ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2016, т. 293, с. 201–216

УДК 517.984.64

Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру[1]

Г. Г. Магарил-Ильяев[2,3], К. Ю. Осипенко[2,4]

Поступило 9 ноября 2015 г.

Построены оптимальные методы восстановления функций и их производных из соболевского класса функций на прямой по точно или приближенно заданному преобразованию Фурье этих функций на произвольном измеримом множестве, которые точны на некоторых подпространствах целых функций. Строятся также оптимальные методы восстановления для более широких классов функций, представляющих собой сумму исходного соболевского класса и подпространства целых функций.

DOI: 10.1134/S037196851602014X

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос, который авторы первоначально ставили перед собой, заключается в следующем. Пусть задан класс гладких функций на прямой, для каждой из которых известно (вообще говоря, приближенно) ее преобразование Фурье на некотором множестве. Можно ли построить такой метод восстановления этих функций и/или их производных, который был бы точен на заданном подпространстве и был бы в некотором смысле наилучшим?

Истоки постановки этого вопроса таковы. При построении квадратурных формул важным показателем является максимальная размерность подпространства алгебраических или тригонометрических полиномов, на которых эта формула точна. Оптимальными в этом смысле являются квадратуры Гаусса (см., например, [1]). В 1950-х годах появилась задача о наилучших квадратурах на классах функций (квадратуры Колмогорова–Никольского, см. [2]), истоки которой восходят к работам А.Н. Колмогорова о нахождении оптимальных методов приближения классов функций (см. [3]). В статье [2] С.М. Никольский так и пишет: “В этом параграфе дается решение одной задачи, относящейся к проблеме, поставленной А.Н. Колмогоровым”.

Задача о квадратурах Колмогорова–Никольского послужила отправной точкой для постановки общей проблемы нахождения оптимальных методов восстановления линейных функционалов и операторов на классах элементов по неточной информации о самих элементах. Литература, посвященная этой тематике, достаточно обширна. Укажем здесь лишь работы [4–12], которые можно отнести к истоковым для данной проблематики.

Среди оптимальных методов восстановления функций и их производных на соболевском классе на прямой, как оказалось, есть такие, которые точны на некоторых подпространствах

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-01-00456, 14-01-00744).

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

[3]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: magaril@mech.math.msu.su

[4]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.
E-mail: kosipenko@yahoo.com

целых функций экспоненциального типа. Кроме того, подобные методы являются оптимальными и на более широком классе, чем исходный. А именно, они оптимальны на классе, являющемся суммой исходного класса и того подпространства, на котором они точны.

В связи с этим возникает общая задача о построении методов, точных на заданном подпространстве целых функций и оптимальных на сумме соболевского класса с этим подпространством. В данной работе мы решаем эту задачу и в качестве следствия находим оптимальные на соболевском классе методы восстановления функций и их производных, которые точны на максимально широком подпространстве целых функций. Иначе говоря, мы делаем попытку совместить два подхода: идущий от Гаусса и основанный на построении методов, точных на подпространствах, и идущий от Колмогорова, который основан на построении методов, оптимальных на данном классе.

Отметим также работы авторов [13–15], где изучались задачи, близкие к тем, которые рассматриваются в данной статье.

2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Если $x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, то удобно считать, что функция $Fx(\cdot)$ определена на $\mathbb{R}$ с мерой Лебега, деленной на 2π. Норму функции $y(\cdot)$ в пространстве суммируемых с квадратом функций на $\mathbb{R}$ с такой мерой обозначим через $\|y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R})}$, т.е.

$$\|y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R})}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|y(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Пусть n — натуральное число и $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ — соболевское пространство функций $x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$.

Пусть, далее, W — некоторое подмножество (класс) функций из $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, а A — некоторое измеримое подмножество прямой. Допустим, что для каждой функции $x(\cdot)\in W$ известно ее преобразование Фурье на A либо точно, либо приближенно, т.е. известна функция $y(\cdot)\in\widehat{L}_2(\mathbb{R})$ такая, что $\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R})}\le\delta$ для некоторого $\delta>0$.

По этой информации мы хотим восстановить (по возможности наилучшим образом) функции $x(\cdot)\in W$ и их производные до $(n-1)$-го порядка включительно в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Перед точной постановкой задачи введем следующие обозначения. Пусть $I_A\colon\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})\to\widehat{L}_2(A)$ — отображение, которое функции $x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ ставит в соответствие функцию $Fx(\cdot)|_A$ — сужение $Fx(\cdot)$ на A, а $I_A^\delta\colon\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})\to\widehat{L}_2(A)$ — многозначное отображение, определенное по формуле

$$I_A^\delta x(\cdot)=\bigl\{y(\cdot)\in\widehat{L}_2(A)\colon\ \|I_Ax(\cdot)-y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)}\le\delta\bigr\}.$$

Если здесь формально положить $\delta=0$, то ясно, что $I_A^0=I_A$, и, таким образом, информация о функции $x(\cdot)\in W$ (при точном или неточном знании ее преобразования Фурье) заключается в том, что известна функция $y(\cdot)\in I_A^\delta x(\cdot)$, где $\delta\ge0$.

Ясно, что любой метод восстановления k-й $(0\le k\le n-1)$ производной функции из класса W в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по указанной информации есть некоторое отображение $\varphi\colon\widehat{L}_2(A)\to L_2(\mathbb{R})$. Погрешностью этого метода называют величину

$$e(D^k,W,I_A^\delta,\varphi)=\sup_{x(\cdot)\in W,\ y(\cdot)\in I_A^\delta x(\cdot)}\bigl\|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(y(\cdot))(\cdot)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где D^k обозначает оператор k-кратного дифференцирования (D^0 — тождественный оператор).

