Содержание

Введение

При решении многих задач математической физики и особенно при их численной реализации естественным образом возникают задачи, связанные с дискретизацией функций, восстановлением функций, функционалов или операторов от них по некоторой неполной и неточной информации о функции. Такого рода задачи, интенсивно изучающиеся в последнее время (особенно в связи с развитием компьютерной техники) составляют новое направление, получившее название — оптимальное восстановление. Круг исследуемых в этой области проблем содержит такие важные задачи, как построение оптимальных методов восстановления функций, заданных точно или приближенно в конечном числе точек, построение оптимальных квадратурных формул, восстановление производных (численное дифференцирование), выбор оптимальным образом информации, которую необходимо знать о функции, чтобы с наименьшей погрешностью восстановить ее, аппроксимация функции по ее приближенным коэффициентам Фурье или преобразованию Фурье и др.

Первый этап теории приближений состоял в приближении индивидуаль-ных элементов некоторого множества с помощью элементов линейного подпространства, то есть в определении величины

$$\min_{z\in L}\|x-z\|,$$

где $x\in X$, X — нормированное пространство, L — аппроксимирующее подмножество X.

Теория приближений функций берет свое начало от работ П.Л. Чебышева. Он ввел одно из основных понятий теории — понятие наилучшего приближения функции полиномами, а именно: *наилучшим приближением* непрерывной функции f на отрезке $[a,b]$ обобщенными полиномами $\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$ в метрике $C([a,b])$ называется величина

$$E_n(f)_C=\min\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)\|_{C([a,b])},$$

где $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — некоторая система непрерывных на $[a,b]$ линейно независимых функций, а минимум берется по всем числам $a_1,\dots,a_n$. Полином, для которого достигается этот минимум, называется *полиномом наилучшего приближения*. В частности, Чебышев установил, что наилучшее приближение функции x^{n+1} на отрезке $[-1,1]$ в метрике $C([-1,1])$ алгебраическими многочленами степени n равно $1/2^n$, а многочлен наилучшего приближения таков, что для него

$$x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (1/2)^n \cos(n+1) \arccos x.$$

На следующем этапе теории приближений изучалось приближение на классе, то есть ставилась задача приблизить функцию из некоторого класса W функциями заданной системы L (например, многочленами), и определить величину

$$\sup_{f \in W} \min_{z \in L} \|f - z\|.$$

Примерами таких задач являются приближение функции из соболевского класса W_q^r многочленами степени не выше n, или

$$E_{nq}\left(W_p^r\right) = \sup_{f \in W_p^r} \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{L_q}.$$

А.Н. Колмогоров начал изучение задачи о нахождении при фиксированном n такой системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, для которой наилучшие приближения функций заданного класса полиномами $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ были бы наименьшими. В 1936 г. работой [2] был открыт новый этап исследований в теории приближений. В этой работе были определены аппроксимативные характеристики нового типа — поперечники. *Поперечником* называется величина, характеризующая уклонение множества в нормированном пространстве от некоторой системы объектов (как правило, конечномерных) при определенном методе приближения, а также величина, характеризующая точность восстановления элемента из данного множества:

$$p_{\varphi}(C, X) = \inf_{f \in \varphi} \sup_{x \in C} \|x - f(x)\|,$$

где X — нормированное пространство с единичным шаром B, $C \subset X$ — аппроксимируемое подмножество в X, $A \subset X$, — некоторая совокупность аппроксимирующих подмножеств, $F(C, A)$ — некоторая совокупность отображений $f : C \to A$, φ — заданная совокупность отображений из аппроксимируемого в аппроксимирующее множество. В частности, *поперечник по Колмогорову*:

$$d_n(C, X) = \inf\{d(C, L_N, X) | L_N \in Lin_N(X)\} =$$
$$= \inf_{F \in \mathcal{F}(C, Lin_N(X))} \sup_{X \in C} \|x - F(x)\|,$$

где $Lin_N(X)$ — совокупность подпространств X размерности $\leq N$, $\mathcal{F}(C, Lin_N(X))$ — совокупность всех отображений F из C во всевозможные линейные подпространства $L_N \in Lin_N(X)$.

Идея поиска самого лучшего поперечника лежит в основе задачи, сформулированной С.А.Смоляком [3]. С.А.Смоляк рассматривал вопросы оптимального восстановления линейного функционала L на некотором множестве W линейного пространства X по значениям линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$. Положим для $x \in W$

$$Ix := (l_1 x, \dots, l_n x).$$

Оператор $I : W \to K^n$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, называется *информационным оператором.* Величина

$$e(L, W, I) := \inf_{S: K^n \to K} \sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)|$$

называется *погрешностью* оптимального восстановления функционала L на множестве W. Всякий метод S_0, для которого

$$\sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)| = e(L, W, I),$$

называется *оптимальным* методом восстановления. В [3] было доказано, что в вещественном случае для выпуклого и центрально-симетричного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный и имеет место равенство

$$e(L, W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix = 0}} |Lx|.$$

С работами, посвященными исследованию задач восстановления на классах гладких функций, можно познакомиться по статье [4] и монографии [5].

Дальнейшее развитие теории оптимального восстановления связано с работами В.М. Тихомирова, Г.Г. Магарил-Ильяева и К.Ю. Осипенко. Ими разработан единый подход к решению задач оптимального восстановления, использующий принцип Лагранжа.

Была показана связь задачи опимального восстановления значения линейного функционала x' на классе C, принадлежащем линейному пространству X, по информации $y = Fx$, где $F : C \to Y$ — линейный оператор из X в другое линейное пространство Y, то есть задачи определения погрешности оптимального восстановления

$$E(x', C, F) = \inf_{\varphi: F(C) \to K} \sup_{x \in C} |\langle x', x \rangle - \varphi(Fx)|$$

с выпуклой экстремальной задачей

$$\operatorname{Re}\langle x', x \rangle \to \max, \quad Fx = 0, \quad x \in C.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 \operatorname{Re}\langle x', x \rangle + \operatorname{Re}\langle \lambda, Fx \rangle,$$

где $\lambda_0 \leq 0$ и $\lambda \in Y'$ (Y' — алгебраически сопряженное к Y) — множители Лагранжа. В [6] доказана следующая теорема:

Теорема 1 (Принцип Лагранжа для задач восстановления). *Пусть X и Y — линейные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, C — выпуклое уравновешенное подмножество X и $F : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда для того чтобы допустимая в рассматриваемой экстремальной задаче точка $\hat{x}$ была решением этой задачи, необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой множитель Лагранжа $\hat{\lambda} \in Y'$, что*

$$\min_{x \in C} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}, -1) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1).$$

При этом $\hat{x}$ — оптимальный метод восстановления и

$$E(x', C, F) = \mathrm{Re}\langle x', \hat{x} \rangle.$$

В [7], [8] разработан метод построения оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью (теорема 7, глава 1).

Краткое содержание работы

В 1-й главе рассматривается общая постановка задачи оптимального восстановления линейного оператора: для векторного про-странства X, нормированного пространства Z и оператора T требуется восстановить значения T на некотором множестве $W \subset X$ по неточной информации о каждом элементе $x \in W$, задаваемой с помощью некоторого информационного отображения $I(x)$, вообще говоря, многозначного, из W в векторное пространство Y. Даются определения понятий погрешности восстановления для данного метода φ, погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления. Описывается метод построения оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью, разработанный в работах Г.Г.Магарил-Ильяева и К.Ю.Осипенко. Формулируются следствия из этих работ для задач восстановления некоторых линейных операторов.

Определяется такое понятие, как *обобщенное решение* гиперболического уравнения в частных производных.

Во 2-й главе строится метод оптимального восстановления решения обобщенного волнового уравнения для начальных данных, задаваемых функциями из L_2.

Рассматривается общая задача оптимального восстановления некоторого линейного оператора мультипликаторного типа $Q\colon X \to l_2$, заданного равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots),$$

где $x=(x_1,x_2,\dots)\in X$, а

$$X=\left\{\,x=(x_1,x_2,\dots):\|x\|_X=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j|x_j|^2\right)^{1/2}<\infty\right\},$$

$\nu_j>0$, $x_j\in\mathbb{R}, j\in\mathbb{N}$. Пусть $\mu_j=\eta_j^2$. Предполагется, что $\mu_j/\nu_j\to 0$ при $j\to\infty$. Тогда при всех $x\in X$ $Qx\in l_2$. Требуется восстановить оператор Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1,\dots,x_N$.

Положим

$$W=\{\,x\in X:\|x\|_X\le 1\,\}.$$

Будем считать, что для каждого $x\in W$ нам известен вектор $y=(y_1,\dots,y_N)$ такой, что

$$\|I_Nx-y\|_{l_2^N}=\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j-y_j|^2\right)^{1/2}\le\delta$$

(здесь $I_Nx=(x_1,\dots,x_N)$). В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_2^N\to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q,W,I_N,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W,\ y\in l_2^N\\ \|I_Nx-y\|_{l_2^N}\le\delta}}\|Qx-\varphi(y)\|_{l_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\inf_{\varphi\colon l_2^N\to l_2}e(Q,W,I_N,\delta,\varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_2^N.

Предположим, что $\nu_1<\dots<\nu_N$, $\nu_{N+1}<\nu_{N+2}<\dots$ и $\lim_{j\to+\infty}\mu_j/\nu_j=0$. Обозначим через e_j, $j=1,2,\dots$, — стандартный базис в l_2

$$(e_j)_k=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\ne j,\end{cases}\qquad k=1,2,\dots.$$

Введем следующие обозначения

$$A=\max_{1\le j\le N}\frac{\mu_j}{\nu_j},\quad B=\max_{j>N}\frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Пусть $1\le p\le N$, $q>N$ и $p\le r\le N$ таковы, что

$$\frac{\mu_p}{\nu_p}=A,\quad \frac{\mu_q}{\nu_q}=B,\quad \mu_r-B\nu_r=\max_{p\le j\le N}(\mu_j-B\nu_j).$$

Пусть, кроме того, s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k < s_{k+1} \le r$ и

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} = \max_{s_k < j \le r} \frac{\mu_j - \mu_{s_k}}{\nu_j - \nu_{s_k}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$.

Положим

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \right\}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > B \right\}.$$

Теорема 2. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_q}{\nu_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(i) *при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\nu_p}}$*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_p}{\nu_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(ii) *при $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_{s_k} \frac{\nu_{s_{k+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} + \mu_{s_{k+1}} \frac{1 - \delta^2 \nu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_k} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}} \nu_j \right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный;

(iii) *при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_r \delta^2 + \mu_q \frac{1 - \delta^2 \nu_r}{\nu_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_m} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_q}{\mu_r \nu_q - \mu_q \nu_r} \nu_j \right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный.

Полученный результат используется для поиска оптимального метода восстановления решения обобщенного волнового уравнения.

Далее рассматривается задача оптимального восстановления решения волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике. Предполагается, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$|x_j - y_j| \le \delta_j, \quad j = 1, ..., N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_\infty^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in l_\infty^N \\ |x_j - y_j| \le \delta_j,\ j=1,\ldots,N}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}$$

(здесь $\delta = (\delta_1, ..., \delta_N), I_N x = (x_1, \ldots, x_N)$).

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N \to l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi), \tag{1}$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_∞^N.

Пусть ν_j монотонно возрастает,

$$\lim_{j \to +\infty} \nu_j = +\infty, \quad \lim_{j \to +\infty} \mu_j/\nu_j = 0.$$

Выбирается $q > N$ такое, что

$$\frac{\mu_q}{\nu_q} = \max_{j > N} \frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Если $\nu_1 \delta_1^2 < 1$ и $\dfrac{\mu_1}{\nu_1} > \dfrac{\mu_q}{\nu_q}$,
положим

$$p_0 = p_0(\delta) = \max\left\{ p : \sum_{j=1}^{p} \nu_j \delta_j^2 < 1,\ \frac{\mu_p}{\nu_p} > \frac{\mu_q}{\nu_q},\ 1 \le p \le N \right\},$$

в противном случае считаем, что $p_0 = 0$.
Положим

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q} \ge \dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}} \\ p_0 + 1, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q} < \dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}. \end{cases}$$

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}} + \sum_{j=1}^{p_0} \left(\mu_j - \frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}} \nu_j \right) \delta_j^2}, \tag{2}$$

при этом метод

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j=1}^{p_0}\eta_j\left(1-\frac{\mu_{q_0}\nu_j}{\nu_{q_0}\mu_j}\right)y_je_j \tag{3}$$

является оптимальным.

Полученный результат применяется для построения оптимального метода восстановления решения одномерных волновых уравнений.

Результат теоремы 2 используется для решения задачи оптимального восстановления k-й производной функции из следующих классов:

1) *Соболевский класс* $W_2^r(\mathbb{T})$, состоящий из 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\le 1$.

2) *Класс Харди-Соболева* $H_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ — множество 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta=\{z\in\mathbb{C}:|\Im z|<\beta\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})}\le 1,$$

где $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ — пространство Харди 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})}=\sup_{0<\rho<\beta}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}}(|x(t+i\rho)|^2+|x(t-i\rho)|^2)dt\right)^{1/2}<\infty.$$

3) *Класс Бергмана-Соболева* $A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$— множество 2π - периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})}\le 1.$$

Здесь $\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$ — пространство Бергмана 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})}=\left(\frac{1}{4\pi\beta}\int_{\mathbb{T}}dt\int_{-\beta}^{\beta}|x(t+i\rho)|^2d\rho\right)^{1/2}<\infty.$$

Оптимальный метод восстановления строится по информации I_δ^{2N+1}, заключающейся в том, что нам известны числа $\{y_j\}_{|j|\le N}$ такие, что для коэффициентов Фурье $\{x_j\}_{|j|\le N}$ функции $x(\cdot)$

$$\sum_{|j|\le N}|x_j-y_j|^2\le\delta^2,\quad \delta>0,$$

или по информации I_δ, если мы располагаем числами $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ такими, что для коэффициентов Фурье $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ функции $x(\cdot)$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0.$$

Оператор дифференцирования обозначается через D^k. В качестве метода восстановления допускается любое отображение $\varphi : l_2 \to L_2(\mathbb{T})$.

Обозначим $\mu_j = j^{2k}$,

$$\nu_j(W) = \begin{cases} j^{2r}, & W = W_2^r(\mathbb{T}), \\ j^{2r}\operatorname{ch} 2j\beta, & W = H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}), \\ j^{2r}\frac{\operatorname{sh} 2j\beta}{2j\beta}, & W = A_2^{r,\beta}(\mathbb{T}). \end{cases}$$

Найдем при $\nu_{s+1}^{-\frac{1}{2}}(W) \le \delta < \nu_s^{-\frac{1}{2}}(W),\ s \ge 1$, такое N_0, что

$$N_0 = \max\{k : \frac{\mu_k}{\nu_k} \ge \frac{\mu_{s+1} - \mu_s}{\nu_{s+1} - \nu_s}\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 4. *При* $\nu_{s+1}^{-1/2}(W) \le \delta < \nu_s^{-1/2}(W),\ s \ge 1$, *метод*

$$\varphi(y) = \sum_{j\in[-N_0,N_0]} \gamma_j \left(1 + \nu_j \frac{\mu_{s+1} - \mu_s}{\mu_s\nu_{s+1} - \mu_{s+1}\nu_s}\right)^{-1} y_j e_{ij}$$

является оптимальным.

Таким образом, для оптимального метода восстановления можно использовать только значения $y_j \in [-N_0, N_0]$, то есть ограничиться только частью исходной информации.

В 3-й главе получены оптимальные методы восстановления решения обобщенного волнового уравнения на единичной сфере в d-мерном пространстве:

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}.$$

Рассмотрим обобщенное волновое уравнение с нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \\ u|_{t=0} = f, \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Здесь $\Delta_S Y$ — *сферический лапласиан* или *оператор Лапласа-Бельтрами.*

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x',t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}\cos\Lambda_k^{\alpha/4}tY_j^{(k)}(x\prime),\tag{5}$$

где система однородных сферических гармоник $Y_j^{(k)}$, $k=0,1,\ldots$, $j=1,\ldots,a_k$, является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $\Lambda_k=k(k+d-2)$ – собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами на сфере, а

$$f(x')=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}Y_j^{(k)}(x').$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_1,\ldots,y_N$, причем

$$\sum_{k=0}^{k_0-1}a_k<N\le\sum_{k=0}^{k_0}a_k,\quad \tilde{N}=N-\sum_{k=0}^{k_0-1}a_k.$$

При этом

$$\sum_{k=0}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|c_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde{N}}|c_{k_0-1,j}(f)-y_j|^2\le\delta^2,\quad \delta>0.\tag{6}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (4) в момент времени τ на классе

$$W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})=\{f\in L_2(\mathbb{S}^{d-1}):\quad ||(-\Delta_S)^{\beta/2}f||_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le 1,\ f\perp 1\}$$

по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(x)\in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})$ сопоставляет множество векторов $y=(y_1,\ldots,y_N)$, удовлетворяющих условию (88).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon l^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N,\varphi) = \sup_{\substack{f\in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),\ y\in l_2^N\\ \sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|c_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde{N}}|c_{k_0-1,j}(f)-y_j|^2\le\delta^2}}\|u(\cdot,\tau)-\varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Величина

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=\inf_{\varphi\colon l_2^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})}e(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N,\varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$A = \max_{1\le k\le k_0} \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} = \frac{\cos^2 \Lambda_p^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_p^\beta},$$

$$B = \max_{k\ge k_0} \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} = \frac{\cos^2 \Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta},$$

r определяется из условия

$$\cos^2 \Lambda_r^{\alpha/4}\tau - B\Lambda_r^\beta = \max_{p\le k\le k_0} (\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - B\Lambda_k^\beta),$$

последовательность s_l определяется равенствами

$$\frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} = \max_{s_l<k\le r} \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta},$$
$$l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_l = \left\{ k \in \mathbb{N} \cap [1, k_0] : \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} > \frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} \right\},$$
$$l = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ k \in \mathbb{N} \cap [1, k_0] : \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} > B \right\}.$$

Тогда из теоремы 2 вытекает

Теорема 5. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) = |\cos \Lambda_q^{\alpha/4}\tau| / \sqrt{\Lambda_q^\beta},$$

и метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ является оптимальным.

Если $B < A$, то

(*i*) *при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_p^\beta}}$*

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) = |\cos \Lambda_p^{\alpha/4}\tau| / \sqrt{\Lambda_p^\beta},$$

и метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ является оптимальным;

(*ii*) *при $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{s_l}^\beta}}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$,*

$$E(\tau, \alpha, W_n^\beta(\mathbb{S}^{n-1}), F_\delta^N)$$
$$= \sqrt{\cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4} t \frac{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta \delta^2 - 1}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} + \cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4} t \frac{1 - \delta^2 \Lambda_{s_l}^\beta}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta}},$$

$$\widehat{\varphi}(y) =$$

$$\sum_{k\in J_l}\sum_{j=1}^{a_k}\cos\Lambda_j^{\frac{\alpha}{4}}t\left(1+\frac{\cos^2\Lambda_{s_{l+1}}^{\frac{\alpha}{4}}t-\cos^2\Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{4}}t}{\Lambda_{s_{l+1}}^{\beta}\cos^2\Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{4}}t-\Lambda_{s_l}^{\beta}\cos^2\Lambda_{s_{l+1}}^{\frac{\alpha}{4}}t}\Lambda_j^{\beta}\right)^{-1} y_jY_j^{(k)}(x')$$

— *оптимальный метод;*

(*iii*) *при* $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_r^{\beta}}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),F_{\delta}^{N}) = \sqrt{\cos^2\Lambda_r^{\alpha/4}t\ \delta^2+\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}t\frac{1-\delta^2\Lambda_r^{\beta}}{\Lambda_q^{\beta}}},$$

$$\widehat{\varphi}(y) =$$

$$\sum_{k\in J_m}\sum_{j=1}^{a_k}\cos\Lambda_j^{\alpha/4}t\left(1+\frac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}t}{\Lambda_q^{\beta}\cos^2\Lambda_r^{\alpha/4}t-\Lambda_r^{\beta}\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}t}\Lambda_j^{\beta}\right)^{-1} y_jY_j^{(k)}(x')$$

— *оптимальный метод.*

Аналогичным образом найдены оптимальные методы восстановления для обобщенного волнового уравнения с нулевым начальным значением u и ненулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt}+(-\Delta_S)^{\alpha/2}u &= 0,\\ u|_{t=0} &= 0,\\ u_t|_{t=0} &= f; \end{aligned} \tag{7}$$

и для обобщенного волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике.

Получен оптимальный метод восстановления решения обобщенного волнового уравнения в d-мерном шаре $\mathbb{B}^d$.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}+(-\Delta)^{\alpha/2}u = 0 \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_{|t=0} &= f,\\ u_{t|t=0} &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

и граничным условием

$$u_{|\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{ksj}\cos\left((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}t\right)Y_{ksj}(x), \tag{10}$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f.

Поставим задачу оптимального восстановления решения уравнения (8) в момент времени τ по неточно заданному набору коэффициентов Фурье функции f на соболевском классе $W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$, определяемом как множество функций $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$, для которых

$$||(-\Delta_S)^{\beta/2} f||_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq 1.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_{ksj} \in Y_N$ такие, что $s \leq s_0,\ k \leq k_0$. При этом для некоторых фиксированных s и k могут быть известны все приближенные значения коэффициентов Фурье для $j = 1, \ldots, a_k$, а для других s и k известна только часть приближенных значений коэффициентов.

Доказана следующая

Теорема 6. *При $B \geq A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{\vartheta_{k_1 s_1}}{\nu_{k_1 s_1}}}$$

и $\widehat{\varphi}(y) = 0$.

Если $B < A$, то

(i) при $\delta \geq \dfrac{1}{\sqrt{\nu_h}}$

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{\vartheta_h}{\nu_h}},$$

и $\widehat{\varphi}(y) = 0$,

(ii) при $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_{l+1}}}} \leq \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_l}}}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $E(\tau, \alpha, W_n^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N)$

$$= \sqrt{\vartheta_{m_l} \frac{\nu_{m_{l+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{m_{l+1}} - \nu_{m_l}} + \vartheta_{m_{l+1}} \frac{1 - \delta^2 \nu_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}} - \nu_{m_l}}},$$

$\widehat{\varphi}(y) =$

$$\sum_{k,s \in M_l} \sum_{j=1}^{a_k} \cos((\mu_s^{(p)})^{\alpha/4} \tau) \left(1 + \frac{\vartheta_{m_{l+1}} - \vartheta_{m_l}}{\vartheta_{m_l}\nu_{m_{l+1}} - \vartheta_{m_{l+1}}\nu_{m_l}} \nu_k\right)^{-1} y_{ksj} Y_{ksj}(x),$$

(iii) при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \sqrt{\vartheta_r \delta^2 + \vartheta_q \frac{1 - \delta^2 \nu_r}{\nu_q}},$$

$$\widehat{\varphi}(y) =$$
$$\sum_{k,s\in M_q}\sum_{j=1}^{a_k}\cos((\mu_s^{(p)})^{\alpha/4}\tau)\left(1+\frac{\vartheta_q}{\vartheta_r\nu_q-\vartheta_q\nu_r}\nu_k\right)^{-1} y_{ksj}Y_{ksj}(x).$$

Доклады и публикации

Основные результаты работы были представлены на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2006 г.; Международной конференции EPCoRA2007, Москва, 2007 г.; 3-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Москва, 2008 г.; научном семинаре кафедры "Высшая математика" МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского; научном семинаре кафедры "Общие проблемы управления" механико-математического факультета МГУ; научном семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН и отражены в пяти публикациях ([15]-[19]).

Глава 1. Общая постановка задачи восстановления и используемые результаты

1.1. Общая постановка задачи восстановления

Общая задача оптимального восстановления линейного оператора такова: для векторного пространства X, нормированного пространства Z и оператора T требуется восстановить значения T на некотором множестве $W \subset X$ по неточной информации о каждом элементе $x \in W$, задаваемой с помощью некоторого информационного отображения $I(x)$, вообще говоря, многозначного, из W в векторное пространство Y.

Методами восстановления могут быть любые отображения $\varphi : Y \to Z$. *Погрешностью* данного метода φ назовем величину

$$e(T,W,I,\varphi) = \sup_{\substack{x\in W\\ y\in I(x)}} \|Tx-\varphi(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T,W,I) = \inf_{\varphi:Y\to Z} e(T,W,I,\varphi).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется *оптимальным методом восстановления* оператора T на классе W по информации I.

В частности, можно рассмотреть следующую задачу восстановления: задано линейное пространство X и евклидовы пространства $Y_1, ..., Y_p$. В пространствах $Y_1, ..., Y_p$ заданы полускалярные произведения $(x, y)_{Y_j}$ и соответствующие полунормы

$$\|x\|_{Y_j} = \sqrt{(x, x)}.$$

Определим множество W :

$$W = \{x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j,\ j = 1, ..., l,\ 0 \leq l \leq p\}.$$

Линейные операторы $I_j,\ j = l + 1, ..., p$, задают отображения X в пространства $Y_1, ..., Y_p : \quad I_j : X \to Y_j$.

Ставится задача восстановления линейного оператора T по значениям операторов $I_{l+1}, ..., I_p$, заданным с погрешностью, а именно: для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_{l+1}, ..., y_p) \in Y_{l+1} \times ... \times Y_p$ такой, что

$$\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j,\ j = l + 1, ..., p.$$

В качестве методов восстановления оператора T рассматриваются произвольные операторы $\varphi : Y_{l+1} \times ... \times Y_p \to Z$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется как

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y = (y_{l+1}, ..., y_p) \in Y_{l+1} \times ... \times Y_p \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leq \delta_j,\ j = l+1, ..., p}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z,$$

где $I = (I_{l+1}, ..., I_p),\ \delta = (\delta_{l+1}, ..., \delta_p)$. Погрешность оптимального восстановления

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi : Y_{l+1} \times ... \times Y_p \to Z} e(T, W, I, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

С этой задачей восстановления тесно связана экстремальная задача

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2,\ j = 1, ..., p. \tag{11}$$

Функция Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda)$ для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2,$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p),\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1, ..., p$.

В работах [7], [8] был разработан метод построения оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью. Из этих работ вытекает следующий результат (который для полноты изложения приведем с доказательством):

Теорема 7. *Пусть существуют такие* $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, ..., p$, *что для* $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_p)$

$$(a) \quad \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Пусть, кроме того, существует такая последовательность $\{x_n\}$ *допустимых элементов в* (11), *что выполнены условия:*

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(x_n, \widehat{\lambda}) = 0,$$

$$(c) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j x_n\|^2_{Y_j} - \delta_j^2 \right) = 0.$$

Если при этом для всех $y = (y_{l+1}, ..., y_p) \in Y_{l+1} \times ... \times Y_p$ *существует* x_y *— решение экстремальной задачи*

$$(12) \qquad \sum_{j=1}^{l} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} + \sum_{j=l+1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|^2_{Y_j} \to \min, \quad x \in X,$$

то

$$(13) \qquad \widehat{\varphi}(y) = T x_y$$

— оптимальный метод восстановления и

$$(14) \qquad E(T, W, I, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}.$$

Доказательство. Покажем, что значения задачи (11) и задачи

$$(15) \qquad \|Tx\|^2_Z \to \max, \quad \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} \leq S,$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2,$$

совпадают и равны S. Действительно, для любого допустимого в (11) или в (15) элемента $x \in X$ имеем с учетом (a)

$$-\|Tx\|^2_Z \geq -\|Tx\|^2_Z + \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j x\|^2_{Y_j} - \delta_j^2 \right) \geq -S.$$

С другой стороны, используя последовательно (b) и (c), получаем, что

$$-\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(-\|Tx_n\|^2_Z + \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j (\|I_j x_n\|^2_{Y_j} - \delta_j^2) \right) = -S,$$

т.е. S — значение задач (11) и (15).

Оценка снизу. Для любого метода φ при всех $x \in W$ таких, что $\|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = l+1, \dots p$, имеем

$$2\|Tx\|_Z \le \|Tx - \varphi(0)\|_Z + \|T(-x) - \varphi(0)\|_Z \le 2e(T, W, I, \delta, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) \ge \sup_{\substack{x \in W \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=l+1,\dots p}} \|Tx\|_Z = \sqrt{S}.$$

Таким образом,

$$E(T, W, I, \delta) \ge \sqrt{S}. \tag{16}$$

Оценка сверху. Рассмотрим линейное пространство $E = Y_1 \times \ldots \times Y_p$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j}.$$

Тогда экстремальная задача (12) может быть переписана в виде

$$\|\widetilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 \to \min, \quad x \in X,$$

где $\widetilde{I} = (I_1, \dots, I_p)$, а $\widehat{y} = (0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_p)$. Если x_y — решение этой задачи, то нетрудно показать, что для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$(\widetilde{I}x_y - \widehat{y}, \widetilde{I}x)_E = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|\widetilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 + \|\widetilde{I}x_y - \widehat{y}\|_E^2. \tag{17}$$

Если $x \in W$, а $\widehat{y}$ таков, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = l+1, \dots, p$, то из (17) вытекает, что

$$\|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 \le \|\widetilde{I}x - \widehat{y}\|_E^2 = \sum_{j=1}^{l} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=l+1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \le S.$$

Полагая $z = x - x_y$, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le S.$$

Тем самым для метода (13) имеем

$$\|Tx - \widehat{\varphi}(y)\|_Z = \|Tz\|_Z \le \sup\{\|Tx\|_Z : \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le S\} = \sqrt{S}.$$

Учитывая (16), получаем равенство (14) и оптимальность метода (13). $\square$

В случае, если существует допустимый в (11) элемент $\widehat{x}$, на котором достигается минимум функции Лагранжа, из теоремы 7 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, ..., p$, *и допустимый в* (11) *элемент* $\widehat{x}$ *такие, что выполнены условия:*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) \geq 0 \ \forall x \in X, \\
&(b) \quad \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = 0, \\
&(c) \quad \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j \widehat{\lambda}\|^2_{Y_j} - \delta_j^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Тогда значение экстремальной задачи (11) *равно*

$$\sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Если при этом для всех $y = (y_{l+1}, ..., y_p) \in Y_{l+1} \times ... \times Y_p$ *существует* x_y — *решение экстремальной задачи* (12), *то оптимальный метод восстановления и погрешность оптимального восстановления задаются соответственно формулами* (13) *и* (14).

Сформулируем следствия из теоремы 7 для задач восстановления некоторых линейных операторов.

1. Пусть оператор $Q \colon X \to l_2$ задан равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \dots),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \dots, x_N$.

Положим

$$W = \{ x \in X : \|x\|_X \leq 1 \}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$ такой, что

$$\|I_N x - y\|_{l_2^N} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} \leq \delta$$

(здесь $I_N x = (x_1, \dots, x_N)$). В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi \colon l_2^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in l_2^N \\ \|I_N x - y\|_{l_2^N} \le \delta}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_2^N \to l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_2^N.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j |x_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} |x_j|^2 \le \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \le 1.$$

Положим $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$, и перепишем эту задачу так:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} u_j \le \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0. \tag{18}$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=1}^{N} (-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2 \nu_j) u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} (-\mu_j + \lambda_2 \nu_j) u_j,$$

где $u = \{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, а λ_1, λ_2 — множители Лагранжа. Тогда из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Если найдутся такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$, что для допустимой в задаче (18) последовательности $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ выполнены условия*

$$(a) \quad \min_{u_j \ge 0} \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{j=1}^{N} \widehat{u}_j - \delta^2 \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j - 1 \right) = 0,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (18), а ее значение равно $\widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2$. Если при этом для всех $y \in l_2^N$ существует решение x_y экстремальной задачи

$$\widehat{\lambda}_1 \|I_N x - y\|_{l_2^N}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|x\|_X^2 \to \min, \quad x \in X, \tag{19}$$

то

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2}, \tag{20}$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = Qx_y$$

является оптимальным.

2. Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора $Q\colon X \to l_\infty$, заданного равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \|x\|_X = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j| < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \ldots, x_N$.

Положим

$$W = \{\, x \in X : \|x\|_X \le 1 \,\}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$|x_j - y_j| \le \delta_j, \quad j = 1, ..., N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_\infty^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in l_\infty^N \\ |x_j - y_j| \le \delta_j,\ j=1,...,N}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}$$

(здесь $\delta = (\delta_1, ..., \delta_N)$, $I_N x = (x_1, \ldots, x_N)$).

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N \to l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi), \tag{21}$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_∞^N. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j |x_j|^2 \to \max, \quad |x_j|^2 \le \delta_j^2, \quad j = 1, ..., N, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \le 1.$$

Положим $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$, и перепишем эту задачу так:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j \to \max, \quad u_j \le \delta_j^2, \quad j = 1, ..., N, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0. \tag{22}$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u,\lambda,\lambda_1,...,\lambda_N)=\sum_{j=1}^{N}(-\mu_j+\lambda_j+\lambda\nu_j)u_j+\sum_{j=N+1}^{\infty}(-\mu_j+\lambda\nu_j)u_j,$$

где $u=\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда из следствия 1 вытекает

Следствие 3. *Если найдутся такие* $\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N\geq 0$, *что для допустимой в задаче* (22) *последовательности* $\widehat{u}=\{\widehat{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *выполнены условия*

$$(a)\quad \min_{u_j\geq 0}\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N)=\mathcal{L}(\widehat{u},\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N),$$

$$(b)\quad \sum_{j=1}^{N}\widehat{\lambda}_j\Big(\widehat{u}_j-\delta_j^2\Big)=0,\quad \widehat{\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\widehat{u}_j-1\Big)=0,$$

то $\widehat{u}$ *— решение задачи* (22), *а ее значение равно*

$$\sum_{j=1}^{N}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2+\widehat{\lambda}.$$

Если при этом для всех $y\in l_\infty^N$ *существует решение* x_y *экстремальной задачи*

$$\sum_{j=1}^{N}\widehat{\lambda}_j|x_j-y_j|^2+\widehat{\lambda}\|x\|_X^2\to\min,\quad x\in X, \tag{23}$$

то

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2+\widehat{\lambda}}, \tag{24}$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)=Qx_y$$

является оптимальным.

1.2. Обобщенное решение волнового уравнения для начальных данных, задаваемых функциями из L_2

Для решения задач, связанных с поиском оптимального метода восстановления решения волнового уравнения, требуется определить понятие обобщенного решения такого уравнения. Введем вначале понятие обобщенного решения гиперболического уравнения в частных производных (см., например, [10]).

Пусть D — некоторая ограниченная область n-мерного пространства R^n. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $R^{n+1}=R^n\times t\{-\infty<t<+\infty\}$ ограниченный цилиндр $Q_T=\{x\in D,\ 0<t<T\}$ с боковой поверхностью $\Gamma_T=\{x\in\partial D,\ 0<t<T\}$. Обозначим $D_\tau=\{x\in D,\ t=\tau\}$ сечение этого цилиндра плоскостью $t=$

τ, $0 \le \tau \le T$. В частности, D_0 — нижнее основание цилиндра, D_T — его верхнее основание.

В цилиндре Q_T рассматривается гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = g(x,t), \tag{25}$$

где $k(x) \in C^1(\bar{D})$, $a(x) \in C(\bar{D})$, $k(x) \ge k_0 = const > 0$, $g(x,t) \in L_2(Q_T)$.

Функция $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup D_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (25), на D_0 начальным условиям

$$u|_{t=0} = f, \tag{26}$$

$$u_t|_{t=0} = \varphi, \tag{27}$$

и на Γ_T граничному условию

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \tag{28}$$

называется *классическим решением* первой смешанной задачи для уравнения (25).

Известно [10], что если $u(x,t)$ является решением первой смешанной задачи, то для любой функции $v(x,t) \in H^1(Q_{T-\delta})$, $0 < \delta < T$, где $H^1(Q)$ — множество функций из $L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка, принадлежащие $L_2(Q)$, удовлетворяющей условиям

$$v|_{D_{T-\delta}} = 0, \;\; v|_{\Gamma_{T-\delta}} = 0,$$

функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_{T-\delta}} \Big(k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t\Big) dxdt = \int\limits_{D_0} \varphi v dx + \int\limits_{Q_{T-\delta}} gvdxdt. \tag{29}$$

С помощью этого тождества вводится понятие обобщенного решения первой смешанной задачи для уравнения (25). Пусть $g(x,t) \in L_2(Q_T)$, $f(x), \varphi(x) \in L_2(D)$. Тогда функция $u(x,t) \in H^1(Q_T)$ называется *обобщенным решением* в Q_T первой смешанной задачи (25) — (28), если она удовлетворяет начальному условию (26), граничному условию (28) и тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Big(k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t\Big) dxdt = \int\limits_{D_0} \varphi v dx + \int\limits_{Q_T} gvdxdt \tag{30}$$

при всех $v(x,t) \in H^1(Q_T)$, для которых выполнены условия

$$v|_{D_T} = 0, \;\; v|_{\Gamma_T} = 0.$$

Существование обобщенного решения доказывается с помощью метода Фурье. Пусть $v_1(x), v_2(x), \dots$ — ортонормированная в $L_2(D)$ система обобщенных собственных функций первой краевой задачи

$$\operatorname{div}(k\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \quad v|_D = 0, \tag{31}$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — последовательность соответствующих собственных значений. Тогда $v_1(x), v_2(x), \dots$ — ортонормированный базис в $L_2(D)$, $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, и $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Разложим $f(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x,t)$ в ряды Фурье по системе $v_1(x), v_2(x), \dots$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(x), \quad f_k = (f, v_k)_{L_2(D)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2_{L_2(D)};$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \quad \varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(D)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(D)};$$

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) v_k(x),$$

$$g_k(t) = \int_D g(x,t) v_k(x) dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2(t) = \int_D g^2(x,t) dx.$$

Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи (25) — (28) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) v_k(x), \tag{32}$$

где

$$U_k(t) = f_k \cos\sqrt{-\lambda_k}t + \frac{\varphi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \sin\sqrt{-\lambda_k}t$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t g_k(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau) d\tau.$$

Для решения задач, связанных с оптимальным восстановлением решения волнового уравнения, примем $D = [0,\pi]$, $Q_T = \{x \in (0,\pi),\ 0 < t < T\}$, $\Gamma_T = \{x = 0,\ 0 < t < T;\ x = \pi,\ 0 < t < T\}$.

Рассмотрим однородное волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{33}$$

с начальными условиями (26) и (27), где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат $L_2([0,\pi])$, и граничным условием

$$u(x,0) = u(\pi,0) = 0. \tag{34}$$

Функция $u(x,t) \in C^2(0 < x < \pi,\ 0 < t < T) \bigcup C^1(0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq t < T)$ будет называться *классическим решением* первой смешанной задачи для уравнения (33), если она удовлетворяет этому уравнению и условиям (26), (27) и (34).

Пусть $f(x), \varphi(x) \in L_2([0,\pi])$. Тогда функция $u(x,t) \in H^1(0 < x < \pi,\ 0 < t < T)$ называется *обобщенным решением* в $\{x \in (0,\pi),\ 0 < t < T\}$ первой смешанной задачи (33),(26), (27), (34), если она удовлетворяет начальному условию (26), граничному условию (34) и тождеству

$$\int_0^\pi dx \int_0^T \Big(u_t v_t - u_x v_x \Big) dt = \int_0^\pi \varphi v dx \tag{35}$$

при всех $v(x,t) \in H^1(0 < x < \pi,\ 0 < t < T)$, для которых выполнены условия

$$v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0, \quad v(x,T) = 0.$$

Ортонормированным базисом в $L_2([0,\pi])$ является система собственных функций первой краевой задачи

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v, \quad 0 < x < \pi, \quad v(0) = 0, \quad v(\pi) = 0,$$

а именно $v_k(x) = \sin kx$. Соответствующие им собственные значения $\lambda_k = -k^2$. Разложим $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье по системе $\sin x, \sin 2x, \dots$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k \sin kx, \quad f_k = (f, \sin kx)_{L_2([0,\pi])}, \quad \sum_{k=1}^\infty f_k^2 = \|f\|^2_{L_2([0,\pi])};$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k \sin kx, \quad \varphi_k = (\varphi, \sin kx)_{L_2([0,\pi])}, \quad \sum_{k=1}^\infty \varphi_k^2 = \|\varphi\|^2_{L_2([0,\pi])}.$$

Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи (33),(26), (27), (34) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty U_k(t) \sin kx, \tag{36}$$

где

$$U_k(t) = f_k \cos kt + \frac{\varphi_k}{k} \sin kt,$$

$$U_1(t) = f_1 + \varphi_1 t.$$

Глава 2. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным

2.1. Оптимальное восстановление линейного оператора мультипликаторного типа по неточным значениям первых N компонент

Рассмотрим задачу оптимального восстановления некоторого линейного оператора $Q\colon X \to l_2$, заданного равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \ldots, x_N$.

К задачам подобного вида сводится ряд задач об оптимальном восстановлении производных [12] и решений уравнений в частных производных [9], [11]. В перечисленных работах последовательность $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ обладала свойством монотонности, что в значительной степени облегчало поиск оптимального метода восстановления. Здесь рассматривается ситуация, когда на последовательность $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ накладываются менее ограничительные условия.

Перейдем к точной постановке задачи. Положим

$$W = \{\, x \in X : \|x\|_X \le 1 \,\}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$\|I_N x - y\|_{l_2^N} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} \le \delta$$

(здесь $I_N x = (x_1, \ldots, x_N)$). В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_2^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in l_2^N \\ \|I_N x - y\|_{l_2^N} \le \delta}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\inf_{\varphi\colon l_2^N\to l_2} e(Q,W,I_N,\delta,\varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_2^N.

Предположим, что $\nu_1<\ldots<\nu_N$, $\nu_{N+1}<\nu_{N+2}<\ldots$ и $\lim_{j\to+\infty}\mu_j/\nu_j=0$. Обозначим через e_j, $j=1,2,\ldots,$ — стандартный базис в l_2

$$(e_j)_k=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\qquad k=1,2,\ldots.$$

Введем следующие обозначения

$$A=\max_{1\le j\le N}\frac{\mu_j}{\nu_j},\qquad B=\max_{j>N}\frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Пусть $1\le p\le N$, $q>N$ и $p\le r\le N$ таковы, что

$$\frac{\mu_p}{\nu_p}=A,\qquad \frac{\mu_q}{\nu_q}=B,\qquad \mu_r-B\nu_r=\max_{p\le j\le N}(\mu_j-B\nu_j)$$

(для однозначности будем считать, что p — наибольшее, а q и r — наименьшие из чисел, обладающих соответствующим свойством). Пусть, кроме того, s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k<s_{k+1}\le r$ и

$$\frac{\mu_{s_{k+1}}-\mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}}-\nu_{s_k}}=\max_{s_k<j\le r}\frac{\mu_j-\mu_{s_k}}{\nu_j-\nu_{s_k}},\qquad k=0,1,\ldots,m-1,$$

где $s_0=p$, $s_m=r$.

Начнем с одного вспомогательного результата, описывающего свойства последовательностей $\{\mu_{s_k}\}$ и $\{\nu_{s_k}\}$.

Лемма 1. *Последовательности*

$$\left\{\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\right\}\quad и\quad \left\{\frac{\mu_{s_{k+1}}-\mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}}-\nu_{s_k}}\right\}$$

строго монотонно убывают и при всех $1\le j<s_k$

$$\frac{\mu_{s_k}-\mu_j}{\nu_{s_k}-\nu_j}\ge\frac{\mu_{s_k}-\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k}-\nu_{s_{k-1}}}. \tag{37}$$

Доказательство. Докажем, что последовательность $\{\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\}$ строго монотонно убывает. Из определения p следует, что

$$\frac{\mu_p}{\nu_p}=\frac{\mu_{s_0}}{\nu_{s_0}}>\frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}$$

для всех $i\ge1$. В предположении, что

$$\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}}>\frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}} \tag{38}$$

для всех $i \geq k$, докажем, что

$$\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} > \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}} \tag{39}$$

для всех $i \geq k+1$. Из определения s_k следует, что для всех $i \geq k+1$

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} > \frac{\mu_{s_i} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_i} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Отсюда

$$\mu_{s_k}\nu_{s_i} - \mu_{s_k}\nu_{s_{k-1}} - \mu_{s_{k-1}}\nu_{s_i} > \mu_{s_i}\nu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}\nu_{s_k} - \mu_{s_i}\nu_{s_{k-1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\nu_{s_k}\nu_{s_i}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right) > \nu_{s_i}\nu_{s_{k-1}}&\left(\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right)\\ &- \nu_{s_{k-1}}\nu_{s_k}\left(\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} - \frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\right).\end{aligned}$$

В силу (38) и того, что $\nu_{s_i} > \nu_{s_k}$, имеем

$$\begin{aligned}\nu_{s_k}\nu_{s_i}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right) &> \nu_{s_k}\nu_{s_{k-1}}\left(\frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}} - \frac{\mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k-1}}} + \frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}}\right)\\ &= \nu_{s_k}\nu_{s_{k-1}}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_i}}{\nu_{s_i}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, выполнено неравенство (39).

Из выбора последовательности s_k следует, что

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_{k-1}}} < \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Отсюда

$$\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k-1}} < (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\frac{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k} &= (\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k-1}}) - (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\\ &< (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\left(\frac{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} - 1\right) = (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\frac{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} < \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Для доказательства неравенства (37) покажем сначала, что

$$\frac{\mu_{s_k} - \mu_j}{\nu_{s_k} - \nu_j} \geq \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} \tag{40}$$

при $s_{k-1} \le j < s_k$. Из определения s_k вытекает, что

$$\frac{\mu_j - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_j - \nu_{s_{k-1}}} \le \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Следовательно,

$$\mu_j \le \mu_{s_{k-1}} + (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\frac{\nu_j - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.$$

Тем самым

$$\begin{aligned}\mu_{s_k} - \mu_j \ge \mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}} - (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\frac{\nu_j - \nu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}} \\ = (\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}})\frac{\nu_{s_k} - \nu_j}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает (40). Пусть $l-1 < j < l,\ l \le s_{k-1}$. Тогда в силу монотонного убывания $\frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}$

$$\mu_{s_k} - \mu_j = \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}(\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}) + \ldots + \frac{\mu_{s_l} - \mu_j}{\nu_{s_l} - \nu_j}(\nu_{s_l} - \nu_j) \ge \frac{\mu_{s_k} - \mu_{s_{k-1}}}{\nu_{s_k} - \nu_{s_{k-1}}}(\nu_{s_k} - \nu_j),$$

откуда вытекает (40). □

Положим

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} \right\}, \quad k = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_j}{\nu_j} > B \right\}.$$

Если нанести на плоскость точки (ν_j, μ_j), то геометрический смысл введенных величин виден из рис. 1, на котором $m = 3$, а D_1 — область, в которую попадают точки из множества J_1.

Теорема 8. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_q}{\nu_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(i) *при* $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\nu_p}}$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_p}{\nu_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(ii) *при* $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1,$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_{s_k}\frac{\nu_{s_{k+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} + \mu_{s_{k+1}}\frac{1 - \delta^2\nu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}},$$

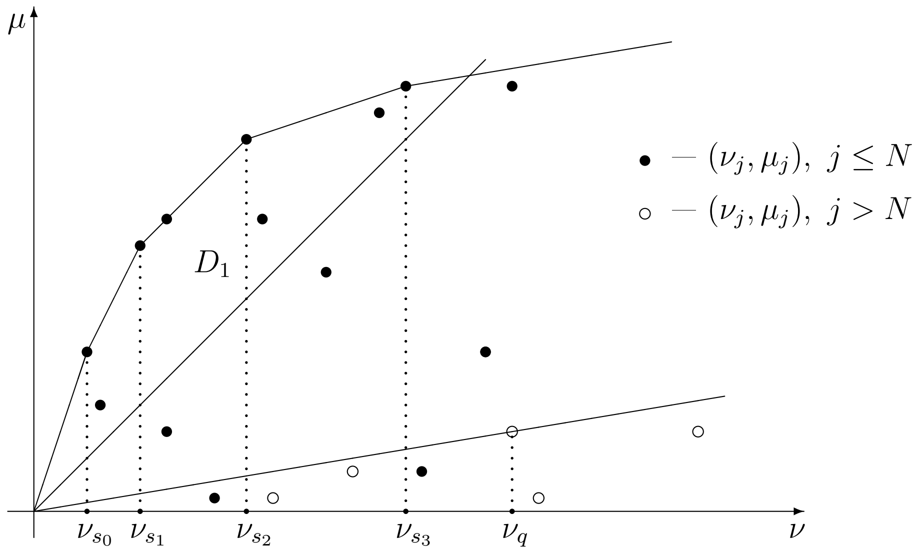

Рис. 1.

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_k} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}\nu_j\right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный;

(*iii*) *при* $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_r\delta^2 + \mu_q\frac{1-\delta^2\nu_r}{\nu_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_m} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_q}{\mu_r\nu_q - \mu_q\nu_r}\nu_j\right)^{-1} y_j e_j$$

— оптимальный.

Доказательство теоремы 8. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j |x_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} |x_j|^2 \le \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \le 1.$$

Положим $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$, и перепишем эту задачу так:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} u_j \le \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0. \tag{41}$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=1}^{N}(-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j)u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty}(-\mu_j + \lambda_2\nu_j)u_j,$$

где $u = \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, а λ_1, λ_2 — множители Лагранжа.

Воспользуемся результатом следствия 1 и сформулируем экстремальную задачу (19) для рассматриваемого случая.

Поскольку информационный оператор $I_N x = (x_1, \ldots x_N)$,

$$\|I_N x - y\|^2_{l_2^N} = \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2,$$

$$\|x\|^2_X = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j x_j^2,$$

получаем:

$$\widehat{\lambda}_1\|I_N x - y\|^2_{l_2^N} + \widehat{\lambda}_2\|x\|^2 = \widehat{\lambda}_1 \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2 + \widehat{\lambda}_2 \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j x_j^2 =$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\widehat{\lambda}_1|x_j - y_j|^2 + \widehat{\lambda}_2\nu_j x_j^2\right) + \widehat{\lambda}_2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \nu_j x_j^2.$$

Следовательно, задача (19) может быть записана в виде

(42)

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N}\left(\widehat{\lambda}_1(x_j - y_j)^2 + \widehat{\lambda}_2\nu_j x_j^2\right) + \widehat{\lambda}_2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \nu_j x_j^2 \to \min, \quad x \in X.$$

Найдем ее решение при фиксированных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 2\widehat{\lambda}_1(x_j - y_j) + 2\widehat{\lambda}_2\nu_j x_j = 0,$$

откуда

$$x_j = \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j} y_j.$$

Следовательно, решение задачи (42) имеет вид:

$$x_y = \sum_{j=1}^{N} \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j} y_j e_j.$$

Поэтому достаточно найти $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$ и допустимую в (41) последовательность $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которых будут выполнены условия (a) и (b). При этом метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j} y_j e_j \tag{43}$$

будет оптимальным.

Пусть $B \geq A$. Положим $\widehat{\lambda}_1 = 0$,

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_q}{\nu_q}, \quad \widehat{u}_q = \frac{1}{\nu_q}, \quad \widehat{u}_j = 0, \ j \neq q.$$

Покажем, что последовательность $\{\widehat{u}_j\}$ — допустимая.

Действительно, $\widehat{u}_j = 0, \ j = 1, \dots N$, поэтому $\sum\limits_{j=1}^{N} \widehat{u}_j = 0 \leq \delta^2$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j = \nu_q \frac{1}{\nu_q} = 1.$$

Проверим выполнение условий (b).

$$\widehat{\lambda}_1 = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{j=1}^{N} \widehat{u}_j - \delta^2 \right) = 0,$$

$$\widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j - 1 \right) = \widehat{\lambda}_2 \cdot 0 = 0$$

— условия (b) выполнены.

Убедимся в выполнении условия (a). Имеем

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\mu_j + \frac{\mu_q}{\nu_q} \nu_j \right) u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \left(\frac{\mu_q}{\nu_q} - \frac{\mu_j}{\nu_j} \right) u_j \geq 0,$$

так как

$$B = \frac{\mu_q}{\nu_q} \geq \max_{j \in N} \frac{\mu_j}{\nu_j} = A.$$

В силу того, что

$$\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \nu_q \left(\frac{\mu_q}{\nu_q} - \frac{\mu_q}{\nu_q} \right) \frac{1}{\nu_q} = 0,$$

условие (a) выполнено.

Пусть $B < A$. Начнем со случая (i). Положим $\widehat{\lambda}_1 = 0$,

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_p}{\nu_p}, \quad \widehat{u}_p = \frac{1}{\nu_p}, \quad \widehat{u}_j = 0, \ j \neq p.$$

Здесь также легко проверяется, что последовательность $\{\widehat{u}_j\}$ — допустимая и выполнены условия (b). Для этого случая

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\mu_j + \frac{\mu_p}{\nu_p} \nu_j \right) u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \left(\frac{\mu_p}{\nu_p} - \frac{\mu_j}{\nu_j} \right) u_j \geq 0,$$

так как

$$\frac{\mu_p}{\nu_p} = \max_{j \in N} \frac{\mu_j}{\nu_j} = A > B = \max_{j > N} \frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Поскольку $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, условие (a) выполнено.

Перейдем к случаю (ii). Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \le \delta < \frac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}}. \tag{44}$$

Положим $\widehat{u}_j = 0$ при $j \ne s_k, s_{k+1}$, а $\widehat{u}_{s_k}$ и $\widehat{u}_{s_{k+1}}$ выберем из условия

$$\widehat{u}_{s_k} + \widehat{u}_{s_{k+1}} = \delta^2, \tag{45}$$

$$\nu_{s_k}\widehat{u}_{s_k} + \nu_{s_{k+1}}\widehat{u}_{s_{k+1}} = 1. \tag{46}$$

Тогда

$$\widehat{u}_{s_k} = \frac{\nu_{s_{k+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}, \quad \widehat{u}_{s_{k+1}} = \frac{1 - \nu_{s_k}\delta^2}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}.$$

В силу (44) и (45) последовательность $\{\widehat{u}_j\}$ — допустимая в задаче (18). Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \mu_{s_k} - \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\nu_{s_k}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}.$$

Покажем сначала, что $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 > 0$. Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} = \frac{\nu_{s_k}\nu_{s_{k+1}}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\left(\frac{\mu_{s_k}}{\nu_{s_k}} - \frac{\mu_{s_{k+1}}}{\nu_{s_{k+1}}}\right) > 0,$$

так как по лемме 1 последовательность $\{\mu_{s_k}/\nu_{s_k}\}$ монотонно убывает. Из определения r следует, что $\mu_r - B\nu_r > \mu_{s_{m-1}} - B\nu_{s_{m-1}}$. Тем самым, поскольку $s_m = r$,

$$\frac{\mu_{s_m} - \mu_{s_{m-1}}}{\nu_{s_m} - \nu_{s_{m-1}}} > B.$$

Из монотонного убывания последовательности

$$\left\{\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\right\}$$

вытекает, что

$$\widehat{\lambda}_2 > B \ge 0. \tag{47}$$

Из (45) вытекает, что условие (b) выполнено. Докажем, что условие (a) тоже выполнено. Покажем, что при всех $u_j \ge 0$

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \ge 0. \tag{48}$$

Если $j > N$, то, учитывая (47),

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_2\nu_j = \nu_j\left(\widehat{\lambda}_2 - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right) > \nu_j\left(B - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right) \ge 0.$$

Если $s_k \le j \le r$, то

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j = (\nu_j - \nu_{s_k})\left(\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} - \frac{\mu_j - \mu_{s_k}}{\nu_j - \nu_{s_k}}\right) \ge 0$$

в силу определения s_k. При $r \le j \le N$ в силу определения r

$$\mu_j - \mu_{s_k} = \frac{\mu_j - \mu_r}{\nu_j - \nu_r}(\nu_j - \nu_r) + \frac{\mu_r - \mu_{s_{m-1}}}{\nu_r - \nu_{s_{m-1}}}(\nu_r - \nu_{s_{m-1}}) + \ldots$$

$$+\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}(\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}) \le \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}(\nu_j - \nu_{s_k}),$$

откуда

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j = (\nu_j - \nu_{s_k})\left(\frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}} - \frac{\mu_j - \mu_{s_k}}{\nu_j - \nu_{s_k}}\right) \ge 0.$$

При $1 \le j < s_k$, учитывая (37), имеем

$$-\mu_j + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\nu_j = (\nu_{s_k} - \nu_j)\left(\frac{\mu_{s_k} - \mu_j}{\nu_{s_k} - \nu_j} - \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}\right) \ge 0.$$

Тем самым неравенство (48) доказано, а так как $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, то доказано и выполнение условия (a). Таким образом, подставляя $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ в (20) и (43), получаем погрешность оптимального восстановления и оптимальность метода

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j \left(1 + \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}} - \mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}\nu_j\right)^{-1} y_j e_j.$$

Покажем, что метод, в котором суммирование берется не по всем $1 \le j \le N$, а лишь из множества J_k, тоже будет оптимальным. Пусть

$$J_k = \{i_1, \ldots, i_{\widetilde{N}}\}.$$

Рассмотрим ту же задачу оптимального восстановления, но с информационным оператором

$$I_{J_k}x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{\widetilde{N}}}).$$

Из леммы 1 вытекает, что при всех $j = 0, 1, \ldots, k$

$$\frac{\mu_{s_j}}{\nu_{s_j}} > \frac{\mu_{s_j} - \mu_{s_{j-1}}}{\nu_{s_j} - \nu_{s_{j-1}}} > \frac{\mu_{s_{k+1}} - \mu_{s_k}}{\nu_{s_{k+1}} - \nu_{s_k}}.$$

Поэтому для нового информационного оператора I_{J_k} последовательность s_j, $j = 0, 1, \ldots, \widetilde{m}$, $\widetilde{m} \ge k$, останется без изменений. Далее, возможны два случая: $\widetilde{m} > k$ и $\widetilde{m} = k$. Рассмотрим первый из них (второй будет вытекать из аналогичных рассуждений для случая (iii)). По уже доказанному погрешность оптимального восстановления в случае, когда

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_{s_{k+1}}}} \le \delta < \frac{1}{\sqrt{\nu_{s_k}}},$$

зависит лишь от двух точек (μ_{s_k}, ν_{s_k}) и $(\mu_{s_{k+1}}, \nu_{s_{k+1}})$. Поэтому

$$E(Q, W, I_{J_k}, \delta) = E(Q, W, I_N, \delta),$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{y})=\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\eta_{i_j}\left(1+\frac{\mu_{s_{k+1}}-\mu_{s_k}}{\mu_{s_k}\nu_{s_{k+1}}-\mu_{s_{k+1}}\nu_{s_k}}\nu_{i_j}\right)^{-1}y_{i_j}e_{i_j},$$

$$\widetilde{y}=(y_{i_1},\ldots,y_{i_{\widetilde{N}}}),$$

— оптимальный. Оценим этот метод для случая, когда задан информационный оператор I_N. Пусть $x\in W$, $y\in l_2^N$ и $\|I_Nx-y\|_{l_2^N}\le\delta$. Тогда и $\|I_{J_k}x-\widetilde{y}\|_{l_2^{\widetilde{N}}}\le\delta$. Тем самым

$$\|Q-\widehat{\varphi}(y)\|_{l_2}=\|Q-\widehat{\varphi}(\widetilde{y})\|_{l_2}\le E(Q,W,I_{J_k},\delta)=E(Q,W,I_N,\delta).$$

Это означает, что метод $\widehat{\varphi}$ является оптимальным и для информационного оператора I_N.

В случае (iii) положим

$$\widehat{\lambda}_1=\mu_r-\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_r,\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{\mu_q}{\nu_q},\quad \widehat{u}_r=\delta^2,\quad \widehat{u}_q=\frac{1-\delta^2\nu_r}{\nu_q},$$

$$\widehat{u}_j=0,\ j\ne r,q.$$

Из определения r вытекает, что

$$\widehat{\lambda}_1\ge\mu_p-B\nu_p=\nu_p(A-B)>0.$$

Легко убедиться в допустимости последовательности $\{\widehat{u}_j\}$ и в выполнении условия (b). Поскольку и здесь $\mathcal{L}(\widehat{u},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0$, то для доказательства выполнения условия (a) остается доказать, что при всех $u_j\ge0$ имеет место неравенство (48). Функция Лагранжа в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\sum_{j=1}^{N}\left(-\mu_j+\mu_r-\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_r+\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right)u_j$$

$$+\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(-\mu_j+\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right)u_j=\sum_{j=1}^{N}\left(\left(\mu_r-\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_r\right)-\left(\mu_j-\frac{\mu_q}{\nu_q}\nu_j\right)\right)u_j$$

$$+\sum_{j=N+1}^{\infty}\nu_j\left(\frac{\mu_q}{\nu_q}-\frac{\mu_j}{\nu_j}\right)u_j.$$

Каждое слагаемое в первой сумме неотрицательно в силу определения r, а каждое слагаемое второй суммы — в силу определения q. Подставляя $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ в (20) и (43), получаем погрешность оптимального восстановления и оптимальность метода

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j=1}^{N}\eta_j\left(1+\frac{\mu_q}{\mu_r\nu_q-\mu_q\nu_r}\nu_j\right)^{-1}y_je_j. \tag{49}$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при доказательстве случая (ii), показывают, что в методе (49) можно отбросить точки $(\nu_j, \mu_j) \notin J_m$. При этом полученный метод тоже будет оптимальным, а число используемых исходных данных, вообще говоря, сократится. □

2.2. Оптимальное восстановление решения уравнения гиперболического типа с погрешностью, заданной в метрике l_2

Пусть D — некоторая ограниченная область n-мерного пространства R^n. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $R^{n+1} = R^n \times t\{-\infty < t < +\infty\}$ ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ с боковой поверхностью $\Gamma_T = \{x \in \partial D,\ 0 < t < T\}$. Обозначим $D_\tau = \{x \in D,\ t = \tau\}$ сечение этого цилиндра плоскостью $t = \tau,\ 0 \le \tau \le T$. В частности, D_0 — нижнее основание цилиндра, D_T — его верхнее основание.

Рассмотрим в цилиндре Q_T однородное гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = 0, \tag{50}$$

где $k(x) \in C^1(\bar{D}),\ a(x) \in C(\bar{D}),\ k(x) \ge k_0 = const > 0$, с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f, \tag{51}$$

где $f(x) \in L_2(D)$,

$$u_t|_{t=0} = 0 \tag{52}$$

и граничным условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0. \tag{53}$$

Пусть $v_1(x), v_2(x), \ldots$ — ортонормированная в $L_2(D)$ система обобщенных собственных функций первой краевой задачи

$$\operatorname{div}(k\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \quad v|_{\partial D} = 0, \tag{54}$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность соответствующих собственных значений. Тогда $v_1(x), v_2(x), \ldots$ — ортонормированный базис в $L_2(D)$, $\lambda_j \to -\infty$ при $j \to \infty$, и $0 > \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots$. Разложим $f(x)$ в ряд Фурье по системе $v_1(x), v_2(x), \ldots$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j v_j(x), \quad f_j = (f, v_j)_{L_2(D)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} f_j^2 = \|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи (50) — (53) имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}U_j(t)v_j(x), \tag{55}$$

где

$$U_j(t)=f_j\cos\sqrt{-\lambda_j}t.$$

При этом функция $u(x,t)\in H^1(Q_T)$. Предположим, что $f(x)\in W_2^{\gamma}(D)$, где

$$W_2^{\gamma}(D)=\{\,f(x)\in L_2(D):\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j|f_j|^2\le 1\}.$$

Полагаем, что $\gamma_j>0,\quad \gamma_j\to\infty$ при $j\to\infty$.

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции f, причем погрешность задания этих коэффициентов определяется условием

$$\sum_{j=1}^{N}|f_j-y_j|^2\le\delta^2,\quad \delta>0. \tag{56}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (50) — (53) в момент времени T на классе $W_2^{\gamma}(D)$ по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(\cdot)\in W_2^{\gamma}(D)$ сопоставляет множество векторов $y=(y_1,\dots,y_N)$, удовлетворяющих условию (56).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon\mathbb{R}^N\to L_2(D)$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T,W_2^{\gamma}(D),F_\delta^N,\varphi)=\sup_{\substack{f(x)\in W_2^{\gamma}(D),\ y=(y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{R}^N\\ \sum_{j=1}^{N}|f_j(f)-y_j|^2\le\delta^2}}\|u(x,T)-\varphi(y)(x)\|_{L_2(D)}.$$

Величина

$$E(T,W_2^{\gamma}(D),F_\delta^N)=\inf_{\varphi\colon\mathbb{R}^N\to L_2(D)}e(T,W_2^{\gamma}(D),F_\delta^N,\varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Введем обозначения:

$$A=\max_{1\le j\le N}\frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_j}T}{\gamma_j}=\frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_p}T}{\gamma_p},$$

$$B=\max_{k>N}\frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_j}T}{\gamma_j}=\frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_q}T}{\gamma_q},$$

$$r: \quad \cos^2\sqrt{-\lambda_r}T - B\gamma_r = \max_{p\le j\le N}(\cos^2\sqrt{-\lambda_j}T - B\gamma_j).$$

Пусть s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k < s_{k+1} \le r$ и

$$\frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}}T - \cos^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T}{\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k}} = \max_{s_k<j\le r}\frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_j}T - \cos^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T}{\gamma_j - \gamma_{s_k}},$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$.

Положим

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N}\cap[1,N] : \frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_j}T}{\gamma_j} > \frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}}T - \cos^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T}{\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k}} \right\},$$

$$k = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N}\cap[1,N] : \frac{\cos^2\sqrt{-\lambda_j}T}{\gamma_j} > B \right\}.$$

Теорема 9. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|\cos\sqrt{-\lambda_q}T|}{\sqrt{\gamma_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(*i*) *при* $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}}$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|\cos\sqrt{-\lambda_p}T|}{\sqrt{\gamma_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(*ii*) *при* $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_{k+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \sqrt{\cos^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T\frac{1-\gamma_{s_{k+1}}\delta^2}{\gamma_{s_{k+1}}-\gamma_{s_k}} + \cos^2\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}}T\frac{1-\delta^2\gamma_{s_k}}{\gamma_{s_{k+1}}-\gamma_{s_k}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j\in J_k}\cos\sqrt{-\lambda_j}T\left(1 + \frac{\cos^2\sqrt{\lambda_{s_{k+1}}}T - \cos^2\sqrt{\lambda_{s_k}}T}{\gamma_{s_{k+1}}\cos^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T - \gamma_{s_k}\cos^2\sqrt{\lambda_{s_{k+1}}}T}\gamma_j\right)^{-1} y_j v_j(x)$$

— оптимальный;

(iii) при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_r}}$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 \cos^2 \sqrt{-\lambda_r} T + \cos^2 \sqrt{-\lambda_q} T \frac{1 - \delta^2 \gamma_r}{\gamma_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) =$$

$$\sum_{j \in J_m} \cos \sqrt{-\lambda_j} T \left(1 + \frac{\gamma_j \cos^2 \sqrt{-\lambda_q} T}{\gamma_q \cos^2 \sqrt{-\lambda_r} T - \gamma_r \cos^2 \sqrt{-\lambda_q} T} \right)^{-1} y_j v_j(x)$$

— оптимальный.

Доказательство. Определим множество F следующим образом:

$$F = \left\{ f = (f_1, f_2, \ldots) : \|f\|_F = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j |f_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

и рассмотрим оператор $Q : F \to l_2$, заданный равенством:

$$Qf = (f_1 \cos \sqrt{-\lambda_1} T, f_2 \cos \sqrt{-\lambda_2} T, \ldots).$$

Отметим, что последовательность $\cos^2 \sqrt{-\lambda_j} T$ — немонотонная, но ограниченная, а последовательность $\gamma_j \to \infty$ при $j \to \infty$, следовательно, $\dfrac{\cos^2 \sqrt{-\lambda_j} T}{\gamma_j} \to 0$ при $j \to \infty$. Поэтому, положив $\mu_j = \cos^2 \sqrt{-\lambda_j} T$, $\nu_j = \gamma_j$, можно воспользоваться результатами теоремы 8 и получить соответствующие выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода в каждом диапазоне значений δ.

□

Определим теперь оптимальную погрешность восстановления решения уравнения (50) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \tag{57}$$

$$u_t|_{t=0} = f(x), \tag{58}$$

где $f(x) \in L_2(D)$, и граничным условием (53). Разложим $f(x)$ в ряд Фурье по системе $v_1(x), v_2(x), \ldots$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j v_j(x), \quad f_j = (f, v_j)_{L_2(D)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} f_j^2 = \|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи для уравнения (50) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\sqrt{-\lambda_j}} \sin\sqrt{-\lambda_j}t\ v_j(x).$$

При этом функция $u(x,t) \in H^1(Q_T)$, $f(x) \in W_2^\gamma(D)$.

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции f, причем погрешность задания этих коэффициентов определяется условием (56).

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (50), (57), (58), (53) в момент времени T на классе $W_2^\gamma(D)$ по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(\cdot) \in W_2^\gamma(D)$ сопоставляет множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$, удовлетворяющих условию (56).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(D)$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(x)\in W_2^\gamma(D),\ y=(y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{R}^N \\ \sum_{j=1}^N |f_j(f)-y_j|^2\le\delta^2}} \|u(x,T) - \varphi(y)(x)\|_{L_2(D)}.$$

Величина

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N\to L_2(D)} e(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Введем обозначения:

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_j}T}{-\lambda_j\gamma_j} = \frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_p}T}{-\lambda_p\gamma_p},$$

$$B = \max_{j>N} \frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_j}T}{-\lambda_j\gamma_j} = \frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_q}T}{-\lambda_q\gamma_q},$$

$$r: \quad \frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_r}T}{-\lambda_r} + B\gamma_r = \max_{p\le j\le N}\left(\frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_j}T}{-\lambda_j} + B\gamma_j\right).$$

Пусть s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k < s_{k+1} \le r$ и

$$\frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T\lambda_{s_{k+1}} - \sin^2\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}}T\lambda_{s_k}}{\lambda_{s_k}\lambda_{s_{k+1}}(\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k})} =$$

$$\max_{s_k<j\le r} \frac{\sin^2\sqrt{-\lambda_{s_k}}T\lambda_j - \sin^2\sqrt{-\lambda_j}T\lambda_{s_k}}{\lambda_j\lambda_{s_k}(\gamma_j - \gamma_{s_k})},$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$.

Положим

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\sin^2 \sqrt{-\lambda_j} T}{-\lambda_j \gamma_j} > \frac{\lambda_{s_{k+1}} \sin^2 \sqrt{-\lambda_{s_k}} T - \lambda_{s_k} \sin^2 \sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}} T}{\lambda_{s_k} \lambda_{s_{k+1}} (\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k})} \right\},$$

$$k = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\sin^2 \sqrt{-\lambda_j} T}{-\lambda_j \gamma_j} > B \right\}.$$

Теорема 10. *При $B \geq A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|\sin \sqrt{-\lambda_q} T|}{\sqrt{-\lambda_q \gamma_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный. Если $B < A$, то

(*i*) *при $\delta \geq \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}}$*

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|\sin \sqrt{-\lambda_p} T|}{\sqrt{-\lambda_p \gamma_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный;

(*ii*) *при $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_{k+1}}}} \leq \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,*

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{\sin^2 \sqrt{-\lambda_{s_k}} T}{-\lambda_{s_k}} \frac{1 - \gamma_{s_{k+1}} \delta^2}{\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k}} - \frac{\sin^2 \sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}} T}{\lambda_{s_{k+1}}} \frac{1 - \delta^2 \gamma_{s_k}}{\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_k} \frac{\sin \sqrt{-\lambda_j} T}{\sqrt{-\lambda_j}} \left(1 + \frac{\lambda_{s_{k+1}} \sin^2 \sqrt{\lambda_{s_k}} T - \lambda_{s_k} \sin^2 \sqrt{\lambda_{s_{k+1}}} T}{\gamma_{s_{k+1}} \lambda_{s_{k+1}} \sin^2 \sqrt{-\lambda_k} T - \gamma_{s_k} \lambda_{s_k} \sin^2 \sqrt{\lambda_{s_{k+1}}} T} \gamma_j \right)^{-1} y_j v_j(x)$$

— оптимальный;

(*iii*) *при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_r}}$*

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \sqrt{-\delta^2 \frac{\sin^2 \sqrt{-\lambda_r} T}{\lambda_r} - \frac{\sin^2 \sqrt{-\lambda_q} T}{\lambda_q} \frac{1 - \delta^2 \gamma_r}{\gamma_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_m} \frac{\sin \sqrt{-\lambda_j} T}{\sqrt{-\lambda_j}} \left(1 + \frac{\gamma_j \lambda_r \sin^2 \sqrt{-\lambda_q} T}{\gamma_q \lambda_q \sin^2 \sqrt{-\lambda_r} T - \gamma_r \lambda_r \sin^2 \sqrt{-\lambda_q} T} \right)^{-1} y_j v_j(x)$$

— оптимальный.

Доказательство. Обозначим $u_j = f_j^2(f)$ и определим множество F и оператор Q таким же образом, как при доказательстве теоремы 9. Тогда, поскольку последовательность $\dfrac{\sin^2\sqrt{-\lambda_j}T}{-\lambda_j}$ — немонотонная, но ограниченная, а последовательность $\gamma_j \to \infty$ при $j \to \infty$, получаем, что $\dfrac{\sin^2\sqrt{-\lambda_j}T}{-\lambda_j\gamma_j} \to 0$ при $j \to \infty$. Поэтому, положив $\mu_j = \dfrac{\sin^2\sqrt{-\lambda_j}T}{-\lambda_j}$, $\nu_j = \gamma_j$, можно воспользоваться результатами теоремы 8 и получить соответствующие выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода в каждом диапазоне значений δ.

□

Рассмотрим в цилиндре Q_T неоднородное гиперболическое уравнение со стационарной неоднородностью

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = g(x), \tag{59}$$

где $k(x) \in C^1(\bar{D}),\ a(x) \in C(\bar{D}),\ k(x) \geq k_0 = const > 0$, с нулевыми начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \tag{60}$$

$$u_t|_{t=0} = 0 \tag{61}$$

и граничным условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0. \tag{62}$$

Разложим $g(x)$ в ряд Фурье по системе $v_1(x), v_2(x), \ldots$:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j v_j(x), \quad g_j = (g, v_j)_{L_2(D)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} g_j^2 = \|g\|^2_{L_2(D)}.$$

Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи (59) — (62) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_k} g_k (1 - \cos\sqrt{-\lambda_k}t)\ v_j(x). \tag{63}$$

При этом функция $u(x,t) \in H^1(Q_T)$. Предположим, что $g(x) \in W_2^{\gamma}(D)$.

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции g, причем погрешность задания этих коэффициентов определяется условием

$$\sum_{j=1}^{N} |g_j - y_j|^2 \leq \delta^2, \quad \delta > 0. \tag{64}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (59) — (62) в момент времени T на классе $W_2^\gamma(D)$ по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $g(\cdot)\in W_2^\gamma(D)$ сопоставляет множество векторов $y=(y_1,\dots,y_N)$, удовлетворяющих условию (64).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(D)$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{g(x)\in W_2^\gamma(D),\ y=(y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{R}^N\\ \sum_{j=1}^N |g_j-y_j|^2\le\delta^2}} \|u(x,T)-\varphi(y)(x)\|_{L_2(D)}.$$

Величина

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N\to L_2(D)} e(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Введем обозначения:

$$A=\max_{1\le j\le N}\frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2\gamma_j}=\frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_p}T)^2}{\lambda_p^2\gamma_p},$$

$$B=\max_{k>N}\frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2\gamma_j}=\frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_q}T)^2}{\lambda_q^2\gamma_q},$$

$$r:\quad \frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_r}T)^2}{\lambda_r^2}-B\gamma_r=\max_{p\le j\le N}\Big(\frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2}-B\gamma_j\Big).$$

Пусть s_{k+1} — наибольшее из чисел таких, что $s_k<s_{k+1}\le r$ и

$$\frac{\lambda_{s_k}^2(1-\cos\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}}T)^2-\lambda_{s_{k+1}}^2(1-\cos\sqrt{-\lambda_{s_k}}T)^2}{\lambda_{s_k}^2\lambda_{s_{k+1}}^2(\gamma_{s_{k+1}}-\gamma_{s_k})}=$$

$$\max_{s_k<j\le r}\frac{\lambda_{s_k}^2(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2-\lambda_j^2(1-\cos\sqrt{-\lambda_{s_k}}T)^2}{\lambda_{s_k}^2\lambda_j^2(\gamma_j-\gamma_{s_k})},$$

$$k=0,1,\dots,m-1,$$

где $s_0=p$, $s_m=r$.

Положим

$$J_k=$$

$$\left\{j\in\mathbb{N}\cap[1,N]:\frac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2\gamma_j}>\frac{\lambda_{s_k}^2(1-\cos\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}}T)^2-\lambda_{s_{k+1}}^2(1-\cos\sqrt{-\lambda_{s_k}}T)^2}{\lambda_{s_k}^2\lambda_{s_{k+1}}^2(\gamma_{s_{k+1}}-\gamma_{s_k})}\right\}$$

$$k=0,\dots,m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{(1 - \cos\sqrt{-\lambda_j} T)^2}{\lambda_j^2 \gamma_j} > B \right\}.$$

Теорема 11. *При* $B \geq A$ *для всех* $\delta > 0$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|1 - \cos\sqrt{-\lambda_q} T|}{-\lambda_q \sqrt{\gamma_q}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ *— оптимальный. Если* $B < A$, *то*

(*i*) *при* $\delta \geq \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}}$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) = \frac{|1 - \cos\sqrt{-\lambda_p} T|}{-\lambda_p \sqrt{\gamma_p}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ *— оптимальный;*

(*ii*) *при* $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_{k+1}}}} \leq \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_{s_k}}}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \cos\sqrt{-\lambda_{s_k}} T)^2}{\lambda_{s_k}^2} \frac{1 - \gamma_{s_{k+1}} \delta^2}{\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k}} + \frac{(1 - \cos\sqrt{-\lambda_{s_{k+1}}} T)^2}{\lambda_{s_{k+1}}^2} \frac{1 - \delta^2 \gamma_{s_k}}{\gamma_{s_{k+1}} - \gamma_{s_k}}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_k} \frac{1 - \cos\sqrt{-\lambda_j} T}{\sqrt{-\lambda_j}}$$

$$\left(1 + \frac{(1 - \cos\sqrt{\lambda_{s_{k+1}}} T)^2 \lambda_{s_k}^2 - (1 - \cos\sqrt{\lambda_{s_k}} T)^2 \lambda_{s_{k+1}}^2}{\gamma_{s_{k+1}} \lambda_{s_{k+1}}^2 (1 - \cos\sqrt{-\lambda_j} T)^2 - \gamma_{s_k} \lambda_{s_k}^2 (1 - \cos\sqrt{\lambda_{s_{k+1}}} T)^2} \gamma_j \right)^{-1} y_j v_j(x)$$

— оптимальный;

(*iii*) *при* $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_r}}$

$$E(T, W_2^\gamma(D), F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\delta^2 \frac{(1 - \cos\sqrt{-\lambda_r} T)^2}{\lambda_r^2} + \frac{(1 - \cos\sqrt{-\lambda_q} T)^2}{\lambda_q^2} \frac{1 - \delta^2 \gamma_r}{\gamma_q}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in J_m} \frac{1 - \cos\sqrt{-\lambda_j} T}{\sqrt{-\lambda_j}}$$

$$\left(1 + \frac{\gamma_j (1 - \cos\sqrt{-\lambda_q} T)^2 \lambda_r^2}{\gamma_q \lambda_q^2 (1 - \cos\sqrt{-\lambda_r} T)^2 - \gamma_r \lambda_r^2 (1 - \cos\sqrt{-\lambda_q} T)^2} \right)^{-1} y_j v_j(x)$$

— оптимальный.

Доказательство. Определим множество G следующим образом:

$$G = \left\{ g = (g_1, g_2, \ldots) : \|g\|_F = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j |g_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

и рассмотрим оператор $Q : G \to l_2$, заданный равенством:

$$Qg = (g_1 \cos \sqrt{-\lambda_1} T, g_2 \cos \sqrt{-\lambda_2} T, \ldots).$$

При этом последовательность $\dfrac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2}$ — немонотонная, но ограниченная, а последовательность $\gamma_j \to \infty$ при $j \to \infty$, следовательно, $\dfrac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2\gamma_j} \to 0$ при $j \to \infty$. Поэтому, положив $\mu_j = \dfrac{(1-\cos\sqrt{-\lambda_j}T)^2}{\lambda_j^2}$, $\quad \nu_j = \gamma_j$, можно воспользоваться результатами теоремы 8 и получить соответствующие выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода в каждом диапазоне значений δ.

$\square$

Применим полученные результаты к решению задач оптимального восстановления решения волнового уравнения.

1. Рассмотрим волновое уравнение с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Из (36) следует, что точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \cos jt \sin jx, \tag{66}$$

где

$$a_j(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin jx \, dx$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Предположим, что $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, где

$$W_2^n([0,\pi]) = \{\, f(\cdot) \in L_2([0,\pi]) : f^{(n-1)}(\cdot) \text{ абс. непр. на } [0,\pi], \\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} \le 1 \,\},$$

а

$$\|g(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |g(x)|^2 \, dx}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ $y_1, \dots, y_N$, причем

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j(f) - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0. \tag{67}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (65) в момент времени T на классе $W_2^n([0,\pi])$ по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$ сопоставляет множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$, удовлетворяющих условию (67).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,\dots,y)\in\mathbb{R}^N \\ \sum_{j=1}^N |a_j(f)-y_j|^2\le\delta^2}} \|u(\cdot, T) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}.$$

Величина

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N\to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

Если $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \sin jx,$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n} a_j^2(f) \le 1,$$

т.е. $\nu_j = j^{2n}$. Из (66) вытекает, что $\mu_j = \cos^2 jT$. В соответствии с введенными обозначениями

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} = \frac{\cos^2 pT}{p^{2n}}, \quad B = \max_{j>N} \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} = \frac{\cos^2 qT}{q^{2n}},$$

r определяется из условия

$$\cos^2 rT - Br^{2n} = \max_{p\le j\le N} (\cos^2 jT - Bj^{2n}),$$

последовательность s_{k+1} определяется равенствами

$$\frac{\cos^2 s_{k+1}T - \cos^2 s_kT}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} = \max_{s_k<j\le r} \frac{\cos^2 jT - \cos^2 s_kT}{j^{2n} - s_k^{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} > \frac{\cos^2 s_{k+1}T - \cos^2 s_kT}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \right\},$$
$$k = 0, \ldots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}} > B \right\}.$$

Тогда из теоремы 9 вытекает

Теорема 12. *При $B \geq A$ для всех $\delta > 0$ оптимальный метод восстановления волнового уравнения*

$$u(x, T) \approx 0,$$

а для его погрешности справедливо равенство

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \frac{|\cos qT|}{q^n}.$$

Если $B < A$, то

(*i*) *при $\delta \geq p^{-n}$*

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \frac{|\cos pT|}{p^n},$$

а метод $u(x, T) \approx 0$ — оптимальный;

(*ii*) *при $s_{k+1}^{-n} \leq \delta < s_k^{-n}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,*

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{s_{k+1}^{2n}\delta^2 - 1}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \cos^2 s_kT + \frac{1 - \delta^2 s_k^{2n}}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \cos^2 s_{k+1}T},$$

а метод

$$u(x, T) \approx \sum_{j \in J_k} \left(1 + \frac{\cos^2 s_{k+1}T - \cos^2 s_kT}{s_{k+1}^{2n} \cos^2 s_kT - s_k^{2n} \cos^2 s_{k+1}T} j^{2n} \right)^{-1} y_j \cos jT \sin jx$$

— оптимальный;

(*iii*) *при $\delta < r^{-n}$*

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 \cos^2 rT + \frac{1 - \delta^2 r^{2n}}{q^{2n}} \cos^2 qT},$$

а метод

$$u(x, T) \approx \sum_{j \in J_m} \left(1 + \frac{\cos^2 qT}{q^{2n} \cos^2 rT - r^{2n} \cos^2 qT} j^{2n} \right)^{-1} y_j \cos jT \sin jx$$

— оптимальный.

2. Волновое уравнение с нулевыми граничными условиями, нулевой начальной формой струны и ненулевой начальной скоростью:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, \\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\
&u(x,0) = 0, \\
&u_t(x,0) = f(x).
\end{aligned} \tag{68}
$$

В главе 1 показано, что точное решение задачи имеет вид:

$$
u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(f) \sin jt \sin jx, \tag{69}
$$

где

$$
b_j(f) = \frac{2}{\pi j} \int_0^{\pi} f(x) \sin jx \, dx
$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Если $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, то

$$
f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(f) \sin jx,
$$

где

$$
\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n} b_j^2(f) \le 1,
$$

т.е. $\nu_j = j^{2n}$. Из (69) вытекает, что $\mu_j = \dfrac{\sin^2 jT}{j^2}$. В соответствии с введенными обозначениями

$$
A = \max_{1 \le j \le N} \frac{\sin^2 jT}{j^{2n+2}} = \frac{\sin^2 pT}{p^{2n+2}}, \quad B = \max_{j > N} \frac{\sin^2 jT}{j^{2n+2}} = \frac{\sin^2 qT}{q^{2n+2}},
$$

r определяется из условия

$$
\frac{\sin^2 rT}{r^2} - Br^{2n} = \max_{p \le j \le N} (\frac{\sin^2 jT}{j^2} - Bj^{2n}),
$$

последовательность s_{k+1} определяется равенствами

$$
\frac{s_k^2 \sin^2 s_{k+1}T - s_{k+1}^2 \sin^2 s_k T}{s_k^2 s_{k+1}^{2n+2} - s_{k+1}^2 s_k^{2n+2}} = \max_{s_k < j \le r} \frac{s_k^2 \sin^2 jT - j^2 \sin^2 s_k T}{s_k^2 j^{2n+2} - j^2 s_k^{2n+2}},
$$
$$
k = 0, 1, \ldots, m-1,
$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$
J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\sin^2 jT}{j^{2n+2}} > \frac{s_k^2 \sin^2 s_{k+1}T - s_{k+1}^2 \sin^2 s_k T}{s_k^2 s_{k+1}^{2n+2} - s_{k+1}^2 s_k^{2n+2}} \right\},
$$
$$
k = 0, \ldots, m-1,
$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\sin^2 jT}{j^{2n+2}} > B \right\}.$$

Тогда в тех же предположениях относительно класса функции $f(x)$, что и в предыдущем пункте, и при заданных приближенных значениях первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ $y_1, \dots, y_N$, для которых

(70) $$\sum_{j=1}^{N} |b_j(f) - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0,$$

из теоремы 10 вытекает

Теорема 13. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$ оптимальный метод восстановления волнового уравнения*

$$u(x, T) \approx 0,$$

а для его погрешности справедливо равенство

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \frac{|\sin qT|}{q^{n+1}}.$$

Если $B < A$, то

(*i*) *при $\delta \ge p^{-n}$*

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \frac{|\sin pT|}{p^{n+1}},$$

а метод $u(x, T) \approx 0$ — оптимальный;

(*ii*) *при $s_{k+1}^{-n} \le \delta < s_k^{-n}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,*

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{s_{k+1}^{2n}\delta^2 - 1}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \frac{\sin^2 s_k T}{s_k^2} + \frac{1 - \delta^2 s_k^{2n}}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \frac{\sin^2 s_{k+1} T}{s_{k+1}^2}},$$

а метод

$$u(x, T) \approx \sum_{j \in J_k} \left(1 + \frac{\sin^2 s_{k+1} T s_k^2 - \sin^2 s_k T s_{k+1}^2}{s_{k+1}^{2n+2} \sin^2 s_k T - s_k^{2n+2} \sin^2 s_{k+1} T} j^{2n} \right)^{-1} y_j \sin jT \sin jx$$

— оптимальный;

(*iii*) *при $\delta < r^{-n}$*

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 \frac{\sin^2 rT}{r^2} + \frac{1 - \delta^2 r^{2n}}{q^{2n}} \frac{\sin^2 qT}{q^2}},$$

а метод

$$u(x, T) \approx \sum_{j \in J_m} \left(1 + \frac{r^2 \sin^2 qT}{q^{2n+2} \sin^2 rT - r^{2n+2} \sin^2 qT} j^{2n} \right)^{-1} y_j \sin jT \sin jx$$

— оптимальный.

3. Неоднородное волновое уравнение с нулевыми начальными и граничными условиями и стационарной неоднородностью:

$$(71)\qquad \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + g(x), \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

где $g(x) \in W_2^n([0,\pi])$. Точное решение задачи имеет вид

$$(72)\qquad u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j}(1-\cos jt)\sin jx,$$

где

$$g_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin jx\,dx$$

— коэффициенты Фурье функции $g(x)$.

Пусть нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $g(x)$ $y_1,\dots y_N$, для которых

$$(73)\qquad \sum_{j=1}^{N} |g_j(f) - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0.$$

Если $g(x) \in W_2^n([0,\pi])$, то

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \sin jx,$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n} g_j^2 \le 1,$$

т.е. $\nu_j = j^{2n}$. Из (72) вытекает, что $\mu_j = \dfrac{(1-\cos jT)^2}{j^2}$. В соответствии с введенными обозначениями

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{(1-\cos jT)^2}{j^{2n+2}} = \frac{(1-\cos pT)^2}{p^{2n+2}},$$

$$B = \max_{j>N} \frac{(1-\cos jT)^2}{j^{2n+2}} = \frac{(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}},$$

r определяется из условия

$$\frac{(1-\cos rT)^2}{r^2} - Br^{2n} = \max_{p\le j\le N}\left(\frac{(1-\cos jT)^2}{j^2} - Bj^{2n}\right),$$

последовательность s_{k+1} определяется равенствами

$$\frac{s_k^2(1-\cos s_{k+1}T)^2 - s_{k+1}^2(1-\cos s_kT)^2}{s_k^2 s_{k+1}^{2n+2} - s_{k+1}^2 s_k^{2n+2}} = \max_{s_k<j\le r} \frac{s_k^2(1-\cos jT)^2 - j^2(1-\cos s_kT)^2}{s_k^2 j^{2n+2} - j^2 s_k^{2n+2}}, \quad k=0,1,\ldots,m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_k = \left\{ j \in \mathbb{N}\cap[1,N] : \frac{(1-\cos jT)^2}{j^{2n+2}} > \frac{s_k^2(1-\cos s_{k+1}T)^2 - s_{k+1}^2(1-\cos s_kT)^2}{s_k^2 s_{k+1}^{2n+2} - s_{k+1}^2 s_k^{2n+2}} \right\}, \quad k=0,\ldots,m-1,$$

$$J_m = \left\{ j \in \mathbb{N}\cap[1,N] : \frac{(1-\cos jT)^2}{j^{2n+2}} > B \right\}.$$

Тогда из теоремы 11 вытекает

Теорема 14. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$ оптимальный метод восстановления волнового уравнения*

$$u(x,T) \approx 0,$$

а для его погрешности справедливо равенство

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \frac{|1-\cos qT|}{q^{n+1}}.$$

Если $B < A$, то

(i) *при $\delta \ge p^{-n}$*

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \frac{|1-\cos pT|}{p^{n+1}},$$

а метод $u(x,T) \approx 0$ — оптимальный;

(ii) *при $s_{k+1}^{-n} \le \delta < s_k^{-n}$, $k=0,1,\ldots,m-1$,*

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{s_{k+1}^{2n}\delta^2 - 1}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \frac{(1-\cos s_kT)^2}{s_k^2} + \frac{1-\delta^2 s_k^{2n}}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \frac{(1-\cos s_{k+1}T)^2}{s_{k+1}^2}},$$

а метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j\in J_k} \left(1 + \frac{(1-\cos s_{k+1}T)^2 s_k^2 - (1-\cos s_kT)^2 s_{k+1}^2}{s_{k+1}^{2n+2}(1-\cos s_kT)^2 - s_k^{2n+2}(1-\cos s_{k+1}T)^2} j^{2n}\right)^{-1} y_j(1-\cos jT)\sin jx$$

— оптимальный;

(iii) при $\delta < r^{-n}$

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 \frac{(1-\cos rT)^2}{r^2} + \frac{1-\delta^2 r^{2n}}{q^{2n}} \frac{(1-\cos qT)^2}{q^2}},$$

а метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j\in J_m} \left(1 + \frac{r^2(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}(1-\cos rT)^2 - r^{2n+2}(1-\cos qT)^2} j^{2n}\right)^{-1} y_j (1-\cos jT) \sin jx$$

— оптимальный.

2.3. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора $Q\colon X \to l_2$, заданного равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \ldots),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \ldots, x_N$.

Положим

$$W = \{\, x \in X : \|x\|_X \le 1 \,\}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ такой, что

$$|x_j - y_j| \le \delta_j, \quad j = 1, ..., N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_\infty^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in l_\infty^N \\ |x_j - y_j| \le \delta_j,\ j=1,\ldots,N}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}$$

(здесь $\delta = (\delta_1, ..., \delta_N)$, $I_N x = (x_1, \ldots, x_N)$).

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$(74)\qquad E(Q,W,I_N,\delta)=\inf_{\varphi\colon l_\infty^N\to l_2} e(Q,W,I_N,\delta,\varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_∞^N.

Пусть ν_j монотонно возрастает,

$$\lim_{j\to+\infty}\nu_j=+\infty,\quad \lim_{j\to+\infty}\mu_j/\nu_j=0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\mu_1}{\nu_1}\ge\frac{\mu_2}{\nu_2}\ge...\ge\frac{\mu_N}{\nu_N}$$

(этого можно добиться соответствующей перенумеровкой). Пусть $q>N$ таково, что

$$\frac{\mu_q}{\nu_q}=\max_{j>N}\frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Если $\nu_1\delta_1^2<1$ и $\dfrac{\mu_1}{\nu_1}>\dfrac{\mu_q}{\nu_q}$,
положим

$$p_0=p_0(\delta)=\max\left\{p:\sum_{j=1}^{p}\nu_j\delta_j^2<1,\ \frac{\mu_p}{\nu_p}>\frac{\mu_q}{\nu_q},\ 1\le p\le N\right\},$$

в противном случае считаем, что $p_0=0$.
Положим

$$q_0=\begin{cases} q, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q}\ge\dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}\\ p_0+1, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q}<\dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}.\end{cases}$$

Теорема 15. *Имеет место равенство*

$$(75)\qquad E(Q,W,I_N,\delta)=\sqrt{\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}+\sum_{j=1}^{p_0}\left(\mu_j-\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j\right)\delta_j^2},$$

при этом метод

$$(76)\qquad \widehat{\varphi}(y)=\sum_{j=1}^{p_0}\eta_j\left(1-\frac{\mu_{q_0}\nu_j}{\nu_{q_0}\mu_j}\right)y_je_j$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j|x_j|^2\to\max,\quad |x_j|^2\le\delta_j^2,\quad j=1,...,N,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\nu_j|x_j|^2\le1.$$

Положим $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$, и перепишем эту задачу так:
(77)
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j \to \max, \quad u_j \le \delta_j^2, \quad j = 1, ..., N, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda, \lambda_1, ..., \lambda_N) = \sum_{j=1}^{N} (-\mu_j + \lambda_j + \lambda\nu_j) u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} (-\mu_j + \lambda\nu_j) u_j,$$

где $u = \{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

В главе 1 (следствие 2) показано, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N \ge 0$, что для допустимой в задаче (77) последовательности $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_j \ge 0} \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N) = \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j \left(\widehat{u}_j - \delta_j^2 \right) = 0, \quad \widehat{\lambda} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j - 1 \right) = 0,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (77), а ее значение равно

$$\sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \widehat{\lambda}.$$

Если при этом для всех $y \in l_\infty^N$ существует решение x_y экстремальной задачи

$$\sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j |x_j - y_j|^2 + \widehat{\lambda} \|x\|_X^2 \to \min, \quad x \in X, \tag{78}$$

то

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \widehat{\lambda}}, \tag{79}$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = Q x_y$$

является оптимальным.

Задача (78) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{\lambda}_j (x_j - y_j)^2 \right) + \widehat{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j x_j^2 \to \min, \quad x \in X,$$

или

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{\lambda}_j (x_j - y_j)^2 + \widehat{\lambda} \nu_j x_j^2 \right) + \widehat{\lambda} \sum_{j=N+1}^{\infty} \nu_j x_j^2 \to \min, \quad x \in X.$$

Найдем минимум функции $F(x)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 2\widehat{\lambda}_j(x_j - y_j) + 2\widehat{\lambda}\nu_j x_j = 0, \quad j = 1, ..., N,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 2\widehat{\lambda}\nu_j x_j = 0, \quad j > N,$$

откуда

$$x_j = \frac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda}\nu_j}, \quad j = 1, ..., N, \quad x_j = 0, \quad j > N,$$

а решение экстремальной задачи:

$$x_y = \sum_{j=1}^{N} \frac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda}\nu_j} y_j e_j.$$

Поэтому достаточно найти $\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N \geq 0$ и допустимую в (77) последовательность $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которых будут выполнены условия (a) и (b). При этом метод

(80)
$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j \frac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda}\nu_j} y_j e_j$$

будет оптимальным.

Предположим, что $p_0 > 0$. Положим $\widehat{\lambda} = \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\widehat{\lambda}_j = \mu_j - \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j$, $j = 1, ..., p_0$, $\widehat{\lambda}_j = 0$, $p_0 < j \leq N$.

$$\widehat{u}_j = \begin{cases} \delta_j^2, & j = 1, ..., p_0, \\ \dfrac{1 - \sum_{j=1}^{p_0} \nu_j \delta_j^2}{\nu_{q_0}}, & j = q_0, \\ 0, & j > p_0,\ j \neq q_0. \end{cases}$$

Тогда $\widehat{u}_j \geq 0$, $\widehat{u}_j = \delta_j^2$ при $j = 1, \ldots p_0$. Если $q_0 > N$, то $\widehat{u}_j = 0 \leq \delta_j^2,\ j = p_0 + 1, \ldots, N$. В случае, когда $q_0 \leq N$, выполнение условия $\widehat{u}_{q_0} \leq \delta_{q_0}^2$ следует из выбора q_0. Следовательно, последовательность $\widehat{u}_j$ — допустимая. Проверим выполнение условий (b).

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j = \sum_{j=1}^{p_0} \nu_j \delta_j^2 + \nu_{q_0} \frac{1 - \sum_{j=1}^{p_0} \nu_j \delta_j^2}{\nu_{q_0}} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j(\widehat{u}_j - \delta_j^2) = \sum_{j=1}^{p_0} \widehat{\lambda}_j(\delta_j^2 - \delta_j^2) = 0,$$

то есть условия (b) выполнены. При этом

$$\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N)=\sum_{j=p_0+1}^{\infty}\left(-\mu_j+\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j\right)u_j\geq 0,$$

так как в силу выбора q_0

$$\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\geq\frac{\mu_j}{\nu_j},\quad j>p_0.$$

Поскольку $\mathcal{L}(\widehat{u},\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N)=0$, условие (a) выполнено.

Подставляя $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N$ в (79) и (80), получаем погрешность оптимального восстановления и оптимальность метода

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j=1}^{p_0}\eta_j\left(1-\frac{\mu_{q_0}\nu_j}{\nu_{q_0}\mu_j}\right)y_je_j.$$

Пусть $p_0=0$. При этом либо $\nu_1\delta_1^2\geq 1$, либо $\dfrac{\mu_1}{\nu_1}\leq\dfrac{\mu_q}{\nu_q}$. В обоих случаях положим $\widehat{\lambda}=\dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\widehat{\lambda}_j=0$, $j=1,...,N$, $\widehat{u}_{q_0}=\dfrac{1}{\nu_{q_0}}$, $\widehat{u}_j=0$, $j\neq q_0$. Тогда последовательность $\widehat{u}_j$ — допустимая,

$$\mathcal{L}(u,\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\mu_j+\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j\right)u_j=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\left(\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}-\frac{\mu_j}{\nu_j}\right)u_j\geq 0$$

в силу выбора q_0, а $\mathcal{L}(\widehat{u},\widehat{\lambda},\widehat{\lambda}_1,...,\widehat{\lambda}_N)=0$, то есть условие (a) выполнено. Условия (b) также очевидным образом выполнены. При этом из (79) и (80) следует, что

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\sqrt{\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y)=0$ — оптимальный.

$\square$

Рассмотрим волновое уравнение с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью (65), точное решение которого имеет вид (66).

Предположим, что $f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi])$, где

$$W_2^n([0,\pi])=\{\,f(\cdot)\in L_2([0,\pi]):f^{(n-1)}(\cdot)\text{ абс. непр. на }[0,\pi],\\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}\leq 1\,\},$$

а
$$\|g(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |g(x)|^2\,dx}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ $y_1, \ldots, y_N$, причем

(81) $$|a_j(f) - y_j| \le \delta_j, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, ..., N.$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (66) в момент времени T на классе $W_2^n([0,\pi])$ по информационному оператору F_δ^N $(\delta = \delta_1, ..., \delta_N)$, который каждой функции $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$ сопоставляет множество векторов $y = (y_1, \ldots, y_N)$, удовлетворяющих условию (81).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,\ldots,y)\in\mathbb{R}^N \\ |a_j(f)-y_j|\le\delta_j,\ j=1,\ldots,N}} \|u(\cdot,T) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}.$$

Величина
$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N\to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

Если $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, то
$$f(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j(f)\sin jx,$$

где
$$\sum_{j=1}^\infty j^{2n}a_j^2(f) \le 1,$$

т.е. $\nu_j = j^{2n}$. Из (66) вытекает, что $\mu_j = \cos^2 jT$. Соответственно $q > N$таково, что
$$\frac{\cos^2 qT}{q^{2n}} = \max_{j>N}\frac{\cos^2 jT}{j^{2n}}.$$

Пусть $k_1, \ldots, k_N$ — перестановка $1, \ldots, N$ такая, что
$$\frac{\cos^2 k_1T}{k_1^{2n}} \ge \ldots \ge \frac{\cos^2 k_NT}{k_N^{2n}}.$$

Обозначим
$$N_p = \{k_1, \ldots, k_p\}, \quad 1 \le p \le N.$$

Тогда в случае, если $\delta_{k_1} < 1$ и $\dfrac{\cos^2 k_1 T}{k_1^{2n}} > \dfrac{\cos^2 qT}{q^{2n}}$, положим

$$p_0 = p_0(\delta) = \max\left\{ p : \sum_{j \in N_p} j^{2n} \delta_j^2 < 1,\ \frac{\cos^2 k_p T}{k_p^{2n}} > \frac{\cos^2 qT}{q^{2n}},\ 1 \le p \le N \right\}.$$

иначе $p_0 = 0$.
Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{\cos^2 qT}{q^{2n}} \ge \dfrac{\cos^2 k_{p_0+1} T}{k_{p_0+1}^{2n}} \\ k_{p_0+1}, & \dfrac{\cos^2 qT}{q^{2n}} < \dfrac{\cos^2 k_{p_0+1} T}{k_{p_0+1}^{2n}}. \end{cases}$$

Из теоремы 15 вытекает

Теорема 16. *Имеет место равенство*

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{\cos^2 q_0 T}{q_0^{2n}} + \sum_{j \in N_{p_0}} \left(\cos^2 jT - \frac{\cos^2 q_0 T}{q_0^{2n}} j^{2n} \right) \delta_j^2},$$

при этом метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j \in N_{p_0}} \left(1 - \frac{j^2 \cos^2 q_0 T}{q_0^2 \cos^2 jT} \right) y_j \cos jT \sin jx$$

является оптимальным.

Для волнового уравнения с нулевыми граничными условиями, нулевой начальной формой струны и ненулевой начальной скоростью (68), точное решение которого имеет вид (69), а функция $f(x)$ определена так же, как в предыдущем случае, причем

$$|b_j(f) - y_j| \le \delta_j, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, ..., N, \tag{82}$$

погрешностью восстановления для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,...,y) \in \mathbb{R}^N \\ |b_j(f) - y_j| \le \delta_j,\ j=1,...,N}} \|u(\cdot, T) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])},$$

а погрешностью оптимального восстановления —

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi).$$

Тогда $\nu_j = j^{2n},\ \mu_j = \dfrac{\sin^2 jT}{j^2}$. При этом $q > N$ таково, что

$$\frac{\sin^2 qT}{q^{2n+2}} = \max_{j>N} \frac{\sin^2 jT}{j^{2n+2}}.$$

Пусть $m_1, \dots, m_N$ — перестановка $1, \dots, N$ такая, что

$$\frac{\sin^2 m_1 T}{m_1^{2n+2}} \geq \dots \geq \frac{\sin^2 m_N T}{m_N^{2n+2}}.$$

Обозначим

$$M_p = \{m_1, \dots, m_p\}, \quad 1 \leq p \leq N.$$

Тогда в случае, если $\delta_{k_1} < 1$ и $\dfrac{\sin^2 k_1 T}{k_1^{2n+2}} > \dfrac{\sin^2 qT}{q^{2n+2}}$, положим

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0(\delta) \\ &= \max\left\{ p : \sum_{j \in M_p} j^{2n} \delta_j^2 < 1,\ \frac{\sin^2 m_p T}{m_p^{2n+2}} > \frac{\sin^2 qT}{q^{2n+2}},\ 1 \leq p \leq N \right\}. \end{aligned}$$

иначе $p_0 = 0$.

Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{\sin^2 qT}{q^{2n+2}} \geq \dfrac{\sin^2 m_{p_0+1} T}{m_{p_0+1}^{2n+2}} \\ m_{p_0+1}, & \dfrac{\sin^2 qT}{q^{2n+2}} < \dfrac{\sin^2 m_{p_0+1} T}{m_{p_0+1}^{2n+2}}. \end{cases}$$

Из теоремы 15 вытекает

Теорема 17. *Имеет место равенство*

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\frac{\sin^2 q_0 T}{q_0^4} + \sum_{j \in M_{p_0}} \left(\frac{\sin^2 jT}{j^2} - \frac{\sin^2 q_0 T}{q_0^4} j^2 \right) \delta_j^2},$$

при этом метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j \in M_{p_0}} \left(1 - \frac{j^4 \sin^2 q_0 T}{q_0^4 \sin^2 jT} \right) y_j \sin jT \sin jx$$

является оптимальным.

Для неоднородного волнового уравнения (71), где

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \sin jx,$$

причем

(83) $$|g_j - y_j| \leq \delta_j, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, ..., N,$$

погрешностью восстановления для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,\dots,y)\in\mathbb{R}^N \\ |g_j-y_j|\le\delta_j,\ j=1,\dots,N}} \|u(\cdot,T)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])},$$

а погрешностью оптимального восстановления —

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon\mathbb{R}^N\to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi).$$

Из того, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n} g_j^2 \le 1,$$

получаем, что $\nu_j = j^{2n}$. Поскольку точное решение уравнения (71) имеет вид (72), $\mu_j = \dfrac{(1-\cos jT)^2}{j^2}$. Определим $q > N$ так, что

$$\frac{(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}} = \max_{j>N} \frac{(1-\cos jT)^2}{j^{2n+2}}.$$

Пусть $k_1,\dots,k_N$ — перестановка $1,\dots,N$ такая, что

$$\frac{(1-\cos k_1T)^2}{k_1^{2n+2}} \ge \ldots \ge \frac{(1-\cos k_NT)^2}{k_N^{2n+2}}.$$

Обозначим

$$N_p = \{k_1,\dots,k_p\}, \quad 1\le p\le N.$$

Тогда в случае, если $\delta_{k_1} < 1$ и $\dfrac{(1-\cos k_1T)^2}{k_1^{2n+2}} > \dfrac{(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}}$, положим

$$p_0 = p_0(\delta) = \max\left\{ p : \sum_{j\in N_p} j^{2n}\delta_j^2 < 1,\ \frac{(1-\cos k_pT)^2}{k_p^{2n+2}} > \frac{(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}},\ 1\le p\le N \right\},$$

иначе $p_0 = 0$.

Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}} \ge \dfrac{(1-\cos k_{p_0+1}T)^2}{k_{p_0+1}^{2n+2}} \\ k_{p_0+1}, & \dfrac{(1-\cos qT)^2}{q^{2n+2}} < \dfrac{(1-\cos k_{p_0+1}T)^2}{k_{p_0+1}^{2n+2}}. \end{cases}$$

Из теоремы 15 вытекает

Теорема 18. *Имеет место равенство*

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\frac{(1-\cos q_0 T)^2}{q_0^4} + \sum_{j\in N_{p_0}} \left(\frac{(1-\cos jT)^2}{j^2} - \frac{(1-\cos q_0 T)^2}{q_0^4} j^2 \right) \delta_j^2},$$

при этом метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j\in N_{p_0}} \left(1 - \frac{j^4(1-\cos q_0 T)^2}{q_0^4(1-\cos jT)^2}\right) y_j (1-\cos jT)\sin jx$$

является оптимальным.

Доказательства последних трех теорем следуют из теоремы 12 непосредственной подстановкой.

2.4. Оптимальное восстановление производных функций по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью

Рассмотрим функции из следующих классов:

1) *Соболевский класс* $W_2^r(\mathbb{T})$, состоящий из 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le 1$. Эквивалентное определение соболевского класса:

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \left\{ x(\cdot) \in X : \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^{2r} |x_j|^2 \le 1 \right\}, \quad X = L_2(\mathbb{T}),\ x \in \mathbb{C}.$$

2) *Класс Харди-Соболева* $H_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ — множество 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < \beta\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} \le 1,$$

где $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ — пространство Харди 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} = \sup_{0<\rho<\beta} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} (|x(t+i\rho)|^2 + |x(t-i\rho)|^2) dt \right)^{1/2} < \infty.$$

3) *Класс Бергмана-Соболева* $A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$— множество 2π - периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} \le 1.$$

Здесь $\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$ — пространство Бергмана 2π-периодических функций $x(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathbb{T}} dt \int\limits_{-\beta}^{\beta} |x(t+i\rho)|^2 d\rho \right)^{1/2} < \infty.$$

При этом $x(\cdot) \in W = W_2^r(\mathbb{T}),\ H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}),\ A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ в том и только в том случае, если

$$x(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{ijt},$$

где $\{e^{ij\cdot}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — ортогональный базис в пространствах $W_2^r(\mathbb{T})$, $H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}),\ A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$, и

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_j(W)|x_j|^2 \le 1,$$

где

$$\nu_j(W) = \begin{cases} j^{2r}, & W = W_2^r(\mathbb{T}), \\ j^{2r}\operatorname{ch} 2j\beta, & W = H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}), \\ j^{2r}\frac{\operatorname{sh} 2j\beta}{2j\beta}, & W = A_2^{r,\beta}(\mathbb{T}). \end{cases}$$

Поставим задачу оптимального восстановления k-й производной функции из класса $W = W_2^r(\mathbb{T}),\ H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}),\ A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})\quad (k < r)$ по информации I_δ^{2N+1}, заключающейся в том, что нам известны числа $\{y_j\}_{|j|\le N}$ такие, что для коэффициентов Фурье $\{x_j\}_{|j|\le N}$ функции $x(\cdot)$

$$\sum_{|j|\le N} |x_j - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0,$$

или по информации I_δ, если мы располагаем числами $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ такими, что для коэффициентов Фурье $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ функции $x(\cdot)$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0.$$

Оператор дифференцирования будем обозначать через D^k. В качестве метода восстановления допускается любое отображение $\varphi : l_2 \to L_2(\mathbb{T})$.

Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(D^k, W, I_\delta^{2N+1}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y\in l_2 \\ \sum_{|j|\le N}|x_j-y_j|^2\le\delta^2}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

в случае, если задана информация I_δ^{2N+1}, или

$$e(D^k, W, I_\delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y\in l_2 \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j-y_j|^2\le\delta^2}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

если задана информация I_δ.

Соответственно погрешность оптимального восстановления определяется как

$$E(D^k, W, I_\delta^{2N+1}) = \inf_{\varphi\colon\, l_2\to L_2(\mathbb{T})} e(D^k, W, I_\delta^{2N+1}, \varphi)$$

или

$$E(D^k, W, I_\delta) = \inf_{\varphi\colon\, l_2\to L_2(\mathbb{T})} e(D^k, W, I_\delta, \varphi).$$

Обозначим $\mu_j = j^{2k}$. Последовательности $\{\mu_j\}$ и $\{\nu_j\}$ обладают следующими свойствами:

1)$\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — четные последовательности, т.е. $\mu_j = \mu_{-j}$ и $\nu_j = \nu_{-j}$ и $\mu_0 = \nu_0 = 0$;

2)$\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\{\nu_j\mu_j^{-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ — положительные возрастающие последовательности и $\nu_j \to \infty$ при $j \to \infty$.

Найдем при $\nu_{s+1}^{-\frac{1}{2}}(W) \le \delta < \nu_s^{-\frac{1}{2}}(W)$ такое N_0, что

$$N_0 = \max\{k : \frac{\mu_k}{\nu_k} \ge \frac{\mu_{s+1}-\mu_s}{\nu_{s+1}-\nu_s}\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 19. *При* $\nu_{s+1}^{-1/2}(W) \le \delta < \nu_s^{-1/2}(W),\ s \ge 1,$ *метод*

$$\varphi(y) = \sum_{j\in[-N_0,N_0]} \gamma_j \left(1 + \nu_j \frac{\mu_{s+1}-\mu_s}{\mu_s\nu_{s+1} - \mu_{s+1}\nu_s}\right)^{-1} y_j e^{ij\cdot},$$

где $\{e^{ij\cdot}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *— ортогональный базис в соответствующем функциональном пространстве, является оптимальным.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда задана информация I_δ^{2N+1}. Требуется найти значение экстремальной задачи

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j|x_j|^2 \to \max, \quad \sum_{|j|\le N} |x_j|^2 \le \delta^2, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_j|x_j|^2 \le 1. \tag{84}$$

Обозначим $u_j = |x_j|^2$, тогда задачу (84) можно переписать так:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j u_j \to \max, \quad \sum_{|j|\le N} u_j \le \delta^2, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0. \tag{85}$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathcal{L}(u,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{j\in[-N,N]} (-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j)u_j + \sum_{|j|>N} (-\mu_j + \lambda_2\nu_j)u_j.$$

Поскольку $\{\dfrac{\mu_j}{\nu_j}\}$ — четная последовательность,

$$\sum_{j\in[-N,N]} (-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j)u_j + \sum_{|j|>N} (-\mu_j + \lambda_2\nu_j)u_j =$$

$$2\left(\sum_{j=1}^{N} (-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j)u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} (-\mu_j + \lambda_2\nu_j)u_j\right).$$

Следовательно, можно рассматривать только $j \in \mathbb{N}$. В силу монотонного убывания последовательности $\{\frac{\mu_j}{\nu_j}\}$

$$A = \max_{1\le j\le N} \frac{\mu_j}{\nu_j} = \frac{\mu_1}{\nu_1}, \quad B = \max_{j>N} \frac{\mu_j}{\nu_j} = \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}, \quad B < A, \quad r = N.$$

При этом множество $J_m = J_{N_0} = [-N_0; N_0]$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 8, из которой следует оптимальность предложенного метода.

Полученный результат справедлив и при $N = \infty$, то есть в случае, когда задана информация I_δ.

□

Таким образом, для оптимального метода восстановления можно использовать только значения $y_j \in J_{N_0}$, то есть ограничиться только частью исходной информации.

В частности, если $x(t) \in W_2^r(\mathbb{T})$,

$$N_0^{2(r-k)} \le \frac{(s+1)^{2r} - s^{2r}}{(s+1)^{2k} - s^{2k}}, \quad (N_0+1)^{2(r-k)} > \frac{(s+1)^{2r} - s^{2r}}{(s+1)^{2k} - s^{2k}},$$

откуда

$$(s+1)\left(\frac{1-\left(\frac{s}{s+1}\right)^{2r}}{1-\left(\frac{s}{s+1}\right)^{2k}}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} - 1 < N_0 \le (s+1)\left(\frac{1-\left(\frac{s}{s+1}\right)^{2r}}{1-\left(\frac{s}{s+1}\right)^{2k}}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}.$$

Эта оценка для минимального количества первых коэффициентов Фурье, которые необходимо знать для максимально точного восстановления оператора D^k, была получена для случая, когда задана информация I_δ^{2N+1}, в работе [12]. Однако этот же результат можно получить, в том числе и в случае, когда известны приближенные значения всех коэффициентов Фурье, и как непосредственное следствие теоремы 8.

Глава 3. Оптимальное восстановление решения многомерного уравнения гиперболического типа

3.1. Оптимальное восстановление решения обобщенного волнового уравнения на сфере

Рассмотрим единичную сферу в d-мерном пространстве, $d \ge 2$:

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}.$$

Определим для функций, заданных на единичной сфере, *сферический лапласиан* или *оператор Лапласа-Бельтрами*:

$$\Delta_S Y(x\prime) = \Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right)_{|x=x\prime},$$

где $x\prime \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Однородными гармоническими многочленами степени k называются такие однородные многочлены P, для которых $\Delta P = 0$. Сужение множества однородных гармонических многочленов порядка k на сферу $\mathbb{S}^{d-1}$ называется *сферическими гармониками порядка* k и обозначается $\mathcal{H}_k$. Известно (см., например, [13]), что размерность пространства $\mathcal{H}_k$ равна a_k, где

$$a_k = (d+2k-2)\frac{(d+k-3)!}{(d-2)!k!}, \quad k \geq 1, \quad a_0 = 1.$$

Если $Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$, то система однородных сферических гармоник $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots,$ $j = 1, \ldots, a_k$, является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, то есть для любой функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеет место равенство

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}.$$

Определим для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ следующим образом:

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}.$$

Здесь $\Lambda_k = k(k+d-2)$ — собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами на сфере.

1. Рассмотрим обобщенное волновое уравнение с нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= f, \\ u_t|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \tag{86}$$

где $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Начальное условие понимается здесь в следующем смысле:

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(x',t) - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x',t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}\cos\Lambda_k^{\alpha/4}tY_j^{(k)}(x'), \tag{87}$$

где

$$f(x\prime)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}Y_j^{(k)}(x\prime).$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_1,\dots,y_N$, причем

$$\sum_{k=0}^{k_0-1}a_k<N\le\sum_{k=1}^{k_0}a_k,\quad \tilde N=N-\sum_{k=1}^{k_0-1}a_k.$$

При этом

$$\sum_{k=0}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|c_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde N}|c_{k_0,j}(f)-y_j|^2\le\delta^2,\quad \delta>0. \tag{88}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (86) в момент времени τ на классе

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})=\{f\in L_2(\mathbb{S}^{d-1}):\quad ||(-\Delta_S)^{\beta/2}f||_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le 1,\ f\perp 1\}$$

по информационному оператору F_δ^N, который каждой функции $f(x)\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ сопоставляет множество векторов $y=(y_1,\dots,y_N)$, удовлетворяющих условию (88).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon l^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N,\varphi) = \sup_{\substack{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\ y\in l_2^N \\ \sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|c_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde N}|c_{k_0,j}(f)-y_j|^2\le\delta^2}}\|u(\cdot,\tau)-\varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Величина

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=\inf_{\varphi\colon l_2^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})}e(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N,\varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

В соответствии с введенными ранее обозначениями положим

$$A=\max_{1\le k\le k_0}\frac{\cos^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta}=\frac{\cos^2\Lambda_p^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_p^\beta},$$

$$B=\max_{k\ge k_0}\frac{\cos^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta}=\frac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta},$$

r определяется из условия

$$\cos^2 \Lambda_r^{\alpha/4}\tau - B\Lambda_r^\beta = \max_{p\le k\le k_0}(\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - B\Lambda_k^\beta),$$

последовательность s_l определяется равенствами

$$\frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} = \max_{s_l<k\le r}\frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta}, \qquad l = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $s_0 = p$, $s_m = r$, а

$$J_l = \left\{ k \in \mathbb{N}\cap[1,k_0] : \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} > \frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} \right\}, \qquad l = 0, \dots, m-1,$$

$$J_m = \left\{ k \in \mathbb{N}\cap[1,k_0] : \frac{\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta} > B \right\}.$$

Тогда из теоремы 8 вытекает

Теорема 20. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N) = |\cos \Lambda_q^{\alpha/4}\tau|/\sqrt{\Lambda_q^\beta},$$

и $u(x',\tau)\approx 0$ — оптимальный метод.

Если $B < A$, то

(i) *при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_p^\beta}}$*

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N) = |\cos \Lambda_p^{\alpha/4}\tau|/\sqrt{\Lambda_p^\beta},$$

и $u(x',\tau)\approx 0$ — оптимальный метод,

(ii) *при $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{s_l}^\beta}}$, $l = 0,1,\dots,m-1$,*

$$E(\tau,\alpha,W_n^\beta(\mathbb{S}^{n-1}),F_\delta^N) = \sqrt{\cos^2 \Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau\frac{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta\delta^2-1}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta} + \cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau\frac{1-\delta^2\Lambda_{s_l}^\beta}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta - \Lambda_{s_l}^\beta}},$$

$$u(x',\tau)\approx \sum_{k\in J_l}\sum_{j=1}^{a_k}\cos\Lambda_j^{\frac{\alpha}{4}}\tau\left(1+\frac{\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\frac{\alpha}{4}}\tau - \cos^2 \Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{4}}\tau}{\Lambda_{s_{l+1}}^\beta\cos^2 \Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{4}}\tau - \Lambda_{s_l}^\beta\cos^2 \Lambda_{s_{l+1}}^{\frac{\alpha}{4}}\tau}\Lambda_j^\beta\right)^{-1} y_jY_j^{(k)}(x')$$

— оптимальный метод,

(iii) при $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_r^\beta}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=\sqrt{\cos^2\Lambda_r^{\alpha/4}\tau\ \delta^2+\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau\frac{1-\delta^2\Lambda_r^\beta}{\Lambda_q^\beta}},$$

$$u(x',\tau)\approx$$

$$\sum_{k\in J_m}\sum_{j=1}^{a_k}\cos\Lambda_j^{\alpha/4}\tau\left(1+\frac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta\cos^2\Lambda_r^{\alpha/4}\tau-\Lambda_r^\beta\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}\Lambda_j^\beta\right)^{-1}y_jY_j^{(k)}(x')$$

— оптимальный метод.

Доказательство. Обозначим

$$b_k=\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}^2,\quad b_{\tilde N}=\sum_{j=1}^{\tilde N}c_{k_0,j}^2,\quad b_{\bar N}=\sum_{j=\tilde N+1}^{a_{k_0}}c_{k_0,j}^2,$$

$$\mu_k=\cos^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau,\quad \nu_k=\Lambda_k^\beta.$$

При этом $\{\mu_k\}$ — ограниченная последовательность, $\{\nu_k\}$ — возрастающая последовательность.

Из теоремы 7 и следствия 1 вытекает, что требуется решить двойственную экстремальную задачу. Для рассматриваемого случая она имеет вид:

$$(89)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\mu_kb_k\to\max,\quad \sum_{k=1}^{k_0-1}b_k+b_{\tilde N}\le\delta^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\nu_kb_k\le 1.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(b,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=1}^{k_0-1}(-\mu_k+\lambda_1+\lambda_2\nu_k)b_k+\lambda_1b_{\tilde N}+\sum_{k=k_0}^{\infty}(-\mu_k+\lambda_2\nu_k)b_k,$$

где $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, а λ_1,λ_2 — множители Лагранжа.

Воспользуемся результатом следствия 1 и сформулируем экстремальную задачу (19) для рассматриваемого случая.

Поскольку оператор $I_Nf=(c_{11},\dots c_{k_0-1,\widetilde N})$,

$$\|I_Nf-y\|_{l_2^N}^2=\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|c_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde N}|c_{k_0-1,j}(f)-y_j|^2,$$

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_kb_k,$$

получаем:

$$\widehat\lambda_1\|I_Nf-y\|_{l_2^N}^2+\widehat\lambda_2\|f\|^2=$$

$$\widehat{\lambda}_1\Big(\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|c_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde N}|c_{k_0-1,j}(f)-y_j|^2\Big)+\widehat{\lambda}_2\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k b_k=$$

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\Big(\widehat{\lambda}_1|c_{kj}(f)-y_j|^2+\widehat{\lambda}_2\nu_k b_k\Big)+\sum_{j=1}^{\tilde N}\Big(\widehat{\lambda}_1|c_{k_0}j(f)-y_j|^2+$$

$$\widehat{\lambda}_2\nu_{k_0}b_{k_0}\Big)+\widehat{\lambda}_2\nu_{k_0}b_{\tilde N}+\widehat{\lambda}_2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\nu_k b_k.$$

Следовательно, задача (19) может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}\Big(\widehat{\lambda}_1|c_{kj}(f)-y_j|^2+\widehat{\lambda}_2\nu_k b_k\Big)+\\ \sum_{j=1}^{\tilde N}\Big(\widehat{\lambda}_1|c_{k_0j}(f)-y_j|^2+\widehat{\lambda}_2\nu_{k_0}b_{k_0}\Big)+\\ \widehat{\lambda}_2\nu_{k_0}b_{\tilde N}+\widehat{\lambda}_2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\nu_k b_k\to\min.\end{gathered}\tag{90}$$

Выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода получаются теперь из соответствующих результатов теоремы 8. □

2. Рассмотрим обобщенное волновое уравнение с нулевым начальным значением u и ненулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned}u_{tt}+(-\Delta_S)^{\alpha/2}u&=0,\\ u|_{t=0}&=0,\\ u_t|_{t=0}&=f.\end{aligned}\tag{91}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x\prime,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\tilde c_{kj}}{\Lambda_k^{\alpha/4}}\sin\Lambda_k^{\alpha/4}tY_j^{(k)}(x\prime),\tag{92}$$

где

$$f(x\prime)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\tilde c_{kj}Y_j^{(k)}(x\prime),\quad f\in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Вновь предположим, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(x\prime)$ $y_1,\dots,y_N$, причем

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}a_k<N\le\sum_{k=1}^{k_0}a_k,\quad \tilde N=N-\sum_{k=1}^{k_0-1}a_k,$$

и
$$\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{a_k}|\tilde{c}_{kj}(f)-y_j|^2+\sum_{j=1}^{\tilde{N}}|\tilde{c}_{k_0-1,j}(f)-y_j|^2\le\delta^2,\quad \delta>0.$$

В соответствии с ранее введенными обозначениями положим
$$A=\max_{1\le k\le k_0}\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}}=\frac{\sin^2\Lambda_p^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_p^{\beta+\alpha/2}},$$
$$B=\max_{k\ge k_0}\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}}=\frac{\sin^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}},$$
r определяется из условия
$$\frac{\sin^2\Lambda_r^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_r^{\beta+\alpha/2}}-B=\max_{p\le k\le k_0}\left(\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}}-B\right),$$
последовательность s_l определяется равенствами
$$\frac{\Lambda_{s_l}^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau-\Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_l}^{\alpha/2}\Lambda_{s_{l+1}}^{\beta+\alpha/2}-\Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/2}\Lambda_{s_l}^{\beta+\alpha/2}}=$$
$$\max_{s_l<k\le r}\frac{\Lambda_{s_l}^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau-\Lambda_k^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_l}^{\alpha/2}\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}-\Lambda_k^{\alpha/2}\Lambda_{s_l}^{\beta+\alpha/2}},$$
$$l=0,1,\dots,m-1,$$
где $s_0=p$, $s_m=r$, а

$$J_l=$$
$$\left\{k\in\mathbb{N}\cap[1,k_0]:\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}}>\frac{\Lambda_{s_l}^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/4}\tau-\Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_{s_l}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{s_l}^{\alpha/2}\Lambda_{s_{l+1}}^{\beta+\alpha/2}-\Lambda_{s_{l+1}}^{\alpha/2}\Lambda_{s_l}^{\beta+\alpha/2}}\right\},$$
$$l=0,\dots,m-1,$$

$$J_m=\left\{k\in\mathbb{N}\cap[1,k_0]:\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}}>B\right\}.$$

Теорема 21. *При $B\ge A$ для всех $\delta>0$*
$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=|\sin\Lambda_q^{\alpha/4}\tau|/\sqrt{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}},$$
и $u(x',\tau)\approx 0$.

Если $B<A$, то

(i) *при* $\delta\ge\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda_p^\beta}}$
$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=|\sin\Lambda_p^{\alpha/4}\tau|/\sqrt{\Lambda_p^{\beta+\alpha/2}},$$
и $u(x',\tau)\approx 0$,

(ii) *при* $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda^\beta_{s_{l+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda^\beta_{s_l}}}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$E(\tau,\alpha,W^\beta_n(\mathbb{S}^{d-1}),F^N_\delta)$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\Lambda^{\alpha/4}_{s_l}\tau}{\Lambda^{\alpha/2}_{s_l}\tau}\frac{\Lambda^\beta_{s_{l+1}}\delta^2-1}{\Lambda^\beta_{s_{l+1}}-\Lambda^\beta_{s_l}}+\frac{\sin^2\Lambda^{\alpha/4}_{s_{l+1}}\tau}{\Lambda^{\alpha/2}_{s_{l+1}}\tau}\frac{1-\delta^2\Lambda^\beta_{s_l}}{\Lambda^\beta_{s_{l+1}}-\Lambda^\beta_{s_l}}},$$

$$u(x',\tau)\approx$$

$$\sum_{k\in J_l}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\sin\Lambda_k^{\frac{\alpha}{4}}\tau}{\Lambda_k^{\frac{\alpha}{4}}}\left(1+\frac{\Lambda_{s_l}^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2\Lambda^{\frac{\alpha}{4}}_{s_{l+1}}\tau-\Lambda^{\frac{\alpha}{4}}_{s_{l+1}}\sin^2\Lambda^{\frac{\alpha}{4}}_{s_l}\tau}{\Lambda^{\beta+\alpha/2}_{s_{l+1}}\sin^2\Lambda^{\frac{\alpha}{4}}_{s_l}\tau-\Lambda^{\beta+\alpha/2}_{s_l}\sin^2\Lambda^{\frac{\alpha}{4}}_{s_{l+1}}\tau}\Lambda^\beta_k\right)^{-1}$$

$$y_jY_j^{(k)}(x'),$$

(iii) *при* $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda^\beta_r}}$

$$E(\tau,\alpha,W^\beta_2(\mathbb{S}^{d-1}),F^N_\delta)=\sqrt{\frac{\sin^2\Lambda_r^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_r^{\alpha/2}}\ \delta^2+\sin^2\Lambda_q^{\alpha/2}\tau\frac{1-\delta^2\Lambda^\beta_r}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}}},$$

$$u(x',\tau)\approx$$

$$\sum_{k\in J_m}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\sin\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda^{\frac{\alpha}{4}}}\left(1+\frac{\Lambda_r^{\alpha/2}\sin^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}\sin^2\Lambda_r^{\alpha/4}\tau-\Lambda_r^{\beta+\alpha/2}\sin^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}\Lambda^\beta_k\right)^{-1}$$

$$y_jY_j^{(k)}(x').$$

Доказательство проводится аналогично предыдущему случаю, если обозначить

$$b_k=\sum_{j=1}^{a_k}\tilde c^2_{kj},\quad \mu_k=\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\alpha/2}},\quad \nu_k=\Lambda^\beta_k.$$

3. Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения обобщенного волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике, для уравнения с нулевой начальной скоростью (86), точное решение которого имеет вид (87).

Предположим, что $f(x\prime)\in W^\beta_2(\mathbb{S}^{d-1})$, где

$$W^\beta_2(\mathbb{S}^{d-1})=\{f\in L_2(\mathbb{S}^{d-1}):||(-\Delta_S)^{\beta/2}f||_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le 1,\ f\perp 1.\}$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_1,\ldots,y_N$, причем

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}a_k<N\le\sum_{k=1}^{k_0}a_k,\quad \tilde N=N-\sum_{k=1}^{k_0-1}a_k.$$

При этом

$$|c_{kj}(f)-y_j|\le\delta_j,\quad \delta_j>0,$$

$$(93)\qquad k=1,\dots,k_0-1,\quad j=1,\dots,a_k,\quad k=k_0,\quad j=1,\dots,\tilde N.$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (86) в момент времени τ на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ по информационному оператору F_δ^N $(\delta=(\delta_1,\dots,\delta_N))$, который каждой функции $f(x)\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ сопоставляет множество векторов $y=(y_1,\dots,y_N)$, удовлетворяющих условию (93). В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon l^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N,\varphi)\\ =\sup_{\substack{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\ y\in l_2^N\\ |c_{kj}(f)-y_j|\le\delta_j,\ \delta_j>0,\\ k=1,\dots,k_0-1,\ j=1,\dots,a_k,\ k=k_0,\ j=1,\dots,\tilde N}}\|u(\cdot,\tau)-\varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Величина

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=\inf_{\varphi\colon l_2^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})}e(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N,\varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

Обозначим $\delta_k=\sqrt{\sum_{j=1}^{a_k}\delta_j^2}$ и найдем $q\ge k_0$ такое, что

$$\frac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta}=\max_{k\ge k_0}\frac{\cos^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^\beta}.$$

Пусть $m_1,\dots,m_{k_0}$ — перестановка $1,\dots,k_0$ такая, что

$$\frac{\cos^2\Lambda_{m_1}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{m_1}^\beta}\ge\dots\ge\frac{\cos^2\Lambda_{m_{k_0}}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{m_{k_0}}^\beta}.$$

Обозначим

$$M_p=\{m_1,\dots,m_p\},\quad 1\le p\le k_0.$$

Положим в случае, если $\delta_{m_1}<1$ и $\dfrac{\cos^2\Lambda_{m_1}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{m_1}^\beta}>\dfrac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta}$,

$$p_0=p_0(\delta)=$$

$$\max\left\{p:\sum_{k\in M_p}\Lambda_k^\beta\delta_k<1,\ \frac{\cos^2\Lambda_{m_p}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{m_p}^\beta}>\frac{\cos^2\Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta},\ 1\le p\le k_0,\right\},$$

иначе положим $p_0=0$.

Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{\cos^2 \Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta} \geq \dfrac{\cos^2 \Lambda_{m_{p_0+1}}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{m_{p_0+1}}^\beta} \\ m_{p_0+1}, & \dfrac{\cos^2 \Lambda_q^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_q^\beta} < \dfrac{\cos^2 \Lambda_{m_{p_0+1}}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{m_{p_0+1}}^\beta}. \end{cases}$$

Тогда из теоремы 12 вытекает

Теорема 22. *Имеет место равенство*

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \Lambda_{q_0}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{q_0}^\beta} + \sum_{k \in M_{p_0}} \left(\cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau - \frac{\cos^2 \Lambda_{q_0}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{q_0}^\beta} \Lambda_k^\beta \right) \delta_k^2},$$

при этом метод

$$u(x\prime, \tau) \approx \sum_{k \in M_{p_0}} \left(1 - \frac{\Lambda_k^\beta \cos^2 \Lambda_{q_0}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{q_0}^\beta \cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau} \right) \cos \Lambda_k^{\alpha/4}\tau \sum_{j=1}^{a_k} y_j Y_j^{(k)}$$

является оптимальным.

Доказательство. Обозначим

$$b_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2, \quad \mu_k = \cos^2 \Lambda_k^{\alpha/4}\tau, \quad \nu_k = \Lambda_k^\beta.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^\infty \mu_k b_k \to \max, \quad b_k \leq \delta_k^2, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad \sum_{k=1}^\infty \nu_k b_k \leq 1.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(b, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{k_0}) = \sum_{k=1}^{k_0-1} (-\mu_k + \lambda_k + \lambda\nu_k) b_k + \sum_{k=k_0}^\infty (-\mu_k + \lambda\nu_k) b_k.$$

В случае, если $p_0 > 0$, положим $\hat\lambda = \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\hat\lambda_k = \mu_k - \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_k$, $k \in M_{p_0}$, $\hat\lambda_k = 0$, $k \notin M_{p_0}$.

$$\hat b_k = \begin{cases} \delta_k^2, & k \in M_{p_0}, \\ \dfrac{1 - \sum_{k \in M_{p_0}} \nu_k \delta_k^2}{\nu_{q_0}}, & k = q_0, \\ 0, & k \notin M_{p_0},\ k \neq q_0. \end{cases}$$

При $p_0 = 0$ положим $\hat\lambda = \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\hat\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, k_0$, $\hat b_{q_0} = \dfrac{1}{\nu_{q_0}}$, $\hat b_k = 0$, $k \neq q_0$. Далее применяем теорему 12 и получаем выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода. □

Для обобщенного волнового уравнения (91) с ненулевой начальной скоростью, точное решение которого имеет вид (92), причем

$$|\tilde{c}_{kj}(f) - y_j| \le \delta_j, \quad \delta_j > 0,$$

$$(94) \qquad k = 1, \dots, k_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \quad k = k_0, \quad j = 1, \dots, \tilde{N},$$

погрешностью восстановления для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\ y \in l_2^N \\ |\tilde{c}_{kj}(f) - y_j| \le \delta_j,\ \delta_j > 0, \\ k=1,\dots,k_0-1,\ j=1,\dots,a_k,\ k=k_0,\ j=1,\dots,\tilde{N}}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

а погрешностью оптимального восстановления —

$$E(\tau, \alpha, W_n^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon\, l_2^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\tau, \alpha, W_n^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), F_\delta^N, \varphi).$$

Пусть $\delta_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{a_k} \delta_j^2}$. Найдем $q \ge k_0$ такое, что

$$\frac{\sin^2 \Lambda_q^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}} = \max_{k \ge k_0} \frac{\sin^2 \Lambda_k^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}}.$$

Пусть $m_1, \dots, m_{k_0}$ — перестановка $1, \dots, k_0$ такая, что

$$\frac{\sin^2 \Lambda_{m_1}^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_{m_1}^{\beta+\alpha/2}} \ge \dots \ge \frac{\sin^2 \Lambda_{m_{k_0}}^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_{m_{k_0}}^{\beta+\alpha/2}}.$$

Обозначим

$$M_p = \{m_1, \dots, m_p\}, \quad 1 \le p \le k_0.$$

Положим в случае, если $\delta_{m_1} < 1$ и $\dfrac{\sin^2 \Lambda_{m_1}^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_{m_1}^{\beta+\alpha/2}} > \dfrac{\sin^2 \Lambda_q^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}}$,

$$p_0 = p_0(\delta) = \max\left\{ p : \sum_{k \in M_p} \Lambda_k^\beta \delta_k < 1,\ \frac{\sin^2 \Lambda_{m_p}^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_{m_p}^{\beta+\alpha/2}} > \frac{\sin^2 \Lambda_q^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}},\ 1 \le p \le k_0 \right\},$$

иначе положим $p_0 = 0$.

Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{\sin^2 \Lambda_q^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}} \ge \dfrac{\sin^2 \Lambda_{m_{p_0+1}}^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_{m_{p_0+1}}^{\beta+\alpha/2}} \\ m_{p_0+1}, & \dfrac{\sin^2 \Lambda_q^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_q^{\beta+\alpha/2}} < \dfrac{\sin^2 \Lambda_{m_{p_0+1}}^{\alpha/4} \tau}{\Lambda_{m_{p_0+1}}^{\beta+\alpha/2}}. \end{cases}$$

Тогда из теоремы 12 вытекает

Теорема 23. *Имеет место равенство*

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}),F_\delta^N)=$$

$$\sqrt{\frac{\sin^2\Lambda_{q_0}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{q_0}^{\beta+\alpha/2}}+\sum_{k\in M_{p_0}}\left(\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\alpha/2}}-\frac{\sin^2\Lambda_{q_0}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{q_0}^{\beta+\alpha/2}}\Lambda_k^{\beta}\right)\delta_k^2},$$

при этом метод

$$u(x\prime,\tau)\approx\sum_{k\in M_{p_0}}\left(1-\frac{\Lambda_k^{\beta+\alpha/2}\sin^2\Lambda_{q_0}^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_{q_0}^{\beta+\alpha/2}\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}\right)\frac{\sin\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\alpha/4}}\sum_{j=1}^{a_k}y_jY_j^{(k)}$$

является оптимальным.

Доказательство. Обозначим

$$b_k=\sum_{j=1}^{a_k}\tilde{c}_{kj}^2,\quad \mu_k=\frac{\sin^2\Lambda_k^{\alpha/4}\tau}{\Lambda_k^{\alpha/2}},\quad \nu_k=\Lambda_k^{\beta},$$

после чего можно воспользоваться результатами теоремы 12.

3.2. Оптимальное восстановление решения обобщенного волнового уравнения в шаре

Рассмотрим d-мерный шар $\mathbb{B}^d$. Известно (см. [13]), что функции Бесселя первого рода p-го порядка $J_p(x)$ являются собственными функциями оператора Лапласа, равными нулю на $\mathbb{S}^{d-1}$, отвечающими собственным значениям $-(\mu_s^{(p)})^2$, где $\mu_s^{(p)}$ —s-й корень функции Бесселя J_p. Тогда ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{B}^d)$ является система функций

$$Y_{ksj}(x)=\frac{1}{\|Z_{ksj}\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}Z_{ksj}(x),$$

где

$$Z_{ksj}(x)=\frac{J_p(\mu_s^{(p)}r)}{r^{d/2-1}}Y_j^{(k)}(x'),\quad k=0,1,\ldots,\ s=1,2,\ldots,\ j=1,\ldots,a_k.$$

Здесь $\mu_s^{(p)}$ — s-й корень функции Бесселя J_p. Пусть $f\in L_2(\mathbb{B}^d)$ и

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{ksj}Y_{ksj}(x).$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ следующим образом:

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(\mu_s^{(p)})^{\alpha}\sum_{j=1}^{a_k}c_{ksj}Y_{ksj}(x).$$

1. Рассмотрим обобщенное волновое уравнение в шаре. Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0 \tag{95}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_{|t=0} &= f, \\ u_{t|t=0} &= 0 \end{aligned} \tag{96}$$

и граничным условием

$$u_{|\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} \cos\left((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2} t\right) Y_{ksj}(x), \tag{97}$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f.

Поставим задачу оптимального восстановления решения уравнения (95) в момент времени τ по неточно заданному набору коэффициентов Фурье функции f на соболевском классе $W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d)$, определяемом как множество функций $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$, для которых

$$||(-\Delta_S)^{\beta/2} f||_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le 1.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_{ksj} \in Y_N$ такие, что $s \le s_0$, $k \le k_0$. При этом для некоторых фиксированных s и k могут быть известны все приближенные значения коэффициентов Фурье для $j = 1, \dots, a_k$, а для других s и k известна только часть приближенных значений коэффициентов.

При этом

$$\sum_{y_{ksj} \in Y_N} |c_{ksj}(f) - y_{ksj}|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0. \tag{98}$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon l^N \to L_2(\mathbb{B}^d)$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f \in W_d^{\beta}(\mathbb{B}^d),\ y \in l_2^N \\ \sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{y_{ksj}\in Y_N} |c_{ksj}(f) - y_{ksj}| \le \delta^2}} \|u(x,\tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Величина

$$E(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon l_2^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Будем считать, что k, s принадлежат множеству M_0, если для них определены приближенные значения хотя бы некоторых коэффициентов Фурье для $j = 1, \dots, a_k$; если же для данной пары чисел k, s известны не все приближенные значения коэффициентов Фурье для $j = 1, \dots, a_k$, считаем, что k, s принадлежат множеству M_1. Отметим, что при этом те пары k, s, для которых известны приближенные значения только части коэффициентов Фурье, будут принадлежать обоим множествам.

Положим

$$\vartheta_{ks} = \cos^2((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}\tau), \quad \nu_{ks} = (\mu_s^{(p)})^{\beta}.$$

Пусть множество M_0 состоит из L пар чисел. Перенумеруем ϑ_{ks}, $k, s \in M_0$, в любой последовательности: $\vartheta_1, \dots, \vartheta_L$.

Обозначим

$$A = \max_{1 \le i \le L} \frac{\vartheta_i}{\nu_i} = \frac{\vartheta_h}{\nu_h}, \quad B = \max_{k,s \in M_1} \frac{\vartheta_{ks}}{\nu_{ks}} = \frac{\vartheta_{k_1 s_1}}{\nu_{k_1 s_1}}.$$

Найдем r такое, что $\vartheta_r - B\nu_r = \max_{1 \le i \le L}(\vartheta_i - B\nu_i)$. Пусть последовательность m_l такова, что $m_l < m_{l+1} \le r$ и

$$\frac{\vartheta_{m_{l+1}} - \vartheta_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}} - \nu_{m_l}} = \max_{m_l < i \le r} \frac{\vartheta_i - \vartheta_{m_l}}{\nu_i - \nu_{m_l}}, \quad l = 0, 1, \dots, \tilde{l},$$

где $m_0 = p$, $m_{\tilde{l}} = r$.

Положим

$$M_l = \left\{ i \in \mathbb{N} \cap [1, L] : \frac{\vartheta_i}{\nu_i} > \frac{\vartheta_{m_{l+1}} - \vartheta_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}} - \nu_{m_l}} \right\}, \quad i = 1, \dots, \tilde{l} - 1,$$

$$M_q = \left\{ i \in \mathbb{N} \cap [1, L] : \frac{\vartheta_i}{\nu_i} > B \right\}.$$

Тогда из теоремы 8 вытекает

Теорема 24. *При $B \ge A$ для всех $\delta > 0$*

$$E(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d), F_{\delta}^N) = \sqrt{\frac{\vartheta_{k_1 s_1}}{\nu_{k_1 s_1}}}$$

и $u(x, \tau) \approx 0$ — оптимальный метод.

Если $B < A$, то

(i) при $\delta \ge \dfrac{1}{\sqrt{\nu_h}}$

$$E(\tau, \alpha, W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d), F_{\delta}^N) = \sqrt{\frac{\vartheta_h}{\nu_h}},$$

и $u(x', \tau) \approx 0$ — оптимальный метод, (*ii*) *при* $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_{l+1}}}} \le \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_l}}}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$,

$$E(\tau, \alpha, W_n^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \sqrt{\vartheta_{m_l}\frac{\nu_{m_{l+1}}\delta^2 - 1}{\nu_{m_{l+1}} - \nu_{m_l}} + \vartheta_{m_{l+1}}\frac{1 - \delta^2\nu_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}} - \nu_{m_l}}},$$

$$u(x,\tau) \approx \sum_{k,s\in M_l}\sum_{j=1}^{a_k}\cos((\mu_s^{(p)})^{\alpha/4}\tau)\left(1 + \frac{\vartheta_{m_{l+1}} - \vartheta_{m_l}}{\vartheta_{m_l}\nu_{m_{l+1}} - \vartheta_{m_{l+1}}\nu_{m_l}}\nu_k\right)^{-1} y_{ksj}Y_{ksj}(x)$$

— *оптимальный метод,*

(*iii*) *при* $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \sqrt{\vartheta_r\delta^2 + \vartheta_q\frac{1 - \delta^2\nu_r}{\nu_q}},$$

$$u(x,\tau) \approx \sum_{k,s\in M_q}\sum_{j=1}^{a_k}\cos((\mu_s^{(p)})^{\alpha/4}\tau)\left(1 + \frac{\vartheta_q}{\vartheta_r\nu_q - \vartheta_q\nu_r}\nu_k\right)^{-1} y_{ksj}Y_{ksj}(x)$$

— *оптимальный метод.*

Доказательство. Разобьем пары индексов ks на три группы:

1) в первую группу включаем такие значения k и s, для которых известны все приближенные значения коэффициентов Фурье c_{ksj} для всех $j : 1 \le j \le a_k$; сумму квадратов этих коэффициентов Фурье обозначим $b_{ks(0)} = \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj}^2$;

2) во вторую группу войдут такие пары ks, для каждой из которых известна только часть приближенных значений коэффициентов Фурье; обозначим $b_{ks(1)} = \sum_{j\in Y_N} c_{ksj}^2$ — суммы квадратов коэффициентов Фурье, для которых известны приближенные значения, и $b_{ks(2)} = \sum_{j\notin Y_N} c_{ksj}^2$ — суммы квадратов коэффициентов Фурье для тех же k, s, что и в $b_{ks(1)}$, для которых неизвестны приближенные значения;

3) наконец, в третью группу включаем пары ks, для которых неизвестны приближенные значения коэффициентов Фурье; сумму квадратов коэффициентов, входящих в третью группу, обозначим $b_{ks(3)} = \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj}^2$.

Тогда, если k, s принадлежат множеству M_0, то для них определены $b_{ks(0)}$ или $b_{ks(1)}$; соответственно если k, s принадлежат множеству M_1, то для них определены $b_{ks(2)}$ или $b_{ks(3)}$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k,s\in M_0}(\vartheta_{ks}b_{ks(0)} + \vartheta_{ks}b_{ks(1)}) + \sum_{k,s\in M_1}(\vartheta_{ks}b_{ks(2)} + \vartheta_{ks}b_{ks(3)}) \to \max,$$

$$\sum_{k,s\in M_0}\left(b_{ks(0)}+b_{ks(1)}\right)\le\delta^2,\quad \sum_{k,s=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{4}\nu_{ks}b_{ks(i)}\le 1.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(b,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k,s\in M_0}(-\vartheta_{ks}+\lambda_1+\lambda_2\nu_{ks})b_{ks(0)}+(-\vartheta_{ks}+\lambda_1+\lambda_2\nu_{ks})b_{ks(1)}+$$

$$\sum_{k,s\in M_1}(-\vartheta_{ks}+\lambda_2\nu_{ks})b_{ks(2)}+(-\vartheta_{ks}+\lambda_2\nu_{ks})b_{ks(3)},$$

где $b=\{c^2_{ksj}\}_{k,s\in\mathbb{N},\ j=1,\dots,a_k}$, а $\lambda_1,\ \lambda_2$ — множители Лагранжа.

Тогда соответствующая ей вторая экстремальная задача (см. следствие 1) может быть записана в виде:

$$\sum_{k,s\in M_0}\sum_{j\in Y_N}\left(\widehat{\lambda}_1(c_{ksj}-y_j)^2+\widehat{\lambda}_2\nu_{ks}b_{ks(0)}+\widehat{\lambda}_2\nu_{ks}b_{ks(1)}\right)+$$

$$\widehat{\lambda}_2\sum_{k,s\in M_1}\left(\nu_{ks}b_{ks(2)}+\nu_{ks}b_{ks(3)}\right)\to\min.$$

Выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода получаются теперь из теоремы 8.

□

2. Поставим задачу оптимального восстановления решения обобщенного волнового уравнения (95) с нулевым начальным значением u и ненулевой начальной скоростью:

$$u_{|t=0}=0,\qquad u_{t|t=0}=f \tag{99}$$

и граничным условием

$$u_{|\mathbb{S}^{d-1}=0.}$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{c_{ksj}}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}}\sin\left((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}t\right)Y_{ksj}(x), \tag{100}$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f. Будем считать, как и в предыдущем случае, что нам известны приближенные значения N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $\ y_{ksj}\in Y_N$ такие, что $s\le s_0,\ k\le k_0$, причем

$$\sum_{y_{ksj}\in Y_N}|c_{ksj}(f)-y_{ksj}|^2\le\delta^2,\quad \delta>0. \tag{101}$$

В соответствии с ранее введенными обозначениями положим

$$\vartheta_{ks}=\frac{\sin^2((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}\tau)}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha}},\quad \nu_{ks}=(\mu_s^{(p)})^{\beta},$$

$$A=\max_{1\le i\le L}\frac{\vartheta_i}{\nu_i}=\frac{\vartheta_h}{\nu_h},\quad B=\max_{k,s\in M_1}\frac{\vartheta_{ks}}{\nu_{ks}}=\frac{\vartheta_{k_1s_1}}{\nu_{k_1s_1}}$$

r определяется из условия $\vartheta_r-B\nu_r=\max_{1\le i\le L}(\vartheta_i-B\nu_i)$, последовательность m_l определяется равенствами $m_l<m_{l+1}\le r$ и

$$\frac{\vartheta_{m_{l+1}}-\vartheta_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}}-\nu_{m_l}}=\max_{m_l<i\le r}\frac{\vartheta_i-\vartheta_{m_l}}{\nu_i-\nu_{m_l}},\quad l=0,1,\dots,\tilde{l},$$

где $m_0=p$, $m_{\tilde{l}}=r$. Зададим множества M_0, M_1, M_l и M_q так же, как в предыдущем случае. Тогда при таком же способе выбора метода восстановления и определении погрешности оптимального восстановления, как в пункте 1, из теоремы 8 следует

Теорема 25. *При $B\ge A$ для всех $\delta>0$*

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)=\sqrt{\frac{\vartheta_{k_1s_1}}{\nu_{k_1s_1}}}$$

и $u(x,\tau)\approx 0$.

Если $B<A$, то

(i) при $\delta\ge\dfrac{1}{\sqrt{\nu_h}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)=\sqrt{\frac{\vartheta_h}{\nu_h}},$$

и $u(x',\tau)\approx 0$,

(ii) при $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_{l+1}}}}\le\delta<\dfrac{1}{\sqrt{\nu_{m_l}}}$, $l=0,1,\dots,m-1$,

$$E(\tau,\alpha,W_n^\beta(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)$$
$$=\sqrt{\vartheta_{m_l}\frac{\nu_{m_{l+1}}\delta^2-1}{\nu_{m_{l+1}}-\nu_{m_l}}+\vartheta_{m_{l+1}}\frac{1-\delta^2\nu_{m_l}}{\nu_{m_{l+1}}-\nu_{m_l}}},$$

$u(x,\tau)\approx$

$$\sum_{k,s\in M_l}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\sin((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}\tau)}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}}\left(1+\frac{\vartheta_{m_{l+1}}-\vartheta_{m_l}}{\vartheta_{m_l}\nu_{m_{l+1}}-\vartheta_{m_{l+1}}\nu_{m_l}}\nu_k\right)^{-1}y_{ksj}Y_{ksj}(x),$$

(iii) при $\delta<\dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(\tau,\alpha,W_2^\beta(\mathbb{B}^d),F_\delta^N)=\sqrt{\vartheta_r\delta^2+\vartheta_q\frac{1-\delta^2\nu_r}{\nu_q}},$$

$u(x,\tau)\approx$

$$\sum_{k,s\in M_q}\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\sin((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}\tau)}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}}\left(1+\frac{\vartheta_q}{\vartheta_r\nu_q-\vartheta_q\nu_r}\nu_k\right)^{-1}y_{ksj}Y_{ksj}(x).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 24.

3. Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения обобщенного волнового уравнения с погрешностью, заданной в равномерной метрике, для уравнения с нулевой начальной скоростью (96), точное решение которого имеет вид (97).

Предположим, что $f(x) \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$, где

$$W_2^\beta(\mathbb{B}^d) = \{f \in L_2(\mathbb{B}^d) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le 1.\}$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения N коэффициентов Фурье функции $f(x)$ $y_{ksj} \in Y_N$ такие, что $s \le s_0$, $k \le k_0$. При этом для некоторых фиксированных s и k могут быть известны все приближенные значения коэффициентов Фурье для $j = 1, \dots, a_k$, а для других s и k известна только часть приближенных значений коэффициентов.

При этом

$$|c_{ksj}(f) - y_{ksj}| \le \delta_{ksj}, \quad \delta_{ksj} > 0. \tag{102}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (96) в момент времени τ на классе $W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$ по информационному оператору F_δ^N $(\delta = \{\delta_{ksj}\})$, который каждой функции $f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$ сопоставляет множество векторов $y = \{y_{ksj}\}$, удовлетворяющих условию (102). В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi : l^N \to L_2(\mathbb{B}^d)$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d),\ y \in l_2^N \\ |c_{ksj}(f) - y_{ksj}| \le \delta_{ksj},\ \delta_{ksj} > 0, \\ k=1,\dots,k_0,\ s=1,\dots,s_0,\ j=1,\dots,a_k}} \|u(x,\tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Величина

$$E(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N) = \inf_{\varphi :\, l_2^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Будем считать, что k, s принадлежат множеству M_0, если для них определены приближенные значения хотя бы некоторых коэффициентов Фурье для $j = 1, \dots, a_k$; если же для данной пары чисел k, s известны не все приближенные значения коэффициентов Фурье для $j = 1, \dots, a_k$, считаем, что k, s принадлежат множеству M_1. Отметим, что при этом те пары k, s, для которых известны приближенные значения только части коэффициентов Фурье, будут принадлежать обоим множествам.

Положим

$$\vartheta_{ks} = \cos^2((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}\tau), \quad \nu_{ks} = (\mu_s^{(p)})^{\beta}.$$

Пусть множество M_0 состоит из L пар чисел. Перенумеруем $\vartheta_{ks},\ k,s \in M_0$, в виде $\vartheta_1,\dots,\vartheta_L$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\vartheta_1}{\nu_1} \geq \frac{\vartheta_2}{\nu_2} \geq \dots \geq \frac{\vartheta_L}{\nu_L}.$$

Обозначим для каждого $\{ks\},\ k,s \in M_0$,

$$\delta_i = \sqrt{\sum_{j:\ y_{ksj}\in Y_N} \delta_{ksj}^2}, \quad i = 1,\dots,L.$$

Найдем такие $k_1,\ s_1 \in M_1$, что

$$\frac{\vartheta_{k_1 s_1}}{\nu_{k_1 s_1}} = \max_{k,s\in M_1} \frac{\vartheta_{ks}}{\nu_{ks}}$$

и обозначим $\dfrac{\vartheta_{k_1 s_1}}{\nu_{k_1 s_1}} = \dfrac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}}$.

Положим в случае, если $\delta_1 < 1$ и $\dfrac{\vartheta_1}{\nu_1} > \dfrac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}}$,

$$p_0 = p_0(\delta) = \max p : \sum_{i=1}^{p} \nu_i \delta_i < 1,\ \frac{\vartheta_p}{\nu_p} > \frac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}},\ 1 \leq p \leq L\ ,$$

иначе положим $p_0 = 0$.

Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} L+1, & \dfrac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}} \geq \dfrac{\vartheta_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}} \\ p_0+1, & \dfrac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}} \dfrac{\vartheta_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}. \end{cases}$$

Тогда из теоремы 12 вытекает

Теорема 26. *Имеет место равенство*

$$E(\tau,\alpha,W_2^{\beta}(\mathbb{B}^d),F_\delta^N) =$$

$$\sqrt{\frac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}} + \sum_{i=1}^{p_0}\left(\vartheta_i - \frac{\vartheta_{L+1}}{\nu_{L+1}}\nu_i\right)\delta_i^2},$$

при этом метод

$$u(x,\tau) \approx \sum_{i=1}^{p_0}\left(1 - \frac{\nu_i \vartheta_{q_0}}{\nu_{q_0}\vartheta_i}\right)\sqrt{\vartheta_i}\sum_{j:\ y_{ksj}\in Y_N} y_{ksj}Y_{ksj}(x)$$

является оптимальным.

Доказательство. Переобозначим величины $b_{ks(0)}$ и $b_{ks(1)}$ в соответствии с нумерацией ϑ_i : $b_1, \dots, b_L$. Величины $b_{ks(2)}$ и $b_{ks(3)}$ зададим так же, как в предыдущем случае.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{L}(\vartheta_i b_i) + \sum_{k,s\in M_1}(\vartheta_{ks}b_{ks(2)} + \vartheta_{ks}b_{ks(3)}) \to \max,$$

$$b_i \le \delta_i^2, \quad \sum_{k,s=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{4}\nu_{ks}b_{ks(i)} \le 1.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(b, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_L) = \sum_{i=1}^{L}(-\vartheta_i + \lambda_i + \lambda\nu_i)b_i +$$

$$\sum_{k,s\in M_1}(-\vartheta_{ks} + \lambda\nu_{ks})b_{ks(2)} + (-\vartheta_{ks} + \lambda\nu_{ks})b_{ks(3)},$$

где $b = \{c_{ksj}^2\}_{k,s\in\mathbb{N},\ j=1,\dots,a_k}$, а $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_L$ — множители Лагранжа.

В случае, если $p_0 > 0$, положим $\hat\lambda = \dfrac{\vartheta_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\quad \hat\lambda_i = \vartheta_i - \dfrac{\vartheta_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_i,\ i = 1, \dots, p_0,\ \hat\lambda_i = 0,\ p_0 < i \le L.$

$$\hat b_i = \begin{cases} \delta_i^2, & i = 1, ..., p_0, \\ \dfrac{1 - \sum_{i=1}^{p_0}\nu_i\delta_i^2}{\nu_{q_0}}, & i = q_0, \\ 0, & i > p_0,\ i \ne q_0. \end{cases}$$

При $p_0 = 0$ положим $\hat\lambda = \dfrac{\vartheta_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\quad \hat\lambda_i = 0,\ i = 1, \dots, L,\quad \hat b_{q_0} = \dfrac{1}{\nu_{q_0}}$, $\hat b_i = 0,\ i \ne L$. Далее применяем теорему 12 и получаем выражения для погрешности оптимального восстановления и оптимального метода. $\square$

Для обобщенного волнового уравнения (99), точное решение которого имеет вид (100), причем для приближенных значений коэффициентов Фурье c_{ksj} функции f выполнены условия (102), определим погрешность восстановления для данного метода φ и погрешность оптимального восстановления так же, как в предыдущем случае.

Положим

$$\vartheta_{ks} = \frac{\sin^2((\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}\tau)}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}}, \quad \nu_{ks} = (\mu_s^{(p)})^{\beta}.$$

Сохраняя обозначения, введенные при формулировке и доказательстве теоремы 26, видим, что погрешность оптимального восстановления и оптимальный метод имеют в рассматриваемом случае такой же вид.

Список литературы

[1] *Чебышев П. Л.* Полн. собр. соч., т. 2, М. — Л., 1947. С. 151–238.

[2] *Колмогоров А. Н.* О наилучшем приближении функций заданного функционального класса. Ann. Math. 1936, v. 37, p. 107-110.

[3] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М., МГУ, 1965.

[4] *Miccelli Ch. A., Rivlin Th. J.* Optimal estimations in approximation theory. New York: Plenum Press, 1976, 300 p.

[5] *Трауб Дж., Вожньяковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1980, 664 с.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М., Эдиториал УРСС, 2000.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Матем. сб. 2002. Т. 193, с. 79-100.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных. Функ. анализ и его прил., 2003. Т. 37, с. 51-64.

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[10] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.

[11] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

[12] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[13] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., Мир, 1974.

[14] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С.

[15] *Выск Н.Д., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Матем. заметки, 2007, 81, вып. 6, с. 803-815.

[16] *Выск Н.Д.* О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны. Владикавказский матем. журнал, 2006, 8, вып. 4, с. 12-17.

[17] *Выск Н.Д.* Об оптимальном восстановлении решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Ростов-на-Дону, 2006, с. 221-222.

[18] *Vysk N.* Optimal recovery of solutions of the wave equation from inaccurate initial conditions, External Problems in Complex and Real Analysis, Albany, NY, 2007, 52 p.

[19] *Выск Н.Д.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным, заданным с погрешностью в равномерной

норме. Тезисы докладов третьей международной конференции, посвященной 85-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2008, с.243-244.