ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, В. М. ТИХОМИРОВ

Аннотация. Изучаются оптимальные методы восстановления функций и их производных из соболевского класса по неточно заданному в среднеквадратичной норме на конечном отрезке преобразованию Фурье. Построено семейство оптимальных методов, в котором каждый метод точен на некотором подпространстве целых функций. Строятся оптимальные методы восстановления для более широких классов функций, представляющих сумму исходного соболевского класса и подпространства целых функций.

Введение

Работа посвящена вопросам восстановления функций и их производных на прямой по приближенно известному на конечном отрезке преобразованию Фурье этих функций. В предположении, что функции принадлежат некоторому классу, можно поставить задачу о выборе наилучшего (оптимального) метода восстановления. В [1] для функций из соболевского класса такие методы были найдены. Они устроены так, что за пределами некоторого отрезка информация о преобразовании Фурье оказывается лишней, а та информация, которая используется, определенным образом фильтруется (сглаживается).

В данной работе формулируется результат, из которого вытекает, что, на самом деле, существуют целые серии оптимальных методов восстановления функций и их производных, отличающиеся различными способами фильтрации исходной информации. Каждый из этих методов является точным на некотором подпространстве целых функций, и в этом смысле среди них есть "наилучший", а именно тот, который точен на наиболее широком из таких подпространств.

Эти результаты согласуется с практикой: при восстановлении сигнала по неточной информации о гармониках высокочастотные компоненты отбрасывают, а остальные тем или иным способом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450 и №10-01-00188).

сглаживают (фильтруют), чтобы нивелировать естественные погрешности измерения.

1. Постановка задачи

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ соболевское пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $\sigma > 0$, $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $0 \le k \le n-1$, $\delta \ge 0$ и $W \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ — некоторый класс функций. Поставим следующую задачу. Допустим, что про функцию $x(\cdot) \in W$ известно ее преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ на Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta$ (если $\delta = 0$, то $Fx(\cdot)$ на Δ_σ известно точно). Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить саму функцию или ее k-ую производную в метрике $L_2(\mathbb{R})$?

Введем следующие обозначения. Пусть $I_\sigma\colon \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) \to L_2(\Delta_\sigma)$ — отображение, сопоставляющее $x(\cdot)$ сужение $Fx(\cdot)$ на Δ_σ, а $I_\sigma^\delta\colon \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) \to L_2(\Delta_\sigma)$ — многозначное отображение, определенное по формуле: $I_\sigma^\delta x(\cdot) = \{\, y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma) \mid \|I_\sigma x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta \,\}$ $(I_\sigma^0 = I_\sigma)$. Тогда информация об $x(\cdot) \in W$ заключается в том, что известна функция $y(\cdot) \in I_\sigma^\delta x(\cdot)$.

Под задачей оптимального восстановления k-ой $(0 \le k \le n-1)$ производной функции из класса W в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по указанной информации понимается следующее. Любое отображение $m\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$ объявляется методом восстановления. Погрешностью этого метода называем величину

$$e(D^k, W, I_\sigma^\delta, m) = \sup_{x(\cdot)\in W,\ y(\cdot)\in I_\sigma^\delta x(\cdot)} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где D^k символизирует оператор k-кратного дифференцирования (D^0 — тождественный оператор).

Нас интересует величина

$$E(D^k, W, I_\sigma^\delta) = \inf_{m\colon L_2(\Delta_\sigma)\to L_2(\mathbb{R})} e(D^k, W, I_\sigma^\delta, m),$$

которую назовем *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m} = \widehat{m}(k, \sigma, \delta)$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(D^k, W, I_\sigma^\delta) = e(D^k, W, I_\sigma^\delta, \widehat{m}),$$

называемый *оптимальным методом восстановления.*

Задачу нахождения величины $E(D^k, W, I_\sigma^\delta)$ и соответствующего оптимального метода назовем $(D^k, W, I_\sigma^\delta)$-задачей.

Скажем, что метод m *точен на* $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, если $x^{(k)}(\cdot) = m(I_\sigma x(\cdot))(\cdot)$. Если L — подмножество $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ и метод m точен на каждой функции из L, то говорим, что метод m *точен на* L.

При построении методов приближений часто от методов требуется их точность на как можно более широком множестве функций (такова ситуация, например, с квадратурными формулами, где в качестве таких множеств рассматриваются алгебраические полиномы, а в периодическом случае — тригонометрические полиномы).

