УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕТОЧНЫМ НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Н. Д. ВЫСК, К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения волнового уравнения по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции, задающей начальную форму струны. Приводится решение более общей задачи восстановления оператора, определенного на весовом пространстве векторов из l_2, по приближенным значениям координат этих векторов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим волновое уравнение с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Как известно, точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \cos jt \sin jx, \tag{2}$$

где

$$a_j(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin jx \, dx$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Предположим, что $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, где

$$W_2^n([0,\pi]) = \{\, f(\cdot) \in L_2([0,\pi]) : f^{(n-1)}(\cdot) \text{ абс. непр. на } [0,\pi], \\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} \le 1 \,\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №05-01-00275, №05-01-00261 и №06-01-81004).

а

$$\|g(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |g(x)|^2\,dx}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ $y_1,\dots,y_N$, причем

$$\sum_{j=1}^N |a_j(f)-y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta>0. \tag{3}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (1) в момент времени T на классе $W_2^n([0,\pi])$ по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi])$ сопоставляет некоторый вектор $y=(y_1,\dots,y_N)$, удовлетворяющий условию (3).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,\dots,y)\in\mathbb{R}^N\\ \sum_{j=1}^N |a_j(f)-y_j|^2\le\delta^2}} \|u(\cdot,T)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}.$$

Величина

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N\to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

В основе решения сформулированной задачи лежит методика оптимального восстановления линейных операторов, разработанная в работах [1] и [2] (см. также [3]). Существенную часть в этой методике составляет сведение исходной задачи к задаче минимизации с ограничениями, сводящейся в рассматриваемом случае к задаче линейного программирования, которую удается точно решить с помощью принципа Лагранжа снятия ограничений.

Рассмотрим теперь более общую задачу оптимального восстановления, к которой сводится поставленная задача. Пусть оператор $Q\colon X \to l_2$ задан равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots),\ j \in \mathbb{N},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, а

$$X = \left\{\, x = (x_1, x_2, \ldots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty \,\right\},$$

$\nu_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \ldots, x_N$.

К задачам подобного вида сводится ряд задач об оптимальном восстановлении производных [1] и решений уравнений в частных производных [4], [5]. В перечисленных работах последовательность $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ обладала свойством монотонности, что в значительной степени облегчало поиск оптимального метода восстановления. В данной работе рассматривается ситуация, когда на последовательность $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ накладываются менее ограничительные условия.

Перейдем к точной постановке задачи. Положим

$$W = \{\, x \in X : \|x\|_X \le 1 \,\}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$\|I_N x - y\|_{l_2^N} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2} \le \delta$$

(здесь $I_N x = (x_1, \ldots, x_N)$). В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения

$\varphi\colon l_2^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in l_2^N \\ \|I_N x - y\|_{l_2^N}\le\delta}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_2^N\to l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_2^N.

2. Основные результаты

Предположим, что $\nu_1 < \ldots < \nu_N$, $\nu_{N+1} < \nu_{N+2} < \ldots$ и $\lim_{j\to+\infty} \mu_j/\nu_j = 0$. Обозначим через e_j, $j = 1, 2, \ldots$, — стандартный базис в l_2

$$(e_j)_k = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \ne j, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Введем следующие обозначения

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{\mu_j}{\nu_j}, \quad B = \max_{j>N} \frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Пусть $1 \le p \le N$, $q > N$ и $p \le r \le N$ таковы, что

$$\frac{\mu_p}{\nu_p} = A, \quad \frac{\mu_q}{\nu_q} = B, \quad \mu_r - B\nu_r = \max_{p\le j\le N} (\mu_j - B\nu_j)$$

(для однозначности будем считать, что p — наибольшее, а q и r — наименьшие из чисел, обладающих соответствующим свойством). Пусть, кроме того, s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k < s_{k+1} \le r$ и

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} = \max_{s_k<j\le r} \frac{\mu_j - \mu_{s_k}}{\nu_j - \nu_{s_k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$. Положим

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \right\}, \quad k = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > B \right\}.$$

Если нанести на плоскость точки (ν_j, μ_j), то геометрический смысл введенных величин виден из рис. 1, на котором $m = 3$, а D_1 — область, в которую попадают точки из множества J_1.