Под задачей *оптимального восстановления* k-й ($0 \le k \le n-1$) производной функции из класса W в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по указанной информации понимается нахождение величины

$$E(D^k, W, I_A^\delta) = \inf_{\varphi\colon \widehat{L}_2(A)\to L_2(\mathbb{R})} e(D^k, W, I_A^\delta, \varphi),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и методов $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т.е. для которых

$$E(D^k, W, I_A^\delta) = e(D^k, W, I_A^\delta, \widehat{\varphi}).$$

Эти методы мы называем *оптимальными методами восстановления.*

Коротко сформулированную задачу будем называть (D^k, W, I_A^δ)*-задачей.*

Помимо оптимальных методов восстановления, нас будут интересовать точные методы. Скажем, что метод $\varphi\colon \widehat{L}_2(A) \to L_2(\mathbb{R})$ *точен на множестве* $L \subset \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, если $x^{(k)}(\cdot) = \varphi(I_A x(\cdot))(\cdot)$ для всех $x(\cdot) \in L$. Следующее предложение показывает, что оптимальность и точность метода не независимые понятия.

Предложение 1. *Если $\widehat{\varphi}$ — оптимальный линейный метод в (D^k, W, I_A^δ)-задаче, точный на множестве $L \subset \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, содержащем нуль, то он оптимален и в $(D^k, W+L, I_A^\delta)$-задаче и при этом $E(D^k, W, I_A^\delta) = E(D^k, W+L, I_A^\delta)$.*

Если $\widehat{\varphi}$ — линейный метод с конечной погрешностью в $(D^k, W+L, I_A^\delta)$-задаче, где L — подпространство $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, то он точен на L.

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in W+L$, $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$, где $x_1(\cdot) \in W$, $x_2(\cdot) \in L$, и пусть $y(\cdot) \in L_2(A)$ таково, что $\|I_A x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \le \delta$. Положим $y_1(\cdot) = y(\cdot) - I_A x_2(\cdot)$. Ясно, что $y_1(\cdot) \in L_2(A)$, и так как $I_A x_1(\cdot) - y_1(\cdot) = I_A x(\cdot) - y(\cdot)$, то

$$\|I_A x_1(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(A)} \le \delta. \tag{2.1}$$

Из линейности и точности $\widehat{\varphi}$ на L следует равенство

$$\left\|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left\|x_1^{(k)}(\cdot) - \widehat{\varphi}(y_1(\cdot))(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{2.2}$$

Выражение справа в (2.2) в силу (2.1) не превосходит величины $e(D^k, W, I_A^\delta, \widehat{\varphi})$, которая равна $E(D^k, W, I_A^\delta)$, так как метод $\widehat{\varphi}$ оптимален. Учитывая это обстоятельство и переходя в левой части (2.2) к верхней грани по всем указанным $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, получаем

$$e(D^k, W+L, I_A^\delta, \widehat{\varphi}) \le E(D^k, W, I_A^\delta).$$

Отсюда и из того, что $W \subset W + L$, имеем

$$E(D^k, W, I_A^\delta) \le E(D^k, W+L, I_A^\delta) \le e(D^k, W+L, I_A^\delta, \widehat{\varphi}) \le E(D^k, W, I_A^\delta).$$

Следовательно, $\widehat{\varphi}$ — оптимальный метод в $(D^k, W+L, I_\sigma^\delta)$-задаче и справедливо равенство $E(D^k, W, I_A^\delta) = E(D^k, W+L, I_A^\delta)$.

Пусть теперь $\widehat{\varphi}$ — линейный метод с конечной погрешностью в $(D^k, W+L, I_A^\delta)$-задаче, где L — подпространство $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$. Предположим, что существует элемент $x_0(\cdot) \in L$, для которого

$$\left\|x_0^{(k)}(\cdot) - \widehat{\varphi}(I_A x_0(\cdot))(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} = c > 0.$$

Тогда $\lambda x_0(\cdot) \in L$ для любого $\lambda > 0$. Тем самым

$$e(D^k, W+L, I_A^\delta, \widehat{\varphi}) \ge \lambda c,$$

что противоречит конечности погрешности метода $\widehat{\varphi}$. $\square$

Из этого предложения вытекает, что если искать просто устроенные методы (например, линейные), точные на некоторых подпространствах и обладающие к тому же некоторыми свойствами оптимальности, то вполне естественно ставить задачу о нахождении оптимальных методов на классах вида $W + L$.

Мы это реализуем для случая, когда W — соболевский класс функций, т.е.

$$W_2^n(\mathbb{R}) = \bigl\{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})\colon\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1\bigr\},$$

а $L = \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ — пространство целых функций экспоненциального типа σ.

Напомним, что если $\sigma > 0$, то $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ — подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, образованное сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ. Как хорошо известно, $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда носитель $Fx(\cdot)$ принадлежит отрезку $\Delta_\sigma = [-\sigma,\sigma]$. По определению $\mathcal{B}_{0,2}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

Если $x(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, то $x^{(m)}(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ для любого $m \in \mathbb{N}$ (по неравенству Бернштейна для целых функций экспоненциального типа), и поэтому, в частности, $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Для измеримого множества A на прямой положим

$$\gamma_A = \sup\bigl\{a \ge 0\colon\ \operatorname{mes}(A \cap [-a,a]) = 2a\bigr\}.$$

Пусть $1 \le k \le n-1$ и $\delta > 0$. Введем обозначения

$$\widehat{\gamma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(2(n-k))}\delta^{-1/n}, \qquad \widehat{\sigma} = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{1/(2k)}\delta^{-1/n}$$

и рассмотрим следующие четыре области на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 < \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}x \le y \le x\right\}, \qquad \Sigma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \le y \le \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}x,\ 0 < x \le \widehat{\gamma}\right\},$$

$$\Sigma_3 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \ge \widehat{\gamma},\ 0 \le y \le \widehat{\sigma}\bigr\}, \qquad \Sigma_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \widehat{\sigma} \le y \le \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}x\right\}.$$

Эти области показаны на рис. 1.