Приведенный выше подход к определению оптимального метода восстановления, как наилучшего метода для всех функций из данного класса, идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х годов о нахождении наилучших средств приближения для классов функций. Сама задача оптимального восстановления (но для линейных функционалов по точной информации и в конечномерной ситуации) впервые была рассмотрена С. А. Смоляком [2]. Различным ее обобщениям посвящена достаточно обширная литература. В монографиях [3]–[6] можно найти множество конкретных результатов и дополнительные ссылки.

Первые результаты, касающиеся оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации, были получены в работе [7]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [8] и [9], где используются подходы, основанные на методах теории экстремума. Рассмотрение задач оптимального восстановления именно с этих позиций для линейных функционалов впервые было предпринято в [10].

2. Формулировка результатов

Пусть $\sigma > 0$. Обозначим через $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, образованное сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ. Как хорошо известно, $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда носитель $Fx(\cdot)$ принадлежит отрезку $[-\sigma, \sigma]$. По определению, $\mathcal{B}_{0,2}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

Если $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, то $x^{(m)}(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ для любого $m \in \mathbb{N}$ (по неравенству Бернштейна для целых функций экспоненциального типа), в частности, $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления k-ой производной $(0 \le k < n)$ на соболевском классе

$$W_2^n(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) \mid \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1 \,\}.$$

Пусть $1 \le k < n$ и $\delta \ge 0$. Положим

$$\widehat{\sigma}_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}, & \delta > 0, \\ +\infty, & \delta = 0 \end{cases}$$

и

$$\widehat{\sigma}_2 = \begin{cases} \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{\frac{1}{2k}} \left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}, & \delta > 0, \\ +\infty, & \delta = 0. \end{cases}$$

Величина $\widehat{\sigma}_2/\widehat{\sigma}_1$ определена при $\delta > 0$ и не зависит от δ. Доопределим ее тем же числом и при $\delta = 0$.

Теорема 1. *Пусть k, n — целые, $0 \le k < n$, $\sigma > 0$ и $\delta \ge 0$.*

1) *Если $k \ge 1$ и $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma}_1)$, то*

$$E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\dfrac{n-k}{2\pi n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \delta^2 + \dfrac{1}{\sigma^{2n}}}, & \sigma \le \widehat{\sigma}_1, \\ \left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/n}, & \sigma \ge \widehat{\sigma}_1, \end{cases}$$

и для каждого σ' такого, что

$$0 \le \sigma' \le \frac{\widehat{\sigma}_2}{\widehat{\sigma}_1}\sigma_0 \tag{1}$$

метод

$$\widehat{m}(\sigma, \sigma', y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi| \le \sigma'} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma' \le |\xi| \le \sigma_0} (i\xi)^k \left(1 + \frac{n}{n-k}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1} y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi$$

является оптимальным в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta)$-задаче и точным на подпространстве $\mathcal{B}_{\sigma',2}(\mathbb{R})$.

2) *Если $k = 0$, то*

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2n}}},$$

и для каждого $\sigma' \ge 0$ такого, что $\sigma' \le \sigma$ метод

$$\widehat{m}(\sigma, \sigma', y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi| \le \sigma'} y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma' \le |\xi| \le \sigma} \left(1 + \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2n}\right)^{-1} y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi$$

является оптимальным в $(D^0, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta)$-задаче и точным на подпространстве $\mathcal{B}_{\sigma',2}(\mathbb{R})$.

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

В части 1), если $\delta > 0$, то, как видно из выражения для погрешности оптимального восстановления, информация о преобразовании

Фурье (измеренном с точностью δ) за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_1]$ оказывается лишней, поскольку ее наличие не уменьшает величину погрешности. Иными словами, объем полезной информации σ и погрешность ее измерения δ должны быть связаны соотношением $\sigma \le \widehat{\sigma}_1$, т. е.

$$\delta^2 \sigma^{2n} \le 2\pi \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{n-k}}.$$

При этом, каждый из оптимальных методов, используя информацию только на отрезке $[-\sigma_0, \sigma_0]$, фильтрует ее на множестве $\{\, \xi \mid \sigma' \le |\xi| \le \sigma_0 \,\}$ и не фильтрует на $[-\sigma', \sigma']$, если $\sigma' > 0$.

Пространство $\mathcal{B}_{\sigma',2}(\mathbb{R})$ при $\sigma' = (\widehat{\sigma}_1/\widehat{\sigma}_2)\min(\sigma, \widehat{\sigma}_1)$, очевидно, максимально широкое из тех, на которых оптимальный метод точен.

