(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, $(-\Delta)^{\alpha/2} f_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^d)$, и значит $f_\varepsilon \in \mathscr{W}^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$. Далее простая проверка показывает, что f_ε удовлетворяет остальным ограничениям задачи (2). Теперь, если $\xi \in B_\varepsilon$, то ясно, что $|\xi| \leqslant |\xi - \varepsilon\lambda| + |\varepsilon\lambda| \leqslant 3\varepsilon/2$ и мы имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |Ff_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |\varphi_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= \frac{\int\limits_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\beta} \, d\xi}{\int\limits_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} \, d\eta} = \frac{\int\limits_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} \, d\xi}{\int\limits_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} \, d\eta} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{-2(\alpha-\beta)} \varepsilon^{-2(\alpha-\beta)},$$

откуда следует, устремляя ε к нулю, что значение максимизируемого функционала в (2) может быть сделано сколь угодно большим. Это доказывает утверждение 1) теоремы.

2) Докажем второе утверждение теоремы. Начнем с оценки снизу величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. По доказанному ее квадрат не меньше значения задачи (2). Найдем значение этой задачи.

Пусть сначала $r_A < \widehat{r}$. Можно показать, что в этом случае у задачи (2) нет решения и поэтому мы поступим следующим образом: построим такую допустимую в (2) последовательность функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, которая сходится к значению задачи.

Из определения r_A следует, что граница шара $B(0, r_A)$ и граница A имеют непустое пересечение. Если ξ_0 принадлежит этому пересечению (тем самым $|\xi_0| = r_A$), то $\xi_0 \notin \operatorname{int} A$, и поэтому можно отделить ξ_0 от выпуклого множества $\operatorname{int} A$, т. е. существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что $\sup_{\xi \in \operatorname{int} A} \langle \lambda, \xi \rangle \leqslant \langle \lambda, \xi_0 \rangle$. Отсюда следует, что и $\sup_{\xi \in A} \langle \lambda, \xi \rangle \leqslant \langle \lambda, \xi_0 \rangle$. Теперь для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $\xi_n = \xi_0 + (1/n)\lambda$ и заметим, что шар $B_n = B(\xi_n, 1/(2n))$ не пересекается с A (если $\xi \in B_n$, то отсюда легко вытекает, что $\langle \lambda, \xi \rangle > \langle \lambda, \xi_0 \rangle$, и значит $\xi \notin A$).

Далее, нетрудно проверить, что для любых $s > 0$ и $r > 0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{B(0,r)} |\xi|^{2s} \, d\xi = \frac{2\pi^{d/2}}{(d+2s)\Gamma(d/2)} \, r^{d+2s}. \tag{4}$$

Положим

$$\gamma = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi.$$

Из (4) и определения $\widehat{r}$ следует, что $\gamma > 0$.

Обозначим

$$V_n = \frac{\pi^{d/2}}{(2n)^d \Gamma(d/2+1)}.$$

Это объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$. Рассмотрим последовательность функций φ_n, $n \in \mathbb{N}$, определенных по формуле

$$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\ V_n^{-1/2}\Big(r_A + \dfrac{3}{2n}\Big)^{-\alpha}\gamma^{1/2}, & \xi \in B_n; \\ \delta, & \xi \in B(0, r_A); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $f_n = F^{-1}\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что функции f_n допустимы в задаче (2). То, что $f_n \in \mathscr{W}^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ проверяется аналогично тому, как это было сделано выше для функций f_ε.

Далее, $Ff_n(\xi) = \delta$, если $\xi \in B(0, r_A)$ и $Ff_n(\xi) = 0$, если $\xi \in A \setminus B(0, r_A)$ и тем самым $\|f_n\|_{L_\infty(A)} = \delta$.

Заметим теперь, что если $\xi \in B_n$, то

$$|\xi| \leqslant \left|\xi - \xi_0 - \frac{1}{n}\lambda + \xi_0 + \frac{1}{n}\lambda\right| \leqslant \frac{1}{2n} + |\xi_0| + \frac{1}{n} = r_A + \frac{3}{2n},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}|Ff_n(\xi)|^2\, d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B_n} |\xi|^{2\alpha}|Ff_n(\xi)|^2\, d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha}|Ff_n(\xi)|^2\, d\xi \\ &= V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\gamma\int\limits_{B_n}|\xi|^{2\alpha}\, d\xi + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)}|\xi|^{2\alpha}\, d\xi \\ &\leqslant V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\gamma\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)}|\xi|^{2\alpha}\, d\xi \\ &= \gamma + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)}|\xi|^{2\alpha}\, d\xi = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, последовательность функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, допустима в задаче (2).

