УДК 517.98

К. Ю. Осипенко

Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках

В работе рассматриваются задачи восстановления операторов по неточно заданной информации в неевклидовых метриках. Доказан ряд общих теорем, которые применяются к задачам восстановления функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье. В некоторых случаях найдено семейство оптимальных методов, из которого выбираются методы, использующие минимальный объем исходной информации.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, линейные операторы, преобразование Фурье.

DOI: 10.4213/sm8330

Введение

Общая задача оптимального восстановления линейного оператора Λ, действующего из линейного пространства X в линейное нормированное пространство Z, на множестве $W\subset X$ по неточно заданным значениям другого линейного оператора $I\colon X\to Y$, где Y – линейное нормированное пространство, может быть сформулирована как задача о нахождении при фиксированном $\delta\geqslant 0$, характеризующем погрешность задания исходной информации, величины

$$E(\Lambda,W,I,\delta)=\inf_{m\colon Y\to Z}\sup_{\substack{x\in W,\ y\in Y\\ \|Ix-y\|_Y\leqslant\delta}}\|\Lambda x-m(y)\|_Z, \tag{0.1}$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, а также отображения (метода), на котором достигается нижняя грань в (0.1), называемого *оптимальным методом восстановления*.

В простейшем случае, когда Λ – линейный функционал, Y – конечномерное пространство и $\delta=0$, эта задача была поставлена С. А. Смоляком [1]. Им же было доказано, что для выпуклого и центрально-симметричного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный метод. Этот результат и сама постановка задачи, опубликованные лишь в диссертации, не были широко доступны. Внимание к ним привлек Н. С. Бахвалов [2], который инициировал дальнейшие исследования в этом направлении, в результате чего были получены некоторые оптимальные методы восстановления для конкретных задач, а также обобщена исходная постановка задачи на комплексный случай и случай задания исходной информации с погрешностью (см. [3]–[5]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-12447, 14-01-00456).

© К. Ю. Осипенко, 2014

В дальнейшем обобщениям исходной постановки задачи было посвящено много работ (см. [6]–[14], а также библиографию в этих работах). Окончательный, в определенном смысле, результат для линейных функционалов, а именно необходимые и достаточные условия существования оптимального линейного метода, был получен в работе [8].

Довольно часто рассматривается ситуация, когда само множество W, на котором восстанавливается оператор Λ, также задается некоторым линейным оператором

$$W = \{x \in X : \|I_1 x\|_{Y_1} \leqslant \delta_1\},$$

где $I_1\colon x \to Y_1$, а Y_1 – линейное нормированное пространство. Общий результат, касающийся существования линейного оптимального метода для случая, когда Y, Y_1 и Z – гильбертовы пространства, доказан в работе [14], и там же получены первые конкретные результаты о восстановлении линейных операторов. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах [15]–[17], в которых использовались подходы, основанные на общих принципах теории экстремума. Однако во всех этих работах существенно использовалась евклидовость рассматриваемых пространств.

Задача оптимального восстановления линейных операторов тесно связана с приближением этих операторов операторами с ограниченными нормами (задача С. Б. Стечкина). Имеется определенная связь между погрешностями приближения в этих задачах, а также между соответствующими экстремальными операторами, что часто позволяет решить одновременно эти задачи (см. [18], [19]). В свою очередь обе эти задачи в частных случаях приводят к точным неравенствам для производных – этой теме посвящено большое число работ.

Ряд точных решений задачи Стечкина и точных констант в неравенствах для производных в операторном случае (имеется в виду метрика, отличная от равномерной, в которой оценивается оператор или производная, так как в противном случае задача сводится к функциональному случаю) получен и в неевклидовых метриках (удобная таблица с перечислением точных решений приведена в [18]). Тем не менее явных выражений для оптимальных методов восстановления операторов в неевклидовом случае получено немного. Один из таких примеров приведен в [6; теорема 12] (далее мы подробнее разберем этот пример и как следствие общих результатов получим для него целое семейство оптимальных методов). Другой пример построения оптимального метода в неевклидовом случае был получен в работе [20].

Целью настоящей работы является получение ряда общих результатов о восстановлении линейных операторов в неевклидовом случае.

§ 1. Общая постановка

Пусть T – некоторое непустое множество, Σ – σ-алгебра подмножеств T и μ – неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(T,\Sigma,\mu)$ (или короче $L_p(T,\mu)$) обозначается совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\,\cdot\,)\|_{L_p(T,\mu)} = \left(\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|x(\,\cdot\,)\|_{L_\infty(T,\mu)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T} |x(t)| < \infty, \qquad p = \infty.$$

Положим

$$\mathscr{W} = \left\{x(\,\cdot\,) \in L_p(T,\mu) : \|\varphi(\,\cdot\,)x(\,\cdot\,)\|_{L_r(T,\mu)} < \infty\right\},$$
$$W = \left\{x(\,\cdot\,) \in \mathscr{W} : \|\varphi(\,\cdot\,)x(\,\cdot\,)\|_{L_r(T,\mu)} \leqslant 1\right\},$$

где $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, а $\varphi(\,\cdot\,)$ – некоторая функция на T.

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda\colon \mathscr{W} \to L_q(T,\mu)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, задаваемого равенством $\Lambda x(\,\cdot\,) = \psi(\,\cdot\,)x(\,\cdot\,)$, где $\psi(\,\cdot\,)$ – некоторая функция на T, на классе W по функции $x(\,\cdot\,) \in W$, известной с погрешностью на некотором подмножестве T. Точнее, будем считать, что для каждой функции $x(\,\cdot\,) \in W$ известна функция $y(\,\cdot\,) \in L_p(T_0,\mu)$, $T_0 \subset T$, такая, что $\|x(\,\cdot\,) - y(\,\cdot\,)\|_{L_p(T_0,\mu)} \leqslant \delta$, $\delta \geqslant 0$. Требуется по функции $y(\,\cdot\,)$ восстановить $\Lambda x(\,\cdot\,)$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon L_p(T_0,\mu) \to L_q(T,\mu)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(p,q,r,m) = \sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in W,\ y(\,\cdot\,)\in L_p(T_0,\mu)\\ \|x(\,\cdot\,)-y(\,\cdot\,)\|_{L_p(T_0,\mu)}\leqslant\delta}} \|\Lambda x(\,\cdot\,) - m(y)(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)}.$$

Величина

$$E(p,q,r) = \inf_{m\colon L_p(T_0,\mu)\to L_q(T,\mu)} e(p,q,r,m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Легко убедиться, что имеет место неравенство

$$E(p,q,r) \geqslant \sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in W\\ \|x(\,\cdot\,)\|_{L_p(T_0,\mu)}\leqslant\delta}} \|\Lambda x(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)}. \tag{1.1}$$

Действительно, пусть $x(\,\cdot\,) \in W$, $\|x(\,\cdot\,)\|_{L_p(T_0,\mu)} \leqslant \delta$, а $m\colon L_p(T_0,\mu) \to L_q(T,\mu)$ – произвольный метод восстановления. Тогда в силу того, что $x(\,\cdot\,) \in W$ и $-x(\,\cdot\,) \in W$, имеем

$$\begin{aligned}2\|\Lambda x(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)} &\leqslant \|\Lambda x(\,\cdot\,) - m(0)(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)} + \|-\Lambda x(\,\cdot\,) - m(0)(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)}\\ &\leqslant 2e(p,q,r,m).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого метода m

$$e(p,q,r,m) \geqslant \sup_{\substack{x(\,\cdot\,)\in W\\ \|x(\,\cdot\,)\|_{L_p(T_0,\mu)}\leqslant\delta}} \|\Lambda x(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)}.$$

Переходя к нижней грани в левой части по всем методам, получаем нужное неравенство.

Экстремальная задача, возникающая в правой части неравенства (1.1) и называемая *двойственной*, может быть записана в виде

$$\|\psi(\,\cdot\,)x(\,\cdot\,)\|_{L_q(T,\mu)} \to \max, \qquad \|x(\,\cdot\,)\|_{L_p(T_0,\mu)} \leqslant \delta, \quad \|\varphi(\,\cdot\,)x(\,\cdot\,)\|_{L_r(T,\mu)} \leqslant 1. \tag{1.2}$$

При $T_0 = T \subset \mathbb{R}^n$ и $q = 1$ (ограничение $q = 1$ несущественно, так как замена $y(t) = |x(t)|^q$ сводит случай $q \leqslant p$, $q \leqslant r$ к этому) задача (1.2) в связи с задачей Стечкина исследовалась в [21]. В нашей работе основное внимание уделяется построению оптимальных методов восстановления оператора Λ, при этом исследование задачи (1.2) ведется с помощью функции Лагранжа, что позволяет в ряде случаев (когда любые два из параметров p, q и r совпадают) получить явные выражения как для самого значения задачи (1.2), так и для оптимального метода восстановления в терминах множителей Лагранжа. В § 6 рассмотрены случаи, когда эти множители явно вычисляются.

Общая схема построения оптимальных методов восстановления в настоящей работе такова: сначала решается двойственная задача (1.2) или оценивается ее значение, затем строятся методы или семейство методов, погрешность которых оценивается тем же значением. Тем самым во всех рассматриваемых ниже случаях величина $E(p,q,r)$ совпадает со значением задачи (1.2), т.е. в неравенстве (1.1) имеет место равенство. Оптимальный метод на множестве T_0 мы каждый раз ищем в виде $\alpha(\,\cdot\,)\psi(\,\cdot\,)y(\,\cdot\,)$, где функция $\alpha(\,\cdot\,)$ играет роль некоторого фильтра.

Приведем один простой результат (близкий к достаточным условиям в теореме Куна–Таккера), используемый для решения экстремальной задачи (1.2).

Пусть $f_j\colon A\to\mathbb{R}$, $j=0,1,\dots,n$, – функции, определенные на некотором множестве A. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x)\to\max,\qquad f_j(x)\leqslant 0,\qquad j=1,\dots,n,\quad x\in A, \tag{1.3}$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathscr{L}(x,\lambda)=-f_0(x)+\sum_{j=1}^n\lambda_jf_j(x),\qquad \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Лемма 1. *Пусть существуют $\widehat\lambda_j\geqslant 0$, $j=1,\dots,n$, и допустимый в задаче (1.3) элемент $\widehat x\in A$, для которых*

(a) $\min\limits_{x\in A}\mathscr{L}(x,\widehat\lambda)=\mathscr{L}(\widehat x,\widehat\lambda)$, $\quad\widehat\lambda=(\widehat\lambda_1,\dots,\widehat\lambda_n)$,

(b) $\sum\limits_{j=1}^n\widehat\lambda_jf_j(\widehat x)=0$.

Тогда $\widehat x$ – экстремальный элемент в задаче (1.3).

