ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И БЕРГМАНА НА ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ИЗ $\mathbf{C}^n$

К.Ю. Осипенко

1. Основные определения и постановка задачи

Пусть X и Y — линейные пространства. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значений линейного функционала $L: X \to \mathbf{C}$ на некотором множестве $W \subset X$ по значениям на этом множестве линейного оператора $I: X \to Y$, называемого информационным оператором. *Погрешностью оптимального восстановления* назовем величину

$$e(L, I, W) := \inf_T \sup_{f \in W} |Lf - T(If)|, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям $T: Y \to \mathbf{C}$. Отображение T_0, на котором достигается нижняя грань в (1), будем называть *оптимальным методом восстановления* функционала L. Элемент $f_0 \in W$, для которого

$$|Lf - T_0(If)| = e(L, I, W),$$

назовем *экстремальным элементом.* Подробные сведения о различных постановках задач восстановления можно найти в обзорных статьях [1], [2] и монографиях [3], [4].

Если W — выпуклое и уравновешенное (т.е. $x \in W \Rightarrow \lambda x \in W \quad \forall |\lambda| = 1$) множество, то имеет место равенство

$$e(L, I, W) = \sup_{\substack{f \in W \\ If = 0}} |Lf|. \tag{2}$$

Равенство (2) при различных ограничениях доказывалось многими авторами. Соответствующие ссылки можно найти в работе [5], где получен наиболее общий результат в этом направлении.

Пусть B — единичный шар в $\mathbf{C}^n$ и S — его граница:

$$B := \{\, z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z|^2 := \sum_{k=1}^n |z_k|^2 < 1 \,\}, \quad S := \{\, z \in \mathbf{C}^n : |z| = 1 \,\}.$$

Пространством Харди $H_p(B)$ (H_p) называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\int_S |f(rz)|^p \, d\sigma(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in B} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty,$$

где σ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно вращений. Для функций из H_p существуют почти всюду граничные значения, принадлежащие $L_p(S,\sigma)$ (см. [6, стр.95]). Тем самым пространство H_p можно рассматривать как линейное подпространство $L_p(S,\sigma)$.

Пространством Бергмана $A_p(B)$ (A_p) называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{A_p} := \left(\int\limits_B |f(z)|^p \, d\nu(z)\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

где ν — мера Лебега в $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, нормированная так, что $\nu(B) = 1$. При $p = \infty$ $A_\infty = H_\infty$. Если возникает необходимость отметить размерность, будем писать B_n, S_n, σ_n или ν_n.

Для линейного нормированного пространства X через BX будем обозначать замкнутый единичный шар:

$$BX := \{\, x \in X : \|x\| \le 1\,\},$$

Пусть α — *мультииндекс*, т.е. упорядоченный набор неотрицательных целых чисел α_j, $1 \le j \le n$: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Положим

$$D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

В работе рассматривается задача оптимального восстановления значения функции $f \in BH_p$ или BA_p в точке $a \in B$ по значениям следов функций $D^\alpha f$, $|\alpha| = 0, \dots, r-1$, на некотором множестве $A \subset B$. Тем самым изучается задача восстановления линейного функционала $Lf = f(a)$ по значениям информационного оператора

$$If = I_A^r f := \left\{ D^\alpha f_{|A} \right\}_{|\alpha|=0}^{r-1}.$$

Величину погрешности оптимального восстановления будем обозначать в этом случае через $e\,(a, I_A^r, BX_p)$, где $X_p = H_p$ или A_p.

Исследование задач оптимального восстановления голоморфных функций многих переменных было начато в работе [7], где изучался случай $r = 0$.

2. Предварительные сведения

Пусть Ω — подмножество $\mathbf{C}^n$, μ — неотрицательная мера на Ω и X_p — какое-либо подпространство $L_p(\Omega,\mu)$. Рассмотрим задачу (1) для $X = X_p$ и $W = BX_p$.

Теорема 1. *Пусть $g \in X_p$, $g \ne 0$ и $Ig = 0$. Предположим, что для некоторого линейного оператора $T_0 \colon Y \to \mathbf{C}$ при всех $f \in X_p$ выполнено равенство*

$$Lf - T_0(If) = \begin{cases} \alpha \displaystyle\int\limits_\Omega \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z)\, d\mu(z), & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\int\limits_\Omega \overline{g(z)} |\varphi(z)| f(z)\, d\mu(z), & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbf{C}$, $\varphi \in L_1(\Omega, \mu)$ и если $p = 1$, то $|g(z)| = 1$ почти всюду на Ω. Тогда T_0 — оптимальный метод восстановления, $g_0 := g/\|g\|_p$ — экстремальная функция и

$$E(L, I, BX_p) = |Lg_0| = \begin{cases} |\alpha|\|g\|_p^{p-1}, & 1 \le p < \infty, \\ \|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. При $1 \le p < \infty$ по неравенству Гельдера имеем

$$E(L, I, BX_p) \le \sup_{f \in BX_p} |Lf - T_0(If)| \le |\alpha|\|g\|_p^{p-1}.$$

При $p = \infty$ аналогичная оценка дает

$$E(L, I, BX_p) \le \|\varphi\|_1.$$

Для любого метода T справедливо неравенство

$$|Lg_0 - T(0)| + |L(-g_0) - T(0)| \ge 2|Lg_0|.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$E(L, I, BX_p) \ge |Lg_0| = \begin{cases} |\alpha|\|g\|_p^{p-1}, & 1 \le p < \infty, \\ \|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Теорема 1 в той или иной степени общности доказывалась в работах [8]–[10]. Несмотря на свою простоту она является довольно эффективным способом построения оптимальных методов восстановления.

Докажем ряд вспомогательных утверждений, касающихся весовых воспроизводящих ядер для пространств H_p.

Пусть $u \in \mathbf{C}$, $|u| < 1$ и $\rho \ge 1$. Положим

$$\Phi_n(\rho, u) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + k + \rho/2)}{\Gamma(k + \rho/2 + 1)} u^k. \tag{4}$$

Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $1 \le k \le n$ положим

$$z'_k := (z_1, \ldots, z_{n-k}, 0, \ldots, 0), \qquad z''_k := z - z'_k,$$

$$\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k, \quad z, w \in \mathbf{C}^n, \qquad s_k(z, w) := \frac{\langle z, w''_k \rangle}{1 - \langle z, w'_k \rangle},$$

$$K_{rk}(z, w) := \frac{\langle z, w''_k \rangle^r \Phi_n(rp, s_k(z, w))}{(n-1)!(1 - \langle z, w'_k \rangle)^{n + rp/2}}.$$

Отметим, что $s_k(z, w) = \overline{s_k(w, z)}$ и $K_{rk}(z, w) = \overline{K_{rk}(w, z)}$.

Предложение 1. *При всех $1 \le p < \infty$ для любой функции $f \in H_p$ и всех $z \in B$ справедливо равенство*

$$f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \left(D_n^j f\right)(z_1') z_n^j = \int\limits_S K_{r1}(z,w) f(w) |w_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(w). \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку полиномы плотны в H_p, то достаточно доказать, что равенство (5) выполнено для функций вида $f(z) = g(z')z_n^m$, $m = 0, 1, \dots$, где $g(z')$ — полином, зависящий от переменных $z_1, \dots, z_{n-1}$ ($z' := (z_1, \dots, z_{n-1})$). Интеграл в (5) можно свести к интегралу по B_{n-1} (см. [6, стр.24])

$$\int\limits_S K_{r1}(z,w) g(w') w_n^m |w_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(w)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{B_{n-1}} \frac{(1-|w'|^2)^{r(p-2)/2} g(w')\, d\nu_{n-1}(w')}{(1-\langle z', w'\rangle)^{n+rp/2}}$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} z_n^r \overline{w}_n^r w_n^m e^{i(m-r)\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+rp/2)}{\Gamma(k+rp/2+1)} \frac{z_n^k \overline{w}_n^k e^{-ik\theta}}{(1-\langle z', w'\rangle)^k}\, d\theta$$

$$= \begin{cases} 0, & m < r, \\ z_n^m \displaystyle\int\limits_{B_{n-1}} K_s(z', w') g(w')\, d\nu_{n-1}(w'), & m \ge r, \end{cases}$$

где

$$K_s(z', w') := \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n)\Gamma(s+1)} \frac{(1-|w'|^2)^s}{(1-\langle z', w'\rangle)^{n+s}}, \quad s := m + r(p-2)/2.$$

Известно, что при всех $s > -1$ ядро $K_s(z', w')$ является воспроизводящим для функций из $H_\infty(B_{n-1})$ [6, стр.129], а следовательно, и для полинома g. Таким образом,

$$\int\limits_S K_{r1}(z,w) g(w') w_n^m |w_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(w) = \begin{cases} 0, & m < r, \\ g(z') z_n^m, & m \ge r, \end{cases}$$

Легко убедиться, что левая часть (5) равна тому же выражению. Предложение доказано.

Для $a \in \mathbf{C}$ через P_a обозначим ортогональную проекцию $\mathbf{C}^n$ на подпространство, порожденное вектором a:

$$P_a := \begin{cases} \dfrac{\langle z, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a, & a \ne 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Предложение 2. *При всех $1 \le p < \infty$ для любой функции $f \in H_p$ и всех $z \in B$ справедливо равенство*

$$f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j f\Big|_{z_k'} = \int\limits_S K_{rk}(z,w) f(w) |P_{z_k''} w|^{r(p-2)}\, d\sigma(w),$$

в котором $dz = z_k''$.

Доказательство. При $z''_k = 0$ утверждение теоремы очевидно. Будем считать, что $z''_k \neq 0$. Из предложения 1 следует, что при всех $g \in H_p$ и $v \in B$ имеет место равенство

$$g(v) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j g\Big|_{v'_1} = \int_S K_{r1}(v,y) g(y) |y_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(y), \tag{6}$$

где $dv = v''_1$. Пусть U — некоторая унитарная матрица порядка n и $f \in H_p$. Положим $g(v) = f(U^{-1}v)$. Тогда $g \in H_p$. Применяя равенство (6), получаем

$$f(U^{-1}v) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j f\Big|_{U^{-1}v'_1} = \int_S K_{r1}(v,y) f(U^{-1}y) |y_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(y), \tag{7}$$

где $dz = U^{-1}v''_1$. При заданном $z \in B$ таком, что $z''_k \neq 0$, рассмотрим матрицу U, имеющую вид

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & C \end{array} \right), \tag{8}$$

где C — унитарная матрица порядка k, переводящая вектор $(z_{n-k+1}, \ldots, z_n)$ в вектор $(0, \ldots, 0, |z''_k|)$. Положив $v = Uz$, $y = Uw$ в (7) и воспользовавшись инвариантностью меры σ относительно унитарных преобразований, будем иметь для $dz = z''_k$

$$f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j f\Big|_{z'_k} = \int_S K_{r1}(Uz,Uw) f(w) |(Uw)_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(w).$$

Имеем

$$\langle (Uz)'_1, (Uw)'_1 \rangle = \langle z'_k, (Uw)'_1 \rangle = \langle z'_k, Uw \rangle = \langle Uz'_k, Uw \rangle = \langle z'_k, w \rangle = \langle z'_k, w'_k \rangle,$$
$$|z''_k| \overline{(Uw)}_n = (Uz)_n \overline{(Uw)}_n = \langle Uz, Uw \rangle - \langle (Uz)'_1, (Uw)'_1 \rangle = \langle z, w \rangle - \langle z'_k, w'_k \rangle = \langle z''_k, w''_k \rangle.$$

Отсюда

$$s_1(Uz,Uw) = s_k(z,w), \quad K_{r1}(Uz,Uw) = K_{rk}(z,w),$$
$$|(Uw)_n| = \frac{|\langle z''_k, w''_k \rangle|}{|z''_k|} = |P_{z''_k} w|.$$

Предложение доказано.

3. Оптимальное восстановление в пространствах Харди

Нетрудно убедиться (например, по индукции), что для функции $\Phi_n(\rho,u)$, определенной равенством (4), справедливо соотношение

$$\Phi_n(\rho,u)=\frac{\Gamma(n+\rho/2)}{\Gamma(\rho/2)}(1-u)^{-n}Q_n(\rho,u), \tag{9}$$

где

$$Q_n(\rho,u)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+\rho/2}\binom{n-1}{k}u^k.$$

Положим

$$\lambda_n(\rho):=\min\{\,|u|:Q_n(\rho,u)=0\,\}.$$

В работе [7] было доказано, что при всех $1\le p<\infty$ для $1\le n\le 5$ $\lambda_n(p)>1$, а при любом $n\ge 6$ существуют $p\ge 1$, для которых $\lambda_n(p)<1$. Обозначим через

$$\Delta_{nk}(p):=\left\{\,z\in B:\frac{|z_k''|^2}{\lambda_n^2(p)}+|z_k'|^2<1\right\},\quad \Delta_{nk}(\infty):=B.$$

Очевидно, что при $\lambda_n(p)\ge 1$ $\Delta_{nk}(p)=B$. В частности, при всех $1\le p\le\infty$ и $1\le n\le 5$ $\Delta_{nk}(p)=B$.

Теорема 2. *Пусть $1\le p\le\infty$ и $A=A_k:=\{\,z\in B:z_{n-k+1}=\ldots=z_n=0\,\}$, $1\le k\le n$. Для всех $a\in\Delta_{nk}(rp)$ метод*

$$f(a)\approx\begin{cases}\chi^{(2-p)/p}(a)\displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\chi^{(p-2)/p}(z)f(z)\right)\Big|_{z=a_k'}, & 1\le p<\infty,\\ (1-|a|^2)\displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,a\rangle}\right)\Big|_{z=a_k'}, & p=\infty,\end{cases}$$

где $dz=a_k''$, а

$$\chi(z):=\frac{\Phi_n(rp,s_k(z,a))}{(n-1)!(1-\langle z,a_k'\rangle)^{n+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p по информации $I^r_{A_k}$. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a,I^r_{A_k},BH_p)=\begin{cases}\chi^{1/p}(a)|a_k''|^r, & 1\le p<\infty,\\ \left(\dfrac{|a_k''|}{\sqrt{1-|a_k'|^2}}\right)^r, & p=\infty.\end{cases}$$

При $a\in\Delta_{nk}(rp)\setminus A_k$ экстремальная функция имеет вид

$$g_0(z)=\begin{cases}\chi^{-1/p}(a)|a_k''|^{-r}\chi^{2/p}(z)\langle z,a_k''\rangle^r, & 1\le p<\infty,\\ \left(\dfrac{\sqrt{1-|a_k'|^2}}{|a_k''|}\dfrac{\langle z,a_k''\rangle}{1-\langle z,a_k'\rangle}\right)^r, & p=\infty.\end{cases}$$

Доказательство. Для $a \in A_k$ утверждение теоремы легко проверяется. Будем считать, что $|a_k''| \neq 0$. Пусть $1 \le p < \infty$. Поскольку

$$\sup_{z \in B} |s_k(z, w)| = \frac{|a_k''|}{\sqrt{1 - |a_k'|^2}}, \tag{10}$$

то при $a \in \Delta_{nk}(rp)$ полином $Q_n(rp, s_k(z, a))$ не обращается в нуль при $w \in \overline{B}$. Тем самым из равенства (9) следует, что χ — обратимая функция из H_∞, а следовательно, $\chi^s(z) \in H_\infty$ для любого $s \in \mathbf{R}$. Положим

$$g(z) := \chi^{2/p}(z) \langle z, a_k'' \rangle^r, \quad \gamma := \chi^{(2-p)/p}(a) |a_k''|^{r(p-2)}.$$

Имеем

$$\overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} = \overline{\chi(z)} \chi^{(p-2)/p}(z) \langle a_k'', z \rangle^r |\langle a_k'', z \rangle|^{r(p-2)} = K_{rk}(a, z) \chi^{(p-2)/p}(z) |\langle a_k'', z \rangle|^{r(p-2)}.$$

Следовательно, учитывая предложение 2 и то, что $\chi^{(p-2)/p} f \in H_p$, получаем для любой функции $f \in H_p$

$$\begin{aligned} \gamma \int_S \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) \, d\sigma(z) & \\ &= \chi^{(2-p)/p}(a) \int_S K_{rk}(a, z) \chi^{(p-2)/p}(z) f(z) |P_{a_k''} z|^{r(p-2)} \, d\sigma(z) \\ &= f(a) - \chi^{(2-p)/p}(a) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\chi^{(p-2)/p}(z) f(z) \right) \Big|_{z = a_k'}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $dz = a_k''$. Очевидно, что при всех $w \in A_k$ $(D^\alpha g)(w) = 0$, $|\alpha| = 0, \dots, r-1$. Таким образом, условия теоремы 1 при $1 \le p < \infty$ выполнены. Остается лишь найти $\|g\|_{H_p}$. Положив в (11) f=g, получим

$$\gamma \|g\|_{H_p}^p = g(a).$$

Отсюда

$$\|g\|_{H_p} = \chi^{1/p}(a) |a_k''|^r.$$

Рассмотрим теперь случай $p = \infty$, который сведем к одномерной задаче восстановления. Пусть $f \in H_\infty$ и $b \in B$. Положим $\varphi(u) := f(b_1, \dots, b_{n-1}, \sqrt{1 - |b_1'|^2} u)$. Очевидно $\varphi \in BH_\infty(B_1)$. Из работы [8] (см. также [11], где решена более общая задача восстановления в одномерном случае) получаем при всех $|\xi| < 1$

$$|\varphi(\xi) - \sum_{j=0}^{r-1} c_j \varphi^{(j)}(0)| \le |\xi|^r,$$

где

$$c_j = \frac{\xi^r(1-|\xi|^2)}{j!(r-j-1)!}\left[\frac{1}{(1-\bar{\xi}u)(\xi-u)}\right]^{(r-j-1)}_{\big|u=0}.$$

Имеем

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j\varphi^{(j)}(0) = \frac{\xi^r(1-|\xi|^2)}{(r-1)!}\left[\frac{\varphi(u)}{(1-\bar{\xi}u)(\xi-u)}\right]^{(r-1)}_{\big|u=0} = (1-|\xi|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\xi^j}{j!}\left(\frac{\varphi(u)}{1-\bar{\xi}u}\right)^{(j)}_{\big|u=0}.$$

Сделав замену $v = \sqrt{1-|b_1'|^2}u$, для $\xi = b_n(1-|b_1'|^2)^{-1/2}$ получаем

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j\varphi^{(j)}(0) = (1-|b|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{b_n^j}{j!}D_n^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,b\rangle}\right)_{\big|z=b_1'}$$
$$= (1-|b|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,b\rangle}\right)_{\big|z=b_1'},$$

где $dz = b_n''$. Таким образом, для всех $b \in B$ имеем

$$\left|f(b) - (1-|b|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,b\rangle}\right)_{\big|z=b_1'}\right| \le \left(\frac{|b_k''|}{\sqrt{1-|b_k'|^2}}\right)^r.$$

Предположим, что $a \in B \setminus A_k$. Рассмотрим матрицу U вида (8), в которой C — унитарная матрица порядка k, переводящая вектор $(a_{n-k+1},\ldots,a_n)$ в вектор $(0,\ldots,0,|a_k''|)$. Тогда, положив $b = Ua$, для функции $f(U^{-1}z)$ будем иметь

$$\left|f(a) - (1-|Ua|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(U^{-1}z)}{1-\langle z,Ua\rangle}\right)_{\big|z=(Ua)_1'}\right|$$
$$= \left|f(a) - (1-|a|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(w)}{1-\langle w,a\rangle}\right)_{\big|w=a_k'}\right| \le \left(\frac{|a_k''|}{\sqrt{1-|a_k'|^2}}\right)^r,$$

где $dz = a_k''$. Тем самым

$$e(a, I^r_{A_k}, BH_\infty) = \left(\frac{|a_k''|}{\sqrt{1-|a_k'|^2}}\right)^r.$$

С другой стороны, в силу (10) функция

$$g_0(z) = \left(\frac{\sqrt{1-|a_k'|^2}}{|a_k''|}\frac{\langle z,a_k''\rangle}{1-\langle z,a_k'\rangle}\right)^r$$

принадлежит классу BH_∞ и при всех $w \in A_k$ $(D^\alpha g_0)(w) = 0$, $|\alpha| = 0,\ldots,r-1$. Следовательно, из равенства (2) вытекает, что

$$e(a, I^r_{A_k}, BH_\infty) = \sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ I^r_{A_k}f=0}} |f(a)| \ge |g_0(a)| = \left(\frac{|a_k''|}{\sqrt{1-|a_k'|^2}}\right)^r.$$

Теорема доказана.

