УДК 517.984.64

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах

Построены наилучшие (оптимальные) методы восстановления производных функций из обобщенного соболевского класса функций на $\mathbb{R}^d$ при условии, что о каждой такой функции известно точно или приближенно ее преобразование Фурье на произвольном измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^d$. В обоих случаях построены семейства оптимальных методов. В этих методах используется не весь объем информации о преобразовании Фурье, однако та часть, которая используется, подвергается некоторой фильтрации. Рассмотрена задача о нахождении наилучшего множества для восстановления данной производной среди всех множеств фиксированной меры.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, соболевский класс, экстремальная задача, преобразование Фурье.

DOI: 10.4213/im8182

§ 1. Постановки задач и формулировки результатов

Пусть d – натуральное число и F – преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $x(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то удобно считать, что функция $Fx(\,\cdot\,)$ определена на $\mathbb{R}^d$ с мерой Лебега, деленной на $(2\pi)^d$. Норму функции $y(\,\cdot\,)$ в пространстве суммируемых с квадратом функций на $\mathbb{R}^d$ с такой мерой обозначаем $\|y(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)}$, т. е.

$$\|y(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |y(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Для каждого $r > 0$ обобщенное соболевское пространство (или пространство бесселевых потенциалов) $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ определяется как совокупность функций $x(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, для которых

$$\|x(\,\cdot\,)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^r\,|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} < \infty,$$

где $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$. Соответствующим *обобщенным соболевским классом* назовем множество

$$H_2^r(\mathbb{R}^d) = \bigl\{x(\,\cdot\,) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d) \bigm| \|x(\,\cdot\,)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1\bigr\}.$$

Если r – натуральное число, то функция $x(\,\cdot\,)$ (переменных $t_1, \dots, t_d$) принадлежит $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда все ее обобщенные производные

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-12447).

$\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}x/\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_d^{\alpha_d}$, где $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ и $\alpha_1+\dots+\alpha_d\leqslant r$, принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. В этом случае норма

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_d\leqslant r}\left\|\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}x(\,\cdot\,)}{\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_d^{\alpha_d}}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

эквивалентна норме в $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, если r натурально, то $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ – классическое соболевское пространство функций на $\mathbb{R}^d$.

Введем теперь определение дробной производной. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{R}_+^d$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$, $(i\xi)^\alpha=(i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_d)^{\alpha_d}$, где $(i\xi_j)^{\alpha_j}=|\xi_j|^{\alpha_j}\times\exp\bigl\{\frac{1}{2}\pi i\operatorname{sign}\xi_j\bigr\}$, $j=1,\dots,d$ ($\operatorname{sign}0=0$, $0^0=1$), и $\mathcal{E}^\alpha$ – оператор умножения на функцию $\xi\mapsto(i\xi)^\alpha$ в $\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Если функция $x(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что $(\mathcal{E}^\alpha\circ F)x(\,\cdot\,)\in\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$, то определена функция

$$D^\alpha x(\,\cdot\,)=(F^{-1}\circ\mathcal{E}^\alpha\circ F)x(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{R}^d),$$

где F^{-1} – обратное преобразования Фурье, которая называется *α-й производной* (по Вейлю) функции $x(\,\cdot\,)$. Ясно, что если $x(\,\cdot\,)$ – достаточно гладкая и быстро убывающая функция на $\mathbb{R}^d$ и $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, то

$$D^\alpha x(t)=\frac{\partial x^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}(t)}{\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_d^{\alpha_d}}.$$

Нас интересуют вопросы, которые на содержательном уровне формулируются следующим образом.

1. Пусть о каждой функции $x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ известно (точно или приближенно) ее преобразование Фурье на некотором подмножестве $\mathbb{R}^d$. Как по этой информации наилучшим образом восстановить $D^\alpha x(\,\cdot\,)$?

2. Пусть имеется возможность измерить (точно или приближенно) преобразование Фурье функций $x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ на любом множестве, мера которого не превосходит некоторого числа $\sigma>0$, т. е. имеется возможность измерить фиксированное "число гармоник". Какие гармоники лучше всего взять для восстановления $D^\alpha x(\,\cdot\,)$?

Приведем точные постановки задач 1, 2. Пусть A – произвольное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$ и для каждой функции $x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на A либо точно, либо с точностью до $\delta>0$ в метрике $\widehat{L}_2(A)$, т. е. известна функция $y(\,\cdot\,)\in\widehat{L}_2(A)$ такая, что $\|(Fx)(\,\cdot\,)-y(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(A)}\leqslant\delta$. По этой информации мы хотим восстановить $D^\alpha x(\,\cdot\,)$, $\alpha\in\mathbb{R}_+^d$, в метрике пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$. Понимается это следующим образом.

Пусть $I^\delta(A)\colon H_2^r(\mathbb{R}^d)\to\widehat{L}_2(A)$ – отображение, сопоставляющее с функцией $x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ множество $I^\delta(A)x(\,\cdot\,)=\{\,y(\,\cdot\,)\in\widehat{L}_2(A)\mid\|Fx(\,\cdot\,)-y(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(A)}\leqslant\delta\}$ ($I^0(A)$ – обычное отображение, которое сопоставляет с $x(\,\cdot\,)$ функцию $Fx(\,\cdot\,)|_A$ – сужение $Fx(\,\cdot\,)$ на A). Обозначим через $\operatorname{Im}I^\delta(A)$ образ этого отображения.

Всякий метод восстановления должен по функции (наблюдению) $y(\,\cdot\,)\in\operatorname{Im}I^\delta(A)$ указать функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая является приближением к α-й производной функции из $H_2^r(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, всякий метод есть некоторое отображение $\varphi\colon\operatorname{Im}I^\delta(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью этого метода назовем величину

$$e\bigl(D^\alpha,H_2^r(\mathbb{R}^d),A,\delta,\varphi\bigr)=\sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)\\ y(\,\cdot\,)\in\operatorname{Im}I^\delta(A)}}\bigl\|D^\alpha x(\,\cdot\,)-\varphi(y(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

При $\delta=0$ последнее равенство можно записать короче:

$$e\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0, \varphi\big)=\sup_{x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)}\big\|D^\alpha x(\,\cdot\,)-\varphi(Fx(\,\cdot\,)|_A)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересуют величина

$$E\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\big)=\inf_\varphi e\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \varphi\big),$$

где нижняя грань берется по всем методам $\varphi\colon \operatorname{Im} I^\delta(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$, называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\big)=e\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \widehat{\varphi}\big).$$

Такие методы $\widehat{\varphi}$ будем называть *оптимальными методами восстановления*.

Вопрос о нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимальных методов восстановления и составляет точную постановку вопроса 1.

Пусть теперь $\sigma>0$ и $\mathcal{A}_\sigma$ – совокупность всех измеримых подмножеств $\mathbb{R}^d$, мера Лебега которых не больше σ. Нас будут интересовать также величина

$$E_\sigma\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta\big)=\inf_{A_\sigma\in\mathcal{A}_\sigma} E\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta\big) \tag{1}$$

и те множества, на которых нижняя грань достигается и которые мы называем *оптимальными множествами*.

Задача о нахождении величины (1) и оптимальных множеств есть точная постановка вопроса 2.

