УДК 517.5

К. Ю. Осипенко

Неравенства типа Карлсона со многими весами и оптимальное восстановление

В статье находится точная константа в неравенстве

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leqslant C \max_{1\leqslant j\leqslant l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu)} \max_{l+1\leqslant j\leqslant n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)},$$

где T — конус в $\mathbb{R}^d$, а веса $\psi(\cdot)$ и $\varphi_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, — измеримые однородные функции, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям симметричности. Точное неравенство является следствием более общей задачи об оптимальном восстановлении в весовых $L_q(T,\mu)$-пространствах по неточно заданным функциям, решение которой приводится. Полученные результаты применяются для оптимального восстановления степеней обобщенного оператора Лапласа и соответствующих точных неравенств. Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: точные неравенства, дифференциальные операторы, неравенства типа Карлсона.

Введение

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(T,\mu)$ обозначим совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, & 1\leqslant p<\infty, \\ \operatorname*{vraisup}_{t\in T} |x(t)| < \infty, & p=\infty. \end{cases}$$

При $T\subset\mathbb{R}^d$ и $d\mu(t)=dt$ мы используем обозначение $L_q(T)$.

Хорошо известное неравенство Карлсона [1]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sqrt{\pi}\|x(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|tx(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad \mathbb{R}_+=[0,+\infty),$$

обобщалось многими авторами (см., например, [2]–[9]). Оказалось, что задача нахождения точной константы в неравенствах типа Карлсона тесно связана с некоторой задачей оптимального восстановления по неточно заданной информации. В п. 2 мы формулируем соответствующую задачу и даем ее решение. В п. 3 этот общий результат применяется для однородных весовых функций, обладающих некоторыми дополнительными свойствами. В качестве следствия получается точное неравенство типа Карлсона со многими весами, обобщающее результат, полученный в работе [9].

В п. 4 рассматривается случай однородных весов в $\mathbb{R}^d$. В этом случае удается записать точную константу в неравенстве типа Карлсона в терминах бэта-функции Эйлера. В частности, для весов конкретного вида приводится точное неравенство, обобщающее хорошо известное неравенство, полученное В. В. Левиным [2]. В п. 5 изучаются задачи оптимального восстановления дифференциальных операторов по неточно заданным преобразованиям Фурье других дифференциальных операторов. В частности, получены соответствующие результаты для степеней обобщенного оператора Лапласа. В качестве следствия получены точные неравенства типа Карлсона для обобщенных степеней Лапласа, дающие оценку норм обобщенных степеней через нормы производных.

§ 1. Общие результаты

Положим

$$\begin{gathered}\mathcal{W}=\{\,x(\cdot):\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\in L_p(T,\mu),\ j=1,\dots,l,\\ \varphi_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(T,\mu),\ j=l+1,\dots,n\,\},\\ W=\{\,x(\cdot)\in\mathcal{W}:\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}\leqslant\delta_j,\ j=l+1,\dots,n\,\},\end{gathered}$$

где $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $\delta_j>0$, $j=l+1,\dots,n$, а $\varphi_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, — измеримые функции на T.

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda\colon\mathcal{W}\to L_q(T,\mu)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, задаваемого равенством $\Lambda x(\cdot)=\psi(\cdot)x(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ — некоторая измеримая функция на T, на классе W по функциям $\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\in W$, $j=1,\dots,l$, известным с погрешностью (будем считать, что функции $\varphi_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, и $\psi(\cdot)$ таковы, что оператор Λ отображает пространство $\mathcal{W}$ в $L_q(T,\mu)$).

Предполагается, что для каждой функции $x(\cdot)\in W$ известны функции $y_j(\cdot)\in L_p(T,\mu)$, $j=1,\dots,l$, такие, что

$$\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta_j,\quad\delta_j>0,\quad j=1,\dots,l.$$

Требуется по функциям $y_j(\cdot)$, $j=1,\dots,l$, восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon(L_p(T,\mu))^l\to L_q(T,\mu)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(p,q,r,m)=\sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y(\cdot)\in(L_p(T,\mu))^l\\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta_j,\ j=1,\dots,l}}\|\Lambda x(\cdot)-m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)},$$

$y(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_l(\cdot))$. Величина

$$E(p,q,r)=\inf_{m\colon(L_p(T,\mu))^l\to L_q(T,\mu)}e(p,q,r,m)\tag{1.1}$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Имеет место неравенство

$$E(p,q,r)\geqslant\sup_{\substack{x(\cdot)\in W\\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta_j,\ j=1,\dots,l}}\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}.\tag{1.2}$$

Действительно, пусть $x(\cdot) \in W$, $\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leqslant \delta_j$, $j = 1,\dots,l$, а $m\colon (L_p(T,\mu))^l \to L_q(T,\mu)$ — произвольный метод восстановления. Тогда в силу того, что $x(\cdot) \in W$ и $-x(\cdot) \in W$ имеем

$$\begin{aligned}2\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} &= \|\Lambda x(\cdot) - m(0)(\cdot) - (\Lambda(-x(\cdot)) - m(0))(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \\ &\leqslant \|\Lambda x(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} + \|\Lambda(-x(\cdot)) - m(0)(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leqslant 2e(p,q,r,m).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого метода m

$$e(p,q,r,m) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta_j,\ j=1,\dots,l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}.$$

Переходя к нижней грани в левой части по всем методам, получаем нужное неравенство.

Положим

$$\sigma_{p,l}(t) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j|\varphi_j(t)|^p, \quad \Sigma_{r,n}(t) = \sum_{j=l+1}^{n} \lambda_j|\varphi_j(t)|^r.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant q < p, r < \infty$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,n$, $\sigma_{p,l}(t)+\Sigma_{r,n}(t) \neq 0$ *для почти всех* $t \in T$, $|\varphi_j(t)| > 0$, $j = 1,\dots,l$, *для почти всех* $t \in T$, $\widehat{x}(t) \geqslant 0$ *— решение уравнения*

$$-q|\psi(t)|^q + p\sigma_{p,l}(t)x^{p-q}(t) + r\Sigma_{r,n}(t)x^{r-q}(t) = 0, \tag{1.3}$$

$\lambda_1,\dots\lambda_n$ *таковы, что* $\widehat{x}(\cdot) \in W$,

$$\begin{gathered}\|\varphi_j(\cdot)\widehat{x}(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leqslant \delta_j, \quad \lambda_j\left(\|\varphi_j(\cdot)\widehat{x}(\cdot)\|^p_{L_p(T,\mu)} - \delta_j^p\right) = 0, \quad j = 1,\dots,l, \\ \lambda_j\left(\|\varphi_j(\cdot)\widehat{x}(\cdot)\|^r_{L_r(T,\mu)} - \delta_j^r\right) = 0,\ j = l+1,\dots,n.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Тогда

$$\begin{aligned}E(p,q,r) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta_j,\ j=1,\dots,l}} &\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \\ &= \left(\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\delta_j^p + \frac{r}{q}\sum_{j=l+1}^{n}\lambda_j\delta_j^r\right)^{1/q},\end{aligned} \tag{1.5}$$

а метод

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = \psi(t)\sum_{j=1}^{l}\beta_j(t)y_j(t), \tag{1.6}$$

где

$$\beta_j(t) = \begin{cases} \dfrac{p}{q}\lambda_j\dfrac{|\varphi_j(t)|^p}{\varphi_j(t)|\psi(t)|^q}\widehat{x}^{p-q}(t), & \psi(t) \neq 0, \\ 0, & \psi(t) = 0, \end{cases} \qquad j = 1,\dots,l,$$

является оптимальным.

Для оценки снизу погрешности оптимального восстановления, вытекающей из неравенства (1.2), будет решаться экстремальная задача, возникающая в правой части этого неравенства. Приведем один простой результат (близкий к достаточным условиям в теореме Куна–Таккера), используемый для решения соответствующих экстремальных задач.

Пусть $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, — функции, определенные на некотором множестве A. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x) \to \max, \quad f_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in A, \tag{1.7}$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Лемма 1 [10]. *Пусть существуют $\widehat{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, и допустимый в задаче* (1.7) *элемент $\widehat{x} \in A$, для которых*

$$\begin{aligned} &(a) \quad \min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n), \\ &(b) \quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j f_j(\widehat{x}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\widehat{x}$ — экстремальный элемент в задаче (1.7).

Нам потребуется также следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 3 из работы [7].

Пусть $u = (u_0, u_1, \ldots, u_l)$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, $a = (a_0, a_1, \ldots, a_l)$. Положим

$$F(u, \alpha) = -\biggl(\sum_{j=0}^{l} \alpha_j u_j\biggr)^q + \sum_{j=1}^{l} a_j u_j^p + a_0 u_0^r, \quad u, \alpha, a \in \mathbb{R}_+^{l+1}, \quad \sum_{j=0}^{l} \alpha_j = 1,$$

где $1 \leqslant p, q, r < \infty$.

Лемма 2. *Пусть $1 \leqslant q < p, r < \infty$. Для любых $a \in \mathbb{R}_+^{l+1}$, $a \neq 0$, существует единственное решение $\widehat{v} > 0$ уравнения*

$$-q + p v^{p-q} \sum_{j=1}^{l} a_j + r a_0 v^{r-q} = 0. \tag{1.8}$$

Кроме того, при $\alpha_j = q^{-1} p a_j \widehat{v}^{p-q}$, $j = 1, \ldots, l$, $\alpha_0 = q^{-1} r a_0 \widehat{v}^{r-q}$ для всех $u \in \mathbb{R}_+^{l+1}$

$$F(\overline{u}, \alpha) \leqslant F(u, \alpha), \quad \overline{u} = (\widehat{v}, \ldots, \widehat{v}). \tag{1.9}$$

Доказательство. Существование единственного решения уравнения (1.8) вытекает из того, что непрерывная функция

$$f(v) = p v^{p-q} \sum_{j=1}^{l} a_j + r a_0 v^{r-q}$$

на $\mathbb{R}_+$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$.

Докажем неравенство (1.9). Если $a_j = 0$ при некотором j, $0 \leqslant j \leqslant l$, то надо доказать то же утверждение, в котором число l заменяется на $l-1$. При $l=1$ соответствующее утверждение доказано в работе [7]. Будем считать, что $a_j > 0$, $j = 0, \dots, l$. Пусть

$$C > \max\left\{a_0^{-\frac{1}{r-q}}, a_1^{-\frac{1}{p-q}}, \dots, a_l^{-\frac{1}{p-q}}\right\}.$$

Если

$$U = \max_{0\leqslant j\leqslant l} u_j = u_0,$$

то

$$F(u,\alpha) \geqslant -u_0^q + a_0 u_0^r > 0$$

при $U \geqslant C$. Если $U = u_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, то

$$F(u,\alpha) \geqslant -u_j^q + a_j u_j^p > 0$$

при $U \geqslant C$. В силу того, что $F(0,\alpha) = 0$, функция $F(u,\alpha)$ принимает минимальное значение в кубе $0 \leqslant U < C$. Тем самым существует точка $\widehat{u} = (\widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_l)$, $\widehat{u}_j \in [0, C)$, $j = 0, \dots, l$, для которой

$$\inf_{u\in\mathbb{R}_+^{l+1}} F(u,\alpha) = F(\widehat{u},\alpha).$$

Имеем

$$F_{u_0}(u,\alpha) = -q\left(\sum_{j=0}^{l}\alpha_j u_j\right)^{q-1}\alpha_0 + a_0 r u_0^{r-1} = r a_0\left(-\left(\sum_{j=0}^{l}\alpha_j u_j\right)^{q-1}\widehat{v}^{r-q} + u_0^{r-1}\right). \tag{1.10}$$

Так как $F_{u_0}(u,\alpha) < 0$ при достаточно малых u_0, то $0 < \widehat{u}_0 < C$. Такие же неравенства верны для остальных координат $\widehat{u}$. Действительно,

$$F_{u_j}(u,\alpha) = -q\left(\sum_{j=0}^{l}\alpha_j u_j\right)^{q-1}\alpha_j + a_j p u_j^{p-1} = p a_j\left(-\left(\sum_{j=0}^{l}\alpha_j u_j\right)^{q-1}\widehat{v}^{p-q} + u_j^{p-1}\right). \tag{1.11}$$

Следовательно, $F_{u_j}(u,\alpha) < 0$ при достаточно малых u_j. Таким образом, в точке $\widehat{u}$ выполнены равенства

$$F_{u_j}(\widehat{u},\alpha) = 0, \quad j = 0, \dots, l.$$

Учитывая (1.10) и (1.11), получаем следующие равенства

$$-\left(\sum_{j=0}^{l}\alpha_j \widehat{u}_j\right)^{q-1}\widehat{v}^{r-q} + \widehat{u}_0^{r-1} = 0,$$

$$-\left(\sum_{j=0}^{l}\alpha_j \widehat{u}_j\right)^{q-1}\widehat{v}^{p-q} + \widehat{u}_j^{p-1} = 0.\ j = 1, \dots, l.$$

Отсюда
$$\frac{\widehat{u}_j^{p-1}}{\widehat{u}_0^{r-1}}=\widehat{v}^{p-r},\quad j=1,\dots,l.$$
Тем самым
$$\widehat{u}_j=\widehat{v}^{\frac{p-r}{p-1}}\widehat{u}_0^{\frac{r-1}{p-1}},\ j=1,\dots,l. \tag{1.12}$$
Положим
$$\alpha=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j.$$
Тогда $\alpha_0=1-\alpha$. В силу того,что $\widehat{u}_1=\ldots=\widehat{u}_l$, имеем
$$((1-\alpha)\widehat{u}_0+\alpha\widehat{u}_1)^{q-1}\widehat{v}^{r-q}=\widehat{u}_0^{r-1}.$$
Пусть $p\geqslant r$. Подставляя $\widehat{u}_1$ из равенства (1.12), получаем равенство
$$\left(1-\alpha+\alpha t^{\frac{r-p}{p-1}}\right)^{q-1}=t^{r-q},$$
где $t=\widehat{u}_0/\widehat{v}$. Нетрудно убедиться, что это уравнение имеет единственное решение $t=1$. Если $p<r$, то воспользуемся равенством
$$((1-\alpha)\widehat{u}_0+\alpha\widehat{u}_1)^{q-1}\widehat{v}^{p-q}=\widehat{u}_1^{p-1}.$$
Выразив $\widehat{u}_0$ через $\widehat{u}_1$ с помощью равенства (1.12), будем иметь
$$\left((1-\alpha)s^{\frac{p-r}{r-1}}+\alpha\right)^{q-1}=s^{p-q},$$
где $s=\widehat{u}_1/\widehat{v}$. Это уравнение также имеет единственное решение $s=1$.

Таким образом, доказано, что $\widehat{u}=(\widehat{v},\dots,\widehat{v})$ и для всех $u\in\mathbb{R}_+^{l+1}$ выполнено неравенство (1.9).

Доказательство теоремы 1. 1. Оценка снизу. Экстремальная задача в правой части неравенства (1.2) (для удобства мы переходим к q-ой степени) имеет вид
$$\int_T|\psi(t)x(t)|^q\,d\mu(t)\to\max,\quad \int_T|\varphi_j(t)x(t)|^p\,d\mu(t)\leqslant\delta_j^p,\ j=1,\dots,l,$$
$$\int_T|\varphi_j(t)x(t)|^r\,d\mu(t)\leqslant\delta_j^r,\ j=l+1,\dots,n. \tag{1.13}$$
Если элемент $t\in T$ такой, что $\psi(t)=0$, то $\widehat{x}(t)=0$. Если $\psi(t)\neq0$, то из леммы 2 вытекает, что решение уравнения (1.3) существует и единственно. В силу условий (1.4) и предположения, что $\widehat{x}(\cdot)\in W$, функция $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой для экстремальной задачи (1.13). Из (1.3) следует, что
$$|\psi(t)|^q\widehat{x}^q(t)=\frac{p}{q}\sigma_{p,l}(t)\widehat{x}^p(t)+\frac{r}{q}\Sigma_{r,n}(t)\widehat{x}^r(t).$$
Тем самым
$$E^q(p,q,r)\geqslant\int_T|\psi(t)|^q\widehat{x}^q(t)\,d\mu(t)=\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\delta_j^p+\frac{r}{q}\sum_{j=l+1}^{n}\lambda_j\delta_j^r. \tag{1.14}$$

2. Оценка сверху. Для нахождения погрешности метода (1.6) нужно найти значение следующей экстремальной задачи (здесь снова для удобства мы переходим к q-ой степени)

$$\int_T \left|\psi(t)x(t) - \psi(t)\sum_{j=1}^{l}\beta_j(t)y_j(t)\right|^q d\mu(t) \to \max,$$
$$\int_T |\varphi_j(t)x(t) - y_j(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant \delta_j^p,\ j = 1,\dots,l,$$
$$\int_T |\varphi_j(t)x(t)|^r\, d\mu(t) \leqslant \delta_j^r,\ j = l+1,\dots,n. \quad (1.15)$$

Положим

$$z_j(t) = \varphi_j(t)x(t) - y_j(t), \quad j = 1,\dots,l,$$

и запишем задачу (1.15) в виде

$$\int_T |\psi(t)|^q \left|\left(1 - \sum_{j=1}^{l}\beta_j(t)\varphi_j(t)\right)x(t) + \sum_{j=1}^{l}\beta_j(t)z_j(t)\right|^q d\mu(t) \to \max,$$
$$\int_T |z_j(t)|^p\, d\mu(t) \leqslant \delta_j^p,\ j = 1,\dots,l, \quad \int_T |\varphi_j(t)x(t)|^r\, d\mu(t) \leqslant \delta_j^r,\ j = l+1,\dots,n. \quad (1.16)$$

Положим $u_0(t) = |x(t)|$, $u_j(t) = |z_j(t)|/|\varphi_j(t)|$, $j = 1,\dots,l$. Значение задачи (1.16) не превосходит значения задачи

$$\int_T |\psi(t)|^q \left|\sum_{j=0}^{l}\alpha_j(t)u_j(t)\right|^q d\mu(t) \to \max,$$
$$\int_T |\varphi_j(t)|^p u_j^p(t)\, d\mu(t) \leqslant \delta_j^p,\ j = 1,\dots,l,$$
$$\int_T |\varphi_j(t)|^r u_0^r(t)\, d\mu(t) \leqslant \delta_j^r,\ j = l+1,\dots,n, \quad (1.17)$$

где $\alpha_j(t) = \beta_j(t)\varphi_j(t)$, $j = 1,\dots,l$,

$$\alpha_0(t) = 1 - \sum_{j=1}^{l}\alpha_j(t).$$

Функция Лагранжа для этой экстремальной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u(\cdot),\mu) = \int_T L(t,u(t),\mu)\, dt, \quad u(\cdot) = (u_0(\cdot),\dots,u_l(\cdot)), \quad \mu = (\mu_1,\dots,\mu_n),$$

где

$$L(t,u(t),\mu) = -|\psi(t)|^q \left|\sum_{j=0}^{l}\alpha_j(t)u_j(t)\right|^q + \sum_{j=1}^{l}\mu_j|\varphi_j(t)|^p u_j^p(t)$$
$$+ u_0^r(t)\sum_{j=l+1}^{n}\mu_j|\varphi_j(t)|^r.$$

При $\psi(t) \neq 0$ рассмотрим функцию

$$F(u(t), \lambda) = -\left|\sum_{j=0}^{l} \alpha_j(t) u_j(t)\right|^q + \sum_{j=1}^{l} a_j(t) u_j^p(t) + a_0(t) u_0^r(t), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где

$$a_j(t) = |\psi(t)|^{-q} \lambda_j |\varphi_j(t)|^p, \ j = 1, \dots, l, \quad a_0(t) = |\psi(t)|^{-q} \sum_{j=l+1}^{n} \lambda_j |\varphi_j(t)|^r.$$

Нетрудно убедиться, что при $\psi(t) \neq 0$ функция $\widehat{x}(t)$ является решением уравнения

$$-q + p\widehat{x}^{p-q}(t) \sum_{j=1}^{l} a_j(t) + r a_0(t) \widehat{x}^{r-q}(t) = 0.$$

Кроме того, выполняются равенства

$$\alpha_j(t) = \frac{p}{q} a_j(t) \widehat{x}^{p-q}(t), \ j = 1, \dots, l, \quad \alpha_0(t) = \frac{r}{q} a_0(t) \widehat{x}^{r-q}.$$

Из леммы 2 вытекает, что для всех $u(\cdot)$ таких, что $u_j(t) \geqslant 0$, $j = 0, \dots, n$,

$$F(\widehat{u}(\cdot), \lambda) \leqslant F(u(\cdot), \lambda),$$

где $\widehat{u}(\cdot) = (\widehat{x}(\cdot), \dots, \widehat{x}(\cdot))$. Следовательно, при $\psi(t) \neq 0$

$$L(t, \widehat{u}(t), \lambda) \leqslant L(t, u(t), \lambda). \tag{1.18}$$

При $\psi(t) = 0$ из (1.3) следует, что $\widehat{x}(t) = 0$. Тогда в силу того, что $\widehat{u}(t) = 0$, $L(t, \widehat{u}(t), \lambda) = 0$ и неравенство (1.18) очевидным образом тоже выполнено. Тем самым

$$\mathcal{L}(\widehat{u}(\cdot), \lambda) \leqslant \mathcal{L}(u(\cdot), \lambda).$$

Применяя лемму 1, получаем, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является экстремальной в задаче (1.17). Поэтому, учитывая (1.14), имеем

$$\begin{aligned} e^q(p, q, r, \widehat{m}) &\leqslant \int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q \, d\mu(t) = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \delta_j^p + \frac{r}{q} \sum_{j=l+1}^{n} \lambda_j \delta_j^r \\ &\leqslant \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leqslant \delta_j, \ j=1,\dots,l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}^q \leqslant E^q(p, q, r). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (1.5) и оптимальность метода $\widehat{m}$.

§ 2. Однородные весовые функции на конусе

Пусть T — конус в линейном пространстве, $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка d, $|\psi(\cdot)|$ — однородная функция порядка η, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \dots, l$, однородные функции порядка ν, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = l+1, \ldots, n$, — однородные функции порядка ν_1. Положим

$$s_{p,l}(t) = \sum_{j=1}^{l} |\varphi_j(t)|^p, \quad S_{r,n}(t) = \sum_{j=l+1}^{n} |\varphi_j(t)|^r.$$

Будем предполагать, что $\psi(t), s_{p,l}(t), S_{r,n}(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$.

Если $1 \leqslant q < p, r < \infty$, то при $k \in [0,1)$ функция $k^{\frac{1}{p-q}}(1-k)^{-\frac{1}{r-q}}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно существует функция $k(\cdot)$ такая, что для почти всех $t \in T$

$$\frac{k^{\frac{1}{p-q}}(t)}{(1-k(t))^{\frac{1}{r-q}}} = S_{r,n}^{-\frac{1}{r-q}}(t) s_{p,l}^{\frac{1}{p-q}}(t) |\psi(t)|^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу о нахождении величины (1.1) для случая, когда

$$\delta_1 = \ldots = \delta_l = \delta, \quad \delta_{l+1} = \ldots = \delta_n = \Delta. \tag{2.2}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant q < p, r < \infty$ *и* $\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p) \neq 0$. *Предположим, что*

$$I_j = \int_T |\varphi_j(z)|^p \left(\frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)}\right)^{\frac{p}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(z)\, d\mu(z) < \infty, \ j = 1, \ldots, l,$$
$$I_j = \int_T |\varphi_j(z)|^r \left(\frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)}\right)^{\frac{r}{p-q}} k^{\frac{r}{p-q}}(z)\, d\mu(z) < \infty, \ j = l+1, \ldots, n.$$

Пусть, кроме того, $I_1 = \ldots = I_l$ *и* $I_{l+1} = \ldots = I_n$. *Тогда*

$$E(p,q,r) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leqslant \delta, \ j=1,\ldots,l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}$$
$$= \left(\frac{\delta}{I_1^{1/p}}\right)^{\gamma} \left(\frac{\Delta}{I_{l+1}^{1/r}}\right)^{1-\gamma} (lI_1 + (n-l)I_{l+1})^{1/q}, \tag{2.3}$$

где

$$\gamma = \frac{\nu_1 - \eta - d(1/q - 1/r)}{\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)}. \tag{2.4}$$

Метод

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = \frac{\psi(t)k(\xi t)}{s_{p,l}(t)} \sum_{j=1}^{l} \frac{|\varphi_j(t)|^p}{\varphi_j(t)} y_j(t), \tag{2.5}$$

где

$$\xi = \left(\delta \Delta^{-1} I_1^{-1/p} I_{l+1}^{1/r}\right)^{\frac{1}{\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)}}, \tag{2.6}$$

является оптимальным.

Доказательство. Положим

$$\widehat{x}(t) = \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)}\right)^{\frac{1}{p-q}} k^{\frac{1}{p-q}}(\xi t),$$

где λ_0 будет определено ниже. Имеем

$$p\lambda_0 s_{p,l}(t)\widehat{x}^{p-q}(t) = q|\psi(t)|^q k(\xi t) \tag{2.7}$$

и

$$rS_{r,n}(t)\widehat{x}^{r-q}(t) = rS_{r,n}(t)\left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)}\right)^{\frac{r-q}{p-q}} k^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t).$$

Из однородности $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi_j(\cdot)|$, $j=1,\dots,n$, учитывая равенство (2.1), получаем

$$k^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t) = \frac{|\psi(\xi t)|^{\frac{q(p-r)}{p-q}}}{S_{r,n}(\xi t)} s_{p,l}^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t)(1-k(\xi t))$$
$$= \xi^{\eta\frac{q(p-r)}{p-q}-\nu_1 r+\nu p\frac{r-q}{p-q}} \frac{|\psi(t)|^{\frac{q(p-r)}{p-q}}}{S_{r,n}(t)} s_{p,l}^{\frac{r-q}{p-q}}(t)(1-k(\xi t)).$$

Таким образом

$$rS_{r,n}(t)\widehat{x}^{r-q}(t) = r\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{r-q}{p-q}} \xi^{\eta\frac{q(p-r)}{p-q}-\nu_1 r+\nu p\frac{r-q}{p-q}}|\psi(t)|^q(1-k(\xi t)).$$

Положим

$$\lambda = \frac{q}{r}\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{-\frac{r-q}{p-q}} \xi^{-\eta\frac{q(p-r)}{p-q}+\nu_1 r-\nu p\frac{r-q}{p-q}}. \tag{2.8}$$

Тогда

$$r\lambda S_{r,n}(t)\widehat{x}^{r-q}(t) = q|\psi(t)|^q(1-k(\xi t)). \tag{2.9}$$

Сложив равенства (2.7) и (2.9), получаем

$$p\lambda_0 s_{p,l}(t)\widehat{x}^{p-q}(t) + r\lambda S_{r,n}(t)\widehat{x}^{r-q}(t) = q|\psi(t)|^q.$$

Это означает, что $\widehat{x}(\cdot)$ удовлетворяет равенству (1.3) при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_0$ и $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = \lambda$.

Покажем, что при

$$\lambda_0 = \frac{q}{p} I_1^{\frac{p-q}{p}} \xi^{q(\nu-\eta)-d\frac{p-q}{p}} \delta^{q-p} \tag{2.10}$$

выполняются равенства

$$\int_T |\varphi_j(t)|^p \widehat{x}^p(t)\,d\mu(t) = \delta^p,\ j=1,\dots,l,$$
$$\int_T |\varphi_j(t)|^r \widehat{x}^r(t)\,d\mu(t) = \Delta^r,\ j=l+1,\dots,n.$$

Из определения $\widehat{x}(\cdot)$ следует, что надо доказать справедливость равенств

$$\int_T |\varphi_j(t)|^p \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)}\right)^{\frac{p}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(\xi t)\,d\mu(t) = \delta^p,\ j=1,\dots,l,$$
$$\int_T |\varphi_j(t)|^r \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)}\right)^{\frac{r}{p-q}} k^{\frac{r}{p-q}}(\xi t)\,d\mu(t) = \Delta^r,\ j=l+1,\dots,n.$$

Сделаем замену переменных $z = \xi t$. Учитывая однородность функций $|\psi(\cdot)|$, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \dots, n$, и меры $\mu(\cdot)$, будем иметь

$$\int_T |\varphi_j(t)|^p \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)}\right)^{\frac{p}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(\xi t)\, d\mu(t) = \left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{p}{p-q}} \xi^{\frac{\nu pq}{p-q} - \frac{\eta qp}{p-q} - d} I_j, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$\int_T |\varphi_j(t)|^r \left(\frac{q|\psi(t)|^q}{p\lambda_0 s_{p,l}(t)}\right)^{\frac{r}{p-q}} k^{\frac{r}{p-q}}(\xi t)\, d\mu(t) = \left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{r}{p-q}} \xi^{\frac{\nu pr}{p-q} - \nu_1 r - \frac{\eta qr}{p-q} - d} I_j, \quad j = l+1, \dots, n,$$

Справедливость равенств

$$\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{p}{p-q}} \xi^{\frac{\nu pq}{p-q} - \frac{\eta qp}{p-q} - d} I_j = \delta^p, \ j = 1, \dots, l,$$
$$\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{r}{p-q}} \xi^{\frac{\nu pr}{p-q} - \nu_1 r - \frac{\eta qr}{p-q} - d} I_j = \Delta^r, \ j = l+1, \dots, n,$$

вытекает из определений λ_0 и ξ.