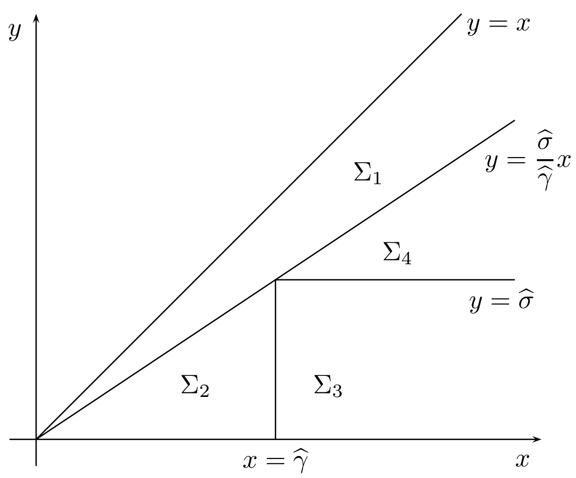

Рис. 1

Далее, множеству A и числу $\sigma \geq 0$ поставим в соответствие пару чисел $\lambda_1 = \lambda_1(A,\sigma)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(A,\sigma)$ по правилу

$$(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} \bigl(\sigma^{2k}, \gamma_A^{-2(n-k)}\bigr), & (\gamma_A,\sigma) \in \Sigma_1, \\ \left(\left(\dfrac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}\gamma_A\right)^{2k}, \gamma_A^{-2(n-k)}\right), & (\gamma_A,\sigma) \in \Sigma_2, \\ \bigl(\widehat{\sigma}^{\,2k}, \widehat{\gamma}^{\,-2(n-k)}\bigr), & (\gamma_A,\sigma) \in \Sigma_3, \\ \left(\sigma^{2k}, \left(\dfrac{\widehat{\gamma}}{\widehat{\sigma}}\sigma\right)^{-2(n-k)}\right), & (\gamma_A,\sigma) \in \Sigma_4, \end{cases} \tag{2.3}$$

а также множество $\Xi(A,\sigma)$ таких измеримых функций $\theta(\cdot)$ на $A \setminus \Delta_\sigma$, что $|\theta(\xi)| \leq 1$ для п.в. $\xi \in A \setminus \Delta_\sigma$.

Теорема 1. *Пусть $0 \leq k \leq n-1$, A — измеримое подмножество $\mathbb{R}$, $\delta \geq 0$ и $\sigma \geq 0$. Тогда*

1) *если $\sigma > \gamma_A$ или $\sigma = \gamma_A = 0$, то*

$$E\bigl(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta\bigr) = +\infty; \tag{2.4}$$

2) *если $k \geq 1$, $\delta > 0$, $\gamma_A > 0$ и $\sigma \leq \gamma_A$, то*

$$E\bigl(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta\bigr) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

и для каждой функции $\theta(\cdot) \in \Xi(A,\sigma)$ метод

$$\widehat{\varphi}_\theta(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{A\setminus\Delta_\sigma} (i\xi)^k a_\theta(\xi) y(\xi) e^{i\xi t}\,dt, \tag{2.5}$$

где

$$a_\theta(\xi) = \frac{\lambda_1 + \theta(\xi)|\xi|^{n-k}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n} - \xi^{2k}}}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}, \tag{2.6}$$

является оптимальным;

3) *если $k \geq 1$, $\delta = 0$, $\gamma_A > 0$ и $\sigma \leq \gamma_A$, то*

$$E\bigl(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^0\bigr) = \gamma_A^{-(n-k)}$$

и для каждой функции $\theta(\cdot) \in \Xi(A,\sigma)$ метод

$$\widehat{\varphi}_\theta(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} (i\xi)^k Fx(\xi) e^{i\xi t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{A\setminus\Delta_\sigma} (i\xi)^k \left(1 + \theta(\xi)\left|\frac{\xi}{\gamma_A}\right|^{n-k}\right) Fx(\xi) e^{i\xi t}\,dt$$

является оптимальным;

4) *если $k = 0$, $\gamma_A > 0$ и $\sigma \leq \gamma_A$, то*

$$E\bigl(D^0, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta\bigr) = \sqrt{\delta^2 + \gamma_A^{-2n}}$$

и для каждой функции $\theta(\cdot) \in \Xi(A,\sigma)$ метод

$$\widehat{\varphi}_\theta(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} y(\xi) e^{i\xi t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{A\setminus\Delta_\sigma} \frac{\gamma_A^{2n} + \theta(\xi)\xi^{2n}}{\gamma_A^{2n} + \xi^{2n}} y(\xi) e^{i\xi t}\,dt$$

является оптимальным.

Перед доказательством этой теоремы сделаем ряд замечаний.

Множество A, на котором задается информация о приближенном преобразовании Фурье, может быть "достаточно большим", но среди оптимальных методов (2.5) могут быть такие, которые не используют всю имеющуюся информацию. Естественно, возникает вопрос об оптимальных методах, использующих меньше информации. Точнее говоря, насколько можно уменьшить множество A, не увеличивая при этом погрешность оптимального восстановления? В терминах функции $a_\theta(\cdot)$ (которую мы рассматриваем как сглаживающий множитель) это означает, что нас интересуют множества, где можно положить $a_\theta(\cdot)=0$.

Нас также интересует вопрос, нельзя ли сглаживающий множитель взять равным единице на более широком множестве $[-\sigma_0,\sigma_0]$, где $\sigma_0\ge\sigma$. В этом случае соответствующий оптимальный метод будет точным на более широком пространстве $\mathcal{B}_{\sigma_0,2}(\mathbb{R})$ и, следовательно, в силу предложения 1 будет оптимальным на более широком классе $W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma_0,2}(\mathbb{R})$.

Положим

$$(\sigma_0,\gamma_0)=\begin{cases}(\sigma,\gamma_A), & (\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_1,\\ \left(\dfrac{\widehat\sigma}{\widehat\gamma}\gamma_A,\gamma_A\right), & (\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_2,\\ (\widehat\sigma,\widehat\gamma), & (\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_3,\\ \left(\sigma,\dfrac{\widehat\gamma}{\widehat\sigma}\sigma\right), & (\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_4.\end{cases}$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $0\le k\le n-1$, A — измеримое подмножество $\mathbb{R}$, $\delta\ge0$, $\gamma_A>0$ и $0\le\sigma\le\gamma_A$. Тогда*

1) *если $k\ge1$ и $\delta>0$, то для всех $\theta(\cdot)\in\Xi(A,\sigma_0)$ методы*

$$\widehat\varphi_\theta(y(\cdot))(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\le\sigma_0}(i\xi)^k y(\xi)e^{i\xi t}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\le|\xi|\le\gamma_0}(i\xi)^k a_\theta(\xi)y(\xi)e^{i\xi t}\,dt,$$

где функции $a_\theta(\cdot)$ определены при помощи равенства (2.6), являются оптимальными в $(D^k,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_A^\delta)$-задаче и точными на подпространстве $\mathcal{B}_{\sigma_0,2}(\mathbb{R})$;

2) *если $k=0$ или $\delta=0$, то метод*

$$\widehat\varphi(y(\cdot))(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\le\gamma_A}(i\xi)^k y(\xi)e^{i\xi t}\,dt$$

является оптимальным в $(D^k,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_A^\delta)$-задаче и точным на подпространстве $\mathcal{B}_{\gamma_A,2}(\mathbb{R})$.

В случае 1) переход от точки (σ,γ_A) к точке (σ_0,γ_0) для каждой из областей Σ_j, $j=1,2,3,4$, схематично изображен на рис. 2.

Отметим вид оптимальных методов в исходной $(D^k,W_2^n(\mathbb{R}),I_A^\delta)$-задаче, точных на подпространствах $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$.

Следствие 2. *Пусть $0\le k\le n-1$, A — измеримое подмножество $\mathbb{R}$, $\delta\ge0$ и $\gamma_A>0$. Тогда*

1) *если $k\ge1$ и $\delta>0$, то для всех $\theta(\cdot)\in\Xi(A,\sigma_0)$ методы*

$$\widehat\varphi_\theta(y(\cdot))(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\le\widetilde\sigma}(i\xi)^k y(\xi)e^{i\xi t}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\widetilde\sigma\le|\xi|\le\widetilde\gamma}(i\xi)^k a_\theta(\xi)y(\xi)e^{i\xi t}\,dt,$$

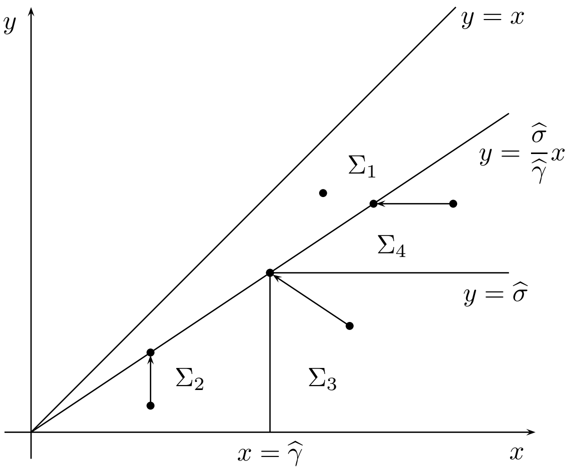

Рис. 2

где $\widetilde{\gamma} = \min\{\gamma_A, \widehat{\gamma}\}$, $\widetilde{\sigma} = (\widehat{\sigma}/\widehat{\gamma})\widetilde{\gamma}$, *а функции* $a_\theta(\cdot)$ *определены равенством* (2.6), *являются оптимальными в* $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_A^\delta)$*-задаче и точными на подпространстве* $\mathcal{B}_{\widetilde{\sigma},2}(\mathbb{R})$;

2) *если* $k = 0$ *или* $\delta = 0$, *то метод*

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi| \le \gamma_A} (i\xi)^k y(\xi) e^{i\xi t}\, dt$$

оптимален в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), I_A^\delta)$*-задаче и точен на подпространстве* $\mathcal{B}_{\gamma_A,2}(\mathbb{R})$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 1. Начнем с оценки величины $E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta)$ снизу. Рассмотрим задачу

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \qquad \|Fx(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \le \delta, \qquad \big\|Fx^{(n)}(\cdot)\big\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)} \le 1, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

где $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$. Покажем, что значение этой задачи, т.е. величина верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях, не больше $E(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta)$.

Предварительно докажем, что $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ принадлежит $W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\|Fx^{(n)}(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)} \le 1$. Действительно, если $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$, то $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$, где $x_1(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ и $x_2(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$. По теореме Планшереля (учитывая, что $Fx_2(\cdot)$ сосредоточено на отрезке Δ_σ) имеем

$$\big\|Fx^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)} = \big\|Fx_1^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} \xi^{2n} |Fx_1(\xi)|^2\, d\xi \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx_1(\xi)|^2\, d\xi =$$
$$= \big\|x_1^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le 1.$$

Обратно, пусть $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ и $\|Fx^{(n)}(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)} \le 1$. Обозначим через $x_2(\cdot)$ функцию из $L_2(\mathbb{R})$ такую, что $Fx_2(\cdot) = \chi_\sigma(\cdot) Fx(\cdot)$, где $\chi_\sigma(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка Δ_σ. Тогда ясно, что $x_2(\cdot) \in \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$. Положим $x_1(\cdot) = x(\cdot) - x_2(\cdot)$. Очевидно, что $x_1(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, и по теореме Планшереля (учитывая, что $Fx_1(\cdot) = 0$ на Δ_σ) будем иметь

$$\big\|x_1^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} \xi^{2n} |Fx_1(\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2\, d\xi = \big\|Fx^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)} \le 1,$$

т.е. $x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$.