Если $\delta = 0$, то чем больше σ, тем меньше погрешность оптимального восстановления, и информация фильтруется на множестве $\{\, \xi \mid \sigma' \le |\xi| \le \sigma \,\}$ ($\sigma_0 = \sigma$) и не фильтруется на $[-\sigma', \sigma']$, если $\sigma' > 0$.

Во второй части теоремы, когда восстанавливается сама функция, погрешность оптимального восстановления убывает с ростом σ независимо от того $\delta > 0$ или $\delta = 0$. Среди оптимальных методов есть "естественный" (при $\sigma' = \sigma$), сопоставляющий $y(\cdot)$ функцию, преобразование Фурье которой равно $y(\cdot)$ на $[-\sigma, \sigma]$ и нулю вне этого отрезка.

Из того, что построенные оптимальные методы точны на подпространствах целых функций вытекает, что эти методы являются оптимальными на более широких классах функций. Точнее, имеет место следующее утверждение: *если $\widehat{m}$ — оптимальный линейный метод в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta)$-задаче, точный на подпространстве $L \subset \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, то он является оптимальным и в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + L, I_\sigma^\delta)$-задаче.*

Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}) + L$, $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$, где $x_1(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, $x_2(\cdot) \in L$ и пусть $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такое, что $\|I_\sigma x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta$. Положим $y_1(\cdot) = y(\cdot) - I_\sigma x_2(\cdot)$. Тогда $y_1(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ и

$$\|I_\sigma x_1(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} = \|I_\sigma x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta. \tag{2}$$

Из линейности и точности $\widehat{m}$ на L следует равенство

$$\|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|x_1^{(k)}(\cdot) - \widehat{m}(y_1(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Величина справа в (3) в силу (2) не превосходит

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta, \widehat{m}) = E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta).$$

Переходя в левой части (3) к верхней грани по всем указанным $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, получаем, что

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + L, I_\sigma^\delta, \widehat{m}) \le E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta).$$

Поскольку $W_2^n(\mathbb{R}) \subset W_2^n(\mathbb{R}) + L$, имеем

$$\begin{aligned} E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta) &\le E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + L, I_\sigma^\delta) \\ &\le e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + L, I_\sigma^\delta, \widehat{m}) \le E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\widehat{m}$ — оптимальный метод в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + L, I_\sigma^\delta)$-задаче и значение погрешности оптимального восстановления в этой задаче совпадает с соответствующим значением для $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta)$-задачи.

Таким образом, при $1 \le k < n$ для всех σ', удовлетворяющих неравенству (1), и при $k = 0$ для всех $\sigma' \le \sigma$

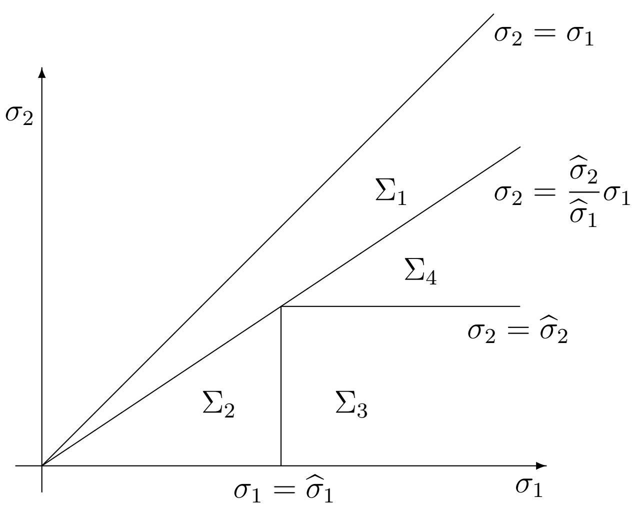
$$E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma',2}(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta) = E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_\sigma^\delta).$$

В связи с этим естественно поставить более общую задачу о нахождении оптимального метода в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma_2,2}(\mathbb{R}), I_{\sigma_1}, \delta)$-задаче для любых $0 < \sigma_1 \le \infty$ и $0 \le \sigma_2 < \infty$.