Первоначальные идеи, связанные с данными постановками, принадлежат А. Н. Колмогорову, который в работе [1] ввел понятие поперечника – величины, характеризующей наилучшее приближение класса функций подпространствами фиксированной размерности. Затем в 1950-е годы стали изучать наилучшие квадратуры на классах функций (первые исследования принадлежат А. Сарду [2] и С. М. Никольскому [3]). С. А. Смоляк в 1965 г. поставил [4] общую задачу об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе элементов по неточной информации о самих элементах и доказал, что если класс – выпуклое центрально симметричное множество, то среди оптимальных методов существует линейный. Впоследствии была поставлена более общая задача о восстановлении линейных операторов и тематика оптимального восстановления получила достаточно интенсивное развитие. Определенное представление об этом можно получить из обзоров и монографий [5]–[11]. В работах [12]–[17] изучались задачи оптимального восстановления, близкие к тем, которые рассматриваются в настоящей статье. Отдельно отметим работу авторов [18], в которой исследуется та же задача, что и в данной статье, но множество A является пространством $\mathbb{R}^d$.

Перед формулировкой основных утверждений приведем некоторые определения и обозначения.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ и $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$. Положим

$$\overline{\alpha}=\sum_{j=1}^d\alpha_j,\qquad \alpha^\alpha=\prod_{j=1}^d\alpha_j^{\alpha_j},\qquad |\xi|^\alpha=\prod_{j=1}^d|\xi_j|^{\alpha_j}.$$

Пусть $0 < \overline{\alpha} < r$. Рассмотрим функцию $f(\,\cdot\,)$ на $\mathbb{R}^d$, определенную формулой

$$f(\xi) = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Эта функция, очевидно, ограничена и стремится к нулю при $\|\xi\| \to \infty$. Несложный подсчет показывает, что ее максимальным значением является

$$\widehat{\lambda} = \frac{\alpha^\alpha (r - \overline{\alpha})^{r - \overline{\alpha}}}{r^r}$$

и оно достигается только в точках

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{r - \overline{\alpha}}}, \dots, \pm\sqrt{\frac{\alpha_d}{r - \overline{\alpha}}}\,\right).$$

Обозначим

$$\widehat{\delta} = \left(\frac{r - \overline{\alpha}}{r}\right)^{r/2}$$

и на полупрямой $[0, \infty]$ рассмотрим функцию h, определенную формулой

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\alpha}{r\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}-1}}(1 - t^{2/r})^{\overline{\alpha}-1} t^{2(1 - \overline{\alpha}/r)}, & 0 \leqslant t \leqslant \widehat{\delta}, \\ \widehat{\lambda}, & t \geqslant \widehat{\delta}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $h(t)$ строго монотонно возрастает на отрезке $[0, \widehat{\delta}]$, $h(0) = 0$ и $h(\widehat{\delta}) = \widehat{\lambda}$.

Определим для каждого $\lambda \geqslant 0$ множество

$$\Omega_\lambda = \bigl\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid f(\xi) \geqslant \lambda\bigr\}$$

и поставим в соответствие любому измеримому подмножеству A в $\mathbb{R}^d$ число

$$\lambda(A) = \inf\bigl\{\lambda > 0 \mid \operatorname{mes}(A \cap \Omega_\lambda) = \operatorname{mes}\Omega_\lambda\bigr\}.$$

Равенство $\operatorname{mes}(A \cap \Omega_{\widehat{\lambda}}) = \operatorname{mes}\Omega_{\widehat{\lambda}}$ очевидным образом выполняется, поскольку $\operatorname{mes}\Omega_{\widehat{\lambda}} = 0$, а если A совпадает п.в. с $\mathbb{R}^d$, то $\lambda(A) = 0$. Таким образом, $0 \leqslant \lambda(A) \leqslant \widehat{\lambda}$.

Если $\delta = 0$ и $\lambda(A) = 0$, то мы располагаем полной информацией о функции и задача восстановления становится очевидной. По этой причине случай $\delta + \lambda(A) = 0$ далее исключен из рассмотрения.

Для каждого $\delta \geqslant 0$ и каждого измеримого подмножества A в $\mathbb{R}^d$ таких, что $\delta + \lambda(A) \neq 0$, положим

$$\Delta = \Delta(\delta, A) = \begin{cases} \delta, & 0 < \delta < \widehat{\delta}, \quad \lambda(A) \leqslant h(\delta), \\ h^{-1}(\lambda(A)), & 0 \leqslant \delta < \widehat{\delta}, \quad \lambda(A) > h(\delta), \\ \widehat{\delta}, & \delta \geqslant \widehat{\delta}, \end{cases}$$

и определим числа

$$\lambda_1 = \lambda_1(\delta, A) = \frac{r}{\overline{\alpha}\Delta^2}(\widehat{\delta}^{\,2/r} - \Delta^{2/r})h(\Delta), \qquad \lambda_2 = \lambda_2(\delta, A) = h(\Delta).$$

Заметим, что $h(\Delta) = \max\{\lambda(A), h(\delta)\}$.

Наконец, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}^d_+$, $0 < \overline{\alpha} < r$, $\delta \geqslant 0$, A *– измеримое подмножество в* $\mathbb{R}^d$ *и* $\delta + \lambda(A) \neq 0$. *Тогда* $D^\alpha x(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *для любого* $x(\,\cdot\,) \in \mathcal{H}^r_2(\mathbb{R}^d)$ *и справедливо равенство*

$$E(D^\alpha, H^r_2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\left(\frac{r\delta^2}{\overline{\alpha}\Delta^2}(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}) + 1\right)h(\Delta)}. \tag{2}$$

Если $\delta = 0$, *то для каждой измеримой функции* $a(\,\cdot\,)$ *на* A *такой, что для п. в.* $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|a(\xi) - 1| \leqslant \sqrt{\lambda(A)}\frac{(1 + \|\xi\|^2)^{r/2}}{|\xi|^\alpha}, \tag{3}$$

метод $\widehat{\varphi}_a$, *действующий для п. в.* $t \in \mathbb{R}^d$ *по правилу*

$$\widehat{\varphi}_a(Fx(\,\cdot\,)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_A (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi) e^{\langle \xi, t\rangle}\, d\xi,$$

является оптимальным.

Если $\delta > 0$, *то для каждой измеримой функции* $a(\,\cdot\,)$ *на* A *такой, что для п. в.* $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\left|a(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r}\right| \\ \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(1 + \|\xi\|^2)^{r/2}}{|\xi|^\alpha(\lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r)}\sqrt{-|\xi|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r},\end{aligned} \tag{4}$$

метод $\widehat{\varphi}_a$, *действующий для п. в.* $t \in \mathbb{R}^d$ *по правилу*

$$\widehat{\varphi}_a(y(\,\cdot\,))(t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_A (i\xi)^\alpha a(\xi) y(\xi) e^{\langle \xi, t\rangle}\, d\xi,$$

является оптимальным.

Приведем комментарии к теореме 1.

1. Если $\delta = 0$, то из выражения (2) для оптимальной погрешности восстановления следует, что

$$E\big(D^\alpha, H^r_2(\mathbb{R}^d), A, 0\big) = \sqrt{\lambda(A)},$$

т. е. преобразование Фурье функций из $H^r_2(\mathbb{R}^d)$ достаточно знать только на множестве $A' \subset A$ (включение понимается с точностью до множества меры нуль), для которого $\lambda(A') = \lambda(A)$. Минимальным среди таких множеств является $\Omega_{\lambda(A)}$.