Перейдем теперь к нахождению значения этой задачи. Сопоставим задаче (2) функцию Лагранжа, определенную на $\mathscr{W}^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\mathscr{L}(f) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(-|\xi|^{2\beta} + p(\xi) + \lambda|\xi|^{2\alpha}\big)|Ff(\xi)|^2\, d\xi, \tag{6}$$

где $\lambda = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ и

$$p(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{2\beta} - \lambda|\xi|^{2\alpha}, & \xi \in B(0, r_A); \\ 0, & \xi \notin B(0, r_A). \end{cases}$$

Оценим сверху значение задачи (2). Учитывая, что функция p неотрицательна на $\mathbb{R}^d$ и что $\mathscr{L}(f) \geqslant 0$ (поскольку неотрицательно выражение в скобках под знаком интеграла в (6)), будем иметь для любой допустимой функции f в (2)

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A}p(\xi)(|Ff(\xi)|^2-\delta^2)\,d\xi-\lambda\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi-1\right)$$

$$= -\mathscr{L}(f)+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}p(\xi)\,d\xi+\lambda \leqslant \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}p(\xi)\,d\xi+\lambda,$$

т. е. значение задачи (2) не превосходит величины

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}p(\xi)\,d\xi+\lambda. \tag{7}$$

Покажем, что это и есть значение задачи (2). Действительно, для любого n справедливо легко проверяемое равенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi &= -\mathscr{L}(f_n)+\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}p(\xi)\big(|Ff_n(\xi)|^2-\delta^2\big)\,d\xi \\ &+\lambda\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi-1\right)+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}p(\xi)\,d\xi+\lambda.\end{aligned} \tag{8}$$

Второе слагаемое справа равно нулю, так как $Ff_n(\xi)=\delta$ на шаре $B(0,r_A)$, а вне этого шара функция p равна нулю. Если мы покажем, что первое и третье слагаемые справа стремятся к нулю при $n\to\infty$, то переходя в (8) к пределу при $n\to\infty$, получим, что на последовательности f_n максимизируемый функционал в (2) сходится к величине (7), и значит, эта величина (с учетом доказанной оценки сверху) есть значение задачи (2).

Итак, рассмотрим первое и третье слагаемые справа в (8). Согласно определению последовательности f_n и учитывая, что функция в скобках под знаком интеграла в (6) равна нулю на $B(0,r_A)$, получаем, что

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f_n) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(-|\xi|^{2\beta}+p(\xi)+\lambda|\xi|^{2\alpha}\big)|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi \\ &= V_n^{-1}\left(r_A+\frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\gamma\int\limits_{B_n}\big(-|\xi|^{2\beta}+\lambda|\xi|^{2\alpha}\big)\,d\xi.\end{aligned} \tag{9}$$

Если $\xi\in B_n$, то

$$r_A=|\xi_0|\leqslant|\xi|+\left|\xi_0-\xi+\frac{1}{n}\lambda\right|+\left|\frac{1}{n}\lambda\right|\leqslant|\xi|+\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}$$

и поэтому $|\xi|\geqslant r_A-\frac{3}{2n}$. Используя это, приходим к оценке

$$\int\limits_{B_n}|\xi|^{2\beta}|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi\geqslant\left(r_A-\frac{3}{2n}\right)^{2\beta}V_n.$$

Выше было отмечено, что если $\xi \in B_n$, то $|\xi| \geqslant r_A + \frac{3}{2n}$ и поэтому аналогично получаем оценку

$$\int_{B_n} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n.$$

Меняя в первой оценке знак на противоположный и затем складывая эти оценки, приходим, продолжая (9), к неравенству

$$\mathscr{L}(f_n) \leqslant \gamma\biggl(- \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\beta} + \lambda \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} \biggr).$$

Так как $\lambda = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$, то последовательность справа стремится к нулю при $n \to \infty$. Но $\mathscr{L}(f_n) \geqslant 0$ (ранее было отмечено, что $\mathscr{L}(f) \geqslant 0$ вообще для всех функций $f \in \mathscr{W}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$), и значит $\mathscr{L}(f_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что третье слагаемое в (8) стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассуждая так же как при доказательстве (5), получим, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Ff_n(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \gamma \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi.$$

Последовательность справа стремится к единице при $n \to \infty$. Это означает, что последовательность в скобках в третьем слагаемом справа в (8) оценивается снизу последовательностью, стремящейся к нулю. Но последовательность в скобках неположительна в силу (5) и тем самым она сама стремится к нулю при $n \to \infty$. Итак, первое и третье слагаемые в (8) стремятся к нулю при $n \to \infty$ и значит, величина (7) — значение задачи (2).