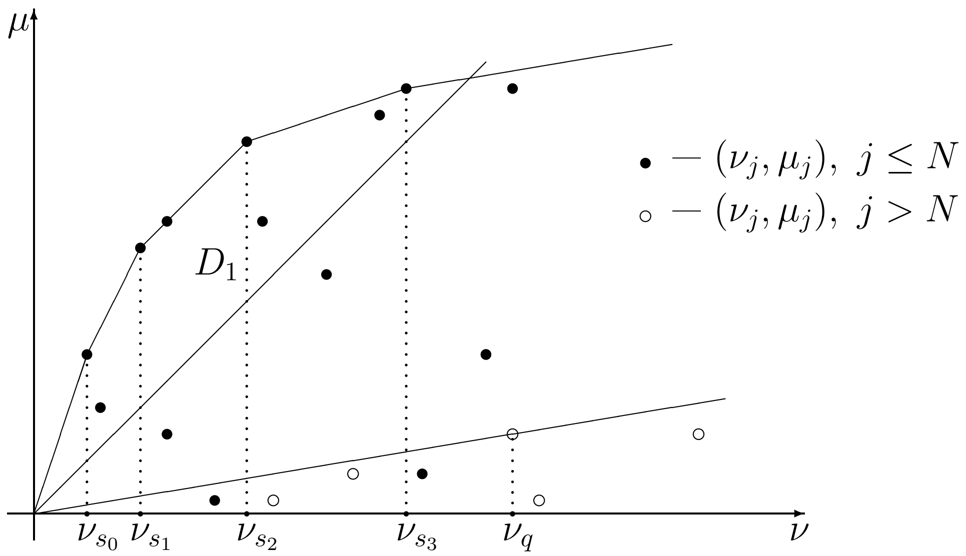

Рис. 1.

Теорема 1. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_q}{\nu_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(*i*) *при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\nu_p}}$*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_p}{\nu_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(*ii*) *при* $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_{s_k} \frac{\nu_{s_{k+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} + \mu_{s_{k+1}} \frac{1 - \delta^2 \nu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_k} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}} \nu_j\right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный;

(*iii*) *при* $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_r \delta^2 + \mu_q \frac{1 - \delta^2 \nu_r}{\nu_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_m} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_q}{\mu_r \nu_q - \mu_q \nu_r} \nu_j\right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный.

Отметим, что при всех $\delta > 0$ за исключением точек $1/\sqrt{\nu_{s_k}}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, оптимальный метод не меняется при достаточно малых изменениях δ и тем самым является устойчивым относительно погрешности задания исходных данных.

Вернемся к задаче оптимального восстановления решения волнового уравнения. Если $f(\cdot) \in W_2^n([0, \pi])$, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \sin jx,$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n} a_j^2(f) \le 1,$$

т.е. $\nu_j = j^{2n}$. Из (2) вытекает, что $\mu_j = \cos^2 jT$. В соответствии с введенными обозначениями

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} = \frac{\cos^2 pT}{p^{2n}}, \quad B = \max_{j>N} \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} = \frac{\cos^2 qT}{q^{2n}},$$

r определяется из условия

$$\cos^2 rT - Br^{2n} = \max_{p\le j\le N} (\cos^2 jT - Bj^{2n}),$$

последовательность s_{k+1} определяется равенствами

$$\frac{\cos^2 s_{k+1}T - \cos^2 s_kT}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} = \max_{s_k<j\le r} \frac{\cos^2 jT - \cos^2 s_kT}{j^{2n} - s_k^{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} > \frac{\cos^2 s_{k+1}T - \cos^2 s_kT}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \right\}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} > B \right\}.$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$ оптимальный метод восстановления волнового уравнения*

$$u(x, T) \approx 0,$$

а для его погрешности справедливо равенство

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \frac{|\cos qT|}{q^n}.$$

Если $B < A$, то

(i) при $\delta \ge p^{-n}$

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \frac{|\cos pT|}{p^n},$$

а метод $u(x, T) \approx 0$ — оптимальный;