Доказательство. Для любого допустимого в задаче (1.3) элемента $x\in A$ имеем

$$-f_0(x)\geqslant\mathscr{L}(x,\widehat\lambda)\geqslant\mathscr{L}(\widehat x,\widehat\lambda)=-f_0(\widehat x).$$

§ 2. Случай $r=q$

Рассмотрим случай, когда $1\leqslant q<p<\infty$, $r=q$.

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant q<p<\infty$ и $\delta>0$. Предположим, что $\widehat\lambda_2>0$ удовлетворяет условию*

$$\begin{aligned}\biggl(\int_{T_0}\bigl(|\psi(t)|^q-\widehat\lambda_2|\varphi(t)|^q\bigr)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\biggr)^{\frac1p}\\=\delta\biggl(\int_{T_0}|\varphi(t)|^q\bigl(|\psi(t)|^q-\widehat\lambda_2|\varphi(t)|^q\bigr)_+^{\frac{q}{p-q}}\,d\mu(t)\biggr)^{\frac1q}>0\end{aligned}\tag{2.1}$$

(от функций $\varphi(\,\cdot\,)$ и $\psi(\,\cdot\,)$ будем требовать, чтобы интегралы в (2.1) существовали) и $|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q \leqslant 0$ для почти всех $t \notin T_0$. Тогда

$$E(p,q,q) = \left(\frac{p}{q}\,\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2\right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{q}{p}\,\delta^{q-p}\left(\int_{T_0}\big(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\big)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases}\left(1-\widehat{\lambda}_2\dfrac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+\psi(t)y(t), & t\in T_0,\\ 0, & t\notin T_0,\end{cases} \tag{2.2}$$

является оптимальным.

Доказательство. 1. *Оценка снизу.* Экстремальная задача (1.2) (для удобства записи мы возводим максимизируемую величину в q-ю степень) имеет вид

$$\begin{gathered}\int_T |\psi(t)x(t)|^q\,d\mu(t) \to \max,\\ \int_{T_0}|x(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant\delta^p,\qquad \int_T|\varphi(t)x(t)|^q\,d\mu(t)\leqslant 1.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Напишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathscr{L}\big(x(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2\big) = \int_T L\big(t,x(t),\lambda_1,\lambda_2\big)\,d\mu(t),$$

где

$$L(t,x,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases}-|\psi(t)x|^q + \lambda_1|x|^p + \lambda_2|\varphi(t)x|^q, & t\in T_0,\\ -|\psi(t)x|^q + \lambda_2|\varphi(t)x|^q, & t\notin T_0.\end{cases}$$

Определим $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ так, чтобы минимизировать $L(t,x(t),\lambda_1,\lambda_2)$ при каждом t. Нетрудно убедиться, что

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases}\left(\dfrac{q}{p\widehat{\lambda}_1}\big(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\big)_+\right)^{\frac{1}{p-q}}, & t\in T_0,\\ 0, & t\notin T_0.\end{cases}$$

Тем самым

$$\mathscr{L}\big(x(t),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\big) \geqslant \mathscr{L}\big(\widehat{x}(t),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\big).$$

Из определения $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ вытекают равенства

$$\int_{T_0}|\widehat{x}(t)|^p\,d\mu(t) = \delta^p,\qquad \int_T|\varphi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t) = 1. \tag{2.4}$$

В силу леммы 1 $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ является решением задачи (2.3). Тем самым значение этой задачи

$$\int_T|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t).$$

Интегрируя по множеству T равенство

$$-q|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q + p\widehat{\lambda}_1|\widehat{x}(t)|^p + q\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)\widehat{x}(t)|^q = 0,$$

которое очевидным образом следует из определения $\widehat{x}(\,\cdot\,)$, получаем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t) = \frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2.$$

Из (1.1) вытекает, что

$$E(p,q,q) \geqslant \left(\frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. *Оценка сверху.* Положим

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(1 - \lambda_2\dfrac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+, & t \in T_0,\\ 0, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Для оценки погрешности метода (1.2) надо найти значение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered} \int_{T_0} |\psi(t)|^q\,\bigl|x(t) - \alpha(t)y(t)\bigr|^q\,d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q\,d\mu(t) \to \max,\\ \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p\,d\mu(t) \leqslant \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^q\,d\mu(t) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Положив $z(\,\cdot\,) = x(\,\cdot\,) - y(\,\cdot\,)$, перепишем задачу (2.5) в виде

$$\begin{gathered} \int_{T_0} |\psi(t)|^q\,\bigl|(1-\alpha(t))x(t) + \alpha(t)z(t)\bigr|^q\,d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q\,d\mu(t) \to \max,\\ \int_{T_0} |z(t)|^p\,d\mu(t) \leqslant \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)|^q\,|x(t)|^q\,d\mu(t) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Значение этой задачи очевидно совпадает со значением задачи

$$\begin{gathered} \int_T |\psi(t)|^q\bigl((1-\alpha(t))v(t) + \alpha(t)u(t)\bigr)^q\,d\mu(t) \to \max,\\ \int_{T_0} u^p(t)\,d\mu(t) \leqslant \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)|^q v^q(t)\,d\mu(t) \leqslant 1,\\ u(t), v(t) \geqslant 0 \quad \text{для почти всех} \ \ t \in T. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathscr{L}_1\bigl(u(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,), \lambda_1, \lambda_2\bigr) = \int_T L_1\bigl(t, u(t), v(t), \lambda_1, \lambda_2\bigr)\,d\mu(t),$$

где

$$L_1(t,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} -|\psi(t)|^q\bigl((1-\alpha(t))v + \alpha(t)u\bigr)^q & \\ \qquad +\lambda_1 u^p + \lambda_2|\varphi(t)|^q v^q, & t \in T_0,\\ -|\psi(t)|^q v^q + \lambda_2|\varphi(t)|^q v^q, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Положим $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$. Тогда при $\alpha(t) > 0$

$$\frac{\partial L_1}{\partial v} = q\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\big(v^{q-1} - ((1-\alpha(t))v + \alpha(t)u)^{q-1}\big).$$

Следовательно, при $\alpha(t) > 0$ и любом фиксированном $u > 0$ функция $L_1(t, u, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ при $v \in (0, +\infty)$ достигает минимума для $v = u$. Если же $\alpha(t) = 0$, то $L_1(t, u, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geqslant 0$. Таким образом, имеем для всех $u(t), v(t) \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1\big(u(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\big) &\geqslant \int_{T_0} L_1\big(u(\,\cdot\,), u(\,\cdot\,), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\big)\,d\mu(t) \\ &= \int_{T_0} L\big(t, u(\,\cdot\,), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\big)\,d\mu(t) \geqslant \int_{T_0} L\big(t, \widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\big)\,d\mu(t) \\ &= \mathscr{L}_1\big(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\big).\end{aligned}$$

Учитывая (2.4), получаем, что функции $\widehat{u}(\,\cdot\,) = \widehat{v}(\,\cdot\,) = \widehat{x}(\,\cdot\,)$ являются решением задачи (2.7). Следовательно,

$$e^q(p, q, q, \widehat{m}) = \int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t) = \frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2 \leqslant E^q(p, q, q).$$

Отсюда вытекает оптимальность метода $\widehat{m}$ и выражение для погрешности оптимального восстановления.

§ 3. Случай $q = p$

Рассмотрим случай, когда $1 \leqslant p < r < \infty$, $q = p$ и $T_0 = T$.

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant p < r < \infty$ и $\delta > 0$. Предположим, что $\widehat{\lambda}_1 > 0$ удовлетворяет условию*

$$\begin{aligned}&\bigg(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\big(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1\big)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(t)\bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad = \delta\bigg(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\big(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1\big)_+^{\frac{r}{r-p}}\,d\mu(t)\bigg)^{\frac{1}{r}} > 0 \qquad (3.1)\end{aligned}$$

(от функций $\varphi(\,\cdot\,)$ и $\psi(\,\cdot\,)$ будем требовать, чтобы интегралы в (3.1) существовали). Тогда

$$E(p, p, r) = \bigg(\widehat{\lambda}_1\delta^p + \frac{r}{p}\widehat{\lambda}_2\bigg)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{p}{r}\,\delta^{p-r}\bigg(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\big(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1\big)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(t)\bigg)^{\frac{r-p}{p}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \alpha(t)\psi(t)y(t), \qquad (3.2)$$

где

$$\alpha(t) = 1 - \bigg(1 - \frac{\widehat{\lambda}_1}{|\psi(t)|^p}\bigg)_+,$$

является оптимальным.

Доказательство. Схема доказательства во многом аналогична доказательству предыдущей теоремы.

1. *Оценка снизу.* Задача (1.2) (здесь для удобства записи мы возводим максимизируемую величину в p-ю степень) имеет вид

$$\begin{gathered}\int_T |\psi(t)x(t)|^p\,d\mu(t)\to\max,\\ \int_T |x(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant\delta^p,\qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r\,d\mu(t)\leqslant 1.\end{gathered}\tag{3.3}$$

Напишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathscr{L}\big(x(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2\big)=\int_T L\big(t,x(t),\lambda_1,\lambda_2\big)\,d\mu(t),$$

где

$$L(t,x,\lambda_1,\lambda_2)=-|\psi(t)x|^p+\lambda_1|x|^p+\lambda_2|\varphi(t)x|^r.$$

Выберем снова $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ так, чтобы минимизировать $L(t,x(t),\lambda_1,\lambda_2)$ при каждом t. Имеем

$$\widehat{x}(t)=\left(\frac{p(|\psi(t)|^p-\widehat{\lambda}_1)_+}{r\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^r}\right)^{\frac{1}{r-p}}.$$

Тем самым

$$\mathscr{L}\big(x(t),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\big)\geqslant\mathscr{L}\big(\widehat{x}(t),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\big).$$

В силу определения $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ справедливы равенства

$$\int_T |\widehat{x}(t)|^p\,d\mu(t)=\delta^p,\qquad \int_T |\varphi(t)\widehat{x}(t)|^r\,d\mu(t)=1.\tag{3.4}$$

Из леммы 1 получаем, что $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ является решением задачи (3.3). Тем самым значение этой задачи

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^p\,d\mu(t).$$

Интегрируя по множеству T равенство

$$-p|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q+p\widehat{\lambda}_1|\widehat{x}(t)|^p+r\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)\widehat{x}(t)|^r=0,$$

которое очевидным образом следует из определения $\widehat{x}(\,\cdot\,)$, получаем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^p\,d\mu(t)=\widehat{\lambda}_1\delta^p+\frac{r}{p}\,\widehat{\lambda}_2.$$