Оптимальный метод представляет собой α-ю производную функции, преобразование Фурье которой вне A равно нулю, а на A есть функция $Fx(\,\cdot\,)$, "сглаженная" с помощью функции $a(\,\cdot\,)$. В силу (3) функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $\widehat{L}_2(A)$, и если она принадлежит еще и $L_1(A)$ (например, мера A конечна), то выражение для оптимального метода есть формула обращения преобразования Фурье, а если не принадлежит, то интеграл в выражении для оптимального метода при каждом $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения.

На множестве $A \setminus \Omega_{\lambda(A)}$ функция $f(\,\cdot\,)$ не превосходит $\lambda(A)$. Поэтому согласно (3) на этом множестве можно положить $a(\,\cdot\,) = 0$, а значит, достаточно брать интеграл только по множеству $\Omega_{\lambda(A)}$.

Если положить $a(\,\cdot\,)=1$ на A, то формула (3) тривиальным образом выполняется, т. е. наблюдаемое преобразование Фурье можно совсем не сглаживать.

Наконец, если $\lambda(A)=\widehat{\lambda}$, то $f(\xi)\leqslant\widehat{\lambda}$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^d$. Неравенство (3) выполняется при $a(\,\cdot\,)=0$ на A и поэтому в данном случае нулевой метод является оптимальным.

Суммируя изложенное, можно утверждать, что наиболее "разумным" является следующий оптимальный метод:

$$\widehat{\varphi}(Fx(\,\cdot\,)|_A)(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Omega_{\lambda(A)}}(i\xi)^\alpha Fx(\xi)e^{\langle\xi,t\rangle}\,d\xi,$$

так как он использует минимальный объем информации о преобразовании Фурье и не требует его обработки (кроме того, в случае $\lambda(A)=\widehat{\lambda}$ интеграл берется по множеству меры нуль и тем самым $\widehat{\varphi}=0$).

2. Если $\delta>0$, то непосредственные (но довольно рутинные) вычисления показывают, что погрешность оптимального восстановления как функция от $\lambda(A)$ убывает при убывании $\lambda(A)$ от $\widehat{\lambda}$ до $h(\delta)$, а затем (что уже легко следует из определения Δ) стабилизируется на уровне

$$\sqrt{\left(\frac{r}{\overline{\alpha}}(\widehat{\delta}^{2/r}-\delta^{2/r})+1\right)h(\delta)}.$$

Таким образом, информация о преобразовании Фурье за пределами множества, для которого $\lambda(A)\leqslant h(\delta)$, оказывается лишней. Минимальным из таких множеств является множество $\Omega_{h(\delta)}$.

В теореме 1 представлено семейство оптимальных методов, каждый из которых есть α-я производная функции, преобразование Фурье которой вне A равно нулю, а на A является функцией $y(\,\cdot\,)$, "сглаженной" с помощью функции $a(\,\cdot\,)$.

На множестве $A\setminus\Omega_{h(\Delta)}$ (напомним, что $h(\Delta)=\max\{\lambda(A),h(\delta)\}$) можно положить $a(\,\cdot\,)=0$. Действительно, в этом случае из приведенного в § 2 неравенства (23), равносильного соотношению (4), следует, что на этом множестве должно выполняться условие $f(\xi)\leqslant\lambda_2$, которое верно, поскольку $\lambda_2=h(\Delta)$. Таким образом, для каждого $a(\,\cdot\,)$, удовлетворяющего (4), наиболее экономный оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{\varphi}_a(y(\,\cdot\,))(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Omega_{h(\Delta)}}(i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)e^{\langle\xi,t\rangle}\,d\xi.$$

Приведем также явное выражение для оптимального метода, соответствующего функции $a(\,\cdot\,)$, обращающей левую часть (4) в нуль:

$$\widehat{\varphi}(y(\,\cdot\,))(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Omega_{h(\Delta)}}(i\xi)^\alpha\left(1+\frac{\overline{\alpha}\Delta^2}{r}\,\frac{1}{\widehat{\delta}^{2/r}-\Delta^{2/r}}(1+\|\xi\|^2)^r\right)^{-1}y(\xi)e^{\langle\xi,t\rangle}d\xi.$$

Перед формулировкой следующей теоремы приведем еще некоторые определения. Понятно, что функция $m\colon\lambda\mapsto\operatorname{mes}\Omega_\lambda$ монотонно убывает на $(0,\widehat{\lambda}]$, $m(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to0$ и $m(\widehat{\lambda})=0$. Для любого $\sigma>0$ обозначим через $\lambda(\sigma)$ единственное решение уравнения $m(\lambda)=\sigma$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}^d_+$, $0 < \overline{\alpha} < r$, $\delta \geqslant 0$, $\sigma > 0$ *и* $\lambda(\sigma,\delta) = \max(\lambda(\sigma), h(\delta))$. *Тогда любое множество, совпадающее с точностью до множества меры нуль с* $\Omega_{\lambda(\sigma,\delta)}$, *является оптимальным.*

Отметим, что если $\delta = 0$, то $\lambda(\sigma,\delta) = \lambda(\sigma)$, поскольку $h(0) = 0$, тем самым $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ – оптимальное множество, и чем больше σ, тем меньше погрешность оптимального восстановления, равная $\sqrt{\lambda(\sigma)}$.

Если $\delta > 0$ и $\sigma > 0$ таковы, что $\lambda(\sigma) \leqslant h(\delta)$, то информация о преобразовании Фурье за пределами множества $\Omega_{h(\delta)}$ оказывается лишней, поскольку погрешность оптимального восстановления не уменьшается.

§ 2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Покажем прежде всего, что если $x(\,\cdot\,) \in \mathcal{H}^r_2(\mathbb{R}^d)$, то $D^\alpha x(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Действительно, согласно определениям $\widehat{\lambda}$ и пространства $\mathcal{H}^r_2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leqslant \widehat{\lambda}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi < \infty.\end{aligned}$$

Далее, по определению α-й производной и теореме Планшереля

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^d}|D^\alpha x(t)|^2\,dt,$$

т. е. $D^\alpha x(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теперь оценим снизу величину погрешности оптимального восстановления $E(D^\alpha, H^r_2(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения экстремальной задачи

$$\|D^\alpha x(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Fx(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leqslant \delta, \quad \|x(\,\cdot\,)\|_{\mathcal{H}^r_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \tag{5}$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях (при этом если $\delta = 0$, то первое ограничение задачи имеет вид $Fx(\,\cdot\,) = 0$ для п. в. $\xi \in A$).

Пусть $x_0(\,\cdot\,)$ – допустимая функция в (5) (т. е. $x_0(\,\cdot\,)$ удовлетворяет ограничениям задачи); тогда, очевидно, функция $-x_0(\,\cdot\,)$ также допустима и мы для любого $\varphi\colon \widehat{L}_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\varphi(0)(\,\cdot\,)$ – значение отображения φ на нулевой функции) имеем

$$\begin{aligned}2\|D^\alpha x_0(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \big\|D^\alpha x_0(\,\cdot\,) - \varphi(0)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \big\|D^\alpha(-x_0)(\,\cdot\,) - \varphi(0)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 2\sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in H^r_2(\mathbb{R}^d)\\ \|Fx(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(A)}\leqslant\delta}}\big\|D^\alpha x(\,\cdot\,) - \varphi(0)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 2\sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in H^r_2(\mathbb{R}^d),\,y(\,\cdot\,)\in\widehat{L}_2(A)\\ \|Fx(\,\cdot\,)-y(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(A)}\leqslant\delta}}\big\|D^\alpha x(\,\cdot\,) - \varphi(y(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (5), а справа к нижней грани по всем методам φ, получаем требуемое.