(ii) при $s_{k+1}^{-n} \le \delta < s_k^{-n}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{s_{k+1}^{2n}\delta^2 - 1}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}}\cos^2 s_k T + \frac{1 - \delta^2 s_k^{2n}}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}}\cos^2 s_{k+1} T},$$

а метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j\in J_k}\left(1 + \frac{\cos^2 s_{k+1}T - \cos^2 s_k T}{s_{k+1}^{2n}\cos^2 s_k T - s_k^{2n}\cos^2 s_{k+1}T} j^{2n}\right)^{-1} y_j \cos jT \sin jx$$

— оптимальный;

(iii) при $\delta < r^{-n}$

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2\cos^2 rT + \frac{1 - \delta^2 r^{2n}}{q^{2n}}\cos^2 qT},$$

а метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j\in J_m}\left(1 + \frac{\cos^2 qT}{q^{2n}\cos^2 rT - r^{2n}\cos^2 qT} j^{2n}\right)^{-1} y_j \cos jT \sin jx$$

— оптимальный.

3. Доказательства

Начнем с одного вспомогательного результата, описывающего свойства последовательностей $\{\mu_{s_k}\}$ и $\{\nu_{s_k}\}$.

Лемма 1. *Последовательности*

$$\left\{\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\right\} \text{ и } \left\{\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\right\}$$

строго монотонно убывают и при всех $1 \le j < s_k$

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_j}{\nu_{s_k} - \nu_j} \ge \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем, что последовательность $\{\mu_{s_k}/\nu_{s_k}\}$ строго монотонно убывает. Из определения p следует, что

$$\frac{\mu_p}{\nu_p} = \frac{\mu_{s_0}}{\nu_{s_0}} > \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}$$

для всех $i \geq 1$. В предположении, что

$$\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} > \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}} \tag{5}$$

для всех $i \geq k$, докажем, что

$$\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} > \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}} \tag{6}$$

для всех $i \geq k+1$. Из определения s_k следует, что для всех $i \geq k+1$

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} > \frac{\mu_{s_i} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_i} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Отсюда

$$\mu_{s_k}\nu_{s_i} - \mu_{s_k}\nu_{s_{k-1}} - \mu_{s_{k-1}}\nu_{s_i} > \mu_{s_i}\nu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}\nu_{s_k} - \mu_{s_i}\nu_{s_{k-1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\nu_{s_k}\nu_{s_i}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right) > \nu_{s_i}\nu_{s_{k-1}}&\left(\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right)\\ &- \nu_{s_{k-1}}\nu_{s_k}\left(\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} - \frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\right).\end{aligned}$$

В силу (5) и того, что $\nu_{s_i} > \nu_{s_k}$, имеем

$$\begin{aligned}\nu_{s_k}\nu_{s_i}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right) &> \nu_{s_k}\nu_{s_{k-1}}\left(\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}} - \frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} + \frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\right)\\ &= \nu_{s_k}\nu_{s_{k-1}}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, выполнено неравенство (6).

Из выбора последовательности s_k следует, что

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_{k-1}}} < \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Отсюда

$$\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k-1}} < (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\frac{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Тогда

$$\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k} = (\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k-1}}) - (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})$$
$$< (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}) \left(\frac{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} - 1 \right) = (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}) \frac{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} < \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Для доказательства неравенства (4) покажем сначала, что

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_j}{\nu_{s_k} - \nu_j} \ge \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} \tag{7}$$

при $s_{k-1} \le j < s_k$. Из определения s_k вытекает, что

$$\frac{\mu_j - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_j - \nu_{s_{k-1}}} \le \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Следовательно,

$$\mu_j \le \mu_{s_{k-1}} + (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}) \frac{\nu_j - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Тем самым

$$\mu_{s_k} - \mu_j \ge \mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}} - (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}) \frac{\nu_j - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}$$
$$= (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}) \frac{\nu_{s_k} - \nu_j}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Отсюда вытекает (7). Пусть $j < s_{k-1}$. Заметим сначала, что последовательность $\{\mu_{s_k}\}$ монотонно возрастает. Действительно, если при некотором k $\mu_{s_{k-1}} > \mu_{s_k}$, то