Перед формулировкой соответствующего результата введем некоторые обозначения. Пусть $1 \le k \le n - 1$, $\delta > 0$ и $\widehat{\sigma}_1$, $\widehat{\sigma}_2$ — те же, что и в теореме 1. Положим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \frac{\widehat{\sigma}_2}{\widehat{\sigma}_1}\sigma_1 \le \sigma_2 \le \sigma_1 \right\}, \\ \Sigma_2 &= \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \sigma_2 \le \frac{\widehat{\sigma}_2}{\widehat{\sigma}_1}\sigma_1,\ 0 < \sigma_1 \le \widehat{\sigma}_1 \right\}, \\ \Sigma_3 &= \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_1 \ge \widehat{\sigma}_1,\ 0 \le \sigma_2 \le \widehat{\sigma}_2 \right\}, \\ \Sigma_4 &= \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \widehat{\sigma}_2 \le \sigma_2 \le \frac{\widehat{\sigma}_2}{\widehat{\sigma}_1}\sigma_1 \right\}. \end{aligned}$$

На рисунке эти области выглядят так



Положим, кроме того,

(4)
$$2\pi(\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\begin{cases}(\sigma_2^{2k},\sigma_1^{2(k-n)}), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_1,\\[2mm] \left(\dfrac{n-k}{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\sigma_1^{2k},\sigma_1^{2(k-n)}\right), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_2,\\[2mm] \left(\dfrac{n-k}{n}\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{k}{n}},\dfrac{k}{n}\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{2(k-n)}{n}}\right), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_3,\\[2mm] \left(\sigma_2^{2k},\dfrac{k}{n}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{k}}\sigma_2^{2(k-n)}\right), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_4,\end{cases}$$

и

$$(\sigma_1',\sigma_2')=\begin{cases}(\sigma_1,\sigma_2), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_1,\\[2mm] \left(\sigma_1,\dfrac{\widehat{\sigma}_2}{\widehat{\sigma}_1}\sigma_1\right), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_2,\\[2mm] (\widehat{\sigma}_1,\widehat{\sigma}_2), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_3,\\[2mm] \left(\dfrac{\widehat{\sigma}_1}{\widehat{\sigma}_2}\sigma_2,\sigma_2\right), & (\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma_4.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть k,n — целые, $0\le k<n$ и $\delta\ge 0$.*

1) *Если $\sigma_2>\sigma_1$, то $E(D^k,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma_2,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1}^{\delta})=\infty$.*

2) *Если $k\ge 1$ и $\delta\ge 0$, то для всех $\sigma_1>0$, $\sigma_2\ge 0$ таких, что $\sigma_2\le\sigma_1$*

$$E(D^k,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma_2,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1}^{\delta})=\sqrt{\widehat{\lambda}_1\delta^2+2\pi\widehat{\lambda}_2},$$

и при всех $\widetilde{\sigma}_1\in[\sigma_1',\sigma_1]$ и $\widetilde{\sigma}_2\in[\sigma_2,\sigma_2']$ методы

$$\widehat{m}_{\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2}(\sigma_1,\sigma_2,y(\cdot))(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\le\widetilde{\sigma}_2}(i\xi)^k y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi \\ +\frac{1}{2\pi}\int_{\widetilde{\sigma}_2\le|\xi|\le\widetilde{\sigma}_1}(i\xi)^k\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n}}y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi$$

являются оптимальными.

3) *Если $k=0$ и $\delta\ge 0$, то для всех $\sigma_1>0$, $\sigma_2\ge 0$ таких, что $\sigma_2\le\sigma_1$*

$$E(D^0,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma_2,2}(\mathbb{R}),I_{\sigma_1}^{\delta})=\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}+\frac{1}{\sigma_1^{2n}}},$$

и при всех $\widetilde{\sigma}_2 \in [\sigma_2, \sigma_1]$ *методы*

$$\widehat{m}_{\widetilde{\sigma}_2}(\sigma_1, \sigma_2, y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\le\widetilde{\sigma}_2} y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\widetilde{\sigma}_2\le|\xi|\le\sigma_1}\left(1+\left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^{2n}\right)^{-1} y(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi$$

являются оптимальными.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[2] Смоляк С. А. *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[3] Traub J. F., Woźniakowski H. *A General Theory of Optimal Algorithms*, New York: Academic Press, 1980.

[4] Plaskota L. *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge University Press, 1996.

[5] Osipenko K. Yu. *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.

[6] Magaril-Il’yaev G. G., Tichomirov V. M. *Convex Analysis: Theory and Applications*, Translations of Math. Monographs, vol. 222, AMS, Providence, RI, 2003.

[7] Melkman A. A., Micchelli C. A. “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[9] Осипенко К. Ю., “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

[10] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. “О неравенствах для производных колмогоровского типа” *Матем. сб.*, **187**:12 (1997), 73–106.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова