ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Март 2013 **Выпуск 69. С. 0-0**

Г. Г. Магарил-Ильяев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича, Москва, Россия

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН Владикавказ, Россия

magaril@mech.math.msu.su

К. Ю. Осипенко

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича, Москва, Россия

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН Владикавказ, Россия

kosipenko@yahoo.com

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Доказана теорема об оптимальном восстановлении степеней нормального оператора. В качестве иллюстрации доказаны утверждения относительно оптимального восстановления температуры тела в разностной модели уравнения теплопроводности и оптимального восстановления решения в разностной модели системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Библиография: 6 назв.

1. Формулировка и доказательство основного результата

Пусть $T\colon \mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$ — линейный оператор. Предположим, что $x\in\mathbb{C}^d$ и T^nx (T^n — n-я степень оператора T) известны неточно, а именно, известны векторы $y_0,y_n\in\mathbb{C}^d$ такие, что $\|x-y_0\|\leqslant\delta_0$ и $\|T^nx-y_n\|\leqslant\delta_n$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\delta_0,\delta_n>0$. По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) значение T^kx, $0<k<n$. В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $\varphi\colon\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(T^k,T^n,\delta_0,\delta_n,\varphi)=\sup\|T^kx-\varphi(y_0,y_n)\|,$$

где супремум берется по $x,y_0,y_n\in\mathbb{C}^d$ таким, что $\|x-y_0\|\leqslant\delta_0$ и $\|T^nx-y_n\|\leqslant\delta_n$. Нас интересует величина

$$E(T^k,T^n,\delta_0,\delta_n)=\inf_{\varphi\colon\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d}e(T^k,T^n,\delta_0,\delta_n,\varphi),\tag{1}$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы, на которых нижняя грань достигается, называемые *оптимальными методами восстановления*.

Работа финансово поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты No. 11-01-00529 и No. 12-01-90014).

Перед формулировкой основной теоремы введем обозначения. Пусть $T\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ — ненулевой нормальный оператор, т.е. $TT^* = T^*T$. Тогда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — соответствующие собственные числа. Можно считать, что их модули упорядочены по возрастанию и тем самым

$$|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{s_1}| < \ldots < |\lambda_{s_{r-1}+1}| = \ldots = |\lambda_{s_r}|.$$

Общее значение модулей собственных чисел в j-й группе обозначим через μ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$. Разобьем полупрямую $(0, \infty)$ на промежутки:

$$\Delta_0 = (0, \mu_1^n], \quad \Delta_1 = (\mu_1^n, \mu_2^n], \dots, \Delta_{r-1} = (\mu_{r-1}^n, \mu_r^n], \quad \Delta_r = (\mu_r^n, \infty),$$

причем полуинтервал Δ_0 отсутствует, если $\mu_1 = 0$. Каждому промежутку Δ_j сопоставим пару чисел u_j и v_j, $0 \leqslant j \leqslant r$ (если $\mu_1 = 0$, то $1 \leqslant j \leqslant r$) по правилу

$$u_0 = 0,$$

$$u_j = \frac{\mu_j^{2k}\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}\mu_{j+1}^{2k}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

$$u_r = \mu_r^{2k}$$

и

$$v_0 = \mu_1^{-2(n-k)},$$

$$v_j = \frac{\mu_{j+1}^{2k} - \mu_j^{2k}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

$$v_r = 0.$$

Теорема 1. *Пусть $T\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ — ненулевой нормальный оператор и $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — его собственные числа в ортонормированном базисе из его собственных векторов. Если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $0 \leqslant j \leqslant r$, то*

$$E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n) = \sqrt{\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j},$$

и для любого $\theta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\theta| \leqslant 1$, и любого линейного оператора $B\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, для которого тот же базис является базисом из его собственных векторов с собственными числами

$$\beta_i = \frac{v_j \overline{\lambda}_i^n \lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} + \theta \frac{\sqrt{u_j v_j}}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \sqrt{-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

линейный оператор $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, действующий по правилу

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = (T^k - BT^n)\xi + B\eta,$$

является оптимальным методом восстановления.