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} < 0,$$

а в силу монотонного убывания и

$$\frac{\mu_{s_m} - \mu_{s_{m-1}}}{\nu_{s_m} - \nu_{s_{m-1}}} < 0,$$

т.е. $\mu_{s_{m-1}} > \mu_{s_m} = \mu_r$. Тогда

$$\mu_{s_{m-1}} - B\nu_{s_{m-1}} \ge \mu_{s_{m-1}} - B\nu_r > \mu_r - B\nu_r,$$

что противоречит определению числа r. Теперь покажем, что для всех $i < s_k$ $\mu_i \le \mu_{s_k}$. Пусть $l \le k$ и $s_{l-1} < i < s_l$. Тогда $\mu_i \le \mu_{s_l}$, так как, предположив противное, получим

$$\frac{\mu_i - \mu_{s_{l-1}}}{\nu_i - \nu_{s_{l-1}}} > \frac{\mu_{s_l} - \mu_{s_{l-1}}}{\nu_i - \nu_{s_{l-1}}} \ge \frac{\mu_{s_l} - \mu_{s_{l-1}}}{\nu_{s_l} - \nu_{s_{l-1}}},$$

что противоречит определению s_l. Таким образом, $\mu_i \le \mu_{s_l} \le \mu_{s_k}$. В силу того, что $j < s_{k-1}$, из доказанного вытекает, что $\mu_j \le \mu_{s_{k-1}}$. Имеем

$$\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}} \le \mu_{s_k} - \mu_j \le (\mu_{s_k} - \mu_j)\frac{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_j},$$

откуда вытекает (7). $\square$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j |x_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} |x_j|^2 \le \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \le 1.$$

Положим $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$, и перепишем эту задачу так:
(8)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} u_j \le \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=1}^{N}(-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j)u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty}(-\mu_j + \lambda_2\nu_j)u_j,$$

где $u = \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, а λ_1, λ_2 — множители Лагранжа.

Из работы [2] (см. также [3]) вытекает, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$, что для допустимой в задаче (8) последовательности $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_j \ge 0} \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_1\left(\sum_{j=1}^{N} \widehat{u}_j - \delta^2\right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j - 1\right) = 0,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (8), а ее значение равно $\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2$. Если при этом для всех $y\in l_2^N$ существует решение x_y экстремальной задачи

$$\widehat{\lambda}_1\|I_Nx-y\|^2_{l_2^N}+\widehat{\lambda}_2\|x\|^2_X\to\min,\quad x\in X, \tag{9}$$

то

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2}, \tag{10}$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)=Qx_y$$

является оптимальным.

Задача (9) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^N\left(\widehat{\lambda}_1(x_j-y_j)^2+\widehat{\lambda}_2\nu_jx_j^2\right)+\widehat{\lambda}_2\sum_{j=N+1}^\infty\nu_jx_j^2\to\min,\quad x\in X.$$

Нетрудно убедиться, что при фиксированных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ ее решение есть

$$x_y=\sum_{j=1}^N\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\nu_j}y_je_j.$$

Поэтому достаточно найти $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\ge0$ и допустимую в (8) последовательность $\widehat{u}=\{\widehat{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. для которых будут выполнены условия (a) и (b). При этом метод

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j=1}^N\eta_j\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\nu_j}y_je_j \tag{11}$$

будет оптимальным.

Пусть $B\ge A$. Положим $\widehat{\lambda}_1=0$,

$$\widehat{\lambda}_2=\frac{\mu_q}{\nu_q},\quad \widehat{u}_q=\frac{1}{\nu_q},\quad \widehat{u}_j=0,\ j\ne q.$$

Легко проверить, что последовательность $\{\widehat{u}_j\}$ — допустимая и выполнены условия (b). Имеем

$$\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\sum_{j=1}^\infty\left(-\mu_j+\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right)u_j=\sum_{j=1}^\infty\nu_j\left(\frac{\mu_q}{\nu_q}-\frac{\mu_j}{\nu_j}\right)u_j\ge0,$$

так как
$$B = \frac{\mu_q}{\nu_q} \geq \max_{j \in N} \frac{\mu_j}{\nu_j} = A.$$
В силу того, что $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, условие (a) выполнено.

Пусть $B < A$. Начнем со случая (i). Положим $\widehat{\lambda}_1 = 0$,
$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_p}{\nu_p}, \quad \widehat{u}_p = \frac{1}{\nu_p}, \quad \widehat{u}_j = 0,\ j \neq p.$$
Здесь также легко проверяется, что последовательность $\{\widehat{u}_j\}$ — допустимая и выполнены условия (b). Для этого случая
$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\mu_j + \frac{\mu_p}{\nu_p} \nu_j \right) u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \left(\frac{\mu_p}{\nu_p} - \frac{\mu_j}{\nu_j} \right) u_j \geq 0,$$
так как
$$\frac{\mu_p}{\nu_p} = \max_{j \in N} \frac{\mu_j}{\nu_j} = A > B = \max_{j > N} \frac{\mu_j}{\nu_j}.$$
Поскольку $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, условие (a) выполнено.

Перейдем к случаю (ii). Пусть
$$\frac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \leq \delta < \frac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}}. \tag{12}$$
Положим $\widehat{u}_j = 0$ при $j \neq s_k, s_{k+1}$, а $\widehat{u}_{s_k}$ и $\widehat{u}_{s_{k+1}}$ выберем из условия
$$\widehat{u}_{s_k} + \widehat{u}_{s_{k+1}} = \delta^2, \tag{13}$$
$$\nu_{s_k} \widehat{u}_{s_k} + \nu_{s_{k+1}} \widehat{u}_{s_{k+1}} = 1. \tag{14}$$
Тогда
$$\widehat{u}_{s_k} = \frac{\nu_{s_{k+1}} \delta^2 - 1}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}, \quad \widehat{u}_{s_{k+1}} = \frac{1 - \nu_{s_k} \delta^2}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}.$$
В силу (12) и (13) последовательность $\{\widehat{u}_j\}$ — допустимая в задаче (8). Положим
$$\widehat{\lambda}_1 = \mu_{s_k} - \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \nu_{s_k}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}.$$

Покажем сначала, что $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 > 0$. Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} = \frac{\nu_{s_k}\nu_{s_{k+1}}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_{k+1}}}{\nu_{s_{k+1}}}\right) > 0,$$

так как по лемме 1 последовательность $\{\mu_{s_k}/\nu_{s_k}\}$ монотонно убывает. Из определения r следует, что $\mu_r - B\nu_r > \mu_{s_{m-1}} - B\nu_{s_{m-1}}$. Тем самым, поскольку $s_m = r$,

$$\frac{\mu_{s_m} - \mu_{s_{m-1}}}{\nu_{s_m} - \nu_{s_{m-1}}} > B.$$

Из монотонного убывания последовательности

$$\left\{\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\right\}$$

вытекает, что

$$\widehat{\lambda}_2 > B \geq 0. \tag{15}$$

Из (13) вытекает, что условие (b) выполнено. Докажем, что условие (a) тоже выполнено. Покажем, что при всех $u_j \geq 0$

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0. \tag{16}$$

Если $j > N$, то, учитывая (15),

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_2\nu_j = \nu_j\left(\widehat{\lambda}_2 - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right) > \nu_j\left(B - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right) \geq 0.$$

Если $s_k \leq j \leq N$, то

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j = (\nu_j - \nu_{s_k})\left(\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} - \frac{\mu_j - \mu_{s_k}}{\nu_j - \nu_{s_k}}\right) \geq 0$$

в силу определения s_k. При $1 \leq j < s_k$, учитывая (4), имеем

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j = (\nu_{s_k} - \nu_j)\left(\frac{\mu_{s_k} - \mu_j}{\nu_{s_k} - \nu_j} - \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\right) \geq 0.$$

Тем самым неравенство (16) доказано, а так как $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, то доказано и выполнение условия (a).