Согласно доказанному выше погрешность оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ не меньше корня квадратного из значения задачи (2). Если в (7) подставить выражения для p и λ и воспользоваться формулой (4), то получим оценку снизу для $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$, которая указана в теореме для случая, когда $r_A < \widehat{r}$.

Пусть теперь $r_A \geqslant \widehat{r}$. В этом случае задача (2) имеет решение $\widehat{f}$ и оно таково: $F\widehat{f}(\xi) = \delta$, если $\xi \in B(0,\widehat{r})$ и $F\widehat{f}(\xi) = 0$, если $\xi \notin B(0,\widehat{r})$. Действительно, пусть $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{p}$ определены аналогично предыдущему, но с заменой r_A на $\widehat{r}$ и определена соответствующая им функция Лагранжа по формуле (6). Как и раньше, легко проверяется, что $\mathscr{L}(f) \geqslant 0$ для любой функции $f \in \mathscr{W}^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ и нетрудно проверить, что $\mathscr{L}(\widehat{f}) = 0$. Наконец, используя (4), легко видеть, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \bigl|F\widehat{f}(\xi)\bigr|^2 \, d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,\widehat{r})} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi = 1. \qquad (10)$$

Учитывая все эти факты, будем иметь для любой допустимой в задаче (2) функции f

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A}\widehat{p}(\xi)\big(|Ff(\xi)|^2-\delta^2\big)\,d\xi$$
$$-\widehat{\lambda}\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi - 1\right) = -\mathscr{L}(f) + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{p}(\xi)\,d\xi + \widehat{\lambda} \leqslant -\mathscr{L}(\widehat{f})$$
$$+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{p}(\xi)\,d\xi + \widehat{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}\big|F\widehat{f}(\xi)\big|^2\,d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A}\widehat{p}(\xi)\big(\big|F\widehat{f}(\xi)\big|^2-\delta^2\big)\,d\xi$$
$$+\widehat{\lambda}\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\big|F\widehat{f}(\xi)\big|^2\,d\xi - 1\right) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}\big|F\widehat{f}(\xi)\big|^2\,d\xi,$$

т. е. $\widehat{f}$ — решение задачи (2). Ее значение (учитывая (10)) равно

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}\big|F\widehat{f}(\xi)\big|^2\,d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,\widehat{r})}|\xi|^{2\beta}\,d\xi$$
$$= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,\widehat{r})}\big(|\xi|^{2\beta}-\widehat{\lambda}|\xi|^{2\alpha}\big)\,d\xi + \widehat{\lambda} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{p}(\xi)\,d\xi + \widehat{\lambda}.$$

По доказанному погрешность оптимального восстановления оценивается снизу корнем квадратным из этой величины. Если подставить сюда выражения для $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{p}$, то получим указанную в теореме оценку снизу для $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ для случая $r_A \geqslant \widehat{r}$. Заметим, что оценка для $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ при $r_A < \widehat{r}$ переходит в данную при $r_A = \widehat{r}$.

3) Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в теореме метода восстановления.

Оптимальность метода m означает, по определению, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$\begin{gathered}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f - m(g)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Ff-g\|_{L_\infty(A)} \leqslant \delta,\\ \big\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1, \quad g \in L_\infty(A), \quad f \in \mathscr{W}^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d),\end{gathered} \tag{11}$$