Перед доказательством теоремы отметим ее некоторые частные случаи. Пусть $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$. Тогда $u_0 = 0$ и тем самым $\beta_i = \lambda_i^{-(n-k)}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, т.е. $B = T^{-(n-k)}$. Следовательно, действие оптимального метода $\widehat{\varphi}$ таково:

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = T^k(T^{-n}\eta).$$

Метод использует только измерение η, а именно, находится элемент x из условия $T^n x = \eta$ и берется от него k-я степень оператора T.

Пусть теперь $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_r$. Тогда $v_0 = 0$ и значит, $\beta_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant d$, т.е. B — нулевой оператор. В этом случае метод использует только измерение ξ:

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = T^k \xi.$$

Доказательство теоремы 1. Оценим снизу погрешность оптимального восстановления $E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n)$. Покажем, что она не меньше значения (т.е. величины верхней грани максимизируемого функционала) следующей задачи:

$$\|T^k x\| \to \max, \quad \|x\| \leqslant \delta_0, \quad \|T^n x\| \leqslant \delta_n, \quad x \in \mathbb{C}^d. \tag{2}$$

Действительно, пусть x_0 — допустимый вектор в (2). Тогда, очевидно, вектор $-x_0$ также допустим и мы имеем для любого $\varphi\colon \mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$

$$2\|T^kx_0\| = \|T^kx_0-\varphi(0,0)-(T^k(-x_0)-\varphi(0,0))\| \leqslant \|T^kx_0-\varphi(0,0)\|+\|T^k(-x_0)-\varphi(0,0)\|$$

$$\leqslant 2\sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^d\\ \|x\|\leqslant\delta_0,\ \|T^nx\|\leqslant\delta_n}}\|T^kx-\varphi(0,0)\| \leqslant 2\sup_{\substack{x,y_0,y_n\in\mathbb{C}^d\\ \|x-y_0\|\leqslant\delta_0,\ \|T^nx-y_n\|\leqslant\delta_n}}\|T^kx-\varphi(y_0,y_n)\|.$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2), а справа к нижней грани по всем методам φ, получаем требуемое.

Пусть $e_1,\ldots,e_d$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^d$ из собственных векторов оператора T и $x=x_1e_1+\ldots+x_de_d$. Тогда квадрат значения задачи (2) равен значению такой задачи:

$$\sum_{j=1}^d|\lambda_j|^{2k}|x_j|^2\to\max,\quad \sum_{j=1}^d|x_j|^2\leqslant\delta_0^2,\quad \sum_{j=1}^d|\lambda_j|^{2n}|x_j|^2\leqslant\delta_n^2. \tag{3}$$

Оценим снизу ее значение. Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай 1: $\mu_1>0$ и $\delta_n/\delta_0\in\Delta_0$. Определим $\widehat{x}=(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_d)$ по правилу $\widehat{x}_1=\delta_n/\mu_1^n$ и $\widehat{x}_j=0$, $2\leqslant j\leqslant d$. Так как $\delta_n/\delta_0\leqslant\mu_1^n$, имеем $\widehat{x}_1^2\leqslant\delta_0^2$ и, значит, элемент $\widehat{x}$ допустим в задаче (3). Следовательно, ее значение не меньше величины

$$\sum_{j=1}^d|\lambda_j|^{2k}|\widehat{x}_j|^2=\mu_1^{2k}\frac{\delta_n^2}{\mu_1^{2n}}=\delta_n^2\mu_1^{-(n-k)}=\delta_0^2u_0+\delta_n^2v_0.$$

Случай 2: $\mu_1>0$ и $\delta_n/\delta_0\in\Delta_j$, $1\leqslant j\leqslant r-1$. Пусть k_1 и k_2 такие числа, что $|\lambda_{k_1}|=\mu_j$, а $|\lambda_{k_2}|=\mu_{j+1}$. Выберем $\widehat{x}_{k_1}$ и $\widehat{x}_{k_2}$ из условий

$$\widehat{x}_{k_1}^2+\widehat{x}_{k_2}^2=\delta_0^2,\quad \mu_j^{2n}\widehat{x}_{k_1}^2+\mu_{j+1}^{2n}\widehat{x}_{k_2}^2=\delta_n^2,$$

т.е.

$$\widehat{x}_{k_1}=\sqrt{\frac{\delta_0^2\mu_{j+1}^{2n}-\delta_n^2}{\mu_{j+1}^{2n}-\mu_j^{2n}}},\quad \widehat{x}_{k_2}=\sqrt{\frac{\delta_n^2-\delta_0^2\mu_j^{2n}}{\mu_{j+1}^{2n}-\mu_j^{2n}}}.$$

Положим $\widehat{x}=(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_d)$, где $\widehat{x}_{k_1}$ и $\widehat{x}_{k_2}$ только что определены, а остальные компоненты нулевые. Тогда легко видеть, что $\widehat{x}$ — допустимый элемент в задаче (3) и поэтому ее значение не меньше величины

$$\sum_{j=1}^d|\lambda_j|^{2k}|\widehat{x}_j|^2=\mu_j^{2k}\widehat{x}_{k_1}^2+\mu_{j+1}^{2k}\widehat{x}_{k_2}^2=\mu_j^{2k}\frac{\delta_0^2\mu_{j+1}^{2n}-\delta_n^2}{\mu_{j+1}^{2n}-\mu_j^{2n}}+\mu_{j+1}^{2k}\frac{\delta_n^2-\delta_0^2\mu_j^{2n}}{\mu_{j+1}^{2n}-\mu_j^{2n}}=\delta_0^2u_j+\delta_n^2v_j.$$

Случай 3: $\mu_1>0$ и $\delta_n/\delta_0\in\Delta_r$. Положим $\widehat{x}=(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_d)$, где $\widehat{x}_d=\delta_0$ и $\widehat{x}_j=0$, $1\leqslant j\leqslant d-1$. Так как $\mu_r^{2n}|\widehat{x}_d|^2=\mu_r^{2n}\delta_0^2<\delta_n^2$, вектор $\widehat{x}$ допустим в задаче (3) и, следовательно, ее значение не меньше величины

$$\sum_{j=1}^d|\lambda_j|^{2k}|\widehat{x}_j|^2=\mu_r^{2k}\delta_0^2=\delta_0^2u_r+\delta_n^2v_r.$$

Случай 4. Если $\mu_1=0$, то фактически дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что, если $\delta_n/\delta_0\in\Delta_j$, $1\leqslant j\leqslant r$, то значение задачи (3) не меньше величины $\delta_0^2u_j+\delta_n^2v_j$.

Согласно установленному выше, погрешность оптимального восстановления не меньше значения задачи (2) и, значит, если $\delta_n/\delta_0\in\Delta_j$, $j=0,1,\ldots,r$, то доказано, что

$$E(T^k,T^n,\delta_0,\delta_n)\geqslant\sqrt{\delta_0^2u_j+\delta_n^2v_j}. \tag{4}$$

Перейдем теперь к оценке сверху величины $E(T^k,T^n,\delta_0,\delta_n)$ и построению оптимальных методов восстановления. Оптимальные методы будем искать среди линейных операторов из $\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d$ в $\mathbb{C}^d$, т.е. среди операторов, действующих по правилу: $(\xi,\eta)\mapsto A\xi+B\eta$, где A и B — линейные операторы из $\mathbb{C}^d$ в $\mathbb{C}^d$. Оптимальность такого метода означает, что его погрешность, т.е. значение задачи

$$\|T^kx-Ay_0-By_n\|\to\max,\quad \|x-y_0\|\leqslant\delta_0,\quad \|T^nx-y_n\|\leqslant\delta_n,\quad x,y_0,y_n\in\mathbb{C}^d \tag{5}$$

равно $E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n)$.

Обозначим $\xi = x - y_0$ и $\eta = T^n x - y_n$. Тогда данная задача перепишется так:

$$\|T^k x - Ax - BT^n x + A\xi + B\eta\| \to \max, \quad \|\xi\| \leqslant \delta_0, \quad \|\eta\| \leqslant \delta_n, \quad x, \xi, \eta \in \mathbb{C}^d.$$

Заметим, что если $T^k - A - BT^n$ — ненулевой оператор, то значение этой задачи равно бесконечности. В самом деле, если существует $x_0 \in \mathbb{C}^d$ такое, что $T^k x_0 - Ax_0 - BT^n x_0 \neq 0$, то за счет выбора константы $C > 0$ на допустимых элементах Cx_0, $\xi = 0$ и $\eta = 0$ максимизируемый функционал может быть сделан сколь угодно большим.

Далее считаем, что $A = T^k - BT^n$ и, кроме того, будем предполагать, что собственные векторы $e_1, \ldots, e_d$ оператора T являются собственными векторами оператора B. Но тогда они являются собственными векторами и оператора A. Если α_i и β_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, — соответствующие собственные числа операторов A и B, то ясно, что

$$\alpha_i = \lambda_i^k - \beta_i \lambda_i^n, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{6}$$

Учитывая сделанные предположения и разложения $\xi = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_d e_d$ и $\eta = \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_d e_d$, мы заключаем, что квадрат значения задачи (5) равен значению задачи

$$\sum_{i=1}^d |\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 \to \max, \quad \sum_{i=1}^d |\xi_i|^2 \leqslant \delta_0^2, \quad \sum_{i=1}^d |\eta_i|^2 \leqslant \delta_n^2. \tag{7}$$

Пусть $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, и при этом $\mu_1 > 0$ и $1 \leqslant j \leqslant r-1$ или $\mu_1 = 0$ и $2 \leqslant j \leqslant r-1$. В этом случае числа u_j и v_j положительны. Оценим в данной ситуации слагаемые под знаком суммы в максимизируемом функционале в (7) по неравенству Коши — Буняковского

$$|\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 \leqslant \left(\frac{|\alpha_i|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} \right) (|\xi_i|^2 u_j + |\eta_i|^2 v_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{8}$$

Если (см. (6))

$$\frac{|\alpha_i|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} = \frac{|\lambda_i^k - \beta_i \lambda_i^n|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{9}$$

то складывая неравенства (8), получаем, что значение задачи (7) не превосходит величины $\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j$ и значит, согласно (4), совпадает с ней, а метод из теоремы с оператором B, определяемым данными β_i, $i = 1, \ldots, d$, оптимален.

Перепишем левые части неравенств (9) в другой форме (выделяя полный квадрат)

$$\frac{|\lambda_i^k - \beta_i \lambda_i^n|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} = \frac{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}{u_j v_j} \left| \beta_i - \frac{v_j \overline{\lambda}_i^n \lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \right|^2 + \frac{|\lambda_i|^{2k}}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}.$$

Требование, чтобы эти выражения не превосходили единицы, равносильно неравенствам

$$\left| \beta_i - \frac{v_j \overline{\lambda}_i^n \lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \right| \leqslant \frac{\sqrt{u_j v_j}}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \sqrt{-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}, \tag{10}$$

$1 \leqslant i \leqslant d$, которые, в свою очередь, эквивалентны выражениям для β_i, $i = 1, \ldots, d$, из формулировки теоремы (для рассматриваемых сейчас случаев, когда $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, а j таково, что u_j и v_j одновременно отличны от нуля). При этом выражения под знаком корня в (10) неотрицательны. Действительно, точки (μ_j^{2n}, μ_j^{2k}) и $(\mu_{j+1}^{2n}, \mu_{j+1}^{2k})$ лежат на вогнутой кривой $y = x^{k/n}$, и через них проходит прямая $y = u_j + v_j x$. Следовательно, для всех μ_i справедливо неравенство $\mu_i^{2k} \leqslant u_j + v_j \mu_i^{2n}$ и, значит, $-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j \geqslant 0$. Из (10), в частности, следует, что числа β_i, $i = 1, \ldots, d$, удовлетворяющие (9), существуют.

Итак, если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, а j такое, что u_j и v_j одновременно отличны от нуля, то числа β_i, $i = 1, \ldots, d$, удовлетворяющие условиям теоремы, дают нужное выражение для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в теореме метода.

Докажем, что и в остальных случаях найденные из (10) выражения для β_i, $i = 1, \ldots, d$, обладают тем же свойством. Действительно, пусть $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$. Тогда по определению $u_0 = 0$ и $v_0 = \mu_1^{-2(n-k)}$. Из (10) следует, что $\beta_i = \lambda_i^{-(n-k)}$ и, значит, согласно (6) $\alpha_i = 0$,

$i = 1, \ldots, d$, и мы получаем (учитывая, что $\mu_1 \leqslant |\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, d$) оценку сверху для значения задачи (7)

$$\sum_{i=1}^{d} |\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^{-2(n-k)} |\eta_i|^2 \leqslant \mu_1^{-2(n-k)} \sum_{i=1}^{d} |\eta_i|^2 \leqslant \delta_n^2 v_0 = \delta_0^2 u_0 + \delta_n^2 v_0.$$

Отсюда вытекает, что утверждения теоремы справедливы, когда $\mu_1 > 0$, а $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$.

Пусть теперь $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_r$. Тогда по определению $u_r = \mu_r^{2k}$ и $v_r = 0$. Из (10) получаем, что $\beta_i = 0$ и вследствие (6) $\alpha_i = \lambda_i^k$, $i = 1, \ldots, d$. Следовательно (учитывая, что $|\lambda_i| \leqslant \mu_r$, $i = 1, \ldots, d$)

$$\sum_{i=1}^{d} |\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^{2k} |\xi_i|^2 \leqslant \mu_r^{2k} \sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^2 \leqslant \delta_0^2 u_r = \delta_0^2 u_r + \delta_n^2 v_r,$$

т.е. и в этом случае утверждения теоремы справедливы. □

2. Оптимальное восстановление температуры по неточным дискретным данным

Рассмотрим уравнение теплопроводности на окружности, задаваемое неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2}. \tag{11}$$

Здесь τ и h — положительные числа, $(s, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_m$, где $\mathbb{Z}_m$ — группа вычетов по модулю $m \geqslant 1$, которую будем реализовывать как набор чисел $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ со сложением по модулю m, $u_{s,j}$ — температура тела в момент времени $s\tau$ в точке jh.

Обозначим через l_2^m пространство функций (векторов) $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ на $\mathbb{Z}_m$ с нормой

$$\|x\|_{l_2^m} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Предположим, что приближенно измерена температура тела в нулевой момент времени и в момент времени $n\tau$, т.е. приближенно известны векторы $u_0 = (u_{0,0}, \ldots, u_{0,m-1})$ и $u_n = (u_{n,0}, \ldots, u_{n,m-1})$, или, точнее говоря, нам известны векторы $y_0 = (y_{0,0}, \ldots, y_{0,m-1})$ и $y_n = (y_{n,0}, \ldots, y_{n,m-1})$ такие, что

$$\|u_q - y_q\|_{l_2^m} \leqslant \delta_q, \quad q = 0, n,$$

где $\delta_q > 0$, $q = 0, n$. По этой информации требуется восстановить вектор $u_k = (u_{k,0}, \ldots, u_{k,m-1})$, где $0 < k < n$, т.е. восстановить значение температуры тела в момент времени $k\tau$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi\colon l_2^m \times l_2^m \to l_2^m$. Для данного метода φ его погрешностью назовем величину

$$e_{kn}(\delta_0, \delta_n, \varphi) = \sup \|u_k - \varphi(y_0, y_n)\|_{l_2^m},$$

где супремум берется по $u_0, y_0, y_n \in l_2^m$ таким, что $\|u_q - y_q\|_{l_2^m} \leqslant \delta_q$, $q = 0, n$. Величина

$$E_{kn}(\delta_0, \delta_n) = \inf_{\varphi\colon l_2^m \times l_2^m \to l_2^m} e_{kn}(\delta_0, \delta_n, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным*.

На $\mathbb{Z}_m$ определено преобразование Фурье — линейное отображение, переводящее $\mathbb{Z}_m$ в себя, задаваемое матрицей

$$F = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(e^{-\frac{2\pi i p}{m} j} \right)_{p,j=0}^{m-1},$$

которая, как нетрудно видеть, является унитарной.

Применим преобразование Фурье по переменной j к обеим частям уравнения (11), учитывая, что оно переводит сдвиг на ± 1 в умножение на $\exp(\pm 2\pi i p/m)$. После несложных преобразований получим, что $Fu_{s+1} = \Lambda F u_s$ для всех $s \in \mathbb{Z}_+$, где Λ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\lambda_p = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi p}{m} \right)^{-1}, \quad p = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{12}$$

Из соотношения $Fu_{s+1} = \Lambda F u_s$ следует, что

$$u_{s+1} = Tu_s, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

где $T = F^{-1}\Lambda F$.

Таким образом, мы приходим к предыдущей задаче, и ясно, что

$$E_{kn}(\delta_0, \delta_n) = E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n).$$

Сформулируем соответствующий результат, вытекающий из теоремы 1. Положим

$$\mu_j = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{m}(r-j)\right)^{-1}, \quad j = 1, \dots r,$$

где $r = [m/2] + 1$.

Определим Δ_j, v_j и u_j, $j = 1, \dots, r$, по тем же формулам, что и в теореме 1. Тогда из нее вытекает

Теорема 2. *Если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $0 \leqslant j \leqslant r$, то*

$$E_{kn}(\delta_0, \delta_n) = \sqrt{\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j},$$

и для любого $\theta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\theta| \leqslant 1$, и любой диагональной матрицы B с диагональными элементами

$$\beta_p = \frac{v_j \lambda_p^{n+k}}{u_j + \lambda_p^{2n} v_j} + \theta \frac{\sqrt{u_j v_j}}{u_j + \lambda_p^{2n} v_j}\sqrt{-\lambda_p^{2k} + u_j + \lambda_p^{2n} v_j}, \quad p = 0, 1 \dots m-1,$$

метод

$$\widehat{\varphi}(y_0, y_n) = (T^k - T^n \widetilde{B}) y_0 + \widetilde{B} y_n,$$

где $\widetilde{B} = F^{-1} B F$, является оптимальным.

Аналоги рассматриваемой задачи для непрерывных моделей рассматривались в [**1**]–[**5**]. В [**4**] изучалась также дискретная модель для непериодического случая.

3. Дискретный аналог системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим дискретную модель перемещения d-мерного вектора, задаваемую равенствами

$$\frac{x_{s+1} - x_s}{\tau} = Ax_s, \quad s = 0, 1, \dots,$$

где $x_s \in \mathbb{C}^d$, $\tau > 0$ и A — квадратная матрица порядка d с постоянными коэффициентами.

Предположим, что известны векторы $y_0, y_n \in \mathbb{C}^d$ такие, что $\|x_0 - y_0\| \leqslant \delta_0$ и $\|x_n - y_n\| \leqslant \delta_n$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\delta_0, \delta_n > 0$. По этой информации мы хотим восстановить значение x_k, $0 < k < n$. В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения $\varphi\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$. *Погрешностью* метода φ назовем величину

$$e(k, n, \delta_0, \delta_n, \varphi) = \sup \|x_k - \varphi(y_0, y_n)\|,$$

где супремум берется по $x_0, y_0, y_n \in \mathbb{C}^d$ таким, что $\|x_0 - y_0\| \leqslant \delta_0$, $\|x_n - y_n\| \leqslant \delta_n$. Нас интересует величина

$$E(k, n, \delta_0, \delta_n) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d} e(k, n, \delta_0, \delta_n, \varphi).$$

В силу равенств

$$x_s = T^s x_0, \quad T = E + \tau A,$$

рассматриваемая задача сводится к задаче (1). Предположим, что A — нормальная матрица с собственными значениями $\mu_1, \dots, \mu_d$. Тогда T — также нормальная матрица с собственными значениями $\lambda_j = 1 + \tau\mu_j$, $j = 1, \dots, d$. Непосредственное применение теоремы 1 дает решение поставленной задачи для данного случая.

Аналог этой задачи для непрерывной модели рассматривался в [**6**].

Литература

1. Е. В. Введенская, “Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени”, *Владикавказ. мат. журн.* **8**, No. 1, 16-21 (2006).
2. K. Yu. Osipenko, E. W. Wedenskaya, “Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data”, *J. Complexity* **23**, No. 4–6, 653-661 (2007).
3. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Мат. сб.* **200**, No. 5, 37–54 (2009).
4. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации”, *Тр. МИАН* **269**, 181–192 (2010).
5. K. Yu. Osipenko, “Extremal problems for the generalized heat equation and optimal recovery of its solution from inaccurate data”, *Optimization* **60**, No. 6, 755–767 (2011).
6. Е. В. Введенская, “Об оптимальном восстановлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения* **45**, No. 2, 255-259 (2009).

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2012 г.