Из (1.1) вытекает, что

$$E(p,p,r)\geqslant\left(\widehat{\lambda}_1\delta^p+\frac{r}{p}\widehat{\lambda}_2\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. *Оценка сверху.* Для оценки погрешности метода (3.2) надо найти значение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered}\int_T |\psi(t)|^p\,\big|x(t)-\alpha(t)y(t)\big|^p\,d\mu(t)\to\max,\\ \int_T |x(t)-y(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant\delta^p,\qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r\,d\mu(t)\leqslant 1.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Положив $z(\,\cdot\,)=x(\,\cdot\,)-y(\,\cdot\,)$, перепишем задачу (3.5) в виде

$$\begin{gathered}\int_T |\psi(t)|^p\,\bigl|(1-\alpha(t))x(t)+\alpha(t)z(t)\bigr|^p\,d\mu(t)\to\max,\\ \int_T |z(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant\delta^p,\qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r\,d\mu(t)\leqslant 1.\end{gathered}\tag{3.6}$$

Значение этой задачи очевидно совпадает со значением задачи

$$\begin{gathered}\int_T |\psi(t)|^p\bigl((1-\alpha(t))v(t)+\alpha(t)u(t)\bigr)^p\,d\mu(t)\to\max,\\ \int_T u^p(t)\,d\mu(t)\leqslant\delta^p,\qquad \int_T |\varphi(t)|^r v^r(t)\,d\mu(t)\leqslant 1,\\ u(t),v(t)\geqslant 0\quad\text{для почти всех}\ \ t\in T.\end{gathered}\tag{3.7}$$

Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathscr{L}_1\bigl(u(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2\bigr)=\int_T L_1\bigl(t,u(t),v(t),\lambda_1,\lambda_2\bigr)\,d\mu(t),$$

где

$$L_1(t,u,v,\lambda_1,\lambda_2)=-|\psi(t)|^p\bigl((1-\alpha(t))v+\alpha(t)u\bigr)^p+\lambda_1u^p+\lambda_2|\varphi(t)|^rv^r.$$

Положим $\lambda_1=\widehat\lambda_1$, $\lambda_2=\widehat\lambda_2$. Тогда при $|\psi(t)|^p>\widehat\lambda_1$

$$\frac{\partial L_1}{\partial u}=p\widehat\lambda_1\bigl(u^{p-1}-\bigl((1-\alpha(t))v+\alpha(t)u\bigr)^{p-1}\bigr).$$

Следовательно, при $|\psi(t)|^p>\widehat\lambda_1$ и любом фиксированном $v>0$ функция $L_1(u,v,\widehat\lambda_1,\widehat\lambda_2)$ при $u\in(0,+\infty)$ достигает минимума для $u=v$. Если же $|\psi(t)|^p\leqslant\widehat\lambda_1$, то $\alpha(t)=1$ и $L_1(u,v)\geqslant 0$. Положим $T_1=\{t\in T: |\psi(t)|^p>\widehat\lambda_1\}$. Тогда для всех $u(t),v(t)\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1\bigl(u(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,),\widehat\lambda_1,\widehat\lambda_2\bigr)&\geqslant\int_{T_1} L_1\bigl(t,u(\,\cdot\,),u(\,\cdot\,),\widehat\lambda_1,\widehat\lambda_2\bigr)\,d\mu(t)\\ &=\int_{T_1} L\bigl(t,u(\,\cdot\,),\widehat\lambda_1,\widehat\lambda_2\bigr)\,d\mu(t)\geqslant\int_{T_1} L\bigl(t,\widehat x(\,\cdot\,),\widehat\lambda_1,\widehat\lambda_2\bigr)\,d\mu(t)\\ &=\mathscr{L}_1\bigl(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat x(\,\cdot\,),\widehat\lambda_1,\widehat\lambda_2\bigr).\end{aligned}$$

Учитывая (3.4), получаем, что функции $\widehat u(\,\cdot\,)=\widehat v(\,\cdot\,)=\widehat x(\,\cdot\,)$ являются решением задачи (3.7). Следовательно,

$$e^p(p,p,r,\widehat m)=\int_T|\psi(t)\widehat x(t)|^q\,d\mu(t)=\widehat\lambda_1\delta^p+\frac{r}{p}\,\widehat\lambda_2\leqslant E^p(p,p,r).$$

Отсюда вытекают оптимальность метода $\widehat m$ и выражение для погрешности оптимального восстановления.

§ 4. Случай $r=p$

Рассмотрим случай, когда $1\leqslant q<p=r<\infty$. Обозначим через $\chi_0(\,\cdot\,)$ характеристическую функцию множества T_0:

$$\chi_0(t)=\begin{cases}1, & t\in T_0,\\ 0, & t\notin T_0.\end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant q < p < \infty$ *и* $\delta > 0$. *Предположим, что* $\widehat{\lambda}_2 > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{1+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p}\right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) = \delta^p \int_T |\varphi(t)|^p \left(\frac{|\psi(t)|^q}{\chi_0(t)+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p}\right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) > 0 \tag{4.1}$$

(*от функций* $\varphi(\,\cdot\,)$ *и* $\psi(\,\cdot\,)$ *будем требовать, чтобы интегралы в* (4.1) *существовали*). *Тогда*

$$E(p,q,p) = (\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\lambda_1 = \delta^{q-p}\left(\int_{T_0}\left(\frac{|\psi(t)|^q}{1+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p}\right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi(t)}{1+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p}y(t), & t \in T_0,\\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. 1. *Оценка снизу.* Задача (1.2) (как и в предыдущих случаях, мы рассматриваем эквивалентную ей задачу) имеет вид

$$\begin{gathered} \int_T |\psi(t)x(t)|^q\,d\mu(t) \to \max,\\ \int_{T_0} |x(t)|^p\,d\mu(t) \leqslant \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^p\,d\mu(t) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \widehat{\lambda}_1^{-\frac{1}{p-q}}\left(\frac{|\psi(t)|^q}{\chi_0(t)+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

В силу определения $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ нетрудно убедиться, что для $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ справедливы равенства

$$\int_{T_0} |\widehat{x}(t)|^p\,d\mu(t) = \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)\widehat{x}(t)|^p\,d\mu(t) = 1.$$

Следовательно, $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ является допустимой функцией в задаче (4.2). Тем самым значение этой задачи не менее чем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t).$$

Интегрируя по множеству T равенство

$$|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q = \widehat{\lambda}_1|\widehat{x}(t)|^p\chi_0(t) + \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)\widehat{x}(t)|^p,$$

которое очевидным образом следует из определения $\widehat{x}(\,\cdot\,)$, получаем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t) = \widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2.$$

Из (1.1) вытекает, что

$$E(p,q,p) \geqslant (\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2)^{\frac{1}{q}}.$$

2. *Оценка сверху.* Будем искать оптимальный метод восстановления в виде

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \alpha(t)\psi(t)y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Для оценки погрешности такого метода надо найти значение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered} \int_{T_0} |\psi(t)|^q \left|x(t) - \alpha(t)y(t)\right|^q d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q\, d\mu(t) \to \max, \\ \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{4.3}$$

По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{gathered} \left|(1-\alpha(t))x(t) + \alpha(t)(x(t)-y(t))\right|^q \leqslant h(t)\bigl(\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)x(t)|^p + |x(t)-y(t)|^p\bigr)^{\frac{q}{p}}, \\ h(t) = \left(\frac{|1-\alpha(t)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_2^{p'/p}|\varphi(t)|^{p'}} + |\alpha(t)|^{p'}\right)^{\frac{q}{p'}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Следовательно, значение задачи (4.3) оценивается величиной

$$\int_T f(t)g(t)\, d\mu(t), \tag{4.5}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} |\psi(t)|^q h(t), & t \in T_0, \\ \dfrac{|\psi(t)|^q}{\widehat{\lambda}_2^{\frac{q}{p}}|\varphi(t)|^q}, & t \in T\setminus T_0, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \bigl(\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)x(t)|^p + |z(t)|^p\bigr)^{\frac{q}{p}}, & t \in T_0, \\ \widehat{\lambda}_2^{\frac{q}{p}}|\varphi(t)x(t)|^q, & t \in T\setminus T_0. \end{cases}$$

Положим

$$\alpha(t) = \frac{1}{1+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p}.$$

Тогда

$$f(t) = \frac{|\psi(t)|^q}{(\chi_0(t) + \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p)^{\frac{q}{p}}}.$$

Применяя к (4.5) неравенство Гёльдера, получаем оценку

$$\left(\int_T |f(t)|^{s'}\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_T |g(t)|^s\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{s}},$$

где $1/s+1/s'=1$. Взяв $s=p/q$, будем иметь для этой оценки

$$\begin{aligned}&\left(\int_T |f(t)|^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}}\left(\int_T |g(t)|^{\frac{p}{q}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{q}{p}}\\ &\qquad\leqslant (\delta^p+\widehat{\lambda}_2)^{\frac{q}{p}}\left(\int_T \frac{|\psi(t)|^{\frac{qp}{p-q}}}{(\chi_0(t)+\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^p)^{\frac{q}{p-q}}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}}\\ &\qquad=(\widehat{\lambda}_1\delta^p+\widehat{\lambda}_1\lambda_2)^{\frac{q}{p}}\left(\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}}=\widehat{\lambda}_1\delta^p+\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$e^q(p,q,p,\widehat{m})\leqslant \widehat{\lambda}_1\delta^p+\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2\leqslant E^q(p,q,p).$$

§ 5. Случай $r=q=p$

Рассмотрим случай, когда $1\leqslant p<\infty$, $r=q=p$.

Теорема 4. *Пусть $1\leqslant p<\infty$. Предположим, что существуют такие $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$, что значение экстремальной задачи*

$$\begin{gathered}\int_T |\psi(t)x(t)|^p\,d\mu(t)\to\max,\\ \int_{T_0}|x(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant\delta^p,\qquad \int_T|\varphi(t)x(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant 1,\end{gathered}\tag{5.1}$$

не меньше чем $\lambda_1\delta^p+\lambda_2$ и при почти всех $t\in T$ выполнено неравенство

$$-|\psi(t)|^p+\lambda_1\chi_0(t)+\lambda_2|\varphi(t)|^p\geqslant 0,\tag{5.2}$$

где $\chi_0(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция множества T_0. Тогда

$$E(p,p,p)=(\lambda_1\delta^p+\lambda_2)^{\frac{1}{p}},$$

а все методы

$$\widehat{m}(y)(t)=\begin{cases}\alpha(t)\psi(t)y(t), & t\in T_0,\\ 0, & t\notin T_0,\end{cases}\tag{5.3}$$

являются оптимальными, где $\alpha(\,\cdot\,)$ для почти всех $t\in T_0$ при $\delta>0$, $\lambda_1,\lambda_2>0$ удовлетворяют условию

$$\begin{cases}|\psi(t)|^{p'}\left(\dfrac{|1-\alpha(t)|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p}|\varphi(t)|^{p'}}+\dfrac{|\alpha(t)|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p}}\right)\leqslant 1, & 1<p<\infty,\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1,\\ \dfrac{|\psi(t)(1-\alpha(t))|}{\lambda_2|\varphi(t)|}\leqslant 1,\quad \dfrac{|\psi(t)\alpha(t)|}{\lambda_1}\leqslant 1, & p=1\end{cases}\tag{5.4}$$

(в частности, метод (5.3) с $\alpha(t)=\widehat{\alpha}(t)=\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2|\varphi(t)|^p)^{-1}$), а при $1\leqslant p<\infty$, $\delta=0$, – условию

$$|\psi(t)|\,|1-\alpha(t)|\leqslant\lambda_2^{\frac{1}{p}}|\varphi(t)|.\tag{5.5}$$

При $\lambda_1=0$ метод $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,)=0$ оптимальный, а при $\lambda_2=0$ метод (5.3) с $\alpha(\,\cdot\,)=1$ оптимальный.