равно $E((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Оптимальный метод будем искать среди линейных отображений $m\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье действуют по правилу $Fm(g) = ag$, причем функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $a = 0$ вне $B(0, r_0)$. Пусть m — отображение такого вида. Оценим сверху максимизируемый функционал в (11). Согласно теореме Планшереля его квадрат запишется так:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|<r_0}\big||\xi|^{\beta}Ff(\xi) - a(\xi)g(\xi)\big|^2\,d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi. \tag{12}$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши — Буняковского

$$
\begin{aligned}
\big||\xi|^\beta Ff(\xi)-a(\xi)g(\xi)\big|^2 &= \left|\frac{a(\xi)}{\sqrt{\widetilde{p}(\xi)}}\sqrt{\widetilde{p}(\xi)}(Ff(\xi)-g(\xi))+\frac{(|\xi|^\beta-a(\xi))}{\sqrt{\widetilde{\lambda}}|\xi|^\alpha}\sqrt{\widetilde{\lambda}}|\xi|^\alpha Ff(\xi)\right|^2 \\
&\leqslant \left(\frac{|a(\xi)|^2}{\widetilde{p}(\xi)}+\frac{||\xi|^\beta-a(\xi)|^2}{\widetilde{\lambda}|\xi|^{2\alpha}}\right)\big(\widetilde{p}(\xi)|Ff(\xi)-g(\xi)|^2+\widetilde{\lambda}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\big),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $\widetilde{\lambda}=\lambda$, $\widetilde{p}=p$, если $r_A<\widehat{r}$ и $\widetilde{\lambda}=\widehat{\lambda}$, $\widetilde{p}=\widehat{p}$, если $r_A\geqslant\widehat{r}$.

Нетрудно убедиться, что для каждого ξ минимум выражения

$$
\frac{|a|^2}{\widetilde{p}(\xi)}+\frac{||\xi|^\beta-a|^2}{\widetilde{\lambda}|\xi|^{2\alpha}}
$$

по a достигается в точке

$$
\widehat{a}(\xi)=|\xi|^\beta\left(1-\left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}\right)
\tag{14}
$$

и сам этот минимум равен единице.

Возьмем в качестве функции a функцию, определенную последним соотношением. Тогда интегрируя (13) с учетом сказанного, а также учитывая первое ограничение в (11), получаем оценку для первого слагаемого в (12)

$$
\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|<r_0}\widetilde{p}(\xi)\,d\xi+\widetilde{\lambda}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|<r_0}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi.
$$

Второе слагаемое оцениваем так

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2(\beta-\alpha)}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leqslant \frac{\widetilde{\lambda}}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Складывая эти оценки, применяя теорему Планшереля и учитывая второе ограничение (11) получаем для квадрата максимизируемого функционала в (12) следующую оценку сверху

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|<r_0}\widetilde{p}(\xi)\,d\xi+\frac{\widetilde{\lambda}}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|<r_0}\widetilde{p}(\xi)\,d\xi+\widetilde{\lambda}\big\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{|\xi|<r_0}\widetilde{p}(\xi)\,d\xi+\widetilde{\lambda}.
\end{aligned}
$$

По доказанному выше величина справа не превосходит квадрата погрешности оптимального восстановления. Следовательно, погрешность метода $\widehat{m}$ из формулировки теоремы (который в образах Фурье есть умножение на функцию, равную (14) на шаре $B(0,r_0)$ и нулю вне его) не превосходит погрешности оптимального восстановления, и значит совпадает с ней. Таким образом, получено указанное в теореме выражение для погрешности оптимального восстановления и показано, что метод $\widehat{m}$ является оптимальным. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. Г. Магарил-Ильяеву за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approx. Theory.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
3. Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—Vol. 16.—P. 87–105.
4. Traub J. F., Woźniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms.—New York: Academic Press, 1980.—xiv+341 p.
5. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.
6. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1989.—Т. 189.—С. 3–20.
7. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 187, № 12.—С. 73–106.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 3.—С. 79–100.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прилож.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
11. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление производных на соболевских классах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 1.—С. 39–47.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб.—2012.—Т. 203, № 4.—С. 119–130.
13. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения (3-е изд.).—М.: Либроком, 2011.—176 с.

Статья поступила 28 мая 2012 г.

Сивкова Елена Олеговна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119454, Москва, пр. Вернадского, 78
E-mail: sivkova_elena@inbox.ru

ON OPTIMAL RECOVERY OF THE LAPLACIAN OF A FUNCTION FROM ITS INACCURATELY GIVEN FOURIER TRANSFORM

Sivkova E. O.

The paper is devoted to the problem of the optimal recovery for a fractional power of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform in metric L_∞ on some convex subset of $\mathbb{R}^d$. The optimal recovery method is constructed. This method is not used the information about the Fourier transform outside some ball centred at the origin.

Key words: optimal recovery, Laplacian, Fourier transform, convex problem.