О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

С. А. УНУЧЕК

Аннотация. В работе рассматривается задача восстановления $k-$ой разделенной разности последовательности при условии, что приближенно известно преобразование Фурье этой последовательности на интервале. Построен оптимальный метод восстановления.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, экстремальная задача, разделенная разность, преобразование Фурье.

1. Введение

Задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов впервые была поставлена С.А. Смоляком [1] в 1965 году. В основе этой работы лежали идеи А.Н. Колмогорова о наилучшем приближении на классе функций, изложенные в работах [2] и [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления самой последовательности или ее k-ой разделенной разности, $1 \leq k \leq n-1$, в среднеквадратичной норме по неточно заданному на интервале преобразованию Фурье данной последовательности в равномерной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. Задача одновременного восстановления нескольких разделенных разностей различного порядка по неточно заданной последовательности с ограниченной $n-$ой разделенной разностью в среднеквадратичной норме рассматривалась в работе [5]. Задача восстановления функции и ее k-ой производной по неточно заданному преобразованию Фурье этой функции рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

2. Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z}), h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty, \ \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1}-x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \qquad \Delta_h^k x = \Delta_h\big(\Delta_h^{k-1}x\big).$$

Обозначим

$$\mathcal{L}_{2,h}^n(\mathbb{Z}) = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le 1\},$$

$$\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathcal{L}_{2,h}^n(\mathbb{Z}) : (Fx)(\cdot) \in L_\infty([-\pi/h, \pi/h])\},$$

где образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]).$$

Образами Фурье для операторов разделенных разностей являются функции

$$(F\Delta_h x)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{x_{j+1}-x_j}{h} e^{-ijh\omega} =$$

$$\frac{1}{h}\left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega}e^{ih\omega} - h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega}\right) =$$

$$\frac{e^{ih\omega}}{h}\cdot h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega} - \frac{1}{h}\cdot h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}(Fx)(w).$$

Следовательно,

$$(F\Delta_h^k x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}(Fx)(\omega).$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$ также приближенно известно её преобразование Фурье на множестве $(-\sigma;\sigma)$, $\sigma \le \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma;\sigma)$, то есть известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности $k-$ го порядка последовательности $x \in \mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$m(y):\, L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью метода m будем называть величину

$$e(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, m) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})\\ y\in L_\infty(-\sigma;\sigma)\\ \|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\le\delta}} \|(\Delta_h^k x) - m(y(\cdot))\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) = \inf_{m:\, L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, m).$$

Метод m, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

3. Основные результаты

Положим

$$g(\omega) = \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^2}{h^2} = \left(\frac{2\sin\frac{h\omega}{2}}{h}\right)^2,$$

$\widehat{\sigma}-$ решение уравнения $\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)d\omega = \frac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0 = min(\sigma, \widehat{\sigma})$.

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\Omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^k(\omega)d\omega + g^{k-n}(\sigma_0)\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^n(\omega)d\omega\right).$$

При $\sigma_0 < \pi/h$ метод $\widehat{m}(y)$ такой, что

$$F\widehat{m}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| \le \sigma_0 \\ 0, & |\omega| > \sigma_0 \end{cases},$$

где

$$\alpha(\omega)=\left(1-\left(\frac{g(\omega)}{g(\sigma_0)}\right)^{n-k}\right)\cdot\frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k},$$

является оптимальным. При $\sigma_0=\pi/h$ *метод* $\widehat{m}(y)$ *такой, что*

$$F\widehat{m}(y)=\frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k}y(\omega),$$

является оптимальным.

4. Доказательство

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$E(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta)\geq\sup_{\substack{x\in\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})\\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leq\delta}}\|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}. \tag{2}$$

Доказательство. Для любой последовательности $x\in\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leq\delta$, и для любого метода m имеем

$$\begin{aligned}2\|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}&=\\ &\|\Delta^k_h(x)-\Delta^k(-x)+m(0)-m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leq\\ &\|\Delta^k_h(x)-m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}+\|\Delta^k_h(-x)-m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leq\\ &2e(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta,m).\end{aligned}$$

То есть, для любого метода m

$$e(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta,m)\geq\sup_{\substack{x\in\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})\\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leq\delta}}\|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Отсюда следует неравенство (2). □

Докажем теорему 1. Из леммы 1 следует, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\to\max, \tag{3}$$

$$\|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leq 1,\ \|(Fx)(\omega)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leq\delta.$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем её в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\|\Delta^m_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}=\frac{1}{2\pi}\|F(\Delta^m_h x)(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])},$$

$$\|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2m}}{h^{2m}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}} \left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \to \max; \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}} \left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \le 1,\ \left|(Fx)(\omega)\right|^2 \le \delta^2$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$, $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$.

Пусть $\sigma \ge \widehat{\sigma}$. Покажем, что значение задачи (4) не меньше,чем

$$\frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega) d\omega.$$

Введем функцию $p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \ge 0$, тогда задача (4) принимает вид

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)p(\omega)d\omega \to \max; \tag{5}$$

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)p(\omega)d\omega \le 1,\ p(\omega) \le \frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Положим $\widehat{p}(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}), \\ 0, & \omega \notin (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}). \end{cases}$

Так как

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)\widehat{p}(\omega)d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)d\omega = 1,$$

то функция $\widehat{p}(\omega)$ допустима в задаче (5). То есть, значение этой задачи не меньше, чем

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)\widehat{p}(\omega)d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)d\omega.$$

При $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ имеем, что

$$E^2(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) \geq \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega) d\omega,$$

то есть получена оценка снизу при $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$.

Рассмотрим случай $\sigma < \widehat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$.

Положим

$$S(m) = \sqrt{\frac{\pi m}{g^n(\frac{\sigma+\frac{1}{m}}{2})}\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\sigma} g^n(\omega) d\omega\right)}.$$

Пусть m достаточно большое натуральное число такое, что выполняется неравенство $\sigma + \frac{1}{m} < \frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta, & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ S(m), & \sigma < |\omega| < \sigma + \frac{1}{m}, \\ 0, & |\omega| \geq \sigma + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{1}{2\pi}\left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 \leq \frac{\delta^2}{2\pi}$ выполнено для всех $|\omega| < \sigma$. Далее, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} g^n(\omega)\left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2 \int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega) d\omega + 2S^2(m) \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} g^n(\omega) d\omega\right) \leq$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\delta^2 \int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega) d\omega +\right.$$

$$\left.\frac{\pi m}{g^n(\sigma + \frac{1}{m})} \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega) d\omega\right) \cdot \frac{1}{m} g^n(\sigma + \frac{1}{m})\right) = 1.$$

То есть, последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2\int\limits_0^{\sigma} g^k(\omega)d\omega + 2S^2(m)\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} g^k(\omega)d\omega\right) \ge$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\delta^2\int\limits_0^{\sigma} g^k(\omega)d\omega +\right.$$

$$\left.\frac{\pi m}{g^n(\sigma+\frac{1}{m})}\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)d\omega\right)\cdot\frac{1}{m}g^k(\sigma)\right).$$

При $m\to\infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к

$$\Omega = \left(\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^k(\omega)d\omega + g^{k-n}(\sigma)\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)d\omega\right)\right).$$

Тем самым, мы показали, что при $\sigma<\widehat{\sigma}$, $\sigma<\pi/h$ справедливо неравенство $E^2(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta)\ge\Omega$.

В случае $\sigma=\frac{\pi}{h}<\widehat{\sigma}$ положим $(Fx)(\omega)=\delta$, $|\omega|<\frac{\pi}{h}$. Тогда, поскольку выполнено равенство $\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)d\omega=1$, $\widehat{\sigma}>\frac{\pi}{h}$, функция $g^n(\omega)$ неотрицательная, то выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)d\omega < 1.$$

Это означает, что функция $x(\cdot)$ допустима в задаче (4) и значение задачи не менее величины

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega.$$

Тем самым мы показали, что

$$E(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta)\ge\begin{cases}\sqrt{\Omega}, & \sigma_0<\pi/h,\\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)d\omega}, & \sigma_0=\pi/h.\end{cases}$$

Пусть $\sigma_0 = min(\sigma, \widehat{\sigma})$, $\sigma_0 < \pi/h$. Покажем, что метод $\widehat{m} : L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, такой, что

$$F\widehat{m}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| < \sigma_0, \\ 0, & |\omega| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Для оценки оптимальной погрешности восстановления разделенных разностей рассмотрим экстремальную задачу

$$(6) \quad \|\Delta_h^k x - \widehat{m}_k(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to max, \|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta, \\ x \in \mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), y \in L_\infty(-\sigma;\sigma).$$

В образах Фурье квадрат задачи принимает вид:

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \left| \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \alpha(\omega)y(\omega) \right|^2 d\omega + \\ + \int\limits_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \Big) \to max,$$

$$|Fx(\omega) - y(\omega)|^2 \leq \delta^2$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma, \sigma)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \leq 1.$$

Положим $z(\omega) = Fx(\omega) - y(\omega), |z(\omega)| \leq \delta$. Тогда максимизируемое выражение можно представить в виде

$$D = \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \left| \Big(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)\Big) \cdot Fx(\omega) + \alpha(\omega)z(\omega) \right|^2 d\omega + \\ \int\limits_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \Big) \to max.$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши-Буняковского:

$$\Big|\Big(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\Big)\cdot Fx(\omega)+\alpha(\omega)z(\omega)\Big|^2=$$

$$\Bigg|\frac{\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}Fx(\omega)+\frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}z(\omega)\Bigg|^2\leq$$

$$\left(\frac{|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2+\widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2\right),$$

где $\widehat{\lambda}_1(\omega)>0, \widehat{\lambda}_2(\omega)>0$ для почти всех $\omega<\sigma_0$.

Пусть

$$Q(\omega)=\frac{|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\leq 1. \tag{8}$$

Тогда значение задачи не больше, чем

$$D\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2d\omega+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leq|\omega|\leq\pi/h}g^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega.$$

Пусть

$$\widehat{\lambda}_1(\omega)=\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)},\ \widehat{\lambda}_2(\omega)=g^k(\omega)-\widehat{\lambda}_1(\omega).$$

Тогда

$$D\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}|Fx(\omega)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leq|\omega|\leq\pi/h}g^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|<\sigma_0}\left(g^k(\omega)-\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\right)|z(\omega)|^2\,d\omega.$$

Учитывая, что функция $g^{k-n}(\omega)$ неотрицательная, четная и убывающая при $\omega > 0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\le|\omega|\le\pi/h} g^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\le|\omega|\le\pi/h} g^{k-n}(\omega)\cdot g^n(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega \le$$

$$\frac{1}{2\pi}g^{k-n}(\sigma_0)\int\limits_{\sigma_0\le|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega.$$

Таким образом, получаем

$$D \le \frac{g^{k-n}(\sigma_0)}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2\, d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|<\sigma_0}\left(g^k(\omega)-\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\right)|z(\omega)|^2\, d\omega.$$

Учитывая условия в задаче (7), получаем:

$$D \le g^{k-n}(\sigma_0)\cdot\big(1-\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} g^n(\omega)d\omega\big)+\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^k(\omega)d\omega.$$

Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{m}$ - оптимальный.

Покажем, что условие (8) выполнимо. Пусть

$$\alpha(\omega)=\frac{\widehat{\lambda}_2(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega)+\widehat{\lambda}_2(\omega)}\cdot\frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k}.$$

Тогда

$$Q(\omega)=\frac{|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}=\frac{g^k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega)+\widehat{\lambda}_2(\omega)}=1$$

и условие выполняется.

Покажем, что при $\sigma=\frac{\pi}{h}<\widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m}: L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, такой, что

$$F\widehat{m}(y)=\frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k}y(\omega),\ |\omega|<\frac{\pi}{h}$$

оптимален. В этом случае квадрат задачи (7) имеет вид

$$(9)\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}Fx(\omega)-\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}y(\omega)\right|^2 d\omega \quad\to\quad max,$$

$$|Fx(\omega)-y(\omega)|^2\le\delta^2$$

для почти всех $\omega\in(-\pi/h,\pi/h)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega\le 1.$$

Учитывая ограничения в задаче (9), оценим первый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}Fx(\omega)-\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}y(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}g^k(\omega)\left|Fx(\omega)-y(\omega)\right|^2 d\omega\le\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}g^k(\omega)d\omega.$$

Верхняя и нижняя оценки снова совпали, метод оптимален.

Пусть

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}): f^{(n-1)}\in LAC(\mathbb{R}), f^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}$$

- соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ - множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}_{2,\infty}^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}): \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le 1, (Ff)(\cdot)\in\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ - преобразование Фурье функции f.

Заметим, что, в пределе при $h\to 0$ $k-$ая разделенная разность последовательности $x\in\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$ переходит в производную $k-$го порядка функции $f(\cdot)\in\mathbb{W}_{2,\infty}^n(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0}g(\omega)=\omega^2,\quad \lim_{h\to 0}\widehat{\sigma}=\left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n+1}},$$

Имеем

$$\lim_{h\to 0} E(\mathcal{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) =$$

$$\begin{cases} \delta\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \delta\sqrt{\left(\frac{\delta^2\sigma^{(2k+1)}}{\pi(2k+1)} + \sigma^{2(k-n)}\left(1-\left(\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}}\right)^{(2n+1)}\right)\right)}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Величина, стоящая в правой части равенства, совпадает с погрешностью восстановления k-ой производной на классе $\mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье, полученной в работе [6].

Кроме того, предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для этой задачи в той же работе.

Список литературы

[1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. - 470 с.

[3] Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, УМН, 5, 2, 1950, с. 165—177

[4] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, Матем. заметки, 17, 3, 1975, 359—368

[5] Унучек С.А. Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности, Дифференциальные уравнения, 2015 (в печати).

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных, Функциональный анализ и его приложения, 2003, 37, 51–64.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации. Доклад РАН, 2011, 438, 3, 300–302.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных, Функ. анал. и его прил., 2003, 37, 51–64.

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, г. Москва

E-mail address: unuchek@mirea.ru