Доказательство. Из условия теоремы и неравенства (1.1) вытекает, что

$$E(p,p,p) \geqslant (\lambda_1\delta^p + \lambda_2)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\delta > 0$ и $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Для оценки методов вида (5.3) рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\int_{T_0} |\psi(t)|^p \left|x(t) - \alpha(t)y(t)\right|^p d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p\, d\mu(t) \to \max,\\ \int_{T_0} |x(t)-y(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant \delta^p, \qquad \int_T |\varphi(t)x(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant 1.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Аналогично (4.4) имеем

$$\bigl|(1-\alpha(t))x(t) + \alpha(t)(x(t)-y(t))\bigr|^p \leqslant h_p(t)\bigl(\lambda_2|\varphi(t)x(t)|^p + \lambda_1|x(t)-y(t)|^p\bigr),$$

где

$$h_p(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{|1-\alpha(t)|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p}|\varphi(t)|^{p'}} + \dfrac{|\alpha(t)|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p}}\right)^{p/p'}, & 1 < p < \infty,\\ \max\left\{\dfrac{|1-\alpha(t)|}{\lambda_2|\varphi(t)|}, \dfrac{|\alpha(t)|}{\lambda_1}\right\}, & p = 1.\end{cases}$$

Следовательно, полагая

$$S(\alpha(\,\cdot\,)) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T_0} |\psi(t)|^p h_p(t)$$

и учитывая, что по условию теоремы $S(\alpha(\,\cdot\,)) \leqslant 1$, а также то, что при $t \in T\setminus T_0$ неравенство (5.2) имеет вид $|\psi(t)|^p \leqslant \lambda_2|\varphi(t)|^p$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{T_0} |\psi(t)|^p \left|x(t) - \alpha(t)y(t)\right|^p d\mu(t) &+ \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p\, d\mu(t)\\ \leqslant S(\alpha(\,\cdot\,)) &\int_{T_0} \bigl(\lambda_2|\varphi(t)x(t)|^p + \lambda_1|x(t)-y(t)|^p\bigr)\, d\mu(t)\\ &+ \lambda_2 \int_{T\setminus T_0} |\varphi(t)x(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant \lambda_1\delta^p + \lambda_2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$e(p,p,p,m) \leqslant (\lambda_1\delta^p + \lambda_2)^{\frac{1}{p}} \leqslant E(p,p,p).$$

Остается показать, что множество функций $\alpha(\,\cdot\,)$, удовлетворяющих условиям (5.4), непусто. Положим

$$\widehat{\alpha}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2|\varphi(t)|^p}. \tag{5.7}$$

Тогда

$$S(\widehat{\alpha})(t) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^p}{\lambda_1 + \lambda_2|\varphi(t)|^p}\right).$$

Из неравенства (5.2) вытекает, что $S(\widehat{\alpha})(t) \leqslant 1$.

При $\delta = 0$ следует оценить значение экстремальной задачи

$$\int_{T_0} |\psi(t)|^p \left|x(t) - \alpha(t)x(t)\right|^p d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p \, d\mu(t) \to \max,$$
$$\int_T |\varphi(t)x(t)|^p \, d\mu(t) \leqslant 1.$$

В силу условия (5.5) имеем

$$|\psi(t)|^p \left|x(t) - \alpha(t)x(t)\right|^p \leqslant \lambda_2 |\varphi(t)x(t)|^p.$$

Учитывая, что $|\psi(t)|^p \leqslant \lambda_2 |\varphi(t)|^p$ при $t \in T \setminus T_0$, получаем

$$\int_{T_0} |\psi(t)|^p \left|x(t) - \alpha(t)x(t)\right|^p d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p \, d\mu(t) \leqslant \lambda_2.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $|\psi(t)|^p \leqslant \lambda_2 |\varphi(t)|^p$ для почти всех $t \in T$, и для метода $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = 0$ имеем

$$\int_T |\psi(t)x(t)|^p \, d\mu(t) \leqslant \lambda_2.$$

Если $\lambda_2 = 0$, то $|\psi(t)|^p \leqslant \lambda_1$ для почти всех $t \in T_0$ и $\psi(t) = 0$ для почти всех $t \in T \setminus T_0$. Поэтому

$$\int_{T_0} \left|\psi(t)x(t) - \psi(t)y(t)\right|^p d\mu(t) + \int_{T\setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p \, d\mu(t)$$
$$\leqslant \lambda_1 \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p \, d\mu(t) \leqslant \lambda_1 \delta^p.$$

Действие получаемых оптимальных методов можно представить как действие восстанавливаемого оператора, умноженное на некоторую функцию, которую можно трактовать как фильтр или сглаживающий множитель. Например, для (5.7) метод имеет вид

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \psi(t)}{\lambda_1 + \lambda_2 |\varphi(t)|^p} y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

и в качестве такого фильтра выступает функция

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 |\varphi(t)|^p}.$$

Нас будут интересовать множества, для которых можно обойтись без фильтрации, т.е. положить этот множитель равным 1. И, кроме того, мы будем интересоваться, насколько можно уменьшить исходное множество, на котором задается неточная информация о функции, не увеличивая погрешность оптимального восстановления. Иными словами, мы хотим найти множества, на которых можно положить $\alpha(t) = \psi(t)$ и $\alpha(t) = 0$.

Положим

$$T^0 = \bigl\{t \in T_0 : |\psi(t)| > \lambda_2^{\frac{1}{p}} |\varphi(t)|\bigr\}, \qquad T^1 = \bigl\{t \in T^0 : |\psi(t)| \leqslant \lambda_1^{\frac{1}{p}}\bigr\}.$$

Следствие 1. *При* $\delta > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *методы*

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \psi(t)y(t), & t \in T^1, \\ \alpha(t)\psi(t)y(t), & t \in T^0 \setminus T^1, \\ 0, & t \in T \setminus T^0, \end{cases}$$

где $\alpha(\,\cdot\,)$ *удовлетворяют условиям* (5.4), *являются оптимальными. При* $\delta = 0$ *методы*

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \psi(t)y(t), & t \in T^0, \\ 0, & t \in T \setminus T^0, \end{cases}$$

являются оптимальными.

Из следствия 1 вытекает, что существуют оптимальные методы, которые используют неточно заданную информацию только на множестве T^0. Иными словами, информация на множестве $T \setminus T^0$ оказывается лишней в том смысле, что не уменьшает погрешность оптимального восстановления.

§ 6. Оптимальное восстановление функций по неточно заданному преобразованию Фурье

Пусть S – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, S' – соответствующее пространство обобщенных функций, $F\colon S' \to S'$ – преобразование Фурье. Обозначим через $\mathscr{F}_p$ пространство обобщенных функций из S', для которых

$$\|x(\,\cdot\,)\|_p = \begin{cases} \biggl(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |Fx(\xi)|^p \, d\xi\biggr)^{\frac{1}{p}} < \infty, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}} |Fx(\xi)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\mathscr{F}_p^n = \bigl\{x(\,\cdot\,) \in S' : \|x^{(n)}(\,\cdot\,)\|_p < \infty\bigr\}, \qquad F_p^n = \bigl\{x \in \mathscr{F}_p^n : \|x^{(n)}(\,\cdot\,)\|_p \leqslant 1\bigr\}.$$

Допустим, что для функции $x(\,\cdot\,) \in F_r^n \cap \mathscr{F}_p$ известно ее преобразование Фурье на интервале $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, $0 < \sigma \leqslant \infty$, с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_p(\Delta_\sigma)$, т.е. известна функция $y(\,\cdot\,) \in L_p(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\,\cdot\,) - y(\,\cdot\,)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leqslant \delta$. Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы для $0 \leqslant k < n$ восстановить k-ю производную функции в метрике $\mathscr{F}_q$? Под методами восстановления здесь понимаются всевозможные отображения $m\colon L_p(\Delta_\sigma) \to \mathscr{F}_q$. Погрешностью метода называется величина

$$e_{pqr}(m) = \sup_{\substack{x(\,\cdot\,) \in F_r^n \cap \mathscr{F}_p,\ y(\,\cdot\,) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\,\cdot\,) - y(\,\cdot\,)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leqslant \delta}} \|x^{(k)}(\,\cdot\,) - m(y)(\,\cdot\,)\|_q.$$

Погрешность оптимального восстановления определяется следующим образом:

$$E_{pqr} = \inf_{m\colon L_p(\Delta_\sigma) \to \mathscr{F}_q} e_{pqr}(m),$$

а метод, на котором эта нижняя грань достигается, называется оптимальным.

Легко понять, что эта задача является частным случаем общей задачи, рассмотренной выше, в которой $T=\mathbb{R}$, $T_0=\Delta_\sigma$, $\psi(\xi)=(i\xi)^k$, $\varphi(\xi)=(i\xi)^n$. Применим полученные общие результаты к рассматриваемой задаче.

Начнем со случая $1\leqslant r=q<p<\infty$. Положим

$$B=B\biggl(\frac{k+1/q-1/p}{(n-k)(1-q/p)},\frac{2-q/p}{1-q/p}\biggr),$$

где $B(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – B-функция Эйлера, и

$$\widehat{\sigma}_\delta=\biggl(\biggl(\frac{q}{2B}\biggr)^{\frac1q-\frac1p}\frac{(n-k)^{\frac2q-\frac1p}}{\delta(k+1/q-1/p)^{\frac1q}}\biggr)^{\frac{1}{n+1/q-1/p}}.$$

Теорема 5. *Пусть $k,n\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant k<n$, $1\leqslant q<p<\infty$, $\delta>0$ и $\sigma\geqslant\widehat{\sigma}_\delta$. Тогда*

$$E_{pqq}=\biggl(\frac{n+1/q-1/p}{k+1/q-1/p}\biggr)^{\frac1q}\widehat{\sigma}_\delta^{-(n-k)},$$

а метод $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,)=F^{-1}Y_y(\,\cdot\,)$, где

$$Y_y(\xi)=\begin{cases}(i\xi)^k\biggl(1-\biggl(\dfrac{|\xi|}{\widehat{\sigma}_\delta}\biggr)^{q(n-k)}\biggr)y(\xi), & |\xi|<\widehat{\sigma}_\delta,\\ 0, & |\xi|\geqslant\widehat{\sigma}_\delta,\end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (2.1), в котором положим $\widehat{\lambda}_2=s^{-q(n-k)}$, где параметр $s\leqslant\sigma$ определим позже. Имеем

$$\biggl(\int_{-s}^{s}\biggl(|\xi|^{kq}-\frac{|\xi|^{nq}}{s^{q(n-k)}}\biggr)^{\frac{p}{p-q}}d\xi\biggr)^{\frac1p}=\delta\biggl(\int_{-s}^{s}|\xi|^{nq}\biggl(|\xi|^{kq}-\frac{|\xi|^{nq}}{s^{q(n-k)}}\biggr)^{\frac{q}{p-q}}d\xi\biggr)^{\frac1q}.$$

Сделав замену $\xi=su$, получим уравнение

$$\begin{aligned}2^{\frac1p}s^{\frac1p}\biggl(\int_0^1 u^{\frac{kpq}{p-q}}(1-u^{q(n-k)})^{\frac{p}{p-q}}\,du\biggr)^{\frac1p}\\ =2^{\frac1q}s^{\frac1q+n}\biggl(\int_0^1 u^{nq+\frac{kq^2}{p-q}}(1-u^{q(n-k)})^{\frac{q}{p-q}}\,du\biggr)^{\frac1q}.\end{aligned}$$

Чтобы перейти к B-функциям, сделаем замену $t=u^{(n-k)q}$. Получаем

$$\begin{aligned}\biggl(\frac{2s}{q(n-k)}\biggr)^{\frac1p}B^{\frac1p}\biggl(\frac{k+1/q-1/p}{(n-k)(1-q/p)},\frac{2-q/p}{1-q/p}\biggr)\\ =\delta s^n\biggl(\frac{2s}{q(n-k)}\biggr)^{\frac1q}B^{\frac1q}\biggl(\frac{k+1/q-1/p}{(n-k)(1-q/p)}+1,\frac{2-q/p}{1-q/p}-1\biggr).\end{aligned}$$

Пользуясь известным равенством

$$B(a+1,b-1)=\frac{a}{b-1}B(a,b),$$

находим, что $s=\widehat{\sigma}_\delta$. Далее применяем теорему 1.

Отметим, что случай, когда $\sigma < \widehat{\sigma}_\delta$, требует более тонкого исследования. При $q = 2$ оно было проведено в работе [20], в которой также содержится утверждение доказанной теоремы для $q = 2$.

В силу замечания, сделанного в конце § 5, из теоремы 5 вытекает, что для всех функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\mathbb{R}} |x(\xi)|^p \, d\xi \leqslant \delta^p, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{qn} |x(\xi)|^q \, d\xi \leqslant 1,$$

выполнено точное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kq} \, |x(\xi)|^q \, d\xi \leqslant C\delta^{\frac{(n-k)q}{n+1/q-1/p}},$$

где $0 \leqslant k < n$, $1 \leqslant q < p < \infty$, а

$$C = \frac{n+1/q-1/p}{k+1/q-1/p}\left(\left(\frac{2B}{q}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{(k+1/q-1/p)^{\frac{1}{q}}}{(n-k)^{\frac{2}{q}-\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{k+1/q-1/p}{n+1/q-1/p}}.$$

Отсюда несложно получить точное неравенство

$$\|\xi^k x(\xi)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant C\|x(\xi)\|_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{n-k}{n+1/q-1/p}} \, \|\xi^n x(\xi)\|_{L_q(\mathbb{R})}^{\frac{(n-k)q}{n+1/q-1/p}}. \tag{6.1}$$

Рассматривая четные функции $x(\,\cdot\,)$, приходим к неравенству

$$\|\xi^k x(\xi)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leqslant C_1\|x(\xi)\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^{\frac{n-k}{n+1/q-1/p}} \, \|\xi^n x(\xi)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)}^{\frac{(n-k)q}{n+1/q-1/p}}, \tag{6.2}$$

где

$$C_1 = \frac{n+1/q-1/p}{k+1/q-1/p}\left(\left(\frac{B}{q}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{(k+1/q-1/p)^{\frac{1}{q}}}{(n-k)^{\frac{2}{q}-\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{k+1/q-1/p}{n+1/q-1/p}},$$

которое является частным случаем неравенства Карлсона–Беллмана–Левина [22] (обобщение этого неравенства на многомерный случай можно найти в работе [23]).

Пусть теперь $1 \leqslant p = q < r < \infty$, $1 \leqslant k < n$ и $\sigma = +\infty$. Положим

$$\widehat{\sigma} s_\delta = \left(\left(\frac{2B_1}{p}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \frac{(n-k-1/p+1/r)^{\frac{1}{p}}}{\delta k^{\frac{2}{p}-\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{1}{n-1/p+1/r}},$$

где

$$B_1 = B\left(\frac{n-k-1/p+1/r}{k(1-p/r)}, \frac{2-p/r}{1-p/r}\right).$$

Теорема 6. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k < n$, $1 \leqslant p < r < \infty$, $\sigma = +\infty$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E_{ppr} = \left(\frac{n-1/p+1/r}{n-k-1/p+1/r}\right)^{\frac{1}{p}} \widehat{s}_\delta^k \delta,$$

а метод $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1}Y_y(\,\cdot\,)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| < \widehat{s}_\delta, \\ (i\xi)^k \left(\dfrac{\widehat{\sigma} s_\delta}{|\xi|}\right)^{kp} y(\xi), & |\xi| \geqslant \widehat{s}_\delta, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.1), в котором положим $\widehat{\lambda}_1 = s^{kp}$, где параметр s определим позже. Имеем

$$\left(\int_{|\xi|\geqslant s}|\xi|^{\frac{npr}{p-r}}(|\xi|^{kp}-s^{kp})^{\frac{p}{r-p}}\,d\xi\right)^{\frac{1}{p}}=\delta\left(\int_{|\xi|\geqslant s}|\xi|^{\frac{npr}{p-r}}(|\xi|^{kp}-s^{kp})^{\frac{r}{r-p}}\,d\xi\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Сделав замену $\xi = s/u$, получим уравнение

$$2^{\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 u^{\frac{pr(n-k)}{r-p}+kp-2}(1-u^{kp})^{\frac{p}{r-p}}\,du\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=2^{\frac{1}{r}}s^{\frac{1}{r}+n}\left(\int_0^1 u^{\frac{pr(n-k)}{r-p}-2}(1-u^{kp})^{\frac{r}{r-p}}\,du\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Чтобы перейти к B-функциям, сделаем замену $t = u^{kp}$. Получаем

$$\left(\frac{2s}{kp}\right)^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{p}}\left(\frac{n-k-1/p+1/r}{k(1-p/r)}+1,\frac{2-p/r}{1-p/r}-1\right)$$
$$=\delta s^n\left(\frac{2s}{kp}\right)^{\frac{1}{r}}B^{\frac{1}{r}}\left(\frac{n-k-1/p+1/r}{k(1-p/r)},\frac{2-p/r}{1-p/r}\right).$$

Отсюда $s = \widehat{s}_\delta$. Остается воспользоваться теоремой 2.

Рассмотрим случай, когда $1 \leqslant q < p = r < \infty$.

Теорема 7. *Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k < n$, $1 \leqslant q < p < \infty$, $\sigma < +\infty$, $\delta > 0$ и $\widehat{a}$ удовлетворяет равенству*

$$\int_0^\sigma(1-\delta^p\xi^{np})\left(\frac{\xi^{kq}}{\widehat{a}+\xi^{np}}\right)^{\frac{p}{p-q}}d\xi=\frac{\delta^p(1/q-1/p)}{\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}}(n-k-1/q+1/p)}.$$

Тогда

$$E_{pqp}=\left(2\int_0^\sigma\frac{\xi^{\frac{kpq}{p-q}}}{(1+\widehat{a}\xi^{np})^{\frac{p}{p-q}}}\,dt\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}(\widehat{a}+\delta^{-p})^{\frac{1}{q}}\delta,$$

а метод $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1}Y_y(\,\cdot\,)$, где

$$Y_y(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\widehat{a}(i\xi)^k}{\widehat{a}+|\xi|^{np}}y(\xi), & |\xi|<\sigma,\\ 0, & |\xi|\geqslant\sigma,\end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Уравнение (4.1) для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\int_0^\sigma\left(\frac{\xi^{kq}}{1+\widehat{\lambda}_2\xi^{np}}\right)^{\frac{p}{p-q}}d\xi=\delta^p\int_0^\sigma\xi^{np}\left(\frac{\xi^{kq}}{1+\widehat{\lambda}_2\xi^{np}}\right)^{\frac{p}{p-q}}d\xi$$
$$+\frac{\delta^p(1/q-1/p)}{\widehat{\lambda}_2^{\frac{p}{p-q}}\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}}(n-k-1/q+1/p)}.$$

Положив $a = \widehat{\lambda}_2^{-1}$, получим уравнение $f(a) = 0$, где

$$f(a) = \int_0^\sigma (1 - \delta^p \xi^{np}) \left(\frac{\xi^{kq}}{a + \xi^{np}} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\xi - \frac{\delta^p (1/q - 1/p)}{\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}} (n - k - 1/q + 1/p)}.$$

Нетрудно убедиться, что $f(a) \to +\infty$ при $a \to 0$ и

$$f(a) \to -\frac{\delta^p (1/q - 1/p)}{\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}} (n - k - 1/q + 1/p)}$$

при $a \to +\infty$. В силу непрерывности функции $f(\,\cdot\,)$ существует значение $\widehat{a} > 0$, для которого $f(\widehat{a}) = 0$. Далее применяется теорема 3.

При $\sigma = +\infty$ можно явно решить уравнение (4.1). В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k < n$, $1 \leqslant q < p < \infty$, $\delta > 0$ и $\sigma = +\infty$. Тогда*

$$E_{pqp} = \left(\frac{n}{n - K} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2B_2}{np} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\frac{n - K}{K} \right)^{\frac{K}{np}} \delta^{1 - \frac{K}{n}},$$

где

$$K = k + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \qquad B_2 = B\left(\frac{\frac{K}{n} q/p}{1 - q/p}, \frac{1 - \frac{K}{n} q/p}{1 - q/p} \right),$$

а метод $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1} Y_y(\,\cdot\,)$, где

$$Y_y(\xi) = \frac{(i\xi)^k}{1 + \frac{K}{n-K} \delta^p |\xi|^{np}} y(\xi),$$

является оптимальным.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $1 < p = q = r < \infty$. В случае, когда $\sigma = +\infty$, а $\delta = 0$, задача восстановления становится тривиальной, так как известна вся информация о функции. Поэтому этот случай в дальнейшем исключен из рассмотрения. Положим при $k \geqslant 1$

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{k} \right)^{\frac{1}{p(n-k)}} \delta^{-\frac{1}{n}}, & \delta > 0, \\ +\infty, & \delta = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \dfrac{n-k}{n} \delta^{-\frac{pk}{n}}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \sigma^{kp} \left(\dfrac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \end{cases} \qquad \lambda_2 = \begin{cases} \dfrac{k}{n} \delta^{\frac{p(n-k)}{n}}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \sigma^{-p(n-k)}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

При $k = 0$ положим $\lambda_1 = 1$,

$$\lambda_2 = \begin{cases} \sigma^{-pn}, & \sigma < +\infty, \\ 0, & \sigma = +\infty. \end{cases}$$

Теорема 9. *Пусть* $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k < n$ *и* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$E_{ppp} = (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{\frac{1}{p}}.$$

При этом методы $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1} Y_y(\,\cdot\,)$ *являются оптимальными, где*

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} \alpha(\xi)(i\xi)^k y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geqslant \sigma, \end{cases}$$

$\alpha(\,\cdot\,)$ *почти для всех* $\xi \in \Delta_\sigma$ *при* $\delta > 0$, $\lambda_2 > 0$ *удовлетворяют условию*

$$\begin{cases} \dfrac{|1-\alpha(\xi)|^{p'}}{\lambda_2^{\frac{p'}{p}} |\xi|^{p'(n-k)}} + \dfrac{|\xi^k \alpha(\xi)|^{p'}}{\lambda_1^{\frac{p'}{p}}} \leqslant 1, \quad 1 < p < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \\ \dfrac{|1-\alpha(\xi)|}{\lambda_2 |\xi|^{n-k}} \leqslant 1, \quad \dfrac{|\xi^k \alpha(\xi)|}{\lambda_1} \leqslant 1, \quad p = 1, \end{cases} \tag{6.3}$$

а при $1 \leqslant p < \infty$, $\delta = 0$, – *условию*

$$|1 - \alpha(\xi)| \leqslant \lambda_2^{\frac{1}{p}} |\xi|^{n-k}.$$

При $\lambda_2 = 0$ *метод* $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1} y(\,\cdot\,)$ *оптимальный.*

Доказательство. Экстремальная задача (5.1) имеет в этом случае вид

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kp} \, |Fx(\xi)|^p \, d\xi \to \max, \\ \int_{\Delta_\sigma} |Fx(\xi)|^p \, d\xi \leqslant \delta^p, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np} \, |Fx(\xi)|^p \, d\xi \leqslant 1. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Зададим в плоскости (u, v) кривую $v = u^{k/n}$ в параметрическом виде

$$\begin{cases} u = |\xi|^{np}, \\ v = |\xi|^{kp}, \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{6.5}$$

Пусть $k \geqslant 1$, $\delta > 0$. Касательная к этой кривой в точке $u = \delta^{-p}$ имеет вид $v = \lambda_1 + \lambda_2 u$, где

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n} \delta^{-\frac{pk}{n}}, \qquad \lambda_2 = \frac{k}{n} \delta^{\frac{p(n-k)}{n}}.$$

В силу вогнутости кривой (6.5) для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$-|\xi|^{kp} + \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{np} \geqslant 0.$$

Если $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$, то для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$-|\xi|^{kp} + \lambda_1 \chi_\sigma(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{np} \geqslant 0, \tag{6.6}$$

где $\chi_\sigma(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция Δ_σ.

Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функцию $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\varepsilon^{1/p}}, & \xi \in (\delta^{-\frac{1}{n}} - \varepsilon, \delta^{-\frac{1}{n}}), \\ 0, & \xi \notin (\delta^{-\frac{1}{n}} - \varepsilon, \delta^{-\frac{1}{n}}). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\Delta_\sigma} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi = \delta^p,$$

а

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np}\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon}\int_{\delta^{-\frac{1}{n}}-\varepsilon}^{\delta^{-\frac{1}{n}}} \xi^{np}\,d\xi \leqslant 1.$$

Таким образом, функция $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ является допустимой в (6.4) и, следовательно,

$$E_{ppp}^p \geqslant \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kp}\,|Fx_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon}\int_{\delta^{-\frac{1}{n}}-\varepsilon}^{\delta^{-\frac{1}{n}}} \xi^{kp}\,d\xi.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$E_{ppp} \geqslant \delta^{1-\frac{k}{n}} = (\lambda_1\delta^p + \lambda_2)^{\frac{1}{p}}.$$

Если $k \geqslant 1$, $\delta \geqslant 0$ и $\sigma < \widehat{\sigma}$, проведем касательную к кривой (6.5) в точке

$$u = \sigma^{np}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}.$$

Она будет иметь вид $v = \lambda_1 + \lambda_2 u$, где

$$\lambda_1 = \sigma^{kp}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\frac{n-k}{n}, \qquad \lambda_2 = \sigma^{-p(n-k)}.$$

В силу вогнутости кривой (6.5) и того, что $\lambda_2|\xi|^{pn} > |\xi|^{pk}$ при $|\xi| > \sigma$, неравенство (6.6) (с новыми λ_1 и λ_2) выполнено. Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ функцию $x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\,\cdot\,)$ такую, что

$$Fx_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\varepsilon_1^{1/p}}, & \xi \in (\xi_0, \xi_0+\varepsilon_1), \\ c^{\frac{1}{p}}, & \xi \in (\sigma, \sigma+\varepsilon_2), \\ 0, & \xi \notin (\xi_0, \xi_0+\varepsilon_1) \cup (\sigma, \sigma+\varepsilon_2), \end{cases}$$

где

$$\xi_0 = \sigma\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p(n-k)}},$$

а число c определим позже. Тогда

$$\int_{\Delta_\sigma} |Fx_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi)|^p\,d\xi = \delta^p,$$

а

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np}\,|Fx_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi)|^p\,d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon_1}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon_1} \xi^{np}\,d\xi + c\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon_2} \xi^{np}\,d\xi.$$

При $\varepsilon_1 \to 0$ и $\delta > 0$

$$\frac{\delta^p}{\varepsilon_1}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon_1} \xi^{np}\,d\xi \to \delta^p\xi_0^{np} = \delta^p\sigma^{np}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} < \delta^p\widehat{\sigma}^{np}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} = 1.$$

Поэтому при $\delta \geqslant 0$, положив

$$c = \frac{1 - \dfrac{\delta^p}{\varepsilon_1} \displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon_1} \xi^{np}\, d\xi}{\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon_2} \xi^{np}\, d\xi},$$

получим, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np}\, |Fx_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi)|^p\, d\xi = 1.$$

Тем самым функция $x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\,\cdot\,)$ является допустимой в (6.4) и, следовательно,

$$\begin{aligned} E_{ppp}^p &\geqslant \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kp}\, |Fx_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi)|^p\, d\xi \\ &= \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon_1} \xi^{kp}\, d\xi + \left(1 - \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon_1} \xi^{np}\, d\xi\right) \frac{\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon_2} \xi^{kp}\, d\xi}{\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon_2} \xi^{np}\, d\xi}. \end{aligned}$$

Устремляя ε_1 и ε_2 к нулю, получаем

$$E_{ppp} \geqslant (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $k = 0$ и $\sigma < +\infty$. Тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sigma^{-pn}$. Легко проверить, что неравенство (6.6) выполняется и в этом случае. Рассмотрев ту же функцию $x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ (с $\xi_0 = 0$), несложно показать, что она допустима в задаче (6.4). Поэтому

$$E_{ppp}^p \geqslant \int_{\mathbb{R}} |Fx_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi)|^p\, d\xi = \delta^p + \left(1 - \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1} \xi^{np}\, d\xi\right) \frac{\varepsilon_2}{\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon_2} \xi^{np}\, d\xi}.$$

Устремляя ε_1 и ε_2 к нулю, получаем

$$E_{ppp} \geqslant (\delta^p + \sigma^{-pn})^{\frac{1}{p}} = (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{\frac{1}{p}}.$$

Остается рассмотреть случай, когда $k = 0$ и $\sigma = +\infty$. Тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Неравенство (6.6) очевидным образом выполнено. Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функцию $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\varepsilon^{1/p}}, & \xi \in (0, \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p\, d\xi = \delta^p,$$

а

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np}\, |Fx_\varepsilon(\xi)|^p\, d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \xi^{np}\, d\xi \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Тем самым для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ допустима в задаче (6.4). Поэтому

$$E_{ppp}^p \geqslant \int_{\mathbb{R}} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p\, d\xi = \delta^p = \lambda_1 \delta^p + \lambda_2.$$

Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 4.

Из теорем 6, 8 и 9 можно получить точные неравенства типа Карлсона, подобные (6.1) и (6.2).

Аналогично следствию 1 получаем

Следствие 2. *При $k \geqslant 1$, $\delta > 0$ методы $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1}Y_y(\,\cdot\,)$ являются оптимальными, где*

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| \leqslant \theta\sigma_0, \\ \alpha(\xi)(i\xi)^k y(\xi), & \theta\sigma_0 < |\xi| < \sigma_0, \\ 0, & |\xi| \geqslant \sigma_0, \end{cases}$$

$$\theta = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{1}{kp}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p(n-k)}}, \qquad \sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\},$$

а $\alpha(\,\cdot\,)$ удовлетворяют условиям (6.3). При $\delta = 0$ или $k = 0$ метод $\widehat{m}(y)(\,\cdot\,) = F^{-1}Y_y(\,\cdot\,)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| \leqslant \sigma, \\ 0, & |\xi| \geqslant \sigma, \end{cases}$$

оптимальный.

При $p = 2$ соответствующая задача о восстановлении производной на соболевском классе $W_2^n = F_2^n$ исследовалась в работе [16] (см. также [24]).

§ 7. Дискретный случай

Если $T = \mathbb{N}$ и $\mu(\{j\}) = 1$, то соответствующее пространство $L_p(T,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, совпадает с пространством l_p, представляющим совокупность векторов $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Положим

$$\mathscr{W}_p = \left\{x \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j x_j|^p < \infty\right\}, \qquad W_p = \left\{x \in \mathscr{W}_p : \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j x_j|^p \leqslant 1\right\}.$$

Пусть задан оператор $\Lambda\colon \mathscr{W}_p \to l_p$,

$$\Lambda x = (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \dots),$$

где последовательность $|\mu_j|/|\nu_j|$ для достаточно больших j ограничена (из этого условия вытекает, что $\Lambda x \in l_p$ для всех $x \in \mathscr{W}_p$).

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора Λ на множестве W_p по неточно заданным координатам $x_1, \dots, x_N$. Точнее, предполагается, что для любого $x \in W_p$ известен вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$ такой, что $\|I^N x - y\|_{l_p^N} \leqslant \delta$, где $I^N x = (x_1, \dots, x_N)$, а

$$\|x\|_{l_p^N} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

По вектору y надо восстановить наиболее точно значение Λx.

Под методами восстановления здесь понимаются всевозможные отображения $m\colon l_p^N \to l_p$. В соответствии с общей постановкой задачи погрешностью метода называется величина

$$e_p(m) = \sup_{\substack{x\in W_p,\ y\in l_p^N\\ \|I^N x-y\|_{l_p^N}\leqslant\delta}} \|\Lambda x - m(y)\|_{l_p}.$$

Погрешность оптимального восстановления определяется следующим образом:

$$E_p = \inf_{m\colon l_p^N\to l_p} e_p(m),$$

а метод, на котором эта нижняя грань достигается, называется оптимальным.

Будем предполагать, что $\nu_j \neq 0$ для всех $j \geqslant N+1$. Положим

$$\lambda = \sup_{j\geqslant N+1} \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p},$$

$$M = \operatorname{co}\bigl\{(0,0)\cup\{(|\nu_j|^p,|\mu_j|^p)\}_{j\in\mathbb{N}}\bigr\} + \{(t,t\lambda)\mid t\geqslant 0\},$$

где $\operatorname{co}\Omega$ – выпуклая оболочка множества Ω. Определим функцию $\theta(\,\cdot\,)$ на $[0,\infty)$ по правилу $\theta(t)=\max\{x\mid (t,x)\in M\}$. Ясно, что $\theta(\,\cdot\,)$ – вогнутая ломаная (см. рис. 1).

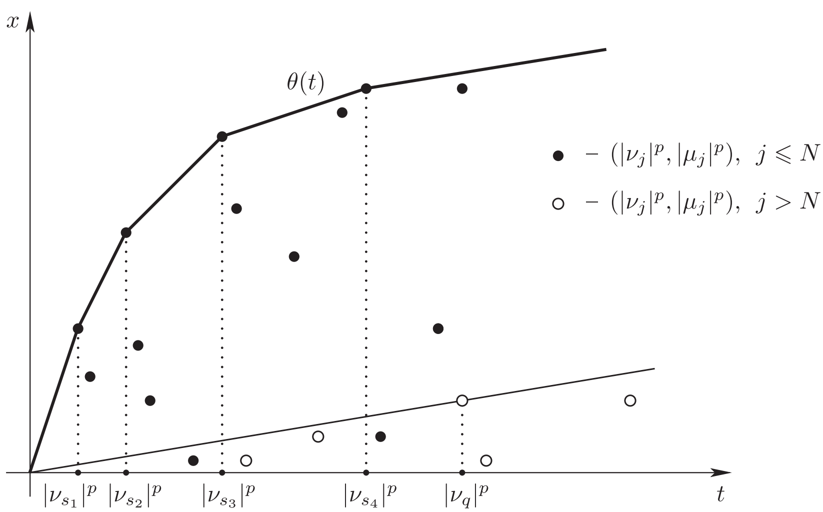

Рис. 1

Теорема 10. *При всех* $\delta > 0$

$$E_p = \delta\theta^{\frac{1}{p}}(\delta^{-p}).$$

Пусть $\delta > 0$ *и* δ^{-p} *принадлежит тому промежутку на* $\mathbb{R}_+$, *где* $\theta(\,\cdot\,)$ *задается уравнением* $\theta(t)=\lambda_1+\lambda_2 t$. *Если* $\lambda_1,\lambda_2>0$, *то для всех* α_j, $1\leqslant j\leqslant N$, *удовлетворяющих условию*

$$\begin{cases} |\mu_j|^{p'}\left(\dfrac{|1-\alpha_j|^{p'}}{|\nu_j|^{p'}\lambda_2^{\frac{p'}{p}}}+\dfrac{|\alpha_j|^{p'}}{\lambda_1^{\frac{p'}{p}}}\right)\leqslant 1, & 1<p<\infty,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1,\\ \dfrac{|\mu_j(1-\alpha_j)|}{|\nu_j|\lambda_2}\leqslant 1, \quad \dfrac{|\mu_j\alpha_j|}{\lambda_1}\leqslant 1, & p=1, \end{cases} \tag{7.1}$$

методы

$$\widehat{m}(y) = (\alpha_1\mu_1 y_1, \dots, \alpha_N\mu_N y_N, 0, \dots) \tag{7.2}$$

являются оптимальными. Если $\lambda_1 = 0$, *то* $\widehat{m}(y) = 0$ – *оптимальный метод, а если* $\lambda_2 = 0$, *то* $\widehat{m}(y) = (\mu_1 y_1, \dots, \mu_N y_N, 0, \dots)$ – *оптимальный метод. Если* $\delta = 0$, *то* $E_p = \lambda^{\frac{1}{p}}$ *и все методы* (7.2), *в которых*

$$|\mu_j(1-\alpha_j)| \leqslant |\nu_j|\lambda^{\frac{1}{p}},$$

являются оптимальными.

Доказательство. Экстремальная задача (5.1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j x_j|^p \to \max, \qquad \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \leqslant \delta^p, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j x_j|^p \leqslant 1. \tag{7.3}$$

В силу определения множества M и функции $\theta(\,\cdot\,)$, если на каком-нибудь из промежутков ломаная $\theta(\,\cdot\,)$ задается уравнением $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$, то $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant \lambda$ и при всех $j \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$-|\mu_j|^p + \lambda_1\chi_j + \lambda_2|\nu_j|^p \geqslant 0,$$

где

$$\chi_j = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant j \leqslant N, \\ 0, & j > N. \end{cases}$$

Пусть $0 < |\nu_{s_1}|^p < \dots < |\nu_{s_k}|^p$ – аргументы точек излома ломаной $\theta(\,\cdot\,)$. Предположим, что $|\nu_{s_{l-1}}| \leqslant \delta^{-1} < |\nu_{s_l}|$ при некотором l, $1 < l \leqslant k$, а функция $\theta(\,\cdot\,)$ при $|\nu_{s_{l-1}}|^p \leqslant t \leqslant |\nu_{s_l}|^p$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Положим $\widehat{x}_j = 0$, $j \neq s_{l-1}, s_l$,

$$\widehat{x}_{s_{l-1}} = \left(\frac{\delta^p|\nu_{s_l}|^p - 1}{|\nu_{s_l}|^p - |\nu_{s_{l-1}}|^p}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \widehat{x}_{s_l} = \left(\frac{1 - \delta^p|\nu_{s_{l-1}}|^p}{|\nu_{s_l}|^p - |\nu_{s_{l-1}}|^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В силу того что

$$|\widehat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\widehat{x}_{s_l}|^p = \delta^p, \qquad |\nu_{s_{l-1}}\widehat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\nu_{s_l}\widehat{x}_{s_l}|^p = 1,$$

$\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots)$ является допустимым элементом в задаче (7.3). Тем самым значение этой задачи оценивается снизу величиной

$$|\mu_{s_{l-1}}|^p\,|\widehat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\mu_{s_l}|^p\,|\widehat{x}_{s_l}|^p = \lambda_1\delta^p + \lambda_2. \tag{7.4}$$

Предположим теперь, что $\delta^{-1} < \nu_{s_1}$. Если существует $\nu_j = 0$, $j \in \mathbb{N}$, то при s_0, удовлетворяющем $\theta(0) = |\mu_{s_0}|^p$, $\nu_{s_0} = 0$, те же рассуждения, что и выше, проведенные для $l = 1$, доказывают равенство (7.4), где λ_1 и λ_2 таковы, что функция $\theta(\,\cdot\,)$ на отрезке $[0, |\nu_{s_1}|^p]$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Если $\nu_j > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $\lambda_1 = 0$ и $\theta(t) = \lambda_2 t$ при $t \in [0, |\nu_{s_1}|^p]$. Тогда положим $\widehat{x}_j = 0$, $j \neq s_1$, а $\widehat{x}_{s_1} = 1/\nu_{s_1}$. Нетрудно убедиться, что $\widehat{x}$ является допустимым элементом в задаче (7.3). Следовательно, ее значение оценивается снизу величиной

$$|\mu_{s_1}|^p\,|\widehat{x}_{s_1}|^p = \lambda_2.$$

Пусть теперь $\delta \leqslant |\nu_{s_k}|^{-1}$, а $\theta(\,\cdot\,)$ на промежутке $[|\nu_{s_k}|^p, +\infty)$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Ясно, что $\lambda_2 = \lambda$, так как $|\nu_{s_k}|^p$ – последняя точка излома $\theta(\,\cdot\,)$. Из определения λ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $s_{k+1} \geqslant N+1$ такое, что

$$\frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p} > \lambda - \varepsilon. \tag{7.5}$$

Положим $\widehat{x}_j = 0$, $j \neq s_k, s_{k+1}$, а $\widehat{x}_{s_k}$ и $\widehat{x}_{s_{k+1}}$ выберем так, чтобы удовлетворялись равенства

$$|\widehat{x}_{s_k}|^p = \delta^p, \qquad |\nu_{s_k}\widehat{x}_{s_k}|^p + |\nu_{s_{k+1}}\widehat{x}_{s_{k+1}}|^p = 1.$$

Очевидно, что $\widehat{x}$ является допустимым элементом в задаче (7.3). Следовательно, ее значение оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned}|\mu_{s_k}|^p\,|\widehat{x}_{s_k}|^p + |\mu_{s_{k+1}}|^p\,|\widehat{x}_{s_{k+1}}|^p &= \lambda_1\delta^p + \lambda_2 - \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p}\right)(1-\delta^p|\nu_{s_k}|^p)\\ &\geqslant \lambda_1\delta^p + \lambda_2 - \varepsilon(1-\delta^p|\nu_{s_k}|^p).\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что значение задачи (7.3) оценивается снизу величиной $\lambda_1\delta^p + \lambda_2$.

Предположим теперь, что изломов нет. Тогда $\theta(\,\cdot\,)$ является прямой $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$ на $\mathbb{R}_+$. Очевидно, что в этом случае $\lambda_2 = \lambda$. Для построения вектора $\widehat{x}$ рассмотрим два случая. Пусть сначала существует s_0 такое, что $\nu_{s_0} = 0$ и $\theta(0) = |\mu_{s_0}|^p$. Тогда положим $\widehat{x}_j = 0$, $j \neq s_0, s_{k+1}$, а $\widehat{x}_{s_0}$ и $\widehat{x}_{s_{k+1}}$ выберем так, чтобы удовлетворялись равенства

$$|\widehat{x}_{s_0}|^p = \delta^p, \qquad |\nu_{s_{k+1}}\widehat{x}_{s_{k+1}}|^p = 1$$

(здесь s_{k+1} то же, что и в (7.5)). Тогда значение задачи (7.3) оценивается снизу величиной

$$|\mu_{s_0}|^p\,|\widehat{x}_{s_0}|^p + |\mu_{s_{k+1}}|^p\,|\widehat{x}_{s_{k+1}}|^p = \lambda_1\delta^p + \lambda_2 - \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p}\right) > \lambda_1\delta^p + \lambda_2 - \varepsilon.$$

Если же $\theta(0) = 0$ (в этом случае $\lambda_1 = 0$), положим $\widehat{x}_j = 0$, $j \neq s_{k+1}$, а $\widehat{x}_{s_{k+1}} = 1/\nu_{s_{k+1}}$. Тогда значение оценивается величиной

$$|\mu_{s_{k+1}}|^p\,|\widehat{x}_{s_{k+1}}|^p = \lambda_2 + \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p}\right) > \lambda_2 - \varepsilon.$$

Следовательно, из-за произвольности $\varepsilon > 0$ и в том, и в другом случаях получается оценка $\lambda_1\delta^p + \lambda_2$.

Применение теоремы 4 завершает доказательство.

Отметим, что в точках $(|\nu_{s_l}|^p, |\mu_{s_l}|^p)$, $l = 1,\dots,k$, излома ломаной $\theta(\,\cdot\,)$ существует много опорных прямых к множеству M. Можно показать, что при $\delta = |\nu_{s_l}|^{-1}$ для всякой такой опорной прямой $\lambda_1 + \lambda_2 t$, для которой $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, все методы (7.2), в которых α_j, $j = 1,\dots,N$, удовлетворяют условию (7.1), являются оптимальными.

Следствие 3. *Пусть δ^{-p} принадлежит промежутку на $\mathbb{R}_+$, где $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$, и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Положим*

$$D = \bigl\{j : |\mu_j|^p > |\nu_j|^p\lambda_2,\ 1 \leqslant j \leqslant N\bigr\}, \qquad D_0 = \bigl\{j \in D : |\mu_j|^p \leqslant \lambda_1\bigr\}.$$

Тогда методы

$$\{\widehat{m}(y)\}_j = \begin{cases}\mu_j y_j, & j \in D_0,\\ \alpha_j\mu_j y_j, & j \in D \setminus D_0,\\ 0, & \mathbb{N} \setminus D,\end{cases}$$

где α_j удовлетворяют условиям (7.1), являются оптимальными.

Из следствия 3 вытекает, что полезная информация о неточно заданном векторе x состоит из координат x, номера которых входят в множество D. При этом для номеров из множества D_0 можно применять метод, который действует на координаты так же, как и восстанавливаемый оператор. Вид множеств D и D_0 показан на рис. 2.

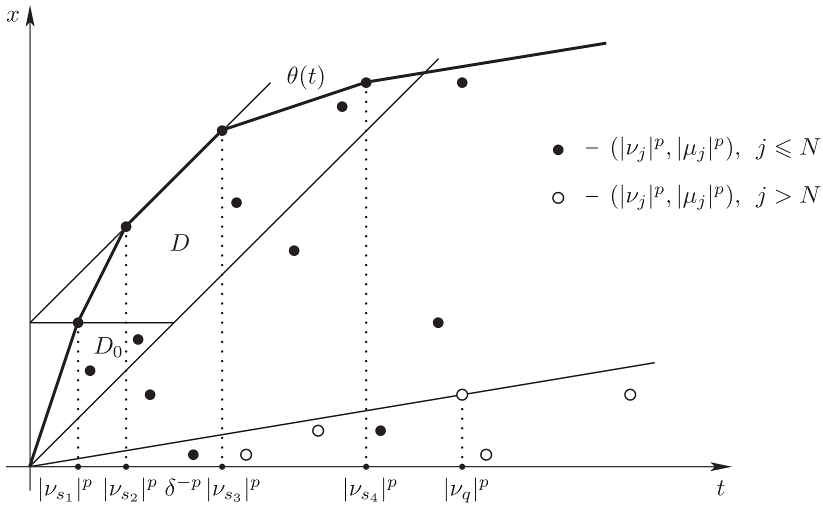

Рис. 2

Решение рассмотренной задачи восстановления в евклидовом случае для случая восстановления производной по неточно заданным коэффициентам Фурье было получено в работе [15], а в более общей ситуации, но снова в рамках евклидова случая, в работе [25] (и в том, и в другом случаях без получения семейства методов).

Применим теперь полученные в теореме 10 результаты к примеру из [6; теорема 12]. В этом примере $\mu_j = 1$, $j \in \mathbb{N}$ (в действительности, в [6] рассматривались последовательности на $\mathbb{Z}$, но это не является существенным). Положим

$$B = \min_{1\leqslant j\leqslant N} |\nu_j|, \qquad A = \inf_{j>N} |\nu_j|, \qquad C = \frac{B}{A}$$

(будем считать, что $A > 0$, так как в противном случае $E_p = +\infty$). Для введенной ранее величины λ имеем $\lambda = 1/A^p$.

Из теоремы 10 вытекает

Теорема 11. 1. *При* $\delta = 0$ *все методы* (7.2), *в которых*

$$|1-\alpha_j| \leqslant \frac{|\nu_j|}{A}, \qquad j = 1, \dots, N,$$

являются оптимальными.

2. *При* $C = 0$ $\theta(t) = 1 + t/A^p$ *и все методы* (7.2), *в которых*

$$\begin{cases} \dfrac{A^{p'}}{|\nu_j|^{p'}}|1-\alpha_j|^{p'} + |\alpha_j|^{p'} \leqslant 1, \quad 1 < p < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \\ |1-\alpha_j| \leqslant \dfrac{|\nu_j|}{A}, \quad |\alpha_j| \leqslant 1, \qquad p = 1, \end{cases}$$

являются оптимальными.

3. *При* $0 < C < 1$ *и* $\delta^{-1} \geqslant B$ $\theta(t) = 1 + (t - B^p)/A^p = 1 - C^p + t/A^p$ *и все методы* (7.2), *в которых*

$$\begin{cases} \dfrac{A^{p'}}{|\nu_j|^{p'}}|1-\alpha_j|^{p'} + \dfrac{|\alpha_j|^{p'}}{(1-C^p)^{p'/p}} \leqslant 1, \quad 1 < p < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \\ |1-\alpha_j| \leqslant \dfrac{|\nu_j|}{A}, \quad |\alpha_j| \leqslant (1-C), \qquad p = 1, \end{cases} \tag{7.6}$$

являются оптимальными.

4. *При* $C \geqslant 1$ $\theta(t) = t/A^p$, *а при* $0 < C < 1$ *и* $\delta^{-1} \leqslant B$ $\theta(t) = t/B^p$, *и метод* $\widehat{m}(y) = 0$ *является оптимальным.*

В [6] найдены следующие значения коэффициентов α_j:

1, 2. $\alpha_j = 1$;

3. $\alpha_j = 1 - C^p$;

4. $\alpha_j = 0$.

Выясним теперь, при каких j можно положить $\alpha_j = 0$ и $\alpha_j = 1$. Положим

$$N_1 = \bigl\{j \in \{1, \dots, N\} : |\nu_j| < A\bigr\}.$$

Следствие 4. 1. *При* $\delta = 0$ *или* $C = 0$ *метод* (7.2), *в котором*

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & j \in N_1, \\ 0, & j \notin N_1, \end{cases}$$

оптимальный.

2. *При* $0 < C < 1$ *и* $\delta^{-1} \geqslant B$ *все методы* (7.2), *в которых при* $j \in N_1$ α_j *удовлетворяют условию* (7.6), *а при* $j \notin N_1$ $\alpha_j = 0$, *являются оптимальными.*

Автор глубоко признателен рецензентам за ценные замечания, в частности за указание на связь рассматриваемых задач с точными неравенствами типа Карлсона.

Список литературы

[1] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.

[2] Н. С. Бахвалов, “Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **11**:4 (1971), 1014–1018; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, “On the optimality of linear methods for operator approximation in convex classes of functions”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **11**:4 (1971), 244–249.

[3] К. Ю. Осипенко, “Оптимальная интерполяция аналитических функций”, *Матем. заметки*, **12**:4 (1972), 465–476; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Optimal interpolation of analytic functions”, *Math. Notes*, **12**:4 (1972), 712–719.

[4] А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, “Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368; англ. пер.: A. G. Marchuk, K. Yu. Osipenko, “Best approximation of functions specified with an error at a finite number of points”, *Math. Notes*, **17**:3 (1975), 207–212.

[5] К. Ю. Осипенко, “Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **19**:1 (1976), 29–40; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Best approximation of analytic functions from information about their values at a finite number of points”, *Math. Notes*, **19**:1 (1976), 17–23.

[6] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, "A survey of optimal recovery", *Optimal estimation in approximation theory*, Proc. Internat. Sympos. (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.

[7] В. В. Арестов, "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, "Optimal recovery of operators and related problems", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189**:4 (1990), 1–20.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным", *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of functionals based on inaccurate data", *Math. Notes*, **50**:6 (1991), 1274–1279.

[9] Дж. Фр. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983, 382 с.; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monograph Series, Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xiv+341 pp.

[10] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+308 pp.

[11] K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Inc., New York, 2000, 220 pp.

[12] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, 2-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2003, 176 с.; англ. пер. 1-го изд.: G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.

[13] G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.

[14] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.

[15] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error", *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 387–407.

[16] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функ. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives", *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.

[17] К. Ю. Осипенко, "Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева", *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, "The Hardy–Littlewood–Pólya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces", *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 315–334.

[18] В. В. Арестов, "Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи", *УМН*, **51**:6(312) (1996), 89–124; англ. пер.: V. V. Arestov, "Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems", *Russian Math. Surveys*, **51**:6 (1996), 1093–1126.

[19] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье", *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 67–82; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of values of functions and their derivatives from inaccurate data on the Fourier transform", *Sb. Math.*, **195**:10 (2004), 1461–1476.

[20] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “How best to recover a function from its inaccurately given spectrum?”, *Math. Notes*, **92**:1 (2012), 51–58.

[21] В. В. Арестов, “Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи”, *Приближение функций и операторов*, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, **138**, 1975, 29–42; англ. пер.: V. V. Arestov, “Approximation of linear operators, and related extremal problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **138** (1977), 31–44.

[22] В. И. Левин, “Точные константы в неравенствах типа Карлсона”, *Докл. АН СССР*, **59**:4 (1948), 635–639.

[23] Ф. И. Андрианов, “Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщений”, *Изв. вузов. Матем.*, 1967, № 1, 3–7.

[24] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа и восстановление производных по неточной информации”, *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “The Hardy–Littlewood–Pólya inequality and the reconstruction of derivatives from inaccurate data”, *Dokl. Math.*, **83**:3 (2011), 337–339.

[25] Н. Д. Выск, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815; англ. пер.: N. D. Vysk, K. Yu. Osipenko, “Optimal reconstruction of the solution of the wave equation from inaccurate initial data”, *Math. Notes*, **81**:6 (2007), 723–733.

Константин Юрьевич Осипенко
(Konstantin Yu. Osipenko)
Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ), г. Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступила в редакцию
17.01.2014 и 01.07.2014