Поскольку величина $e(a, I^r_{A_k}, BH_p)$ совпадает с решением экстремальной задачи

$$\sup_{\substack{f\in BH_p\\ I^r_{A_k}f=0}} |f(a)|$$

(см. (2)), то при $k = n$ и $A_n = \{0\}$ мы получаем следующее обобщение леммы Шварца.

Следствие 1. *При всех $1 \le p < \infty$ для $a \in B$ таких, что $|a| < \lambda_n(rp)$, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in BH_p\\ (D^\alpha f)(0)=0,\, |\alpha|\le r-1}} |f(a)| = \frac{|a|^r}{(1-|a|^2)^{n/p}} \left[\frac{\Gamma(n+rp/2)}{\Gamma(n)\Gamma(rp/2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+rp/2} \binom{n-1}{k} |a|^{2k} \right]^{1/p}. \tag{12}$$

Случай $p = \infty$ безусловно также вытекает из теоремы 2, но мало интересен, так как не отличается от одномерного случая (правая часть в (12) равна $|a|^r$).

Отметим, что решение поставленной задачи восстановления получено при $n \ge 6$ лишь в области $\Delta_{nk}(rp)$ (как было отмечено, при $1 \le n \le 5$ $\Delta_{nk}(rp) = B$ для всех $1 \le p \le \infty$). Для величины $\lambda_n(p)$, входящей в определение области $\Delta_{nk}(rp)$, в работе [7] была получена оценка

$$\lambda_n(p) \ge \frac{p+2}{p+2n}.$$

Тем самым можно указать область простого вида

$$\left(\frac{rp+2n}{rp+2}\right)^2 |a''_k|^2 + |a'_k|^2 < 1, \tag{13}$$

которая лежит в $\Delta_{nk}(rp)$. Кроме того, из (13) видно, что для любой точки $a \in B$ можно воспользоваться оптимальным методом восстановления, полученным в теореме 2, если выбрать r достаточно большим.

Остановимся несколько подробнее на случае $p = 2$. При доказательстве теоремы 2 условие $a \in \Delta_{nk}(rp)$ использовалось для обратимости χ, что, в свою очередь, необходимо было для того, чтобы функции $\chi^{2/p}$ и $\chi^{(p-2)/p}$ принадлежали пространству H_∞. При $p = 2$ последнее условие выполнено при всех $a \in B$. Однако в этом случае легко получить оптимальный метод восстановления непосредственно. Остановимся на задаче оптимального восстановления значения $f \in BH_2$ в точке a по значениям информационного оператора

$$I_{rm} f := \left\{(D^\alpha f)(0)\right\}_{|\alpha|=0}^{r-1} \cup \left\{(D^{\alpha^j} f)(0)\right\}_{j=1}^{m},$$

где $|\alpha^j| = r$, $j = 1, \dots, m$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ положим

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}, \quad a \in \mathbf{C}^n.$$

Предложение 3. *При всех $a \in B$ метод*

$$f(a) \approx \sum_{|\alpha|\le r-1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)a^\alpha + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha^j!}(D^{\alpha^j} f)(0)a^{\alpha^j} \tag{14}$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_2 по информации I_{rm}. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I_{rm}, BH_2) = \left(\frac{1}{(1-|a|^2)^n} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}|a|^{2j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\alpha^j!}|a^{2\alpha^j}| \right)^{1/2}. \tag{15}$$

Доказательство. Положим

$$k_{rm}(z,a) := (1-\langle z,a\rangle)^{-n} - \sum_{|\alpha|=0}^{r-1} \frac{(n+|\alpha|-1)!}{(n-1)!\alpha!} z^\alpha \overline{a}^\alpha - \sum_{j=1}^{m} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\alpha^j!} z^{\alpha^j} \overline{a}^{\alpha^j}.$$

При любом $a \in B$ $k_{rm} \in H_2$. В силу воспроизводящего свойства ядра Коши, его разложения

$$(1-\langle z,a\rangle)^{-n} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(n+|\alpha|-1)!}{(n-1)!\alpha!} z^\alpha \overline{a}^\alpha \tag{16}$$

и ортогональности мономов

$$\int_S z^\alpha \overline{z}^\beta \, d\sigma(z) = \begin{cases} 0, & \alpha \ne \beta, \\ \dfrac{(n-1)!\alpha!}{(n+|\alpha|-1)!}, & \alpha = \beta \end{cases}$$

(см. [6, стр.25], [12, стр.557]), получаем

$$\int_S \overline{k_{rm}(z,a)} f(z)\, d\sigma(z) = f(a) - \sum_{|\alpha|\le r-1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)a^\alpha - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha^j!}(D^{\alpha^j} f)(0)a^{\alpha^j}. \tag{17}$$

Из разложения (16) видно, что для $g(z) := k_{rm}(z,a)$ выполнены равенства

$$D^\alpha g\big|_{z=0} = 0, \quad |\alpha| = 1,\dots,r-1, \quad \alpha = \alpha^j,\ j = 1,\dots,m.$$

Таким образом, функция $g(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $p = 2$. Следовательно, рассматриваемый метод восстановления оптимален, а

$$e(a, I_{rm}, BH_2) = g(a)\|g\|_{H_2}^{-1}.$$

Подставляя в (17) $f = g$, получаем

$$g(a) = \|g\|_{H_2}^2.$$

Тем самым

$$e(a, I_{rm}, BH_2) = \sqrt{g(a)}.$$

Для того чтобы получить формулу (15), остается заметить, что

$$\sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}|a^{2\alpha}| = |a|^{2j}.$$

Предложение доказано.

Следуя Рудину [6, стр.41] будем называть аффинным подмножеством B пересечение произвольного аффинного подмножества из $\mathbf{C}^n$ с шаром B. Рассмотрим в качестве множества A произвольное аффинное подмножество B. Без ограничения общности можно считать, что A имеет вид

$$A = \{\, z \in B : z_{n-k+1} = c_{n-k+1}, \dots, z_n = c_n \,\}, \tag{18}$$

где $c = (0, \dots, 0, c_{n-k+1}, \dots, c_n) \in B$, $1 \le k \le n$, так как любое аффинное подмножество B с помощью унитарного преобразования может быть переведено в множество вида (18).

Положим

$$\varphi_c(z) := \frac{c - P_c z - \sqrt{1-|c|^2}(z - P_c z)}{1 - \langle z, c\rangle}.$$

Отображение φ_c является автоморфизмом шара ([6, стр.34]). Положим

$$\Delta_{nk}(p, c) := \varphi_c(\Delta_{nk}(p)).$$

Теорема 3. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и A определено равенством* (18). *Тогда для всех $a \in \Delta_{nk}(rp, c)$ метод*

$$f(a) \approx \begin{cases} \left(\dfrac{1-|c|^2}{1-\langle a, c\rangle}\right)^{2n/p} \chi_c^{(2-p)/p}(a_c) \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\chi_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z, c\rangle)^{2n/p}}\right]_{\big| z=(a_c)'_k}, & 1 \le p < \infty, \\ (1-|a_c|^2) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z, a_c\rangle)}\right]_{\big| z=(a_c)'_k}, & p = \infty, \end{cases}$$

где $a_c = \varphi_c(a)$, $dz = (a_c)''_k$, а

$$\chi_c(z) := \frac{\Phi_n(rp, s_k(z, a_c))}{(n-1)!(1-\langle z, (a_c)'_k\rangle)^{n+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p по информации I_A^r. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I_A^r, BH_p) = \begin{cases} \dfrac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a, c\rangle|^{2n/p}} \chi^{1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^r, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{|(a_c)''_k|}{\sqrt{1-|(a_c)'_k|^2}}\right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

При $a \in \Delta_{nk}(rp, c) \setminus A$ экстремальная функция имеет вид

$$g_0(z) = \begin{cases} \dfrac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle a, c\rangle)^{2n/p}} \dfrac{\chi_c^{2/p}(\varphi_c(z)) \langle \varphi_c(z), (a_c)''_k\rangle^r}{\chi_c^{1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^r}, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{\sqrt{1-|(a_c)'_k|^2}}{|(a_c)''_k|} \dfrac{\langle \varphi_c(z), (a_c)''_k\rangle}{1-\langle \varphi_c(z), (a_c)'_k\rangle}\right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего отметим ряд свойств автоморфизма φ_c, которые нам потребуются (см. [6, стр.34, 161]). Имеют место следующие равенства

$$\varphi_c(\varphi_c(z)) = z, \quad z \in B, \tag{19}$$

$$1 - \langle \varphi_c(z), \varphi_c(w) \rangle = \frac{(1-|c|^2)(1-\langle z, w\rangle)}{(1-\langle z, c\rangle)(1-\langle c, w\rangle)}, \quad z, w \in B. \tag{20}$$

Оператор

$$(Tf)(z) := \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle z, c\rangle)^{2n/p}} f(\varphi_c(z))$$

является изометрией пространства H_p, т.е. при всех $f \in H_p$ $\|Tf\|_{H_p} = \|f\|_{H_p}$.

Пусть $1 \le p < \infty$. В силу (19) имеем

$$a_c = \varphi_c(a) \in \varphi_c(\Delta_{nk}(rp, c)) = \Delta_{nk}(rp).$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in BH_p$. Тогда $g := Tf \in BH_p$. Из теоремы 2 получаем

$$\left| g(a_c) - \chi_c^{(2-p)/p}(a_c) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\chi_c^{(p-2)/p}(z) g(z) \right)\Big|_{z=(a_c)'_k} \right| \le e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p) \tag{21}$$

(здесь и далее $dz = (a_c)''_k$). Из (19) и (20)

$$g(a_c) = \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle a_c, c\rangle)^{2n/p}} f(a) = \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle \varphi_c(a), \varphi_c(0)\rangle)^{2n/p}} f(a) = \frac{(1-\langle a, c\rangle)^{2n/p}}{(1-|c|^2)^{n/p}} f(a).$$

Таким образом, умножая обе части неравенства (21) на

$$\frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a, c\rangle|^{2n/p}},$$

будем иметь

$$\left| f(a) - \left(\frac{1-|c|^2}{1-\langle a, c\rangle} \right)^{2n/p} \chi_c^{(2-p)/p}(a_c) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\chi_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z, c\rangle)^{2n/p}} \right]\Bigg|_{z=(a_c)'_k} \right|$$
$$\le \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a, c\rangle|^{2n/p}} e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p).$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi_c(A) = A_k$, а следовательно, $\varphi_c(A_k) = A$. В силу произвольности функции f получаем

$$e(a, I^r_A, BH_p) \le \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a, c\rangle|^{2n/p}} e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p).$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \chi_c^{-1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^{-r} \chi_c^{2/p}(z) \langle z, (a_c)''_k \rangle^r,$$

являющуюся экстремальной в задаче об оптимальном восстановлении в точке a_c по информации $I^r_{A_k}$. Положим $g_0 := Tf_0$. Тогда $g_0 \in BH_p$, $I^r_A g_0 = 0$, и, следовательно,

$$e(a, I^r_A, BH_p) \ge |g_0(a)| = \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a, c\rangle|^{2n/p}} e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p).$$

При $p = \infty$ доказательство проводится по той же схеме. Теорема доказана.

4. Оптимальное восстановление в пространствах Бергмана

Рассмотрим теперь аналогичную задачу восстановления в пространствах Бергмана, а именно, задачу оптимального восстановления значения функции $f \in BA_p$, $1 \le p < \infty$, в точке $a \in B$ по информации I_A^r, где A определено равенством (18) для $c = (0, \ldots, 0, c_{n-k+1}, \ldots, c_n) \in B$, $1 \le k \le n$. Мы ограничиваемся случаем $1 \le p < \infty$, так как $A_\infty = H_\infty$.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\Delta}_{nk}(p) := \left\{ z \in B : \frac{|z_k''|^2}{\lambda_{n+1}^2(p)} + |z_k'| < 1 \right\},$$
$$\widetilde{\Delta}_{nk}(p, c) := \varphi_c(\widetilde{\Delta}_{nk}(p)).$$

Теорема 4. *Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда при всех $a \in \widetilde{\Delta}_{nk}(rp, c)$ метод*

$$f(a) \approx \left(\frac{1 - |c|^2}{1 - \langle a, c \rangle} \right)^{2(n+1)/p} \widetilde{\chi}_c^{(2-p)/p}(a_c) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\widetilde{\chi}_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1 - \langle z, c \rangle)^{2(n+1)/p}} \right]_{\big| z=(a_c)_k'},$$

где $a_c = \varphi_c(a)$, $dz = (a_c)_k''$, а

$$\widetilde{\chi}_c(z) := \frac{\Phi_{n+1}(rp, s_k(z, a_c))}{n!(1 - \langle z, (a_c)_k' \rangle)^{n+1+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BA_p по информации I_A^r. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I_A^r, BA_p) = \frac{(1 - |c|^2)^{(n+1)/p}}{|1 - \langle a, c \rangle|^{2(n+1)/p}} \widetilde{\chi}^{1/p}(a_c) |(a_c)_k''|^r.$$

При $a \in \widetilde{\Delta}_{nk}(rp, c) \setminus A$ экстремальная функция имеет вид

$$g_0(z) = \frac{(1 - |c|^2)^{(n+1)/p}}{(1 - \langle z, c \rangle)^{2(n+1)/p}} \frac{\widetilde{\chi}_c^{2/p}(\varphi_c(z)) \langle \varphi_c(z), (a_c)_k'' \rangle^r}{\widetilde{\chi}_c^{1/p}(a_c) |(a_c)_k''|^r}. \tag{22}$$

Доказательство. Определим оператор продолжения E равенством

$$(Eg)(z_0, z) := g(z),$$

где $z \in B_n$, а $(z_0, z) \in B_{n+1}$. Известно ([6, стр.135]), что E — линейная изометрия пространства $A_p(B_n)$ в $H_p(B_{n+1})$, т.е. при всех $g \in A_p(B_n)$ $Eg \in H_p(B_{n+1})$ и $\|g\|_{A_p(B_n)} = \|Eg\|_{H_p(B_{n+1})}$. Через $e\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$ будем обозначать продолжение, определенное равенством $ez := (0, z)$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции из $BH_p(B_{n+1})$ в точке ea по информации I_{eA}^r. Из легко проверяемых соотношений

$$e(\varphi_c(z)) = \varphi_{ec}(ez), \quad e(\widetilde{\Delta}_{nk}(p)) \subset \widetilde{\Delta}_{n+1,k}(p)$$

и того, что $a \in \widetilde{\Delta}_{nk}(rp,c)$, имеем

$$ea \in e(\widetilde{\Delta}_{nk}(rp,c)) = e\big(\varphi_c(\widetilde{\Delta}_{nk}(rp))\big)$$
$$= \varphi_{ec}\big(e(\widetilde{\Delta}_{nk}(rp))\big) \subset \varphi_{ec}(\Delta_{n+1,k}(rp)) = \Delta_{n+1,k}(rp,ec).$$

Пусть g — произвольная функция из $BA_p(B_n)$. Тогда $Eg \in BH_p(B_{n+1})$. Применяя теорему 3, получаем

$$|(Eg)(ea) - T_0 I^r_{eA} Eg| \le e(ea, I^r_{eA}, BH_p(B_{n+1})),$$

где через T_0 обозначен для краткости соответствующий метод восстановления. В силу того, что для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, любой функции $f \in A_p(B_n)$ и $z \in B_n$

$$D^\alpha(Ef)\big|_{ez} = D^\alpha f\big|_z,$$

последнее неравенство можно записать в виде

$$\left| f(a) - \left(\frac{1-|c|^2}{1-\langle a,c\rangle}\right)^{2(n+1)/p} \widetilde{\chi}_c^{(2-p)/p}(a_c) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\widetilde{\chi}_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z,c\rangle)^{2(n+1)/p}}\right]_{\big|z=(a_c)'_k} \right|$$
$$\le \frac{(1-|c|^2)^{(n+1)/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2(n+1)/p}} \widetilde{\chi}_c^{1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^r,$$