Из теоремы 1 и равенств (2.10), (2.8), (2.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} E^q(p,q,r) &= \frac{pl\lambda_0\delta^p + (n-l)r\lambda\Delta^r}{q} = lI_1^{\frac{p-q}{p}} \xi^{q(\nu-\eta) - d\frac{p-q}{p}} \delta^q \\ &+ (n-l)\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{-\frac{r-q}{p-q}} \xi^{-\eta\frac{q(p-r)}{p-q} + \nu_1 r - \nu p \frac{r-q}{p-q}} \Delta^r = lI_1^{\frac{p-q}{p}} \xi^{q(\nu-\eta) - d\frac{p-q}{p}} \delta^q \\ &+ (n-l)\left(I_1^{\frac{p-q}{p}} \xi^{q(\nu-\eta) - d\frac{p-q}{p}} \delta^{q-p}\right)^{\frac{r-q}{p-q}} \xi^{-\eta\frac{q(p-r)}{p-q} + \nu_1 r - \nu p\frac{r-q}{p-q}} \Delta^r \\ &= \left(\frac{\delta}{I_1^{1/p}}\right)^{q\gamma} \left(\frac{\Delta}{I_2^{1/r}}\right)^{q(1-\gamma)} (lI_1 + (n-l)I_2). \end{aligned}$$

Оптимальность метода (2.5) непосредственно следует из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для всех $x \in \mathcal{W}$, $x(\cdot) \neq 0$, имеет место точное неравенство*

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leqslant C \max_{1\leqslant j\leqslant l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu)} \max_{l+1\leqslant j\leqslant n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)}, \tag{2.11}$$

где

$$C = I_1^{-\gamma/p} I_{l+1}^{-(1-\gamma)/r} (lI_1 + (n-l)I_{l+1})^{1/q}.$$

Доказательство. Положим

$$\delta = \max_{1\leqslant j\leqslant l} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}, \quad \Delta = \max_{l+1\leqslant j\leqslant n} \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}.$$

Тогда из (2.3) следует, что

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu))} \leqslant C\delta^\gamma \Delta^{1-\gamma}.$$

Если предположить, что существует постоянная $\widetilde{C} < C$, для которой при всех $x(\cdot)$, удовлетворяющих условиям следствия, выполняется неравенство (2.11), то

$$\sup_{\substack{x \in W \\ \|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leqslant \delta,\ j=1,\dots,l}} \|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leqslant \widetilde{C}\delta^\gamma \Delta^{1-\gamma} < C\delta^\gamma \Delta^{1-\gamma},$$

что противоречит (2.3).

§ 3. Однородные весовые функции на конусе в $\mathbb{R}^d$

Пусть T — конус в $\mathbb{R}^d$, $d\mu(t) = dt$, $|\psi(\cdot)|$ — однородная функция порядка η, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \dots, l$, однородные функции порядка ν, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = l+1, \dots, n$, — однородные функции порядка ν_1. Будем по-прежнему предполагать, что $\psi(t), s_{p,l}(t), S_{r,n}(t) \neq 0$ для почти всех $t \in T$. Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned} t_1 &= \rho\cos\omega_1, \\ t_2 &= \rho\sin\omega_1\cos\omega_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{d-1} &= \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1}, \\ t_d &= \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}. \end{aligned}$$

Положим $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$. Для любой функции $f(\cdot)$, заданной на $\mathbb{R}^d$, введем следующее обозначение

$$\widetilde{f}(\omega) = |f(\cos\omega_1, \dots, \sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|.$$

Заметим, что если $|f(\cdot)|$ однородная функция порядка κ, то $f(\omega) = \rho^{-\kappa}|f(t)|$. Обозначим через Ω область изменения ω, когда $t \in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ. Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2}\omega_1\sin^{d-3}\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}.$$

Переходя к сферическим координатам, для функции $k(\cdot)$ будем иметь равенство

$$\frac{k^{\frac{1}{p-q}}(\rho,\omega)}{(1-k(\rho,\omega))^{\frac{1}{r-q}}} = \rho^{\frac{(\eta-\nu)q(p-r)-(\nu_1-\nu)r(p-q)}{(p-q)(r-q)}} \frac{\widetilde{\psi}^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}(\omega)\widetilde{s}_{p,l}^{\frac{1}{p-q}}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{\frac{1}{r-q}}(\omega)}. \tag{3.1}$$

Предположим, что $\gamma \in (0,1)$, где γ определено формулой (2.4). Положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Нетрудно убедиться, что $q^* > q \geqslant 1$. Кроме того,

$$q^* = \frac{pqr(\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p))}{r(p-q)(\nu_1-\nu) - q(p-r)(\eta-\nu)}.$$

Продолжим исследовать задачу о нахождении величины (1.1) для случая, когда выполнены условия (2.2).

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant q < p, r < \infty$ *и* $\gamma \in (0,1)$. *Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \frac{\widetilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}^{q^*\gamma/p}(\omega)\widetilde{S}_{r,n}^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega)\,d\omega < \infty,$$

$I_1' = \ldots = I_l'$, *где*

$$I_j' = \int_\Omega \widetilde{\varphi}_j^p(\omega) \frac{\widetilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}^{q^*\gamma/p+1}(\omega)\widetilde{S}_{r,n}^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega)\,d\omega,\ \ j = 1,\ldots,l,$$

и $I_{l+1}' = \ldots = I_n'$, *где*

$$I_j' = \int_\Omega \widetilde{\varphi}_j^r(\omega) \frac{\widetilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}^{q^*\gamma/p}(\omega)\widetilde{S}_{r,n}^{q^*(1-\gamma)/r+1}} J(\omega)\,d\omega,\ \ j = l+1,\ldots,n.$$

Тогда

$$E(p,q,r) = C_1 \delta^\gamma \Delta^{1-\gamma},$$

где

$$C_1 = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^{\gamma/p} \left(\frac{n-l}{1-\gamma}\right)^{(1-\gamma)/r} \left(\frac{B\left(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r\right) I}{|\nu_1 - \nu + d(1/r-1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\right)^{1/q^*}$$

а $B(\cdot,\cdot)$ — B-*функция Эйлера. Метод*

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = k\left(\widehat{\xi}^{\frac{1}{\nu_1-\nu+d(1/r-1/p)}} t\right) \frac{\psi(t)}{s_{p,l}(t)} \sum_{j=1}^l \frac{|\varphi_j(t)|^p}{\varphi_j(t)} y_j(t),$$

где

$$\widehat{\xi} = \frac{\delta}{\Delta} \left(\frac{l}{\gamma}\right)^{1/p} \left(\frac{1-\gamma}{n-l}\right)^{1/r} \left(\frac{B\left(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r\right) I}{|\nu_1 - \nu + d(1/r-1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\right)^{1/r-1/p},$$

является оптимальным.

Доказательство. Заметим, что $I_1' + \ldots + I_l' = I$ и $I_{l+1}' + \ldots + I_n' = I$. Поэтому $I_j' = I/l$, $j = 1,\ldots,l$, и $I_j' = I/(n-l)$, $j = l+1,\ldots,n$. Вычислим величины I_j, $j = 1,\ldots,l$, из теоремы 2 с помощью перехода к сферическим координатам. Имеем

$$\begin{aligned} I_j &= \int_T |\varphi_j(z)|^p \left(\frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)}\right)^{\frac{p}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(z)\,d\mu(z) \\ &= \int_\Omega \widetilde{\varphi}_j^p(\omega) \left(\frac{\widetilde{\psi}^q(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}(\omega)}\right)^{\frac{p}{p-q}} J(\omega)\,d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{(\eta-\nu)qp}{p-q}+d-1} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho. \end{aligned}$$

Из (3.1) следует, что

$$\rho^{(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)} = \frac{(1-k(\rho,\omega))^{p-q}}{k^{r-q}(\rho,\omega)} \frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}.$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Тогда

$$d\rho^{\frac{(\eta-\nu)qp}{p-q}+d} = \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}\right)^{\zeta} d\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}}$$
$$= -\zeta\left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}\right)^{\zeta} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk,$$

где

$$\zeta = \frac{(\eta-\nu)qp+d(p-q)}{(p-q)((\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r))} = \frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)}.$$

Если ρ меняется от 0 до $+\infty$, то k будет меняться от 0 до 1 при $(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)<0$ и от 1 до 0 при $(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)>0$. Поэтому

$$\int_0^{+\infty} \rho^{\frac{(\eta-\nu)qp}{p-q}+d-1} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho$$
$$= \frac{p-q}{(\eta-\nu)qp+d(p-q)}\int_0^{+\infty} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho^{\frac{(\eta-\nu)qp}{p-q}+d}$$
$$= \frac{1}{|(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)|}\left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}\right)^{\zeta}$$
$$\times\int_0^1 k^{\frac{p}{p-q}}\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk$$
$$= \frac{1}{|(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)|}\left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{s}_{p,l}^{r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{p-q}(\omega)}\right)^{\zeta}(K_1+K_2),$$

где

$$K_1 = (r-q)\int_0^1 k^{\widehat{p}}(1-k)^{\widehat{q}-1}\,dk = (r-q)B(\widehat{p}+1,\widehat{q}),$$
$$K_2 = (p-r)\int_0^1 k^{\widehat{p}+1}(1-k)^{\widehat{q}-1}\,dk = (p-r)B(\widehat{p}+2,\widehat{q})$$
$$= (p-r)\frac{\widehat{p}+1}{\widehat{p}+\widehat{q}+1}B(\widehat{p}+1,\widehat{q}),$$
$$\widehat{p} = \frac{(\nu_1-\eta)qr-d(r-q)}{(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)} = q^*\frac{\gamma}{p},$$
$$\widehat{q} = \frac{(\eta-\nu)qp+d(p-q)}{(\nu_1-\nu)r(p-q)-(\eta-\nu)q(p-r)} = q^*\frac{1-\gamma}{r}.$$

Таким образом,

$$K_1+K_2 = \left(r-q+(p-r)\frac{q^*\gamma/p+1}{q^*/q}\right)B(\widehat{p}+1,\widehat{q}) = \frac{pq}{q^*}B(\widehat{p}+1,\widehat{q})$$
$$= \frac{q\gamma}{q^*}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q}).$$

Отсюда

$$I_j = \frac{\gamma}{pr|\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)|} \left(\frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}) I'_j, \quad j = 1, \dots, l.$$

Теперь найдем I_j, $j = l+1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} I_j &= \int_T |\varphi_j(z)|^r \left(\frac{|\psi(z)|^q}{s_{p,l}(z)} \right)^{\frac{r}{p-q}} k^{\frac{r}{p-q}}(z)\, d\mu(z) \\ &= \int_\Omega \widetilde{\varphi}_j^r(\omega) \left(\frac{\widetilde{\psi}^q(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}(\omega)} \right)^{\frac{r}{p-q}} J(\omega)\, d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{(\eta-\nu)qr}{p-q} + r(\nu_1 - \nu) + d - 1} k^{\frac{r}{p-q}}(\rho, \omega)\, d\rho. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^{\frac{(\eta-\nu)qr}{p-q} + r(\nu_1-\nu)+d} &= \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{s}_{p,l}^{\,r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{\,p-q}(\omega)} \right)^{\zeta_1} d\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1}}{k^{(r-q)\zeta_1}} \\ &= -\zeta_1 \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{s}_{p,l}^{\,r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{\,p-q}(\omega)} \right)^{\zeta_1} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1 - 1}}{k^{(r-q)\zeta_1 + 1}} (r - q + (p-r)k)\, dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{(\eta-\nu)qr + ((\nu_1-\nu)r + d)(p-q)}{(p-q)((\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r))} = \frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)} + \frac{1}{p-q}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \rho^{\frac{(\eta-\nu)qr}{p-q} + r(\nu_1-\nu)+d-1} k^{\frac{r}{p-q}}(\rho, \omega)\, d\rho \\ &\quad = \frac{p-q}{(\eta-\nu)qr + (r(\nu_1-\nu)+d)(p-q)} \int_0^{+\infty} k^{\frac{r}{p-q}}(\rho,\omega)\, d\rho^{\frac{(\eta-\nu)qr}{p-q} + r(\nu_1-\nu)+d} \\ &\quad = \frac{1}{|(\nu_1-\nu)r(p-q) - (\eta-\nu)q(p-r)|} \left(\frac{\widetilde{\psi}^{q(p-r)}(\omega) \widetilde{s}_{p,l}^{\,r-q}(\omega)}{\widetilde{S}_{r,n}^{\,p-q}(\omega)} \right)^{\zeta_1} (L_1 + L_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= (r-q) \int_0^1 k^{\widehat{p}-1} (1-k)^{\widehat{q}}\, dk = (r-q) B(\widehat{p}, \widehat{q}+1), \\ L_2 &= (p-r) \int_0^1 k^{\widehat{p}} (1-k)^{\widehat{q}}\, dk = (p-r) B(\widehat{p}+1, \widehat{q}+1) \\ &\qquad = (p-r) \frac{\widehat{p}}{\widehat{p} + \widehat{q} + 1} B(\widehat{p}, \widehat{q}+1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_1 + L_2 = \frac{qr}{q^*} B(\widehat{p}, \widehat{q}+1) = \frac{q(1-\gamma)}{q^*} \left(\frac{\gamma}{p} + \frac{1-\gamma}{r} \right)^{-1} B(\widehat{p}, \widehat{q}).$$

Следовательно,

$$I_j=\frac{1-\gamma}{pr|\nu_1-\nu+d(1/r-1/p)|}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})I_j',\ j=l+1,\dots,n.$$

Остается применить теорему 2.

Аналогично следствию 1 получаем

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для всех $x\in\mathcal{W}$ имеет место точное неравенство*

$$\|\psi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}\leqslant C_1\max_{1\leqslant j\leqslant l}\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu)}\max_{l+1\leqslant j\leqslant n}\|\varphi_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)}.$$

Приведем пример весов, для которых выполнены условия теоремы 3. Пусть $T=\mathbb{R}^d_+$, $l=d$, $n=2d$, η, ν и ν_1 таковы, что $\gamma\in(0,1)$,

$$\varphi_j(t)=t_j^{\nu},\quad \varphi_{j+d}(t)=t_j^{\nu_1},\ j=1,\dots,d,\quad \psi(t)=\psi_\theta(t)^{\eta/2},\tag{3.2}$$

где

$$\psi_\theta(t)=(|t_1|^\theta+\ldots+|t_d|^\theta)^{2/\theta},\quad \theta>0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\widetilde{\psi}(\cdot)=\left(\widetilde{t}_1^{\,\theta}(\omega)+\ldots+\widetilde{t}_d^{\,\theta}(\omega)\right)^{\eta/\theta},$$

а

$$\widetilde{\varphi}_j(\omega)=\widetilde{t}_j^{\,\nu}(\omega),\quad \widetilde{\varphi}_{j+d}(\omega)=\widetilde{t}_j^{\,\nu_1}(\omega),\ j=1,\dots,d,$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}_1(\omega)&=\cos\omega_1,\\
\widetilde{t}_2(\omega)&=\sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\widetilde{t}_{d-1}(\omega)&=\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\
\widetilde{t}_d(\omega)&=\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,2}(\omega)=1.$$

Для величины I из теоремы 3 имеем

$$I=\int_{\Pi_+^{d-1}}\frac{\left(\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega)\right)^{q^*\eta/\theta}J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,p\nu}(\omega)\right)^{q^*\gamma/p}\left(\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,r\nu_1}(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r}},\quad \Pi_+^{d-1}=[0,\pi/2]^{d-1}.\tag{3.3}$$

Если $s\leqslant2$, то

$$\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,s}(\omega)\geqslant\sum_{k=1}^d\widetilde{t}_k^{\,2}(\omega)=1.\tag{3.4}$$

Если же $s > 2$, то по неравенству Гельдера

$$1 = \sum_{k=1}^{d} \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} \widetilde{t}_k^{\,s}(\omega) \right)^{\frac{2}{s}} d^{1-\frac{2}{s}}.$$

Тем самым

$$\sum_{k=1}^{d} \widetilde{t}_k^{\,s}(\omega) \geqslant d^{1-\frac{s}{2}}. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает, что $I < \infty$.

Рассмотрим интегралы

$$\widehat{I}_j = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{\widetilde{t}_j^{\,s}(\omega) \left(\sum_{k=1}^{d} \widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega) \right)^{q^*\eta/\theta} J(\omega)\, d\omega}{\left(\sum_{k=1}^{d} \widetilde{t}_k^{\,s}(\omega) \right)^{a+1} \left(\sum_{k=1}^{d} \widetilde{t}_k^{\,s_1}(\omega) \right)^{a_1}}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

где $a, a_1 > 0$. Положим

$$M_j = \int_{\mathbb{R}_+^d \cap \mathbb{B}^d} \frac{t_j^s \left(\sum_{k=1}^{d} t_k^2 \right)^{s(a+a_1)/2 - q^*\eta} \left(\sum_{k=1}^{d} t_k^\theta \right)^{q^*\eta/\theta}}{\left(\sum_{k=1}^{d} t_k^s \right)^{a+1} \left(\sum_{k=1}^{d} t_k^{s_1} \right)^{a_1}}\, dt, \quad j = 1, \ldots, d,$$

где $\mathbb{B}^d$ — единичный шар в $\mathbb{R}^d$. Если сделать замену переменных в интеграле M_j, поменяв местами переменные t_j и t_i, то интеграл M_j перейдет в интеграл M_i. Следовательно, $M_1 = \ldots = M_d$. Переходя к сферическим координатам, получим, что $M_j = \widehat{I}_j/d$, $j = 1, \ldots, d$. Таким образом,

$$\widehat{I}_1 = \ldots = \widehat{I}_d. \tag{3.6}$$

Следовательно, веса (3.2) удовлетворяют условиям теоремы 3.

Следствие 3. *Пусть $1 \leqslant q < p, r < \infty$ и $\gamma \in (0, 1)$. Тогда для всех $x \in \mathcal{W}$ имеет место точное неравенство*

$$\| \left(|t_1|^\theta + \ldots + |t_d|^\theta \right)^{\eta/\theta} x(t) \|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)} \leqslant C_2 \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \|t_j^\nu x(t)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^\gamma \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \|t_j^{\nu_1} x(t)\|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}^{1-\gamma},$$

где

$$C_2 = \left(\frac{d}{\gamma} \right)^{\gamma/p} \left(\frac{d}{1-\gamma} \right)^{(1-\gamma)/r} \left(\frac{B\left(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r\right) I}{|\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)} \right)^{1/q^*},$$

а величина I опредлена равнством (3.3).

Приведем еще одно результат для весов (3.2).

Следствие 4. *Пусть $1 \leqslant q < p, r < \infty$. Положим*

$$\alpha = \frac{\mu}{p\mu + r\lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p\mu + r\lambda}.$$

где $\lambda, \mu > 0$. *Тогда для всех* $x \in \mathcal{W}$ *имеет место точное неравенство*

$$\left\|(t_1^\theta + \ldots + t_d^\theta)^{d(1-1/q)/\theta} x(t)\right\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)} \\ \leqslant C_3 \max_{1\leqslant j\leqslant d} \left\|t_j^{d-(\lambda+d)/p} x(t)\right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^{p\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant d} \left\|t_j^{d+(\mu-d)/r} x(t)\right\|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}^{r\beta},$$

где

$$C_3 = \frac{d^{\alpha+\beta}}{(p\alpha)^\alpha (r\beta)^\beta} \left(\frac{I}{\lambda+\mu} B\left(\frac{\alpha}{1/q-\alpha-\beta}, \frac{\beta}{1/q-\alpha-\beta}\right)\right)^{1/q-\alpha-\beta},$$

а

$$I = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega)\right)^{\frac{d(1-1/q)}{\theta(1/q-\alpha-\beta)}} J(\omega)\, d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,d(p-1)-\lambda}(\omega)\right)^{\frac{\alpha}{1/q-\alpha-\beta}} \left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r(d-1)+\mu}(\omega)\right)^{\frac{\beta}{1/q-\alpha-\beta}}}.$$

При $d = 1$ этот результат вытекает из следствия 6 работы [9], а при $d = 1$, $q = 1$ он был доказан в работе [2].

§ 4. Восстановление и точные неравенства для дифференциальных операторов

Пусть $T = \mathbb{R}^d$, $d\mu(t) = dt$, $|\psi(\cdot)|$ — однородная функция порядка η, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = 1, \ldots, l$, однородные функции порядка ν, $|\varphi_j(\cdot)|$, $j = l+1, \ldots, n$, — однородные функции порядка ν_1 и $\psi(t), s_{p,l}(t), S_{2,n}(t) \neq 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}^d$.

Пусть S — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, S' — соответствующее пространство обобщенных функций, $F\colon S' \to S'$ — преобразование Фурье. Положим

$$X_p = \bigl\{\, x(\cdot) \in S' : \varphi_j(\cdot) F x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d),\ j = 1, \ldots, l, \\ \varphi_j(\cdot) F x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),\ j = l+1, \ldots, n \bigr\}.$$

Для функций $x(\cdot) \in X_p$ определим операторы D_j, $j = 1, \ldots, n$,

$$D_j x(\cdot) = F^{-1}(\varphi_j(\cdot) F x(\cdot))(\cdot),\ j = 1, \ldots, n,$$

и оператор Λ

$$\Lambda x(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot) F x(\cdot))(\cdot). \tag{4.1}$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значений $\Lambda x(\cdot)$ на классе

$$W_p^{\mathcal{D}} = \bigl\{\, x(\cdot) \in X_p : \|D_j x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Delta,\ j = l+1, \ldots, n \,\bigr\}, \quad \mathcal{D} = (D_1, \ldots, D_n),$$

по неточной информации о преобразованиях Фурье функций $D_j x(\cdot)$, $j = 1, \ldots, l$. Будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{D}}$ известны функции $y_j(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \ldots, l$, такие, что

$$\|F(D_j x(\cdot))(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Требуется восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$ по заданным функциям $y_j(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \ldots, l$.

Предположим, что $\Lambda x(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ для всех $x(\cdot) \in X_p$. Погрешностью метода восстановления $m\colon (L_p(\mathbb{R}^d))^l \to L_q(\mathbb{R}^d)$ назовем величину

$$e_{pq}(\Lambda, \mathcal{D}, m) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p^{\mathcal{D}},\ y(\cdot)\in(L_p(\mathbb{R}^d))^l \\ \|F(D_j x(\cdot))(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\ j=1,\ldots,l}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

$y(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_l(\cdot))$. Величина

$$E_{pq}(\Lambda, \mathcal{D}) = \inf_{m\colon (L_p(\mathbb{R}^d))^l \to L_q(\mathbb{R}^d)} e_{pq}(\Lambda, \mathcal{D}, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Рассмотрим случай, когда $q = \infty$. Положим

$$\gamma_1 = \frac{\nu_1 - \eta - d/2}{\nu_1 - \nu + d(1/2 - 1/p)} \quad q_1 = \frac{1}{1/2 + \gamma_1(1/2 - 1/p)}.$$

При $1 < p < \infty$ определим функцию $k_1(\cdot)$ равенством

$$\frac{k_1(t)}{(1-k_1(t))^{p-1}} = (2\pi)^{d(p-1)} \frac{s_{p,l}(t)|\psi(t)|^{p-2}}{S_{2,n}^{p-1}(t)}.$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $\gamma_1 \in (0,1)$. *Предположим, что*

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}^{q_1\gamma_1/p}(\omega)\widetilde{S}_{2,n}^{q_1(1-\gamma_1)/2}} J(\omega)\, d\omega < \infty, \quad \Pi^{d-1} = [0,\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi],$$

$I'_1 = \ldots = I'_l$, *где*

$$I'_j = \int_{\Pi^{d-1}} \widetilde{\varphi}_j^p(\omega) \frac{\widetilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}^{q_1\gamma_1/p+1}(\omega)\widetilde{S}_{2,n}^{q_1(1-\gamma_1)/2}} J(\omega)\, d\omega,\ j = 1, \ldots, l,$$

и $I'_{l+1} = \ldots = I'_n$, *где*

$$I'_j = \int_{\Pi^{d-1}} \widetilde{\varphi}_j^2(\omega) \frac{\widetilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\widetilde{s}_{p,l}^{q_1\gamma_1/p}(\omega)\widetilde{S}_{2,n}^{q_1(1-\gamma_1)/2+1}} J(\omega)\, d\omega,\ j = l+1, \ldots, n.$$

Тогда

$$E_{p\infty}(\Lambda, \mathcal{D}) = \frac{C_4}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \delta^{\gamma_1} \Delta^{1-\gamma_1},$$

где

$$C_4 = \left(\frac{l}{\gamma_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{p}} \left(\frac{n-l}{1-\gamma_1}\right)^{\frac{1-\gamma_1}{2}} \left(\frac{B\left(q_1\gamma_1/p, q_1(1-\gamma_1)/2\right) I}{|\nu_1 - \nu + d(1/2-1/p)|(2\gamma_1 + (1-\gamma_1)p)}\right)^{1/q_1}.$$

Метод

$$\widehat{m}_2(y(\cdot))(t) = F^{-1}\left(k_1\left(\widehat{\xi}_1^{\frac{1}{\nu_1-\nu+d(1/2-1/p)}} \xi\right) \frac{\psi(\xi)}{s_{p,l}(\xi)} \sum_{j=1}^{l} \frac{|\varphi_j(\xi)|^p}{\varphi_j(\xi)} y_j(\xi)\right)(t), \qquad (4.2)$$

где

$$\widehat{\xi}_1 = \frac{\delta}{\Delta}\left(\frac{l}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1-\gamma_1}{n-l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{B\,(q_1\gamma_1/p, q_1(1-\gamma_1)/2)\,I(2\pi)^{dq_1(1-\gamma_1)/2}}{|\nu_1-\nu+d(1/2-1/p)|(2\gamma_1+(1-\gamma_1)p)}\right)^{1/2-1/p},$$

является оптимальным.

Доказательство. Аналогично неравенству (1.2) имеем

$$E_{p\infty}(\Lambda,\mathcal{D}) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p^{\mathcal{D}}\\ \|F(D_jx(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\ j=1,\dots,l}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Пусть $x(\cdot)\in W_p^{\mathcal{D}}$ и $\|F(D_jx(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta$, $j=1,\dots,l$. Если функция $\widehat{x}(\cdot)$ такова, что $F\widehat{x}(\xi)=\varepsilon(\xi)e^{-i\langle t,\xi\rangle}Fx(\xi)$, где

$$\varepsilon(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\overline{\psi(\xi)Fx(\xi)}}{|\psi(\xi)Fx(\xi)|}, & \psi(\xi)Fx(\xi)\neq 0,\\ 0, & \psi(\xi)Fx(\xi)=0,\end{cases}$$

то $\widehat{x}(\cdot)\in W_p^{\mathcal{D}}$, $\|F(D_j\widehat{x}(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta$, $j=1,\dots,l$ и

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)F\widehat{x}(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\right| = \int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)Fx(\xi)|\,d\xi.$$

Следовательно,

$$E_{p\infty}(\Lambda,\mathcal{D}) \geqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p^{\mathcal{D}}\\ \|F(D_jx(\cdot))(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\ j=1,\dots,l}}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)Fx(\xi)|\,d\xi.$$

Из (2.3) следует, что

$$E_{p\infty}(\Lambda,\mathcal{D}) \geqslant \frac{1}{(2\pi)^d}E(p,1,2),$$

если в задаче о нахождении $E(p,1,2)$ функции $\varphi_j(\cdot)$ заменить на функции $(2\pi)^{-d/2}\varphi_j(\cdot)$, $j=l+1,\dots,n$. Из теоремы 3 вытекает, что

$$E_{p\infty}(\Lambda,\mathcal{D}) \geqslant \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}C_4\delta_1^{\gamma}\Delta^{1-\gamma_1}.$$

Из той же теоремы следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)F(\xi)-\widehat{m}_1(y(\cdot))(\xi)|\,d\xi \leqslant E(p,1,2),$$

где

$$\widehat{m}_1(y(\cdot))(\xi) = k_1\left(\widehat{\xi}_1^{\frac{1}{\nu_1-\nu+d(1/2-1/p)}}\xi\right)\frac{\psi(\xi)}{s_{p,l}(\xi)}\sum_{j=1}^{l}\frac{|\varphi_j(\xi)|^p}{\varphi_j(\xi)}y_j(\xi).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)F(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{m}_1(y)(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)F(\xi)-\widehat{m}_1(y)(\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}E(p,1,2)\leqslant E_{p\infty}(\Lambda,\mathcal{D}).$$

Отсюда следует, что метод (4.2) является оптимальным.

Аналогично следствию 1 получаем

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для всех $x \in X_p$ имеет место точное неравенство*

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_4}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \max_{1\leqslant j\leqslant l} \|F(D_j x(\cdot))(\cdot)\|^{\gamma_1}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \max_{l+1\leqslant j\leqslant n} \|D_j x(\cdot)\|^{1-\gamma_1}_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Обозначим через Λ_θ оператор Λ, определенный равенством (4.1) для $\psi(\cdot) = \psi_\theta(\cdot)$. Отметим, что $\Lambda_2 = -\Delta$, где Δ — оператор Лапласа. Через $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ обозначим оператор Λ, определенный равенством (4.1) для $\psi(\cdot) = \psi_\theta^{\eta/2}(\cdot)$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$. Определим оператор D^α (производная по Вейлю порядка α) равенством

$$D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha F x(\xi))(\cdot),$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$. Ясно, что если $x(\cdot)$ достаточно гладкая функция на $\mathbb{R}^d$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial x^{\alpha_1+\ldots+\alpha_d}(t)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}}.$$

Пусть $\Lambda = \Lambda_\theta^{\eta/2}$,

$$\mathcal{D} = (D^{\nu e_1}, \dots, D^{\nu e_d}, D^{\nu_1 e_1}, \dots, D^{\nu_1 e_d}), \tag{4.3}$$

где e_j, $j = 1 \dots, d$, — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$. Для величины I из теоремы 4 имеем

$$I = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega)\right)^{q_1\eta/\theta} J(\omega)\, d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,p\nu}(\omega)\right)^{q_1\gamma_1/p} \left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu_1}(\omega)\right)^{q_1(1-\gamma_1)/2}}. \tag{4.4}$$

Аналогично тому, как это было сделано ранее (см. (3.3)), доказывается, что $I < \infty$. Аналогичным образом доказываются равенства $I_1' = \ldots = I_l'$ и $I_{1+1}' = \ldots = I_n'$ для соответствующих весов. Таким образом, веса (3.2) удовлетворяют условиям теоремы 4.

Следствие 6. *Пусть $1 < p < \infty$ и $0 \leqslant \nu - d(1-1/p) < \eta < \nu_1 - d/2$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_5}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|F(D^{\nu e_j} x(\cdot))(\cdot)\|^{\gamma_1}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|^{1-\gamma_1}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$C_5 = \left(\frac{d}{\gamma_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{p}} \left(\frac{d}{1-\gamma_1}\right)^{\frac{1-\gamma_1}{2}} \left(\frac{B\left(q_1\gamma_1/p, q_1(1-\gamma_1)/2\right) I}{(\nu_1 - \nu + d(1/2-1/p))(2\gamma_1 + (1-\gamma_1)p)}\right)^{1/q_1},$$

а I определено равенством (4.4).

Сформулируем следствие 6 для случая, когда $p=2$. Положим

$$\gamma_2 = \frac{\nu_1 - \eta - d/2}{\nu_1 - \nu}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\|F(D^{\nu e_j}x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2}\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

а, кроме того, известным равенством

$$B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

Следствие 7. *Пусть $0 \leqslant \nu - d/2 < \eta < \nu_1 - d/2$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C_6}{(2\pi)^{d/2}} \max_{1\leqslant j\leqslant d}\|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^{\gamma_2}_{L_2(\mathbb{R}^d)} \max_{1\leqslant j\leqslant d}\|D^{\nu_1 e_j}x(\cdot)\|^{1-\gamma_2}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$C_6 = \gamma_2^{-\frac{\gamma_2}{2}}(1-\gamma_2)^{-\frac{1-\gamma_2}{2}}\left(\frac{\pi d I_0}{2(\nu_1-\nu)\sin\pi\gamma_2}\right)^{1/2},$$

а

$$I_0 = \int_{\Pi^{d-1}} \frac{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,\theta}(\omega)\right)^{2\eta/\theta} J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu}(\omega)\right)^{\gamma_2}\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2\nu_1}(\omega)\right)^{1-\gamma_2}}.$$

При $p=q=2$ будем рассматривать несколько измененную задачу восстановления. Пусть

$$\mathcal{W} = \Big\{\, x(\cdot)\in S' : (i\xi_j)^\nu Fx(\xi)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ j=1,\ldots,d, \\ (i\xi_j)^{\nu_1}Fx(\xi)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ j=1,\ldots,d\Big\}.$$

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ по неточно заданным производным $D^{\nu e_1},\ldots,D^{\nu e_d},D^{\nu_1 e_1},\ldots,D^{\nu_1 e_d}$. Погрешностью метода восстановления $m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^{2d}\to L_2(\mathbb{R}^d)$ назовем величину

$$e(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D},m) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W},\ y(\cdot)\in(L_2(\mathbb{R}^d))^{2d}\\ \|D^{\nu e_j}x(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\ j=1,\ldots,d\\ \|D^{\nu_1 e_j}x(\cdot)-y_j^1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\Delta,\ j=1,\ldots,d}} \|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)-m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$y(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_d,y_1^1(\cdot),\ldots,y_d^1(\cdot))$, а оператор $\mathcal{D}$ определен равенством (4.3). Величина

$$E(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D}) = \inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^{2d}\to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D},m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Положим

$$\gamma_3 = \frac{\nu_1-\eta}{\nu_1-\nu}.$$

Теорема 5. *Пусть* $0 < \theta/2 \leqslant \nu < \eta < \nu_1$. *Тогда*

$$E(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) = d^{\eta/\theta}\delta^{\gamma_3}\Delta^{1-\gamma_3}. \tag{4.5}$$

При этом все методы

$$\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\biggl(\psi_\theta^{\eta/2}(\cdot)\biggl(\sum_{j=1}^d \alpha_j(\cdot)Fy_j(\cdot) + \sum_{j=1}^d \alpha_j^1(\cdot)Fy_j^1(\cdot)\biggr)\biggr)(\cdot), \tag{4.6}$$

где измеримые функции $\alpha_j(\cdot)$, $\alpha_j^1(\cdot)$, $j = 1, \dots, d$, *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{j=1}^d \bigl((i\xi_j)^\nu \alpha_j(\xi) + (i\xi_j)^{\nu_1}\alpha_j^1(\xi)\bigr) = 1, \tag{4.7}$$

$$\psi_\theta^\eta(\xi)\sum_{j=1}^d \biggl(\frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda} + \frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1}\biggr) \leqslant 1, \tag{4.8}$$

а

$$\lambda = d^{2\eta/\theta-1}\gamma_3\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{2(1-\gamma_3)}, \quad \lambda_1 = d^{2\eta/\theta-1}(1-\gamma_3)\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{2\gamma_3},$$

являются оптимальными.

Доказательство. Аналогично неравенству (1.2) имеем

$$E(\Lambda_\theta^{\eta/2}, \mathcal{D}) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W} \\ \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\ j=1,\dots,d \\ \|D^{\nu_1 e_j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\Delta,\ j=1,\dots,d}} \|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.9}$$

Для $0 < \varepsilon < (\Delta/\delta)^{1/(\nu_1-\nu)}$ положим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{\nu_1-\nu}}(1, \dots, 1) - (\varepsilon, \dots, \varepsilon), \quad B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$, для которой

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\left(\dfrac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{1}{\nu_1-\nu}}\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} B_\varepsilon}}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|D^{\nu e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d))} &= \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{2}{\nu_1-\nu}}\frac{1}{\operatorname{mes} B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}\xi_j^{2\nu}\,d\xi \\ &\leqslant \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{2}{\nu_1-\nu}}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{2\nu}{\nu_1-\nu}} = \delta^2, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\|D^{\nu_1 e_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{2}{\nu_1-\nu}} \frac{1}{\operatorname{mes} B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}\xi_j^{2\nu_1}\,d\xi \\ \leqslant \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{2}{\nu_1-\nu}}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{2\nu_1}{\nu_1-\nu}} = \Delta^2, \quad j=1,\ldots,d.$$

В силу (4.9) имеем

$$E^2(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D}) \geqslant \|\Lambda_\theta^{\eta/2}x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ = \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{2}{\nu_1-\nu}} \frac{1}{\operatorname{mes} B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}\psi_\theta^\eta(\xi)\,d\xi = \left(\frac{\delta^{\nu_1}}{\Delta^\nu}\right)^{\frac{2}{\nu_1-\nu}}\psi_\theta^\eta(\widetilde{\xi}_\varepsilon), \quad \widetilde{\xi}_\varepsilon\in B_\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем оценку

$$E^2(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D}) \geqslant d^{2\eta/\theta}\delta^{2\gamma_3}\Delta^{2(1-\gamma_3)}.$$

Оценим погрешность метода (4.6). Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)-\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \\ \|D^{\nu e_j}x(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta^2,\ j=1,\ldots,d, \\ \|D^{\nu_1 e_j}x(\cdot)-y_j^1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Delta^2,\ j=1,\ldots,d.$$

Переходя к преобразованиям Фурье, приходим к следующей задаче

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\theta^\eta(\xi)\left|Fx(\xi)-\left(\sum_{j=1}^d\alpha_j(\xi)Fy_j(\xi)+\sum_{j=1}^d\alpha_j^1(\xi)Fy_j^1(\xi)\right)\right|^2 d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|(i\xi_j)^\nu Fx(\xi)-Fy_j(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta^2,\ j=1,\ldots,d, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|(i\xi_j)^{\nu_1} Fx(\xi)-Fy_j^1(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \Delta^2,\ j=1,\ldots,d. \quad (4.10)$$

Положим

$$z_j(\xi) = (i\xi_j)^\nu Fx(\xi)-Fy_j(\xi), \quad z_j^1(\xi) = (i\xi_j)^{\nu_1}Fx(\xi)-Fy_j^1(\xi), \quad j=1,\ldots,d.$$

Тогда, учитывая условие (4.7), задача (4.10) перепишется следующем образом

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\theta^\eta(\xi)\left|\sum_{j=1}^d(\alpha_j(\xi)z_j(\xi)+\alpha_j^1(\xi)z_j^1(\xi))\right|^2 d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|z_j(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta^2,\ j=1,\ldots,d, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|z_j^1(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \Delta^2,\ j=1,\ldots,d.$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\Big|\sum_{j=1}^{d}(\alpha_j(\xi)z_j(\xi)+\alpha_j^1(\xi)z_j^1(\xi))\Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d}\bigg(\frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda}+\frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1}\bigg)\sum_{j=1}^{d}\Big(\lambda|z_j(\xi)|^2+\lambda_1|z_j^1(\xi)|^2\Big).$$

Применяя это неравенство, получаем оценку

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2}x(\cdot)-\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \operatorname*{vraisup}_{\xi\in\mathbb{R}^d} S(\xi)\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^{d}\Big(\lambda|z_j(\xi)|^2+\lambda_1|z_j^1(\xi)|^2\Big)\,d\xi,$$

где

$$S(\xi)=\psi_\theta^\eta(\xi)\sum_{j=1}^{d}\bigg(\frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda}+\frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1}\bigg).$$

Из условия (4.8) вытекает, что $S(\xi)\leqslant 1$. Тем самым для погрешности метода $\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)$ имеем

$$e(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D},\widehat{m})\leqslant\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^{d}\Big(\lambda|z_j(\xi)|^2+\lambda_1|z_j^1(\xi)|^2\Big)\,d\xi \leqslant d\lambda\delta^2+d\lambda_1\Delta^2=d^{2\eta/\theta}\delta^{2\gamma_3}\Delta^{2(1-\gamma_3)}\leqslant E^2(\Lambda_\theta^{\eta/2},\mathcal{D}).$$

Отсюда вытекает оптимальность метода $\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)$ и равенство (4.5).

Остается доказать существование функций $\alpha_j(\cdot)$, $\alpha_j^1(\cdot)$, $j=1,\dots,d$, удовлетворяют условиям (4.7) и (4.8). Положим

$$\begin{aligned}\alpha_j(\xi)&=\frac{\lambda(-i\xi_j)^\nu}{\lambda\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}+\lambda_1\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu_1}},\\ \alpha_j^1(\xi)&=\frac{\lambda_1(-i\xi_j)^{\nu_1}}{\lambda\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}+\lambda_1\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu_1}},\quad j=1,\dots,d.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Нетрудно убедиться, что условие (4.7) выполнено. Докажем, что условие (4.8) также выполнено. Имеем

$$\psi_\theta^\eta(\xi)\sum_{j=1}^{d}\bigg(\frac{|\alpha_j(\xi)|^2}{\lambda}+\frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\lambda_1}\bigg)=\frac{\psi_\theta^\eta(\xi)}{\lambda\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu}+\lambda_1\sum_{j=1}^d|\xi_j|^{2\nu_1}}.\tag{4.12}$$

Так как $\theta\leqslant 2\nu$, то из неравенства Гельдера следует, что

$$\sum_{j=1}^{d}|\xi_j|^\theta\leqslant\bigg(\sum_{j=1}^{d}|\xi_j|^{2\nu}\bigg)^{\theta/(2\nu)}d^{1-\theta/(2\nu)}.$$

Положив $\rho = (|\xi_1|^\theta + \ldots + |\xi_d|^\theta)^{1/\theta}$, получим

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} \geqslant \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta}.$$

Аналогично получаем, что

$$\sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1} \geqslant \rho^{2\nu_1} d^{1-2\nu_1/\theta}.$$

Следовательно,

$$\frac{\psi_\theta^\eta(\xi)}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}} \leqslant \frac{\rho^{2\eta}}{\lambda \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta} + \lambda_1 \rho^{2\nu_1} d^{1-2\nu_1/\theta}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\rho) = -\rho^{2\eta} + \lambda \rho^{2\nu} d^{1-2\nu/\theta} + \lambda_1 \rho^{2\nu_1} d^{1-2\nu_1/\theta} = \rho^{2\nu} g(\rho),$$

где

$$g(\rho) = -\rho^{2(\eta-\nu)} + d^{2(\eta-\nu)/\theta} \gamma_3 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{2(1-\gamma_3)} + d^{2(\eta-\nu_1)/\theta}(1-\gamma_3)\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{2\gamma_3} \rho^{2(\nu_1-\nu)}.$$

Имеем

$$g\left(d^{1/\theta}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{1/(\nu_1-\nu)} s^{1/(2(\nu_1-\nu))}\right) = d^{2(\eta-\nu)/\theta}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{2(1-\gamma_3)} g_1(s),$$

где

$$g_1(s) = -s^{1-\gamma_3} + \gamma_3 + (1-\gamma_3)s.$$

Нетрудно убедиться, что функция $g_1(\cdot)$ на $[0, +\infty)$ достигает минимума в точке $s_0 = 1$, кроме того, $g_1(s_0) = 0$. Таким образом, $g_1(s) \geqslant 0$ для всех $s \geqslant 0$. Следовательно, $f(\rho) \geqslant 0$. Из этого неравенства вытекает, что

$$\frac{\psi_\theta^\eta(\xi)}{\lambda \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu} + \lambda_1 \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2\nu_1}} \leqslant 1.$$

Учитывая равенство (4.12), получаем, что функции, определенные равенствами (4.11), удовлетворяют условию (4.8).

Из (4.5) вытекает точное неравенство

$$\|\Lambda_\theta^{\eta/2} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant d^{\eta/\theta} \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|D^{\nu e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_3} \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\gamma_3}.$$

Можно рассмотреть задачу о восстановлении оператора $\Lambda_\theta^{\eta/2}$ на классе

$$W = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W} : \|D^{\nu_1 e_j} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Delta,\ j = 1, \ldots, d \,\}$$

по приближенно заданным производным $D^{\nu e_j}$, $j = 1, \dots, d$, с погрешностью δ. Используя схему доказательства, аналогичную применяемой при доказательстве теоремы 5, получаем то же значение для погрешности оптимального восстановления (см. (4.5)) и семейство оптимальных методов

$$\widehat{m}_1(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\left(\psi_\theta^{\eta/2}(\cdot)\sum_{j=1}^{d}\alpha_j(\cdot)Fy_j(\cdot)\right)(\cdot),$$

где $\alpha_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, d$, — любые функции из семейства функций, удовлетворяющих условиям (4.7) и (4.8). Более подробное описание способа построения семейств оптимальных методов восстановления можно найти в работе [11].

Список литературы

[1] Carlson F. “Une inégalité”, *Ark. Mat. Astr. Fysik*, **25B** (1934), 1–5.

[2] Левин В. И. “Точные константы в неравенствах типа Карлсона”, *ДАН*, **59** (1948), 635–638.

[3] Андрианов Ф. И. “Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщений”, *Изв. вузов. Матем.*, **1** (1967), 3–7.

[4] Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. “Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, *Math. Ineq. Appl.*, **1**:1 (1998), 53–67.

[5] Larsson L., Maligranda L., Pečarić J., Persson L.-E. *Multiplicative inequalities of Carlson type and interpolation,* World Scientific, New Jersey, 2006, 201 pp.

[6] M.-J. Luo, R. K. Raina, “A new extension of Carlson’s inequality”, *Math. Ineq. Appl.*, **19**:2 (2016), 417–424.

[7] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.

[8] Osipenko K. Yu. “Inequalities for derivatives with the Fourier transform”, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **53** (2021), 132–150.

[9] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties”, *J. Complexity*, **81** (2024), 101807, pp. 35.

[10] Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106.

[11] Осипенко К. Ю. “О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов”, *Изв. РАН. Сер. Матем.*, **88**:1 (2024), 98–120.

К. Ю. Осипенко (K. Yu. Osipenko)
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
E-mail: kosipenko@yahoo.com