Таким образом, подставляя $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ в (10) и (11), получаем погрешность оптимального восстановления и оптимальность метода

$$\varphi(y)=\sum_{j=1}^{N}\eta_j\left(1+\frac{\mu_{s_{k+1}}-\mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}}-\mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}\nu_j\right)^{-1}y_je_j.$$

Покажем, что метод, в котором суммирование берется не по всем $1\le j\le N$, а лишь из множества J_k, тоже будет оптимальным. Пусть

$$J_k=\{i_1,\dots,i_{\widetilde{N}}\}.$$

Рассмотрим ту же задачу оптимального восстановления, но с информационным оператором

$$I_{J_k}x=(x_{i_1},\dots,x_{i_{\widetilde{N}}}).$$

Из леммы 1 вытекает, что при всех $j=0,1,\dots,k$

$$\frac{\mu_{s_j}}{\nu_{s_j}}>\frac{\mu_{s_j}-\mu_{s_{j-1}}}{\nu_{s_j}-\nu_{s_{j-1}}}>\frac{\mu_{s_{k+1}}-\mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}}-\nu_{s_k}}.$$

Поэтому для нового информационного оператора I_{J_k} последовательность s_j, $j=0,1,\dots,\widetilde{m}$, $\widetilde{m}\ge k$, останется без изменений. Далее, возможны два случая: $\widetilde{m}>k$ и $\widetilde{m}=k$. Рассмотрим первый из них (второй будет вытекать из аналогичных рассуждений для случая (*iii*)). По уже доказанному погрешность оптимального восстановления в случае, когда

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}}\le\delta<\frac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}},$$

зависит лишь от двух точек (μ_{s_k},ν_{s_k}) и $(\mu_{s_{k+1}},\nu_{s_{k+1}})$. Поэтому

$$E(Q,W,I_{J_k},\delta)=E(Q,W,I_N,\delta),$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{y})=\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\eta_{i_j}\left(1+\frac{\mu_{s_{k+1}}-\mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}}-\mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}\nu_{i_j}\right)^{-1}y_{i_j}e_{i_j},$$

$$\widetilde{y}=(y_{i_1},\dots,y_{i_{\widetilde{N}}}),$$

— оптимальный. Оценим этот метод для случая, когда задан информационный оператор I_N. Пусть $x \in W$, $y \in l_2^N$ и $\|I_N x - y\|_{l_2^N} \le \delta$. Тогда и $\|I_{J_k} x - \widetilde{y}\|_{l_2^{\tilde N}} \le \delta$. Тем самым

$$\|Q - \widehat{\varphi}(y)\|_{l_2} = \|Q - \widehat{\varphi}(\widetilde{y})\|_{l_2} \le E(Q, W, I_{J_k}, \delta) = E(Q, W, I_N, \delta).$$

Это означает, что метод $\widehat{\varphi}$ является оптимальным и для информационного оператора I_N.

В случае (iii) положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \mu_r - \frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_r, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_q}{\nu_q}, \quad \widehat{u}_r = \delta^2, \quad \widehat{u}_q = \frac{1 - \delta^2\nu_r}{\nu_q}, \\ \widehat{u}_j = 0, \ j \ne r, q.$$

Из определения r вытекает, что

$$\widehat{\lambda}_1 > \mu_p - B\nu_p = \nu_p(A - B) > 0.$$

Легко убедиться в допустимости последовательности $\{\widehat{u}_j\}$ и в выполнении условия (b). Поскольку и здесь $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, то для доказательства выполнения условия (a) остается доказать, что при всех $u_j \ge 0$ имеет место неравенство (16). Функция Лагранжа в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{j=1}^{N} \left(-\mu_j + \mu_r - \frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_r + \frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right) u_j \\ + \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(-\mu_j + \frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right) u_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\mu_r - \frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_r\right) - \left(\mu_j - \frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right)\right) u_j \\ + \sum_{j=N+1}^{\infty} \nu_j \left(\frac{\mu_q}{\nu_q} - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right) u_j.$$

Каждое слагаемое в первой сумме неотрицательно в силу определения r, а каждое слагаемое второй суммы — в силу определения q. Подставляя $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ в (10) и (11), получаем погрешность оптимального восстановления и оптимальность метода

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_q}{\mu_r\nu_q - \mu_q\nu_r}\nu_j\right)^{-1} y_j e_j. \tag{17}$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при доказательстве случая (ii), показывают, что в методе (17) можно отбросить точки $(\nu_j, \mu_j) \notin J_m$. При этом полученный метод тоже будет оптимальным, а число используемых исходных данных, вообще говоря, сократится. □

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[3] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.

[4] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[5] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского