УДК 517.5

К. Ю. Осипенко

О некоторых неравенствах типа Карлсона

В статье находится точная константа в неравенстве

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T)}\left(\sum_{j=1}^{d}\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^r_{L_r(T)}\right)^{(1-\gamma)/r},$$

где T — конус в $\mathbb{R}^d$, а веса $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ и $\varphi_j(\cdot)$, $j=1,\dots,d$, — измеримые однородные функции. Аналогичные точные неравенства получены для дифференциальных операторов. Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: точные неравенства, дифференциальные операторы, неравенства типа Карлсона.

Введение

Хорошо известное неравенство Карлсона [1]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sqrt{\pi}\|x(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|tx(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad \mathbb{R}_+ = [0,+\infty),$$

обобщалось многими авторами (см., например, [2]–[7]). Сформулируем одно из обобщений этого неравенства, которым мы будем пользоваться.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ сферическую систему координат

$$\begin{aligned} t_1 &= \rho\cos\omega_1,\\ t_2 &= \rho\sin\omega_1\cos\omega_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ t_{d-1} &= \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\ t_d &= \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Для функции $f(t)$, $t\in\mathbb{R}^d$, положим

$$\widetilde{f}(\omega) = |f(\cos\omega_1,\dots,\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|, \quad \omega=(\omega_1,\dots,\omega_{d-1}).$$

Введем следующие обозначения:

$$P = \{\,(p,q,r) : 1\leqslant q < p,r\,\}, \quad P_1 = \{\,(p,q,r) : 1\leqslant q = r < p\,\},$$
$$P_2 = \{\,(p,q,r) : 1\leqslant q = p < r\,\}.$$

Пусть $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$, $|w_1(\cdot)|$ — измеримые однородные функции на $\mathbb{R}^d$ порядков θ, θ_0, θ_1, соответственно, T — конус в $\mathbb{R}^d$, а Ω — область изменения ω, когда $t\in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ. Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2}\omega_1\sin^{d-3}\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}.$$

Из работы [7] (следствие 4 при $n=1$) вытекает следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $w(\cdot), w_0(\cdot), w_1(\cdot) \neq 0$ *для почти всех* $t \in T$, $(p,q,r) \in P \cup P_1 \cup P_2$ *и* $\gamma \in (0,1)$. *Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \left(\frac{\widetilde{w}(\omega)}{\widetilde{w}_0^\gamma(\omega)\widetilde{w}_1(\omega)^{(1-\gamma)}}\right)^{\widetilde{q}} J(\omega)\,d\omega < \infty,$$

где

$$\gamma = \frac{\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r)}{\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)}, \quad \frac{1}{\widetilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ *таких, что* $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ *и* $w_1(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, *имеет место точное неравенство*

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

где

$$K = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B\left(\widetilde{q}\gamma/p, \widetilde{q}(1-\gamma)/r\right) I}{|\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\right)^{1/\widetilde{q}},$$

а $B(\cdot,\cdot)$ — B-*функция Эйлера.*

Для $(p,q,r) \in P$ теорема 1 была доказана в работе [4] (см. также следствие 4 из работы [5]).

В силу свойств B-функций

$$B\left(\widetilde{q}\gamma/p, \widetilde{q}(1-\gamma)/r\right) = \frac{\gamma r + (1-\gamma)p}{\gamma r} B\left(\widetilde{q}\gamma/p + 1, \widetilde{q}(1-\gamma)/r\right).$$

Поэтому константа K может быть записана в виде

$$K = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B\left(\widetilde{q}\gamma/p + 1, \widetilde{q}(1-\gamma)/r\right) I}{r|\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r)|}\right)^{1/\widetilde{q}}.$$

§ 1. Точные неравенства на конусах в $\mathbb{R}^d$

Пусть

$$w_1(t) = \left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^r\right)^{1/r}.$$

Тогда

$$\|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^r.$$

Тем самым теорема 1 может быть переформулирована в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть* $|w(\cdot)|, |w_0(\cdot)|$ — *измеримые однородные функции порядков* θ, θ_0, *а* $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \ldots, n$, — *измеримые однородные функции порядка* θ_1.

Пусть, кроме того, $w(t), w_0(t) \neq 0$ *и* $\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)| \neq 0$ *для почти всех* $t \in T$, $(p,q,r) \in P \cup P_1 \cup P_2$ *и* $\gamma \in (0,1)$. *Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \left(\frac{\widetilde{w}(\omega)}{\widetilde{w}_0^\gamma(\omega) \left(\sum_{j=1}^n \widetilde{\varphi}_j^r(\omega) \right)^{(1-\gamma)/r}} \right)^{\widetilde{q}} J(\omega)\, d\omega < \infty.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ *таких, что* $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ *и* $\varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, $j = 1,\dots,n$, *имеет место точное неравенство*

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^\gamma_{L_p(T)} \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^r_{L_r(T)} \right)^{(1-\gamma)/r}.$$

Следствие 1. *Пусть* $|w(\cdot)|, |w_0(\cdot)|$ — *измеримые однородные функции порядков* $d(1-1/q)$, $d-(\lambda+d)/p$, *а* $|\varphi_j(\cdot)|$, $j=1,\dots,n$, — *измеримые однородные функции порядка* $d+(\mu-d)/r$, $\lambda,\mu>0$. *Пусть, кроме того,* $w(t), w_1(t) \neq 0$ *и* $\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)| \neq 0$ *для почти всех* $t \in T$ *и* $(p,q,r) \in P \cup P_1 \cup P_2$. *Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \left(\frac{\widetilde{w}(\omega)}{\widetilde{w}_0^{p\alpha}(\omega) \left(\sum_{j=1}^n \widetilde{\varphi}_j^r(\omega) \right)^{\beta}} \right)^{\frac{1}{1/q-\alpha-\beta}} J(\omega)\, d\omega < \infty,$$

где

$$\alpha = \frac{\mu}{p\mu + r\lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p\mu + r\lambda}.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$ *таких, что* $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ *и* $\varphi_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, $j = 1,\dots,n$, *имеет место точное неравенство*

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant \widehat{K} \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{p\alpha}_{L_p(T)} \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^r_{L_r(T)} \right)^{\beta},$$

где

$$\widehat{K} = \frac{1}{(p\alpha)^\alpha (r\beta)^\beta} \left(\frac{I}{\lambda+\mu} B\left(\frac{\alpha}{1/q-\alpha-\beta}, \frac{\beta}{1/q-\alpha-\beta} \right) \right)^{1/q-\alpha-\beta}.$$

В случае, когда $T = \mathbb{R}^d_+$, $q=1$, $p,r>1$, $w(t) \equiv 1$, $n=1$,

$$w_0(t) = W^{1-(\lambda+1)/p}(t), \quad w_1(t) = W^{1+(\mu-1)/r}(t),$$

где $W(\cdot)$ — однородная функция порядка d, утверждение следствия 1 было получено в работе [3]. В одномерном случае ($d=1$) при сформулированных выше условиях соответствующее утверждение было получено в работе [2].

§ 2. Точные неравенства для дифференциальных операторов

2.1. Точные неравенства в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$. .

Пусть S — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, S' — соответствующее пространство обобщенных функций, $F\colon S' \to S'$ — преобразование Фурье.

Пусть $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \dots, n$, — однородные функции порядка ν, а $|\psi(\cdot)|$ — однородные функция порядка η. Положим

$$X_p = \left\{ x(\cdot) \in S' : \varphi_j(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),\ j = 1, \dots, n,\ Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Для функций $x(\cdot) \in X_p$ определим операторы D_j, $j = 1, \dots, n$, равенствами

$$D_j x(\cdot) = F^{-1}(\varphi_j(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot),\ j = 1, \dots, n,$$

и оператор

$$\Lambda x(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot) \tag{2.1}$$

(будем предполагать, что функция $\psi(\cdot)$ такова, что $\psi(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для $x(\cdot) \in X_p$).

Положим

$$C_p(\nu, \eta) = \widehat{\gamma}^{-\frac{\widehat{\gamma}}{p}}(1-\widehat{\gamma})^{-\frac{1-\widehat{\gamma}}{2}} \left(\frac{B\left(\widehat{q}\widehat{\gamma}/p + 1, \widehat{q}(1-\widehat{\gamma})/2\right)}{2|\nu - \eta|} \right)^{1/\widehat{q}},$$

где

$$\widehat{\gamma} = \frac{\nu - \eta}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widehat{q} = \frac{1}{\widehat{\gamma}(1/2 - 1/p)}.$$

Из теоремы 6 работы [7] (аналогично теореме 2) вытекает следующий результат:

Теорема 3. *Пусть $2 < p \leqslant \infty$, $\widehat{\gamma} \in (0,1)$. Предположим, что*

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^{\widehat{q}}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{\varphi}_j^2(\omega)\right)^{\widehat{q}(1-\widehat{\gamma})/2}} J(\omega)\, d\omega < \infty, \quad \Pi^{d-1} = [0,\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi].$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_p(\nu,\eta) I^{1/\widehat{q}}}{(2\pi)^{d\widehat{\gamma}/2}} \|Fx(\cdot)\|^{\widehat{\gamma}}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{j=1}^n \|D_j x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right)^{(1-\widehat{\gamma})/2}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим некоторые конкретные веса. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$. Определим оператор D^α (производная порядка α) равенством

$$D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha Fx(\xi))(\cdot),$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$. Ясно, что если $x(\cdot)$ достаточно гладкая функция на $\mathbb{R}^d$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial x^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_d}(t)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}}.$$

Положим

$$\psi_\theta(\xi)=(|\xi_1|^\theta+\ldots+|\xi_d|^\theta)^{2/\theta},\quad \theta>0.$$

Через $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ обозначим оператор Λ, определенный равенством (2.1) для $\psi(\xi)=\psi_\theta^{\eta/2}(\xi)$. В частности, $\Lambda_2=-\Delta$, где Δ — оператор Лапласа. Получим точное неравенство (2.2) для $\Lambda=\Lambda_\theta^{\eta/2}$ и $D_j=D^{\nu e_j}$, $j=1,\ldots,d$, где $\{e_j\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Для $\varphi_j(\xi)=(i\xi_j)^\nu$ имеем $\widetilde{\varphi}_j(\omega)=\widetilde{t}_j^{\,\nu}(\omega)$, где

$$\begin{aligned}\widetilde{t}_1(\omega)&=|\cos\omega_1|,\\ \widetilde{t}_2(\omega)&=|\sin\omega_1\cos\omega_2|,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \widetilde{t}_{d-1}(\omega)&=|\sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1}|,\\ \widetilde{t}_d(\omega)&=|\sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}|.\end{aligned}$$

Заметим, что $\displaystyle\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega)=1$.

Для величины I из теоремы 3 имеем

$$I=\int_{\Pi^{d-1}}\frac{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega)\right)^{\widehat{q}\eta/\theta}J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu}(\omega)\right)^{\widehat{q}(1-\widehat{\gamma})/2}}. \tag{2.3}$$

Если $\nu\leqslant 1$, то

$$\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu}(\omega)\geqslant\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega)=1. \tag{2.4}$$

Если же $\nu>1$, то по неравенству Гельдера

$$1=\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega)\leqslant\Big(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu}(\omega)\Big)^{1/\nu}d^{1-1/\nu}.$$

Тем самым

$$\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu}(\omega)\geqslant d^{1-\nu}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I<\infty$.

Тем самым из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *Пусть $2<p\leqslant\infty$ и $\nu>\eta\geqslant 0$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{C_p(\nu,\eta)I^{1/\widehat{q}}}{(2\pi)^{d\widehat{\gamma}/2}}\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\widehat{\gamma}}\left(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{(1-\widehat{\gamma})/2},$$

где I определено равенством (2.3).

В частности, при $\theta = 2$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $2 < p \leqslant \infty$ и $\nu > \eta \geqslant 0$ имеет место точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_p(\nu,\eta)I^{1/\widehat{q}}}{(2\pi)^{d\widehat{\gamma}/2}}\|Fx(\cdot)\|^{\widehat{\gamma}}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\left(\sum_{j=1}^d\left\|\frac{\partial^\nu x}{\partial t_j^\nu}(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{(1-\widehat{\gamma})/2}.$$

Пусть теперь $\Lambda = D^\alpha$, а $D_j = D^{\nu e_j}$, $j = 1,\dots,d$. Тогда величина I из теоремы 3 имеем вид

$$I = \int_{\Pi^{d-1}}\frac{\left(\widetilde{t}_1^{\alpha_1}(\omega)\dots\widetilde{t}_d^{\alpha_d}(\omega)\right)^{q_1}J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{2\nu}(\omega)\right)^{q_1(1-\gamma_1)/2}}, \tag{2.6}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\nu-|\alpha|}{\nu+d(1/2-1/p)},\quad q_1 = \frac{1}{\gamma_1(1/2-1/p)},\quad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_d.$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I < \infty$. Из теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Пусть $2 < p \leqslant \infty$ и $\nu > |\alpha| \geqslant 0$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widetilde{C}_p(\nu,|\alpha|)I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d\gamma_1/2}}\|Fx(\cdot)\|^{\gamma_1}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\left(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{(1-\gamma_1)/2},$$

где

$$\widetilde{C}_p(\nu,|\alpha|) = \gamma_1^{-\frac{\gamma_1}{p}}(1-\gamma_1)^{-\frac{1-\gamma_1}{2}}\left(\frac{B\left(q_1\gamma_1/p+1,q_1(1-\gamma_1)/2\right)}{2(\nu-|\alpha|)}\right)^{1/q_1},$$

а I определено равенством (2.6).

Получим точное неравенство для оператора $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ для случай, когда $p = 2$.

Теорема 4. *Пусть $\nu > \eta > 0$ и $0 < \theta \leqslant 2\nu$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}}\|Fx(\cdot)\|^{1-\eta/\nu}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\eta/(2\nu)}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max,\quad \|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta^2,\quad \sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1. \tag{2.8}$$

Для $0 < \varepsilon < (2\pi)^{d/(2\nu)}(d\delta^2)^{-1/(2\nu)}$, положим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left(\frac{(2\pi)^d}{d\delta^2}\right)^{\frac{1}{2\nu}}(1,\dots,1)-(\varepsilon,\dots,\varepsilon),\quad B_\varepsilon = \{\xi\in\mathbb{R}^d : |\xi-\widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\delta}{\sqrt{\operatorname{mes}B_\varepsilon}}, & \xi\in B_\varepsilon,\\ 0, & \xi\notin B_\varepsilon.\end{cases}$$

Тогда $\|Fx_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\delta^2$ и

$$\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d\operatorname{mes}B_\varepsilon}\sum_{j=1}^d\int_{B_\varepsilon}|\xi_j|^{2\nu}\,d\xi\leqslant 1.$$

Тем самым функция $x_\varepsilon(\cdot)$ является допустимой в задаче (2.8). Обозначив значение этой задачи через S, имеем

$$S\geqslant\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d\operatorname{mes}B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}\psi_\theta^\eta(\xi)\,d\xi=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\psi_\theta^\eta(\widetilde{\xi}_\varepsilon),\quad \widetilde{\xi}_\varepsilon\in B_\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon\to 0$, получаем

$$S\geqslant d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-\eta/\nu}. \tag{2.9}$$

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)&=-\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\lambda_1\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\qquad+\lambda_2\biggl(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\biggr)\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\biggl(-\psi_\theta^\eta(\xi)+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}\biggr)|Fx(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

Так как $\theta\leqslant 2\nu$, то из неравенства Гельдера следует, что

$$\sum_{j=1}^d|\xi_j|^\theta\leqslant\biggl(\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}\biggr)^{\theta/(2\nu)}d^{1-\theta/(2\nu)}.$$

Положив $\rho=(|\xi_1|^\theta+\ldots+|\xi_d|^\theta)^{1/\theta}$, получим

$$\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}\geqslant\rho^{2\nu}d^{1-2\nu/\theta}.$$

Таким образом,

$$-\psi_\theta^\eta(\xi)+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}\geqslant f(\rho),$$

где

$$f(\rho)=-\rho^{2\eta}+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\rho^{2\nu}d^{1-2\nu/\theta}.$$

Положим

$$\lambda_1 = \frac{d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}}{(2\pi)^d}\left(1-\frac{\eta}{\nu}\right)\left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2}\right)^{\eta/\nu}, \quad \lambda_2 = d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}\frac{\eta}{\nu}\left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2}\right)^{\eta/\nu-1}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $f(\rho)$ достигает минимума на $[0,+\infty)$ в точке

$$\rho_0 = d^{(1/\theta-1/(2\nu))}\left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2}\right)^{1/(2\nu)}.$$

Причем $f(\rho_0)=0$. Тем самым

$$-\psi_\theta^{\eta/2}(\xi)+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}\geqslant 0.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)\geqslant 0$.

Для любой допустимой в задаче (2.8) функции $x(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned}-\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant -\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\lambda_1\left(\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}-\delta^2\right)\\ +\lambda_2\left(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}-1\right)\\ =\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1\delta^2-\lambda_2\geqslant-\lambda_1\delta^2-\lambda_2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S\leqslant\lambda_1\delta^2+\lambda_2=d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-\eta/\nu}.$$

Учитывая (2.9), получаем

$$S=d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-\eta/\nu}. \tag{2.10}$$

Предположим, что $x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $D^{\nu e_j}x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j=1,\dots,d$. Положим

$$A=\left(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2}.$$

Тогда для $\varepsilon>0$ и $\widehat{x}(\cdot)=x(\cdot)/(A+\varepsilon)$ имеем

$$\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{A^2}{(A+\varepsilon)^2}<1, \quad \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{A+\varepsilon}.$$

Из (2.10) вытекает, что

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{d^{\eta(2/\theta-1/\nu)}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)}}\|F\widehat{x}(\cdot)\|^{2(1-\eta/\nu)}_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}}\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu}(A+\varepsilon)^{\eta/\nu}.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (2.7).

Предположим, что существует постоянная

$$C < \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}},$$

для которой справедливо неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu}\left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{\eta/(2\nu)}.$$

Тогда

$$\sup_{\substack{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta \\ \sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\leqslant 1}} \|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\delta^{1-\eta/\nu} < \frac{d^{\eta(1/\theta-1/(2\nu))}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}}\delta^{1-\eta/\nu},$$

что противоречит (2.10).

Из (2.7) при $\theta = 2$, $\nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \eta > 0$ вытекает точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{d^{\eta(1-1/\nu)/2}}{(2\pi)^{d(1-\eta/\nu)/2}}\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\eta/\nu}\left(\sum_{j=1}^d \left\|\frac{\partial^\nu x}{\partial t_j^\nu}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{\eta/(2\nu)}.$$

Положив $\eta = 2$, получаем, что для всех целых $\nu \geqslant 3$ справедливо точное неравенство

$$\|\Delta x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{d^{1-1/\nu}}{(2\pi)^{d(1-2/\nu)/2}}\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-2/\nu}\left(\sum_{j=1}^d \left\|\frac{\partial^\nu x}{\partial t_j^\nu}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{1/\nu}$$

или (в силу того, что $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2}\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$)

$$\|\Delta x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant d^{1-1/\nu}\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-2/\nu}\left(\sum_{j=1}^d \left\|\frac{\partial^\nu x}{\partial t_j^\nu}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{1/\nu}.$$

Получим теперь аналог теоремы 4 для оператора $\Lambda = D^\alpha$.

Теорема 5. *Пусть $\nu > |\alpha| > 0$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\begin{aligned}
&\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad\leqslant \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}}\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)}\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-|\alpha|/\nu}\left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{|\alpha|/(2\nu)}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta^2, \quad \sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1. \quad (2.12)$$

Для

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\left(\frac{(2\pi)^d\alpha_j}{|\alpha|\delta^2}\right)^{\frac{1}{2\nu}} : \alpha_j > 0,\ j = 1, \dots, d\right\}$$

положим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha|\delta^2}\right)^{\frac{1}{2\nu}} (\alpha_1^{1/(2\nu)}, \dots, \alpha_d^{1/(2\nu)}) - (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d), \quad \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon, & \alpha_j > 0, \\ 0, & \alpha_j = 0, \end{cases}$$

$$B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\sqrt{\operatorname{mes} B_\varepsilon}} \left(1 + d\varepsilon^{2\nu}\dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\|Fx_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \delta^2\left(1 + d\varepsilon^{2\nu}\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1} \leqslant \delta^2$$

и

$$\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \operatorname{mes} B_\varepsilon}\left(1 + d\varepsilon^{2\nu}\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1} \sum_{j=1}^d \int_{B_\varepsilon} |\xi_j|^{2\nu}\, d\xi$$
$$\leqslant \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \operatorname{mes} B_\varepsilon}\left(1 + d\varepsilon^{2\nu}\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1} \operatorname{mes} B_\varepsilon \left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha|\delta^2}\sum_{j=1}^d \alpha_j + d\varepsilon^{2\nu}\right) = 1.$$

Тем самым функция $x_\varepsilon(\cdot)$ является допустимой в задаче (2.12). Обозначив значение этой задачи через S, имеем

$$S \geqslant \|D^\alpha x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \operatorname{mes} B_\varepsilon}\left(1 + d\varepsilon^{2\nu}\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1} \int_{B_\varepsilon} |\xi_1|^{2\alpha_1} \dots |\xi_d|^{2\alpha_d}\, d\xi$$
$$= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(1 + d\varepsilon^{2\nu}\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1} |\widetilde{\xi}_1|^{2\alpha_1} \dots |\widetilde{\xi}_d|^{2\alpha_d}, \quad (\widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_d) \in B_\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем

$$S \geqslant \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-|\alpha|/\nu} |\alpha|^{-|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}. \quad (2.13)$$

Положим

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=-\|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\lambda_1\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ +\lambda_2\Bigg(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Bigg) \\ =\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Bigg(-|\xi_1|^{2\alpha_1}\dots|\xi_d|^{2\alpha_d}+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}\Bigg)|Fx(\xi)|^2\,d\xi.$$

В функции

$$-|\xi_1|^{2\alpha_1}\dots|\xi_d|^{2\alpha_d}+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}$$

сделаем замену переменных $|\xi_j|^2=e^{t_j}$, $j=1,\dots,d$. Получим функцию

$$G(t)=-e^{(\alpha,t)}+(2\pi)^d\lambda_1+\lambda_2\sum_{j=1}^d e^{\nu t_j}=e^{(\alpha,t)}H(t),$$

где $(\alpha,t)=\alpha_1t_1+\dots\alpha_dt_d$,

$$H(t)=-1+(2\pi)^d\lambda_1e^{-(\alpha,t)}+\lambda_2\sum_{j=1}^d e^{\nu t_j-(\alpha,t)}.$$

Положим

$$\lambda_1=\frac{1}{(2\pi)^d}\left(1-\frac{|\alpha|}{\nu}\right)\left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha|\delta^2}\right)^{\frac{|\alpha|}{\nu}}\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq 0}}^d\alpha_j^{\alpha_j/\nu},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{\nu}\left(\frac{(2\pi)^d}{|\alpha|\delta^2}\right)^{\frac{|\alpha|}{\nu}-1}\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq 0}}^d\alpha_j^{\alpha_j/\nu}.$$

Функция $H(\cdot)$ является выпуклой. Нетрудно убедиться, что $H(\widehat{t})=0$, где

$$\widehat{t}=\frac{1}{\nu}\left(\ln\frac{(2\pi)^d\alpha_1}{|\alpha|\delta^2},\dots,\ln\frac{(2\pi)^d\alpha_d}{|\alpha|\delta^2}\right).$$

Кроме того, градиент функции $H(\cdot)$ в точке $\widehat{t}$ равен нулю. Отсюда следует, что $H(t)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbb{R}^d$. Следовательно, $G(t)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbb{R}^d$. Тем самым $\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)\geqslant 0$.

Для любой допустимой в задаче (2.12) функции $x(\cdot)$ имеем

$$-\|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\geqslant-\|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\lambda_1\left(\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}-\delta^2\right) \\ +\lambda_2\Bigg(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}-1\Bigg) \\ =\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1\delta^2-\lambda_2\geqslant-\lambda_1\delta^2-\lambda_2.$$

Отсюда следует, что

$$S \leqslant \lambda_1\delta^2 + \lambda_2 = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-|\alpha|/\nu} |\alpha|^{-|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\ne 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}.$$

Учитывая (2.13), получаем

$$S = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-|\alpha|/\nu} |\alpha|^{-|\alpha|/\nu} \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\ne 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu}. \tag{2.14}$$

Предположим, что $x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $D^{\nu e_j}x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j=1,\ldots,d$. Положим

$$A = \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2}.$$

Тогда для $\varepsilon>0$ и $\widehat{x}(\cdot) = x(\cdot)/(A+\varepsilon)$ имеем

$$\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j}\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{A^2}{(A+\varepsilon)^2} < 1, \quad \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{A+\varepsilon}.$$

Из (2.14) вытекает, что

$$\|D^\alpha \widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/\nu}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)}} \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\ne 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/\nu} \|F\widehat{x}(\cdot)\|^{2(1-|\alpha|/\nu)}_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}} \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\ne 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)} \|F\widehat{x}(\cdot)\|^{1-|\alpha|/\nu}_{L_2(\mathbb{R}^d)} (A+\varepsilon)^{|\alpha|/\nu}.$$

Устремляя $\varepsilon\to 0$, получаем неравенство (2.11).

Предположим, что существует постоянная

$$C < \frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}} \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\ne 0}}^d \alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)},$$

для которой справедливо неравенство

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|F\widehat{x}(\cdot)\|^{1-|\alpha|/\nu}_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{|\alpha|/(2\nu)}.$$

Тогда

$$\sup_{\substack{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta\\ \sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1}}\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\delta^{1-|\alpha|/\nu}$$

$$<\frac{|\alpha|^{-|\alpha|/(2\nu)}}{(2\pi)^{d(1-|\alpha|/\nu)/2}}\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq 0}}^d\alpha_j^{\alpha_j/(2\nu)}\delta^{1-|\alpha|/\nu},$$

что противоречит (2.14).

2.2. Точные неравенства в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. .

Положим

$$\widehat{\gamma}_1=\frac{\nu-\eta-d/2}{\nu+d(1/2-1/p)},\quad \widehat{q}_1=\frac{1}{1/2+\widehat{\gamma}_1(1/2-1/p)},$$

$$\widehat{C}_p(\nu,\eta)=\widehat{\gamma}_1^{-\frac{\widehat{\gamma}_1}{p}}\,(1-\widehat{\gamma}_1)^{-\frac{1-\widehat{\gamma}_1}{2}}\left(\frac{B\left(\widehat{q}_1\widehat{\gamma}_1/p+1,\widehat{q}_1(1-\widehat{\gamma}_1)/2\right)}{2|\nu-\eta-d/2|}\right)^{1/\widehat{q}_1}.$$

Из теоремы 8 работы [7] вытекает следующий результат:

Теорема 6. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\widehat{\gamma}_1\in(0,1)$. *Предположим, что*

$$I=\int_{\Pi^{d-1}}\frac{\widetilde{\psi}^{\widehat{q}_1}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n\widetilde{\varphi}_j^2(\omega)\right)^{\widehat{q}_1(1-\widehat{\gamma}_1)/2}}J(\omega)\,d\omega<\infty.$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{C}_p(\nu,\eta)I^{1/\widehat{q}_1}}{(2\pi)^{d(1+\widehat{\gamma}_1)/2}}\|Fx(\cdot)\|^{\widehat{\gamma}_1}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\left(\sum_{j=1}^n\|D_jx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{(1-\widehat{\gamma}_1)/2}\tag{2.15}$$

Пусть $\Lambda=\Lambda_\theta^{\eta/2}$ и $D_j=D^{\nu e_j}$, $j=1,\dots,d$. Тогда для величины I из теоремы 6 имеем

$$I=\int_{\Pi^{d-1}}\frac{\left(\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega)\right)^{\widehat{q}_1\eta/\theta}J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,2\nu}(\omega)\right)^{\widehat{q}_1(1-\widehat{\gamma}_1)/2}}.\tag{2.16}$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I<\infty$. Тем самым из теоремы 6 вытекает

Следствие 4. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$ *и* $\nu-d/2>\eta>0$. *Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{C}_p(\nu,\eta)I^{1/\widehat{q}_1}}{(2\pi)^{d(1+\widehat{\gamma}_1)/2}}\|Fx(\cdot)\|^{\widehat{\gamma}_1}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\left(\sum_{j=1}^d\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{(1-\widehat{\gamma}_1)/2},$$

где I определено равенством (2.16).

Если $\Lambda = D^\alpha$, а $D_j = D^{\nu e_j}$, $j = 1, \dots, d$, то для величины I из теоремы 6 имеем

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\left(\widetilde{t}_1^{\alpha_1}(\omega) \dots \widetilde{t}_d^{\alpha_d}(\omega)\right)^{\widetilde{q}_1} J(\omega)\, d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{2\nu}(\omega)\right)^{\widetilde{q}_1(1-\widetilde{\gamma}_1)/2}}, \tag{2.17}$$

где

$$\widetilde{\gamma}_1 = \frac{\nu - |\alpha| - d/2}{\nu + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widetilde{q}_1 = \frac{1}{1/2 + \widetilde{\gamma}_1(1/2 - 1/p)}.$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $I < \infty$. Из теоремы 6 получаем

Следствие 5. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\nu - d/2 > |\alpha| > 0$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{K_p(\nu, |\alpha|) I^{1/\widetilde{q}_1}}{(2\pi)^{d(1+\widetilde{\gamma}_1)/2}} \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\widetilde{\gamma}_1} \left(\sum_{j=1}^d \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{(1-\widetilde{\gamma}_1)/2},$$

где

$$K_p(\nu, |\alpha|) = \widetilde{\gamma}_1^{-\frac{\widetilde{\gamma}_1}{p}} (1 - \widetilde{\gamma}_1)^{-\frac{1-\widetilde{\gamma}_1}{2}} \left(\frac{B\left(\widetilde{q}_1\widetilde{\gamma}_1/p + 1, \widetilde{q}_1(1 - \widetilde{\gamma}_1)/2\right)}{2(\nu - |\alpha| - d/2)}\right)^{1/\widetilde{q}_1},$$

а I определено равенством (2.17).

Список литературы

[1] Carlson F. “Une inégalité”, *Ark. Mat. Astr. Fysik*, **25B** (1934), 1–5.

[2] Левин В. И. “Точные константы в неравенствах типа Карлсона”, *ДАН*, **59** (1948), 635–638.

[3] Андрианов Ф. И. “Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщений”, *Изв. вузов. Матем.*, **1** (1967), 3–7.

[4] Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. “Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, *Math. Ineq. Appl.*, **1** (1998), 53–67.

[5] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.

[6] Osipenko K. Yu. “Inequalities for derivatives with the Fourier transform”, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **53** (2021), 132–150.

[7] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties”, *J. Complexity*, **81** (2024), 101807, pp. 35.

К. Ю. Осипенко (K. Yu. Osipenko)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступила в редакцию
04.09.2024