где $dz = (a_c)''_k$. Таким образом,

$$e(a, I^r_A, BA_p) \le \frac{(1-|c|^2)^{(n+1)/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2(n+1)/p}} \widetilde{\chi}^{1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^r.$$

С другой стороны, функция Eg_0 для g_0, определенной равенством (22), совпадает с экстремальной функцией в задаче оптимального восстановления в точке ea на классе $BH_p(B_{n+1})$ по информации I^r_{eA}. Следовательно, $\|g_0\|_{A_p(B_n)} = \|Eg_0\|_{H_p(B_{n+1})} = 1$. Кроме того, $I^r_A g_0 = 0$. Тем самым

$$e(a, I^r_A, BA_p) \ge |g_0(a)| = \frac{(1-|c|^2)^{(n+1)/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2(n+1)/p}} \widetilde{\chi}^{1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^r.$$

Теорема доказана.

Аналогично следствию 1 получаем следующее обобщение леммы Шварца для пространств Бергмана.

Следствие 2. *При всех $1 \le p < \infty$ для $a \in B$ таких, что $|a| < \lambda_{n+1}(rp)$, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in BA_p \\ (D^\alpha f)(0)=0,\, |\alpha| \le r-1}} |f(a)|$$
$$= \frac{|a|^r}{(1-|a|^2)^{(n+1)/p}} \left[\frac{\Gamma(n+1+rp/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(rp/2)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+rp/2} \binom{n}{k} |a|^{2k}\right]^{1/p}.$$

Приведем также аналог предложения 3.

Предложение 4. *При всех $a \in B$ метод (14) является оптимальным методом восстановления на классе BA_2 по информации I_{rm}. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство*

$$e(a, I_{rm}, BA_2) = \left(\frac{1}{(1-|a|^2)^{n+1}} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(n+j)!}{n!j!} |a|^{2j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(n+r)!}{n!\alpha^j!} |a^{2\alpha^j}| \right)^{1/2}.$$

При $n = 1$, пользуясь легко проверяемыми равенствами

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) u^j = \frac{u^r}{(r-1)!} \left(\frac{g(z)}{u-z} \right)^{(r-1)}_{|z=0},$$

$$F^{(r-1)}(0) = (-1)^{r-1}(1-|c|^2) \left[(1-\overline{c}t)^{r-2} F\left(\frac{c-t}{1-\overline{c}t} \right) \right]^{(r-1)}_{|t=c},$$

справедливыми для любых функций g и F, голоморфных в окрестности нуля, из теоремы 4 можно получить

Следствие 3. *Пусть $1 \le p < \infty$, $I_c^r f := \{f(c), \ldots, f^{(r-1)}(c)\}$, $c \in B_1$. При всех $a \in B_1$ метод*

$$f(a) \approx \frac{(a-c)^r (1-|a|^2)^{2-4/p}}{(1-\overline{c}a)^{r+1} \omega^{(p-2)/p}(a)} \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(1-\overline{c}t)^{r+1} \omega^{(p-2)/p}(t) f(t)}{(t-a)(1-\overline{a}t)^{2-4/p}} \right]^{(r-1)}_{|t=c},$$

где

$$\omega(t) := 1 + \frac{rp}{2} \left(1 - \frac{\overline{c}-\overline{a}}{1-c\overline{a}} \frac{c-t}{1-\overline{c}t} \right),$$

является оптимальным методом восстановления на классе $BA_p(B_1)$ по информации I_c^r. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I_c^r, BA_p(B_1)) = \left| \frac{c-a}{1-\overline{c}a} \right|^r \frac{\omega^{1/p}(a)}{(1-|a|^2)^{2/p}}.$$

Утверждение следствия 3 другим способом (оставаясь в рамках одномерного случая) было доказано в работе [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory. New York: Plenum Press, 1977. P.1–54.

[2] Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures in optimal recovery // Lect. Notes Math. 1985. V.1129. P.21–93.

[3] Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.

[4] Traub J.F., Wasilkowski G.W., Woźniakowski H. Information-based complexity. New York: Academic Press, 1988.
[5] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлени функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т.50, N6. С.85–93.
[6] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbf{C}^n$. М.: Мир, 1964.
[7] Osipenko K.Yu., Stessin M.I. On optimal recovery of a holomorphic function in the unit ball of $\mathbf{C}^n$ // Constr. Approx. 1992. V.8. P.141–159.
[8] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Мат. заметки. 1991. Т.49, N4. С.95–104.
[9] Осипенко К.Ю. Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций // Мат. сб. 1991. Т.182, N5. С.723–745.
[10] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О некоторых задачах оптимального восстановления аналитических и гармонических функций по неточным данным // Сиб. мат. ж. 1993. Т.34, N3. С.144–160.
[11] Осипенко К.Ю. Задача Каратеодори-Фейера и оптимальное восстановление производных в пространствах Харди // Мат. сб. 1994. Т.185, N1. С.27–42.
[12] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М: Наука, 1969.

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К.Э. Циолковского