Учитывая сделанное замечание, докажем теперь, что $E(D^k, W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta)$ не меньше значения задачи (3.1). Пусть $x_0(\cdot)$ — допустимая функция в (3.1) (т.е. $x_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x_0(\cdot)$ также допустима и для любого $\varphi\colon L_2(A)\to L_2(\mathbb{R})$ ($\varphi(0)(\cdot)$ — значение отображения φ на нулевой функции) мы имеем

$$\begin{aligned}2\|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &\le \big\|x_0^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}+\big\|-x_0^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\\ &\le 2\sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})\\ \|Fx(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)}\le\delta,\ \|Fx^{(n)}(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)}\le 1}}\big\|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}=\\ &=2\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})\\ \|Fx(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)}\le\delta}}\big\|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\\ &\le 2\sup_{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in I_A^\delta x(\cdot)}\big\|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(y(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (3.1), а справа к нижней грани по всем методам φ, получаем требуемое.

Теперь приступим непосредственно к доказательству утверждений теоремы.

1. В случае 1) пусть сначала $\sigma>\gamma_A$. В силу определения γ_A в множестве $[-\sigma,-\gamma_A]\cup[\gamma_A,\sigma]$ найдется такое подмножество D положительной меры, что $D\cap A=\varnothing$. Пусть $c>0$ и функция $x_c(\cdot)$ такова, что $Fx_c(\cdot)=c$ на D и $Fx_c(\cdot)=0$ вне D. Ясно, что $x_c(\cdot)$ допустима в задаче (3.1) и (по теореме Планшереля)

$$\big\|x_c^{(k)}(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{c^2}{2\pi}\int\limits_D\xi^{2k}\,d\xi.$$

Число c можно взять сколь угодно большим, и поэтому равенство (2.4) доказано.

Предположим, что $\sigma=\gamma_A=0$. В этом случае $\operatorname{mes}(A\cap[-\varepsilon,\varepsilon])<2\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Следовательно, мера множества $\Omega_\varepsilon=\{(\mathbb{R}\setminus A)\cap[-\varepsilon,\varepsilon]\}$ положительна. Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi)=\begin{cases}\left(\displaystyle\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2n}\,d\xi\right)^{-1/2}, & \xi\in\Omega_\varepsilon,\\ 0, & \xi\notin\Omega_\varepsilon.\end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (3.1), и

$$\big\|x_\varepsilon^{(k)}(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{\int_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2k}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2n}\,d\xi}=\frac{\int_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2n}\xi^{-2(n-k)}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2n}\,d\xi}\ge\varepsilon^{-2(n-k)},$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение максимизируемого функционала в (3.1) может быть сделано сколь угодно большим.

2. В случае 2) мы сначала покажем, что в каждой из областей Σ_j, $j=1,2,3,4$, выполнена оценка

$$E\big(D^k, W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta\big)\ge\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}. \tag{3.2}$$

Пусть $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_1$. Для каждого натурального m в силу определения γ_A в множестве $[-\gamma(A)-1/m,-\gamma(A)]\cup[\gamma(A),\gamma(A)+1/m]$ найдется такое подмножество D_m положительной меры, что $A\cap D_m=\varnothing$. Пусть m таково, что $1/m<\sigma$. Для каждого такого m рассмотрим функцию $x_m(\cdot)$, для которой

$$Fx_m(\xi)=\begin{cases}\delta\sqrt{2\pi m}, & \sigma-\dfrac{1}{m}\le\xi<\sigma,\\ \sqrt{2\pi}\Big(\gamma_A+\dfrac{1}{m}\Big)^{-n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1/2}, & \xi\in D_m,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (3.1). Действительно, используя теорему Планшереля и определение $x_m(\cdot)$, имеем

$$\|Fx_m(\cdot)\|^2_{\widehat{L}_2(A)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_A|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\delta^2 2\pi m\frac{1}{m}=\delta^2 \tag{3.3}$$

и

$$\big\|Fx_m^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma}\xi^{2n}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{2\pi}2\pi\Big(\gamma_A+\frac{1}{m}\Big)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\int\limits_{D_m}\xi^{2n}\,d\xi\le$$

$$\le\Big(\gamma_A+\frac{1}{m}\Big)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\Big(\gamma_A+\frac{1}{m}\Big)^{2n}\operatorname{mes}D_m=1.$$

Далее,

$$\big\|Fx_m^{(k)}(\cdot)\big\|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=\delta^2 m\int\limits_{\sigma-1/m}^{\sigma}\xi^{2k}\,d\xi+\Big(\gamma_A+\frac{1}{m}\Big)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\int\limits_{D_m}\xi^{2k}\,d\xi\ge$$

$$\ge\delta^2 m\Big(\sigma-\frac{1}{m}\Big)^{2k}\frac{1}{m}+\Big(\gamma_A+\frac{1}{m}\Big)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\gamma_A^{2k}\operatorname{mes}D_m=$$

$$=\delta^2\Big(\sigma-\frac{1}{m}\Big)^{2k}+\Big(\gamma_A+\frac{1}{m}\Big)^{-2n}\gamma_A^{2k}.$$

Выражение справа стремится при $m\to\infty$ к величине $\sigma^{2k}\delta^2+\gamma_A^{-2(n-k)}=\lambda_1\delta^2+\lambda_2$, которая, очевидно, не больше значения задачи (3.1). Но по доказанному это значение не больше $E(D^k,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_A^\delta)$, и тем самым неравенство (3.2) в рассматриваемом случае доказано.

Пусть $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_2$. Положим

$$\xi_0=\Big(\frac{k}{n}\Big)^{1/(2(n-k))}\gamma_A.$$

Заметим, что

$$\sigma\le\frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}\gamma_A=\Big(\frac{n-k}{n}\Big)^{1/(2k)}\xi_0<\xi_0,\qquad \xi_0^{2n}\le\Big(\frac{k}{n}\Big)^{n/(n-k)}\widehat{\gamma}^{\,2n}=\delta^{-2}.$$

Пусть m таково, что $\sigma<\xi_0-1/m$. Для каждого такого m рассмотрим функцию $x_m(\cdot)$, для которой

$$Fx_m(\xi)=\begin{cases}\delta\sqrt{2\pi m}, & \xi_0-\dfrac{1}{m}\le\xi<\xi_0,\\ \dfrac{\sqrt{2\pi(1-\delta^2\xi_0^{2n})}}{(\gamma_A+1/m)^n\sqrt{\operatorname{mes}D_m}}, & \xi\in D_m,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Равенства (3.3) остаются справедливыми. Кроме того,

$$\big\|Fx_m^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma}\xi^{2n}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\delta^2 m\int\limits_{\xi_0-1/m}^{\xi_0}\xi^{2n}\,d\xi+\big(1-\delta^2\xi_0^{2n}\big)\bigg(\gamma_A+\frac{1}{m}\bigg)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\int\limits_{D_m}\xi^{2n}\,d\xi\le$$

$$\le\delta^2\xi_0^{2n}+\big(1-\delta^2\xi_0^{2n}\big)\bigg(\gamma_A+\frac{1}{m}\bigg)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\bigg(\gamma_A+\frac{1}{m}\bigg)^{2n}\operatorname{mes}D_m=1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (3.1).

Далее имеем

$$\big\|Fx_m^{(k)}(\cdot)\big\|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\delta^2 m\int\limits_{\xi_0-1/m}^{\xi_0}\xi^{2k}\,d\xi+\big(1-\delta^2\xi_0^{2n}\big)\bigg(\gamma_A+\frac{1}{m}\bigg)^{-2n}(\operatorname{mes}D_m)^{-1}\int\limits_{D_m}\xi^{2k}\,d\xi\ge$$

$$\ge\delta^2\bigg(\xi_0-\frac{1}{m}\bigg)^{2k}+\big(1-\delta^2\xi_0^{2n}\big)\bigg(\gamma_A+\frac{1}{m}\bigg)^{-2n}\gamma_A^{2k}.$$

Выражение справа стремится при $m\to\infty$ к

$$\delta^2\xi_0^{2k}+\big(1-\delta^2\xi_0^{2n}\big)\gamma_A^{-2(n-k)}=\lambda_1\delta^2+\lambda_2.$$

Отсюда по тем же соображениям, что и выше, следует, что неравенство (3.2) справедливо и в этом случае.

Пусть $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_3$. Положим

$$\xi_1=\delta^{-1/n}.$$

В рассматриваемом случае

$$\gamma_A\ge\widehat{\gamma}>\xi_1,\qquad \sigma\le\widehat{\sigma}<\xi_1.$$

Пусть m таково, что $\sigma<\xi_1-1/m$. Для каждого такого m рассмотрим функцию $x_m(\cdot)$, для которой

$$Fx_m(\xi)=\begin{cases}\delta\sqrt{2\pi m}, & \xi_1-\dfrac{1}{m}\le\xi<\xi_1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Несложно проверить, что функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (3.1). Далее,

$$\big\|Fx_m^{(k)}(\cdot)\big\|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=\delta^2 m\int\limits_{\xi_1-1/m}^{\xi_1}\xi^{2k}\,d\xi\ge\delta^2\bigg(\xi_1-\frac{1}{m}\bigg)^{2k}.$$

Выражение справа стремится при $m\to\infty$ к $\delta^2\xi_1^{2k}=\lambda_1\delta^2+\lambda_2$. Следовательно, в рассматриваемом случае неравенство (3.2) также выполняется.

Наконец, пусть $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_4$. Положим

$$\xi_2=\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-1/(2k)}\sigma.$$

Очевидно, что $\xi_2>\sigma$. Кроме того,

$$\xi_2\le\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-1/(2k)}\frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}\gamma_A=\left(\frac{k}{n}\right)^{1/(2(n-k))}\gamma_A<\gamma_A.$$

Отметим также, что

$$\xi_2^{-2n}\le\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n/k}\widehat{\sigma}^{\,-2n}=\delta^2.$$

Пусть m таково, что $1/m<\sigma<\xi_2-1/m$. Для каждого такого m рассмотрим функцию $x_m(\cdot)$, для которой

$$Fx_m(\xi)=\begin{cases}\sqrt{2\pi m\big(\delta^2-\xi_2^{-2n}\big)}, & \sigma-\dfrac{1}{m}\le\xi<\sigma,\\ \xi_2^{-n}\sqrt{2\pi m}, & \xi_2-\dfrac{1}{m}\le\xi\le\xi_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда

$$\|Fx_m(\cdot)\|^2_{\widehat{L}_2(A)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_A|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=\delta^2-\xi_2^{-2n}+\xi_2^{-2n}=\delta^2,$$

а

$$\big\|Fx_m^{(n)}(\cdot)\big\|^2_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma}\xi^{2n}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=\xi_2^{-2n}m\int\limits_{\xi_2-1/m}^{\xi_2}\xi^{2n}\,d\xi\le1.$$

Итак, функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (3.1). При этом

$$\big\|Fx_m^{(k)}(\cdot)\big\|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}|Fx_m(\xi)|^2\,d\xi=m\big(\delta^2-\xi_2^{-2n}\big)\int\limits_{\sigma-1/m}^{\sigma}\xi^{2k}\,d\xi+\xi_2^{-2n}m\int\limits_{\xi_2-1/m}^{\xi_2}\xi^{2k}\,d\xi\ge$$

$$\ge\big(\delta^2-\xi_2^{-2n}\big)\left(\sigma-\frac{1}{m}\right)^{2k}+\xi_2^{-2n}\left(\xi_2-\frac{1}{m}\right)^{2k}.$$

Выражение справа стремится при $m\to\infty$ к

$$\big(\delta^2-\xi_2^{-2n}\big)\sigma^{2k}+\xi_2^{-2(n-k)}=\lambda_1\delta^2+\lambda_2.$$

Следовательно, и в этом случае неравенство (3.2) выполнено.

Перейдем к оценке сверху величины $E(D^k,W_2^n(\mathbb{R})+\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}),I_A^\delta)$ и построению оптимальных методов восстановления. Такие методы будем искать среди отображений $\widehat{\varphi}_a\colon\widehat{L}_2(A)\to\to L_2(\mathbb{R})$, которые в образах Фурье представляются в виде

$$F\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(\xi)=(i\xi)^k a(\xi)y(\xi),\qquad\xi\in\mathbb{R},$$

где функция $a(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R})$ такова, что $F\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$.

Оценим погрешность такого метода, которая по определению (см. также замечание в начале доказательства) есть значение следующей задачи:

$$\begin{gathered}\big\|x^{(k)}(\cdot)-\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)}\le\delta,\qquad y(\cdot)\in\widehat{L}_2(A),\qquad \big\|Fx^{(n)}(\cdot)\big\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma)}\le 1,\qquad x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}).\end{gathered}\tag{3.4}$$

Переходя к образам Фурье в максимизируемом функционале, получим по теореме Планшереля, что квадрат значения задачи (3.4) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_A\big|(i\xi)^kFx(\xi)-(i\xi)^ka(\xi)y(\xi)\big|^2\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_A|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,\qquad y(\cdot)\in\widehat{L}_2(A),\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le 1.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Заметим, что на допустимых в этой задаче парах $(x(\cdot),y(\cdot))$, где $x(\cdot)\in\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ и $y(\cdot)=Fx(\cdot)$, максимизируемый функционал имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_\sigma}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2|1-a(\xi)|\,d\xi.$$

Отсюда следует, что если функция $a(\cdot)$ не равна почти всюду единице на Δ_σ, то, поскольку $\mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R})$ — линейное пространство, значение задачи (3.5) (и тем самым задачи (3.4)) равно бесконечности, т.е. погрешность метода с таким $a(\cdot)$ бесконечна, и этот случай нам не интересен.

Пусть $a(\cdot)\equiv 1$ на $A\cap\Delta_\sigma$. Оценим сверху максимизируемый функционал в (3.5), представив его для этого в виде суммы трех слагаемых

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{A\cap\Delta_\sigma}\big|(i\xi)^kFx(\xi)-(i\xi)^ky(\xi)\big|^2\,d\xi,\qquad I_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{A\setminus\Delta_\sigma}\big|(i\xi)^kFx(\xi)-(i\xi)^ka(\xi)y(\xi)\big|^2\,d\xi,$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.$$

Покажем, что

$$I_1\le\frac{\lambda_1}{2\pi}\int\limits_{A\cap\Delta_\sigma}|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi\tag{3.6}$$

во всех областях Σ_i, $i=1,2,3,4$.

Действительно, неравенство

$$I_1\le\frac{\sigma^{2k}}{2\pi}\int\limits_{A\cap\Delta_\sigma}|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi$$

очевидно. Так как $\sigma^{2k}=\lambda_1$ в Σ_1 и Σ_4, то для этих областей неравенство (3.6) выполняется. Если $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_2$, то

$$\lambda_1=\left(\frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\widehat{\gamma}}}\gamma_A\right)^{2k}\ge\sigma^{2k},$$

а если $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_3$, то

$$\lambda_1=\widehat{\sigma}^{\,2k}\ge\sigma^{2k},$$

так что оценка (3.6) выполняется для всех областей.

Оценим теперь величину I_2. Используя неравенство Коши–Буняковского, будем иметь

$$\bigl|(i\xi)^kFx(\xi)-(i\xi)^ka(\xi)y(\xi)\bigr|^2=\xi^{2k}\bigl|(1-a(\xi))Fx(\xi)+a(\xi)(Fx(\xi)-y(\xi))\bigr|^2\le$$
$$\le\xi^{2k}\biggl(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2n}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\biggr)\bigl(\lambda_2\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2+\lambda_1|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\bigr).\quad(3.7)$$

Положим

$$S_a=\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in A\setminus\Delta_\sigma}\xi^{2k}\biggl(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2n}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\biggr).\quad(3.8)$$

Тогда, интегрируя (3.7), получаем следующую оценку для величины I_2:

$$I_2\le S_a\Biggl(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{A\setminus\Delta_\sigma}\bigl(\lambda_2\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2+\lambda_1|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\bigr)\,d\xi\Biggr).\quad(3.9)$$

Покажем теперь, что во всех областях Σ_i, $i=1,2,3,4$, для I_3 справедлива оценка

$$I_3\le\frac{\lambda_2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.\quad(3.10)$$

Действительно, так как $|\xi|>\gamma_A$ для п.в. $\xi\in\mathbb{R}\setminus A$ (по определению γ_A), то

$$I_3=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{-2(n-k)}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le\frac{\gamma_A^{-2(n-k)}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.\quad(3.11)$$

Поскольку $\gamma_A^{-2(n-k)}=\lambda_2$ в Σ_1 и Σ_2, в этих областях неравенство (3.10) выполняется. Если $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_3$, то

$$\lambda_2=\widehat{\gamma}^{\,-2(n-k)}\ge\gamma_A^{-2(n-k)},$$

а если $(\gamma_A,\sigma)\in\Sigma_4$, то $\sigma\le\widehat{\sigma}\,\widehat{\gamma}^{\,-1}\gamma_A$ и поэтому

$$\lambda_2=\biggl(\frac{\widehat{\gamma}}{\widehat{\sigma}}\sigma\biggr)^{-2(n-k)}\ge\gamma_A^{-2(n-k)}.$$

Таким образом, оценка (3.10) справедлива во всех областях.

Если предположить, что функция $a(\cdot)$ такова, что $S_a\le 1$, то, складывая неравенства (3.6), (3.9) и (3.10), получаем следующую оценку для максимизируемого функционала в задаче (3.5):

$$\lambda_1\frac{1}{2\pi}\int\limits_A|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi+\lambda_2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{A\setminus\Delta_\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi+\lambda_2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi=$$
$$=\lambda_1\frac{1}{2\pi}\int\limits_A|Fx(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi+\lambda_2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le\lambda_1\delta^2+\lambda_2,$$

которая означает, что

$$e\big(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta, \widehat{\varphi}_a\big) \le \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Сравнивая это с оценкой (3.2), видим, что $\widehat{\varphi}_a$ — оптимальный метод в $(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^\delta)$-задаче.

Покажем теперь, что функции $a(\cdot)$, для которых $S_a \le 1$, существуют. Сначала заметим (выделяя полный квадрат), что условие $S_a \le 1$ равносильно тому, что для п.в. $\xi \in A \setminus \Delta_\sigma$ выполнено неравенство

$$\left|a(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}\right|^2 \le \frac{\xi^{2(n-k)}\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n} - \xi^{2k})}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}.$$

Если функция $\xi \mapsto f(\xi) = \lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n} - \xi^{2k}$ неотрицательна на $A \setminus \Delta_\sigma$, то такие $a(\cdot)$, очевидно, существуют и описываются равенством (2.6). Проверим неотрицательность $f(\cdot)$ на $A \setminus \Delta_\sigma$.

Нетрудно убедиться, что минимальное значение этой функции на всей вещественной оси равно

$$C = \lambda_1 - \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n\lambda_2}\right)^{k/(n-k)}.$$

Покажем, что $C \ge 0$ в каждой из областей Σ_j, $j = 1, 2, 3, 4$.

Пусть $(\gamma_A, \sigma) \in \Sigma_1$. Тогда

$$\sigma^{2k} \ge \frac{\widehat{\sigma}^{\,2k}}{\widehat{\gamma}^{\,2k}}\gamma_A^{2k}.$$

В силу определения λ_1 и λ_2 в данной области это неравенство можно переписать в виде

$$\lambda_1 \ge \frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)}\lambda_2^{-k/(n-k)},$$

откуда следует, что $C \ge 0$. С помощью непосредственной подстановки легко убедиться, что $C = 0$ для областей Σ_j, $j = 2, 3, 4$.

3. В случае 3) аналогично доказательству случая 2) для области Σ_1 получаем оценку снизу

$$E\big(D^k, W_2^n(\mathbb{R}) + \mathcal{B}_{\sigma,2}(\mathbb{R}), I_A^0\big) \ge \gamma_A^{-(n-k)}.$$

Для оценки сверху, используя те же соображения, что и при оценке сверху в случае 2), приходим к следующей задаче:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_A \big|(i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k a(\xi)Fx(\xi)\big|^2\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} \xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi \to \max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma} \xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi \le 1.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Так как $a(\cdot) \equiv 1$ на $A \cap \Delta_\sigma$ (в противном случае, как было показано, погрешность метода равна бесконечности), максимизируемый функционал в (3.12) представляется в виде суммы двух слагаемых

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{A\setminus\Delta_\sigma} \xi^{2k}|Fx(\xi)|^2|1 - a(\xi)|^2\,d\xi, \qquad I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} \xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.$$

Имеем

$$J_1 \le \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in A\setminus\Delta_\sigma}\left(\frac{\gamma_A^{2(n-k)}}{\xi^{2(n-k)}}|1-a(\xi)|^2\right)\frac{\gamma_A^{-2(n-k)}}{2\pi}\int\limits_{A\setminus\Delta_\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi.$$

Для I_3 имеем оценку (3.11). Поэтому если для п.в. $\xi\in A\setminus\Delta_\sigma$ выполняется неравенство

$$\frac{\gamma_A^{2(n-k)}}{\xi^{2(n-k)}}|1-a(\xi)|^2\le 1, \tag{3.13}$$

то максимизируемый функционал в (3.12) оценивается величиной

$$\frac{\gamma_A^{-2(n-k)}}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\ge\sigma}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le\gamma_A^{-2(n-k)}.$$

Остается заметить, что условие (3.13) эквивалентно тому, что

$$a(\xi)=1+\theta(\xi)\left|\frac{\xi}{\gamma_A}\right|^{n-k}.$$

4. В случае 4) доказательство практически дословно повторяет доказательство случая 2) для области Σ_1 (здесь $\lambda_1=1$, а $\lambda_2=\gamma_A^{-2n}$). $\square$

Доказательство следствия 1. Остановимся лишь на случае 1). Условие $S_a\le 1$, полученное при доказательстве теоремы 1, означает выполнение почти всюду неравенства

$$\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2n}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\le\xi^{-2k}. \tag{3.14}$$

Отсюда следует, что для тех $\xi\in A\setminus\Delta_\sigma$, для которых $|\xi|\ge\lambda_0=\lambda_2^{-1/(2(n-k))}$, можно положить $a(\xi)=0$.

Из того же неравенства (3.14) сразу вытекает, что на множестве $\sigma<|\xi|<\sigma_0$, где $\sigma_0= =\lambda_1^{1/(2k)}$, можно положить сглаживающий множитель $a(\cdot)$ равным единице. $\square$

Следствие 2 вытекает из следствия 1 при $\sigma=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988.
2. *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // УМН. 1950. Т. 5, №2. С. 165–177.
3. *Kolmogorov A.N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Functionenklasse // Ann. Math. Ser. 2. 1936. V. 37. P. 107–110. См. также: *Колмогоров А.Н.* О наилучшем приближении функций заданного функционального класса // Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 186–189.
4. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1965.
5. *Осипенко К.Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12, №4. С. 465–476.
6. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory: Proc. Int. Symp., Freudenstadt, 1976 / Ed. by C.A. Micchelli, T.J. Rivlin. New York: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
7. *Melkman A.A., Micchelli C.A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16. P. 87–105.
8. *Traub J.F., Woźniakowski H.* A general theory of optimal algorithms. New York: Acad. Press, 1980.
9. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Lectures on optimal recovery // Numerical analysis: Proc. SERC Summer School, Lancaster, 1984. Berlin: Springer, 1985. P. 21–93. (Lect. Notes Math.; V. 1129).

10. *Арестов В.В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 3–20.
11. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50, №6. С. 85–93.
12. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб. 1997. Т. 188, №12. С. 73–106.
13. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, №3. С. 51–64.
14. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, №3. С. 76–79.
15. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа и восстановление производных по неточной информации // ДАН. 2011. Т. 438, №3. С. 300–302.