Теперь оценим снизу значение задачи (5). Для этого удобно переписать задачу в образах Фурье. Согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (5) равен значению задачи

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\qquad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_A|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta^2,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1.\end{gathered}\tag{6}$$

Если $\delta=0$, то первое ограничение в этой задаче имеет вид $Fx(\,\cdot\,)=0$ для п. в. $\xi\in A$.

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай 1. $\delta\geqslant\widehat{\delta}$. Положим

$$\widehat{\xi}=\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{r-\overline{\alpha}}},\dots,\sqrt{\frac{\alpha_d}{r-\overline{\alpha}}}\,\right),$$

где, напомним, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$. Для каждого $\varepsilon>0$ обозначим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon=\left(1+\frac{\varepsilon}{\|\widehat{\xi}\|}\right)\widehat{\xi},$$

рассмотрим шар $B_\varepsilon=\{\xi\in\mathbb{R}^d\mid\|\xi-\widehat{\xi}_\varepsilon\|\leqslant\varepsilon\}$ и определим на $\mathbb{R}^d$ функции

$$z_\varepsilon(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{d/2}\left(\displaystyle\int_{B_\varepsilon}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1/2}, & \xi\in B_\varepsilon,\\ 0, & \xi\notin B_\varepsilon.\end{cases}$$

Очевидно, что $z_\varepsilon(\,\cdot\,)\in\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\,\cdot\,)=F^{-1}z_\varepsilon(\,\cdot\,)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (6).

Второе ограничение в задаче (6), очевидно, выполнено. Если $A\cap B_\varepsilon=\varnothing$, то первое ограничение тривиальным образом верно.

Пусть $A\cap B_\varepsilon\neq\varnothing$. Легко проверить, что $(1+\|\widehat{\xi}\|^2)^{-r}=\widehat{\delta}^2$ и $\|\xi\|\geqslant\|\widehat{\xi}\|$ для всех $\xi\in B_\varepsilon$. Учитывая это, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{A\cap B_\varepsilon}|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\left(\int_{B_\varepsilon}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1}\operatorname{mes}B_\varepsilon\\ \leqslant\left(\int_{B_\varepsilon}(1+\|\widehat{\xi}\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1}\operatorname{mes}B_\varepsilon=(1+\|\widehat{\xi}\|^2)^{-r}=\widehat{\delta}^{\,2}\leqslant\delta^2.\end{gathered}$$

Итак, для любого $\varepsilon>0$ функция $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустима в задаче (5), а значит, значение этой задачи не меньше

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi=\left(\int_{B_\varepsilon}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1}\int_{B_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi.$$

При $\varepsilon\to 0$ эта величина стремится (по теореме о среднем) к величине

$$f(\widehat{\xi})=\frac{|\widehat{\xi}\,|^{2\alpha}}{(1+\|\widehat{\xi}\|^2)^r},$$

которая равна $\widehat{\lambda}$, поскольку в точке $\widehat{\xi}$ достигается максимум функции f (что отмечено перед формулировкой теоремы).

Поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (5), при $\delta \geqslant \widehat{\delta}$ получена оценка

$$E\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\big) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}}. \tag{7}$$

Величина в правой части (7) совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, указанной в теореме, так как в рассматриваемом случае $\Delta = \widehat{\delta}$ и $h(\widehat{\delta}) = \widehat{\lambda}$.

Случай 2. $0 < \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) \leqslant h(\delta)$. Пусть

$$\widetilde{\xi} = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1(1-\delta^{2/r})}{\overline{\alpha}\delta^{2/r}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d(1-\delta^{2/r})}{\overline{\alpha}\delta^{2/r}}}\ \right).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\widetilde{\xi}_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{\xi}\|}\right)\widetilde{\xi}$$

и рассмотрим шар $\widetilde{B}_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \widetilde{\xi}_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon\}$.

Поскольку $\delta < \widehat{\delta}$ и тем самым $r(1-\delta^{2/r})/\overline{\alpha} > 1$, то

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\xi}) = \frac{|\widetilde{\xi}|^{2\alpha}}{(1+\|\widetilde{\xi}\|^2)^r} &= \frac{\alpha^\alpha}{r\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}-1}}(1-\delta^{2/r})^{\overline{\alpha}-1}\delta^{2(1-\overline{\alpha}/r)} \\ &= \frac{r}{\overline{\alpha}}(1-\delta^{2/r})h(\delta) > h(\delta) \geqslant \lambda(A). \end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{\xi} \in \operatorname{int}\Omega_{\lambda(A)}$, поэтому $B_\varepsilon \subset \operatorname{int}\Omega_{\lambda(A)}$ для достаточно малых ε, а значит, $\operatorname{mes}(A \cap \widetilde{B}_\varepsilon) = \operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon$ для таких ε. Определим на $\mathbb{R}^d$ функции

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\dfrac{\delta}{\sqrt{\operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon}}, & \xi \in \widetilde{B}_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \widetilde{B}_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\,\cdot\,) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\,\cdot\,) = F^{-1}z_\varepsilon(\,\cdot\,)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (6). Первое ограничение в задаче выполняется очевидным образом. Далее элементарно проверяется, что $\|\xi\| \leqslant \|\widetilde{\xi}\|$, если $\xi \in \widetilde{B}_\varepsilon$, а $\delta^2(1+\|\widetilde{\xi}\|^2)^r = 1$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{\delta^2}{\operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon}\int_{\widetilde{B}_\varepsilon}(1+\|\xi\|^2)^r\,d\xi \\ &\leqslant \frac{\delta^2}{\operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon}(1+\|\widetilde{\xi}\,\|^2)^r\operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon = \delta^2(1+\|\widetilde{\xi}\,\|^2)^r = 1. \end{aligned}$$

Итак, функции $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (5), а значит, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ значение этой задачи не меньше

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{\delta^2}{\operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon}\int_{\widetilde{B}_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi \\ &= \frac{1}{(1+\|\widetilde{\xi}\|^2)^r\operatorname{mes}\widetilde{B}_\varepsilon}\int_{\widetilde{B}_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \to 0$ эта величина стремится (по теореме о среднем) к числу

$$\frac{|\widetilde{\xi}|^{2\alpha}}{(1+\|\widetilde{\xi}\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha}{\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}}}\,\frac{(1-\delta^{2/r})^{\overline{\alpha}}}{\delta^{2\overline{\alpha}/r}}\delta^2 = \left(\frac{r}{\overline{\alpha}}(\widehat{\delta}^{\,2/r} - \delta^{2/r}) + 1\right)h(\delta).$$

Тогда по тем же соображениям, что и выше, для рассматриваемого случая доказана оценка

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr) \geqslant \sqrt{\left(\frac{r}{\overline{\alpha}}(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}) + 1\right)h(\delta)}, \tag{8}$$

правая часть которой совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, указанной в теореме, поскольку в рассматриваемом случае $\Delta = \delta$.

Случай 3. $0 \leqslant \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) > h(\delta)$. Пусть сначала $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$. Тогда для каждого $0 < \lambda < \widehat{\lambda}$ справедливо неравенство $\operatorname{mes}(A \cap \Omega_\lambda) < \operatorname{mes}\Omega_\lambda$, а значит, для таких λ

$$\operatorname{mes}(\Omega_\lambda \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)) = \operatorname{mes}(\Omega_\lambda \setminus A) = \operatorname{mes}\Omega_\lambda - \operatorname{mes}(A\cap\Omega_\lambda) > 0.$$

Обозначим $G_\lambda = \Omega_\lambda \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)$ и определим функции на $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$z_\lambda(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\left(\displaystyle\int_{G_\lambda}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1/2}, & \xi \in G_\lambda,\\ 0, & \xi \notin G_\lambda. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\lambda(\,\cdot\,) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\lambda(\,\cdot\,) = F^{-1}z_\lambda(\,\cdot\,)$. Элементарно проверяется, что функции $x_\lambda(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (6). Тогда для всех указанных λ (учитывая, что $f(\xi) \geqslant \lambda$, если $\xi \in \Omega_\lambda$) имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx_\lambda(\xi)|^2\,d\xi &= \left(\int_{G_\lambda}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1}\int_{G_\lambda}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi\\ &= \left(\int_{G_\lambda}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1}\int_{G_\lambda}\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r}(1+\|\xi\|^2)^r\,d\xi\\ &\geqslant \left(\int_{G_\lambda}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\right)^{-1}\lambda\int_{G_\lambda}(1+\|\xi\|^2)^r\,d\xi = \lambda,\end{aligned}$$

и тем самым значение задачи (6) не меньше λ. Переходя к пределу при $\lambda \to \widehat{\lambda}$, получаем, что значение этой задачи не меньше $\widehat{\lambda}$.

Снова, поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (6), для случая $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$ доказана оценка

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}}, \tag{9}$$

где величина справа также совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемой ситуации $\Delta = \widehat{\delta}$.

Пусть теперь $\lambda(A) < \widehat{\lambda}$. Покажем сначала, что для всех $0 < \varepsilon < \lambda(A)$ мера множества

$$F_\varepsilon = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})$$

положительна. Предположим, что $\operatorname{mes} F_\varepsilon = 0$ для некоторого ε. Тогда, учитывая, что $\Omega_{\lambda(A)} \subset \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}$, получим

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\bigl(A \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})\bigr) &= \operatorname{mes}(\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_\lambda)\\ &= \operatorname{mes}\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} - \operatorname{mes}(\Omega_{\lambda(A)} \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) = \operatorname{mes}\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} - \operatorname{mes}\Omega_{\lambda(A)}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\bigl(A \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})\bigr) &= \operatorname{mes}\bigl((A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) \setminus \Omega_{\lambda(A)}\bigr)\\ &= \operatorname{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) - \operatorname{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)}).\end{aligned}$$

Из определения $\lambda(A)$ легко вытекает, что $\operatorname{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)}) = \operatorname{mes}\Omega_{\lambda(A)}$. Тогда из полученных выражений следует равенство $\operatorname{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) = \operatorname{mes}\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}$, которое противоречит определению $\lambda(A)$. Итак, $\operatorname{mes} F_\varepsilon \neq 0$ для всех $0 < \varepsilon < \lambda(A)$.

Пусть сначала $\delta = 0$. Для указанных ε определим функции на $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\left(\displaystyle\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r \, d\eta\right)^{-1/2}, & \xi \in F_\varepsilon,\\ 0, & \xi \notin F_\varepsilon.\end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\,\cdot\,) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\,\cdot\,) = F^{-1} z_\varepsilon(\,\cdot\,)$. Элементарно проверяется, что функции $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (6). Те же рассуждения, что и выше, показывают, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \, |F x_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant \lambda(A) - \varepsilon,$$

откуда, как и раньше, следует, что

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0\bigr) \geqslant \sqrt{\lambda(A)}. \tag{10}$$

Величина справа в (10) совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемом случае $\delta = 0$ и $h(\Delta) = \lambda(A)$.

Пусть теперь $\delta > 0$. Положим

$$\xi' = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1(1 - \Delta^{2/r})}{\overline{\alpha}\Delta^{2/r}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d(1 - \Delta^{2/r})}{\overline{\alpha}\,\Delta^{2/r}}}\ \right).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\xi'_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\xi'\|}\right)\xi'$$

и рассмотрим шар $B'_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \xi'_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon\}$.

Поскольку $\lambda(A) < \widehat{\lambda}$, то $\Delta = h^{-1}(\lambda(A)) < h^{-1}(\widehat{\lambda}) = \widehat{\delta}$, и тогда аналогично случаю 2 имеем

$$\begin{aligned} f(\xi') = \frac{|\xi'|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi'\|^2)^r} &= \frac{\alpha^\alpha}{r\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}-1}}(1 - \Delta^{2/r})^{\overline{\alpha}-1} \Delta^{2(1-\overline{\alpha}/r)}\\ &= \frac{r}{\overline{\alpha}}(1 - \Delta^{2/r}) h(\Delta) > h(\Delta) = \lambda(A).\end{aligned}$$

Это означает, что $\xi' \in \operatorname{int}\Omega_{\lambda(A)}$. Следовательно, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ шар B'_ε принадлежит $\Omega_{\lambda(A)}$, и тем самым $B'_\varepsilon \cap F_\varepsilon = \varnothing$.

Простая проверка показывает, что $\|\xi\| \leqslant \|\xi'\|$, если $\xi \in B'_\varepsilon$ и $(1+\|\xi'\|^2)^r = 1/\Delta^2$. Далее, поскольку $\lambda(A) > h(\delta)$, то $\Delta = h^{-1}(\lambda(A)) > \delta$, и поэтому

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}\int_{B'_\varepsilon}(1+\|\xi\|^2)^r\,d\xi \leqslant \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}\int_{B'_\varepsilon}(1+\|\xi'\|^2)^r\,d\xi = \delta^2(1+\|\xi'\|^2)^r = \frac{\delta^2}{\Delta^2} < 1.$$

Обозначим через C_ε левую часть последнего неравенства и для указанных выше ε определим функции на $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\dfrac{\delta}{\sqrt{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}}, & \xi \in B'_\varepsilon, \\ (2\pi)^{d/2}\sqrt{1-C_\varepsilon}\biggl(\displaystyle\int_{F_\varepsilon}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\biggr)^{-1/2}, & \xi \in F_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B'_\varepsilon \cup F_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\,\cdot\,) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\,\cdot\,) = F^{-1}z_\varepsilon(\,\cdot\,)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (6).

Действительно, так как $B'_\varepsilon \subset \Omega_{\lambda(A)}$, то $\operatorname{mes} B'_\varepsilon = \operatorname{mes}(A \cap B'_\varepsilon)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A |Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi = \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}\int_{A\cap B'_\varepsilon}d\xi = \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}\operatorname{mes}(A\cap B'_\varepsilon) = \delta^2.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}\int_{B'_\varepsilon}(1+\|\xi\|^2)^r\,d\xi \\ &+ (1-C_\varepsilon)\biggl(\int_{F_\varepsilon}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\biggr)^{-1}\int_{F_\varepsilon}(1+\|\xi\|^2)^r\,d\xi = C_\varepsilon + 1 - C_\varepsilon = 1,\end{aligned}$$

и, таким образом, функции $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ для достаточно малых ε допустимы в задаче (6). Тогда для всех таких ε значение этой задачи не меньше

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{\delta^2}{\operatorname{mes} B'_\varepsilon}\int_{B'_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi \\ &+ (1-C_\varepsilon)\biggl(\int_{F_\varepsilon}(1+\|\eta\|^2)^r\,d\eta\biggr)^{-1}\int_{F_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi. \end{aligned} \tag{11}$$

Поступая так же, как и выше, получаем, что произведение двух последних сомножителей во втором слагаемом справа в (11) не меньше $\lambda(A)-\varepsilon$. Оценивая первое слагаемое и C_ε по теореме о среднем, получаем, что при $\varepsilon \to 0$ всё выражение справа в (11) стремится к величине

$$\begin{aligned}\delta^2|\xi'|^{2\alpha} + \bigl(1-\delta^2(1+\|\xi'\|^2)^r\bigr)\lambda(A) &= \frac{\alpha^\alpha}{\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}}}\,\frac{(1-\Delta^{2/r})^{\overline{\alpha}}}{\Delta^{2\overline{\alpha}/r}}\,\delta^2 \\ &+ \biggl(1-\frac{\delta^2}{\Delta^2}\biggr)\lambda(A) = \biggl(\frac{r\delta^2}{\overline{\alpha}\Delta^2}(\widehat{\delta}^{\,2/r} - \Delta^{2/r}) + 1\biggr)\lambda(A).\end{aligned}$$

Следовательно, для $0 \leqslant \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) > h(\delta)$ получена оценка

$$E\big(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\big) \geqslant \sqrt{\left(\frac{r\delta^2}{\overline{\alpha}\Delta^2}\big(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}\big) + 1\right)\lambda(A)}, \tag{12}$$

правая часть которой совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемом случае $h(\Delta) = \lambda(A)$.

Итак, для всех $\delta \geqslant 0$ и измеримых множеств $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, что $\delta + \lambda(A) \neq 0$, получена оценка снизу для погрешности оптимального восстановления (см. (7)–(10) и (12)), которая совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления приведенной в формулировке теоремы. Оценим теперь сверху эту величину и построим оптимальные методы.

Пусть $\delta \geqslant 0$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ фиксированы и $\delta + \lambda(A) \neq 0$. Оптимальность метода $\varphi\colon \operatorname{Im} I^\alpha(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\begin{gathered}\big\|D^\alpha x(\,\cdot\,) - \varphi(y(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \qquad x(\,\cdot\,) \in H_2^r(\mathbb{R}^d),\\ \big\|Fx(\,\cdot\,) - y(\,\cdot\,)\big\|_{\widehat{L}_2(A)} \leqslant \delta, \qquad y(\,\cdot\,) \in \widehat{L}_2(A),\end{gathered} \tag{13}$$

совпадает с $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Если $\delta = 0$, то задача (13) переписывается следующим образом:

$$\big\|D^\alpha x(\,\cdot\,) - \varphi(Fx(\,\cdot\,)|_A)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \qquad x(\,\cdot\,) \in H_2^r(\mathbb{R}^d). \tag{14}$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай (a): $\delta = 0$. Поскольку отображение $x(\,\cdot\,) \mapsto D^\alpha x(\,\cdot\,)$ в образах Фурье есть умножение функции $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha$ на $Fx(\,\cdot\,)$, то и оптимальные методы естественно искать среди подобных отображений. С каждой измеримой функцией $a(\,\cdot\,)$ на A такой, что $a(\,\cdot\,)\sqrt{f(\,\cdot\,)} \in L_\infty(A)$, сопоставим отображение $\varphi_a\colon \operatorname{Im} I^0(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующее в образах Фурье по правилу $F\varphi_a(y(\,\cdot\,))(\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{a}(\xi)\widetilde{y}(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\widetilde{a}(\,\cdot\,) = a(\,\cdot\,)$, $\widetilde{y}(\,\cdot\,) = y(\,\cdot\,)$ на A и $\widetilde{a}(\,\cdot\,) = 0$, $\widetilde{y}(\,\cdot\,) = 0$ вне A. Определение корректно, так как если $y(\,\cdot\,) \in \operatorname{Im} I^0(A)$, то $y(\,\cdot\,) = Fx(\,\cdot\,)|_A$ для некоторого $x(\,\cdot\,) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$, и тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A \big|F\varphi_a(y(\,\cdot\,))(\xi)\big|^2\,d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_A |\xi|^{2\alpha}\,|a(\xi)|^2\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_A |a(\xi)|^2\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leqslant \big\|\,|a(\,\cdot\,)|^2 f(\,\cdot\,)\big\|_{L_\infty(A)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A (1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi < \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме Планшереля имеем $\varphi_a(y(\,\cdot\,))(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть φ_a – такое отображение. Оценим квадрат максимизируемого функционала в (14) с $\varphi = \varphi_a$, переходя по теореме Планшереля к образам Фурье

$(f(\xi) \leqslant \lambda(A)$, если $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bigl|(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - \varphi_a(Fx(\,\cdot\,)|_A)(\xi)\bigr|^2\, d\xi \\
&\qquad = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A \bigl|(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)\bigr|^2\, d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\alpha}\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \\
&\qquad = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |1 - a(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r} (1+\|\xi\|^2)^r\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d\setminus A} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r} (1+\|\xi\|^2)^r\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \\
&\qquad \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{\xi\in A} |1-a(\xi)|^2 f(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1+\|\xi\|^2)^r\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \\
&\qquad\qquad\qquad + \lambda(A) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d\setminus A} (1+\|\xi\|^2)^r\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что если

$$
|1 - a(\xi)|^2 f(\xi) \leqslant \lambda(A) \tag{16}
$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, то величина из правой части в (15) не превосходит $\lambda(A)$ и значит, погрешность метода φ_a не превосходит $\sqrt{\lambda(A)}$. Тогда с учетом (10) имеем

$$
\sqrt{\lambda(A)} \leqslant E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0\bigr) \leqslant e\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0, \varphi_a\bigr) \leqslant \sqrt{\lambda(A)},
$$

т. е. $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) = \sqrt{\lambda(A)}$, а φ_a – оптимальный метод.

Существование таких функций $a(\,\cdot\,)$ очевидно. Например, подходит функция, равная тождественно единице.

Если $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$, то $f(\xi) \leqslant \widehat{\lambda}$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ и (16) выполняется с $a(\,\cdot\,) = 0$, т. е. нулевой метод оптимален в данном случае.

Если функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $L_1(A)$ (например, если мера A конечна), то выражение для оптимального метода, приведенное в теореме, является формулой обращения преобразования Фурье. В противном случае интеграл для каждого $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения.

Случай (b): $\delta > 0$, $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$. Покажем, что в этой ситуации нулевой метод является оптимальным.

В самом деле,

$$
\begin{aligned}
&E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr) \leqslant e\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, 0\bigr) \\
&\qquad = \sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d),\, y(\,\cdot\,)\in \widehat{L}_2(A) \\ \|Fx(\,\cdot\,) - y(\,\cdot\,)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leqslant \delta}} \|D^\alpha x(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{x(\,\cdot\,)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)} \|D^\alpha x(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Согласно теореме Планшереля квадрат величины из правой части в (17) равен значению задачи

$$
\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \to \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^r\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \leqslant 1. \tag{18}
$$

Отсюда в силу определения $\widehat{\lambda}$ имеем

$$
\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r} (1+\|\xi\|^2)^r\, |Fx(\xi)|^2\, d\xi \leqslant \widehat{\lambda},
$$

т. е. значение задачи (18) не превосходит $\widehat{\lambda}$. Следовательно, для случаев $\delta \geqslant \widehat{\delta}$ и $0 \leqslant \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$ (см. (7) и (9)) имеем

$$\sqrt{\widehat{\lambda}} \leqslant E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr) \leqslant e\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, 0\bigr) \leqslant \sqrt{\widehat{\lambda}},$$

т. е. $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}}$ и $\widehat{\varphi} = 0$ – оптимальный метод.

Случай (c): $0 < \delta < \widehat{\delta}$, $0 \leqslant \lambda(A) < \widehat{\lambda}$. В этой ситуации ранее были получены оценки снизу для погрешности оптимального восстановления (см. (8) и (12)), которые, как нетрудно проверить, можно записать в виде одной формулы:

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr) \geqslant \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}, \tag{19}$$

причем $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$.

Пусть $a(\,\cdot\,)$ – измеримая функция на A такая, что функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi)$ принадлежит $L_\infty(A)$. Оптимальные методы, как и выше, будем искать среди таких отображений $\varphi_a\colon \operatorname{Im} I^\delta(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье действуют по правилу $F\varphi_a(y(\,\cdot\,))(\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{a}(\xi)\widetilde{y}(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\widetilde{a}(\,\cdot\,) = a(\,\cdot\,)$, $\widetilde{y}(\,\cdot\,) = y(\,\cdot\,)$ на A и $\widetilde{a}(\,\cdot\,) = 0$, $\widetilde{y}(\,\cdot\,) = 0$ вне A. Ясно, что $\varphi_a(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть φ_a – такой метод. Оценим значение задачи (13) в этой ситуации. Переходя по теореме Планшереля к образам Фурье, получаем, что квадрат ее значения равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A \bigl|(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)\bigr|^2\,d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\alpha}\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi \leqslant 1, \qquad x(\,\cdot\,) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d), \quad y(\,\cdot\,) \in \widehat{L}_2(A).\end{gathered} \tag{20}$$

Теперь оценим по неравенству Коши–Буняковского для каждого $\xi \in A$ выражение под знаком первого интеграла в максимизируемом функционале:

$$\begin{aligned}\bigl|(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)\bigr|^2 &= |\xi|^{2\alpha}\,\bigl|(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))\bigr|^2 \\ &\leqslant |\xi|^{2\alpha}\biggl(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\biggr)\bigl(\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2 \\ &\qquad + \lambda_1|Fx(\xi) - y(\xi)|^2\bigr).\end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим

$$S_a = \operatorname*{vrai\,sup}_{\xi\in A} |\xi|^{2\alpha}\biggl(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1}\biggr).$$

Если предположить, что $S_a \leqslant 1$, то, интегрируя по A неравенство (21) и учитывая, что $f(\xi) \leqslant \lambda(A)$ за пределами A, получаем следующую оценку для максимизируемого функционала в (20):

$$\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi+\lambda_1\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi \\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A}\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+\|\xi\|^2)^r}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi \\ \leqslant\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi+\lambda_1\frac{1}{(2\pi)^d}\int_A|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi \\ +\lambda(A)\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A}(1+\|\xi\|^2)^r\,|Fx(\xi)|^2\,d\xi. \tag{22}$$

Если $\lambda(A)\leqslant h(\delta)$, то $\Delta=\delta$ и тем самым $\lambda(A)\leqslant h(\Delta)=\lambda_2$. Если же $\lambda(A)\geqslant h(\delta)$, то $\lambda_2=h(\Delta)=\lambda(A)$. Итак, всегда $\lambda(A)\leqslant\lambda_2$, и поэтому из оценки (22), учитывая ограничения в задаче (20), получаем, что максимизируемый функционал в этой задаче не превосходит величины $\lambda_2+\lambda_1\delta^2$, т. е. погрешность метода φ_a не превосходит $\sqrt{\lambda_2+\lambda_1\delta^2}$. Вместе с (19) это означает, что метод φ_a оптимален.

Теперь покажем, что указанные функции $a(\,\cdot\,)$, для которых $S_a\leqslant 1$, существуют.

Если для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$|\xi|^{2\alpha}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2(1+\|\xi\|^2)^r}+\frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)\leqslant 1, \tag{23}$$

то $S_a\leqslant 1$. Далее, если

$$-|\xi|^{2\alpha}+\lambda_1+\lambda_2(1+\|\xi\|^2)^r\geqslant 0\qquad\forall\,\xi\in\mathbb{R}^d, \tag{24}$$

то нетрудно проверить (выделяя полный квадрат), что (23) равносильно соотношению, приведенному в теореме. Из него следует, что для любой измеримой функции $a(\,\cdot\,)$, ему удовлетворяющей, функция $\xi\mapsto(i\xi)^\alpha a(\xi)$ принадлежит $L_\infty(A)$, и, таким образом, оптимальных методов “достаточно много”.

Осталось доказать неравенство (24). Для этого рассмотрим функцию $g(\,\cdot\,)$ на полупрямой $[0,\infty)$, определенную формулой

$$g(x)=\frac{\alpha^\alpha}{\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}}}(x^{1/r}-1)^{\overline{\alpha}}.$$

Простая проверка показывает, что эта функция вогнута на $[x_0,\infty)$, где $x_0=(r/(r-\overline{\alpha}))^r$.

В нашем случае $\Delta<\widehat{\delta}$, или равносильно $\Delta^{-2}>x_0$. Непосредственный подсчет показывает, что прямая $x\mapsto\lambda_1+\lambda_2x$ является касательной к графику функции $g(\,\cdot\,)$ в точке Δ^{-2}, и поэтому в силу вогнутости $g(\,\cdot\,)$ имеем

$$g(x)\leqslant\lambda_1+\lambda_2x\qquad\forall\,x\geqslant x_0.$$

Пусть $\xi\in\mathbb{R}^d$. Положим $x_\xi=(1+\|\xi\|^2)^r$. Тогда

$$g(x_\xi)=\frac{\alpha^\alpha}{\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}}}\|\xi\|^{2\overline{\alpha}}.$$

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. [19, с. 29]) легко следует, что

$$|\xi|^{2\alpha}\leqslant\frac{\alpha^\alpha}{\overline{\alpha}^{\overline{\alpha}}}\|\xi\|^{2\overline{\alpha}}.$$

Объединяя последние соотношения и учитывая, что $x_\varepsilon > x_0$, получаем

$$|\xi|^{2\alpha} \leqslant \frac{\alpha^\alpha}{\overline{\alpha}^{\,\overline{\alpha}}}\|\xi\|^{2\overline{\alpha}} = g(x_\xi) \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 x_\xi = \lambda_1 + \lambda_2(1+\|\xi\|^2)^r,$$

что и доказывает (24), а значит, и выражение для функций $a(\,\cdot\,)$ из формулировки теоремы.

Как и в случае $\delta = 0$, если функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi)Fx(\xi)$ принадлежит $L_1(A)$ (например, если мера A конечна), то выражение для оптимального метода, приведенное в теореме, есть формула обращения преобразования Фурье. В противном случае интеграл для каждого $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$. Покажем, что $\lambda(A_\sigma) \geqslant \lambda(\sigma)$. Действительно, если $\lambda(A_\sigma) < \lambda(\sigma)$, то существует такое $\lambda < \lambda(\sigma)$, что $\operatorname{mes}(A_\sigma \cap \Omega_\lambda) = \operatorname{mes}\Omega_\lambda$, и так как $\operatorname{mes}\Omega_\lambda > \operatorname{mes}\Omega_{\lambda(\sigma)} = \sigma$, то $\operatorname{mes} A_\sigma > \sigma$, что невозможно.

Пусть $\delta = 0$. Из теоремы 1 вытекает, что

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, 0\bigr) = \sqrt{\lambda(A_\sigma)} \geqslant \sqrt{\lambda(\sigma)}.$$

Однако поскольку $\operatorname{mes}\Omega_{\lambda(\sigma)} = \sigma$ и $\lambda(\Omega_{\lambda(\sigma)}) = \lambda(\sigma)$, то $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ – оптимальное множество и, очевидно, любое множество, отличающееся от $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ лишь на множестве меры нуль, также оптимально.

Если $\delta \geqslant \widehat{\delta}$, то для любого множества и, в частности, для любого A_σ выполнено

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, 0\bigr) = \sqrt{\widehat{\lambda}}.$$

Следовательно, в этом случае любое множество является оптимальным.

Пусть теперь $0 < \delta < \widehat{\delta}$ и $A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$. Если $\lambda(\sigma) \geqslant h(\delta)$, то $\lambda(\sigma,\delta) = \lambda(\sigma)$. Выше показано, что $\lambda(A_\sigma) \geqslant \lambda(\sigma)$ и тем самым $\lambda(A_\sigma) \geqslant h(\delta)$. В этом случае погрешность оптимального восстановления, как отмечено в комментарии 2 к теореме 1, убывает с убыванием $\lambda(A)$, и поскольку $\lambda(A_\sigma) \geqslant \lambda(\sigma) = \lambda(\Omega_{\lambda(\sigma)})$, то

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta\bigr) \geqslant E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{\lambda(\sigma)}, \delta\bigr).$$

Следовательно, $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ – оптимальное множество.

Пусть $\lambda(\sigma) \leqslant h(\delta)$; тогда $\lambda(\sigma,\delta) = h(\delta)$. Если $\lambda(A_\sigma) \geqslant h(\delta)$, то по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, получаем

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta\bigr) \geqslant E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{h(\delta)}, \delta\bigr).$$

Если же $\lambda(A_\sigma) \leqslant h(\delta)$, то согласно теореме 1

$$E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta\bigr) = \sqrt{\biggl(\frac{r}{\overline{\alpha}}(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}) + 1\biggr)h(\delta)} = E\bigl(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{h(\delta)}, \delta\bigr),$$

т. е. $\Omega_{h(\delta)}$ – оптимальное множество.

Итак, при $\delta > 0$ множество $\Omega_{\lambda(\sigma,\delta)}$ и любое множество, отличающееся от $\Omega_{\lambda(\sigma,\delta)}$ на множестве меры нуль, оптимальны. Терема доказана.

Рассмотрим теперь один пример. Пусть $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ и $r = 2$. Иными словами, рассматривается задача восстановления частной производной $x_{t_1}(\,\cdot\,)$ на классе $H_2^2(\mathbb{R}^d)$. В этом случае

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{4}, \qquad \widehat{\delta} = \frac{1}{2},$$

$$\Omega_\lambda = \left\{(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \frac{\xi_1^2}{(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^2} \geqslant \lambda\right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что Ω_λ при $\lambda < 1/4$ представляет собой два шара:

$$\Omega_\lambda = \left\{(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \left(|\xi_1| - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 \leqslant \frac{1}{4\lambda} - 1\right\}.$$

Из теоремы 1 получаем, что $E(D^\alpha, H_2^2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = 1/2$ при $\delta \geqslant 1/2$, а при $\delta < 1/2$

$$E\big(D^\alpha, H_2^2(\mathbb{R}^d), A, \delta\big) = \begin{cases} \sqrt{(1-\delta)\delta}, & \lambda(A) \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ \sqrt{\left(\dfrac{1 - 4\lambda(A)}{4\lambda(A)}\right)\delta^2 + \lambda(A)}, & \lambda(A) > \dfrac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Семейство оптимальных методов для рассматриваемого случая также может быть легко получено из теоремы 1. В частности, при $0 < \delta < 1/2$ метод

$$\widehat{\varphi}(Fx(\,\cdot\,)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A \frac{i\xi_1}{1 + \frac{\Delta^2}{1 - 2\Delta}(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^2} Fx(\xi) e^{\langle \xi, t\rangle}\, d\xi,$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \delta, & \lambda(A) \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ 2\lambda(A), & \lambda(A) > \dfrac{\delta}{2}, \end{cases}$$

является оптимальным.

В силу известной формулы для объема d-мерного шара имеем

$$\operatorname{mes} \Omega_\lambda = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{4\lambda} - 1\right)^{d/2}$$

и тем самым получаем

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sigma}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)\right)^{2/d}\right)^{-1}.$$

Как отмечалось в доказательстве теоремы 2, при $\delta \geqslant 1/2$ любое множество оптимально. При $\delta < 1/2$ из той же теоремы вытекает, что шары

$$\left\{(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \big(|\xi_1| - \sqrt{R^2 + 1}\big)^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 \leqslant R^2\right\},$$

где

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sigma}{2}\Gamma\left(\dfrac{d}{2} + 1\right)\right)^{1/d}, & \sigma < \dfrac{2}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2 + 1)}\left(\dfrac{1}{2\delta} - 1\right)^{d/2}, \\ \sqrt{\dfrac{1}{2\delta} - 1}, & \sigma \geqslant \dfrac{2}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2 + 1)}\left(\dfrac{1}{2\delta} - 1\right)^{d/2}, \end{cases}$$

являются оптимальным множеством.

Список литературы

1. A. Kolmogoroff, “Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse”, *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 107–110.
2. A. Sard, “Best approximate integration formulas; best approximation formulas”, *Amer. J. Math.*, **71**:1 (1949), 80–91.
3. С. М. Никольский, “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *УМН*, **5**:2(36) (1950), 165–177.
4. С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс.... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.
5. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal estimation in approximation theory*, Proc. Internat. Sympos. (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.
6. Дж. Фр. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983, 382 с.; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monograph Series, Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xiv+341 pp.
7. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “Lectures on optimal recovery”, *Numerical analysis Lancaster* 1984 (Lancaster, 1984), Lecture Notes in Math., **1129**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 21–93.
8. В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, “Optimal recovery of operators and related problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189**:4 (1990), 1–20.
9. K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000, 220 pp.
10. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2011, 176 с.; англ. пер. 1-го изд.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.
11. G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.
12. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функ. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.
13. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 181–192; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “On the reconstruction of convolution-type operators from inaccurate information”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **269** (2010), 174–185.
14. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функ. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “On optimal harmonic synthesis from inaccurate spectral data”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 223–225.

15. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О наилучшем выборе информации в задаче восстановления функции по спектру”, *Математический форум*, т. 1: *Исследования по математическому анализу*, ВНЦ РАН, Владикавказ, 2008, 142–150.
16. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, “How best to recover a function from its inaccurately given spectrum?”, *Math. Notes*, **92**:1 (2012), 51–58.
17. Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова, “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем. сб.*, **203**:4 (2012), 119–130; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, E. O. Sivkova, “Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data”, *Sb. Math.*, **203**:4 (2012), 569–580.
18. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление производных на соболевских классах”, *Владикавк. матем. журн.*, **5**:1 (2003), 39–47.
19. Г. Харди, Дж. И. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948, 456 с.; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Univ. Press, Cambridge, 1934, xii+314 pp.

Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев
(Georgii G. Magaril-Il'yaev)
Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова;
Российский государственный технологический
университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ), г. Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: magaril@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
25.10.2013

Константин Юрьевич Осипенко
(K. Yu. Osipenko)
Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова;
Российский государственный технологический
университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ), г. Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: kosipenko@yahoo.com