

**НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА-ПОЛИА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ
ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматривается связь неравенства Харди-Литтлвуда-Полиа с задачей оптимального восстановления производной по неточной информации о самой функции и ее старшей производной. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа [1] — это точное неравенство вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/n}, \quad (1)$$

справедливое для всех функций $x(\cdot)$ из соболевского пространства $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \mid x^{(n-1)}(\cdot) \text{ — лок. абс. непр., } x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}$, где k, n — натуральные и $k < n$.

Точность неравенства (1) означает, в частности, что для любых $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ значение задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2 \quad (2)$$

равно $\delta_1^{1-k/n} \delta_2^{k/n}$.

Задача (2) тесно связана с задачей оптимального восстановления k -ой производной функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ по приближенной информации о самой функции и ее n -ой производной. Допустим, что нам известны (мы наблюдаем) функции $y_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\|x(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1$ и $\|x^{(n)}(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2$. Задача оптимального

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №10-01-00188 и №10-01-90002).

восстановления заключается в нахождении величины

$$E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), i=1,2 \\ \|x(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \\ \|x^{(n)}(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (3)$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $m: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и тех m , на которых нижняя грань достигается, называемых *оптимальными методами восстановления*.

Оказывается, что погрешность оптимального восстановления совпадает со значением задачи (2) и существует целые семейства оптимальных методов восстановления k -ой производной. Точнее говоря, справедлива следующая

Теорема. Пусть k, n — натуральные, $k < n$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{-\frac{2k}{n}}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{n} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{2(n-k)}{n}}.$$

Тогда

$$E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{1-\frac{k}{n}} \delta_2^{\frac{k}{n}},$$

и если функция $a(\cdot)$ на \mathbb{R} такова, что для п. в. $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left| a(\xi) - \frac{\lambda_1 (i\xi)^k}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \right| \leq \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} |\xi|^n}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \sqrt{-\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}}, \quad (4)$$

то метод $m_a: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, определяемый формулой

$$m_a(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot) = \Lambda_1 y_1(\cdot) + \Lambda_2 y_2(\cdot), \quad (5)$$

где $\Lambda_i: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, — линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид: $F\Lambda_1 y_1(\xi) = a(\xi) F y_1(\xi)$ и $F\Lambda_2 y_2(\xi) = (i\xi)^{-n} ((i\xi)^k - a(\xi)) F y_2(\xi)$, является оптимальным.

Операторы Λ_1 и Λ_2 — это сверточные операторы, ядра которых, вообще говоря, обобщенные функции. Выделим одно двухпараметрическое семейство таких операторов, где ядра — обычные функции, имеющие достаточно простое описание.

Следствие. Пусть k, n — натуральные, $k < n$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и

$$\widehat{\sigma}_1 = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2k}} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-\frac{1}{n}}, \quad \widehat{\sigma}_2 = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Тогда для любой пары $(\sigma_1, \sigma_2) \in [0, \widehat{\sigma}_1] \times [\widehat{\sigma}_2, \infty]$ метод

$$m_{\sigma_1, \sigma_2}(y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = (K_{\sigma_1, \sigma_2}^1 * y_1)(\cdot) + (K_{\sigma_1, \sigma_2}^2 * y_2)(\cdot)$$

является оптимальным, где ядра $K_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\cdot)$ и $K_{\sigma_1, \sigma_2}^2(\cdot)$ таковы, что их образы Фурье имеют вид

$$FK_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k, & |\xi| < \sigma_1, \\ (i\xi)^k \left(1 + \frac{k}{n-k} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 \xi^{2n}\right)^{-1}, & \sigma_1 \leq |\xi| < \sigma_2, \end{cases}$$

и $FK_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq \sigma_2$, если $\sigma_2 < \infty$;

$$FK_{\sigma_1, \sigma_2}^2(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| < \sigma_1, \\ (i\xi)^{k-n} \left(1 + \frac{n-k}{k} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2} \xi^{-2n}\right)^{-1}, & \sigma_1 \leq |\xi| < \sigma_2, \end{cases}$$

и $FK_{\sigma_1, \sigma_2}^2(\xi) = (i\xi)^{k-n}$ при $|\xi| \geq \sigma_2$, если $\sigma_2 < \infty$.

Отметим, что оптимальный метод восстановления k -ой производной является линейным и заключается в том, что “наблюдения” $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ надо определенным образом “сгладить” (т. е. свернуть соответственно с ядрами $K_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\cdot)$ и $K_{\sigma_1, \sigma_2}^2(\cdot)$) и затем сложить.

Близкая по духу задача, связанная с оптимальным восстановлением функции и ее производных по неточно заданному спектру самой функции рассмотрена в работах [2] и [3].

Доказательство теоремы. Покажем сначала, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения задачи (2). Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (2). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq \|x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1} \|x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \|x(\cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_i \\ i=1,2, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2), а справа к нижней грани по всем методам m , получаем требуемое.

Поскольку восстанавливаемый оператор (k -ая производная) инвариантен относительно сдвига, то естественно и оптимальные методы искать среди таких операторов. Действие оператора, инвариантного относительно сдвига, из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ в образах Фурье есть умножение на функцию из $L_\infty(\mathbb{R})$ (см. [4]) и поэтому будем искать оптимальные методы вида

$$m(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot) = \Lambda_1 y_1(\cdot) + \Lambda_2 y_2(\cdot), \quad (6)$$

где $F\Lambda_i y_i(\cdot) = a_i(\cdot)Fy_i(\cdot)$, $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$.

Оптимальность метода m , как следует из формулы (3), означает, что значение задачи

$$\begin{aligned} \|x^{(k)}(\cdot) - \Lambda_1 y_1(\cdot) - \Lambda_2 y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \\ \|x^{(n)}(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_2, \quad y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \\ x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (7)$$

равно $E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2)$.

Метод (6) должен быть точен на функциях из $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$, т. е. должно выполняться тождество

$$x^{(k)}(\cdot) = \Lambda_1 x(\cdot) + \Lambda_2 x^{(n)}(\cdot) \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \quad (8)$$

так как в противном случае значение задачи (7) равно бесконечности. Действительно, если для некоторого $x_0(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ равенство (8) не выполняется, то полагая в (7) $x(\cdot) = Cx_0(\cdot)$, $y_1(\cdot) = Cx_0(\cdot)$ и $y_2(\cdot) = Cx_0^{(n)}(\cdot)$, за счет выбора $C \in \mathbb{R}$, максимизируемый функционал можно сделать сколь угодно большим.

Используя теорему Планшереля, учитывая тождество (8) (в образах Фурье) и обозначая $z_1(\xi) = Fx(\xi) - Fy_1(\xi)$, $z_2(\xi) = (i\xi)^n Fx(\xi) - Fy_2(\xi)$, нетрудно понять, что квадрат значения задачи (7) равен значению такой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |a_1(\xi)z_1(\xi) + a_2(\xi)z_2(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |z_1(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_1^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |z_2(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Оценим сверху максимизируемый функционал. Для любых $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, и любого $\xi \in \mathbb{R}$ имеем по неравенству Коши-Буняковского

$$|a_1(\xi)z_1(\xi) + a_2(\xi)z_2(\xi)|^2 \leq \left(\frac{|a_1(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\xi)|^2}{\lambda_2} \right) (\lambda_1|z_1(\xi)|^2 + \lambda_2|z_2(\xi)|^2).$$

Интегрируя это неравенство (обозначив через $S_{a_1, a_2}(\cdot)$ функцию в скобках первого сомножителя справа) и учитывая ограничения в задаче (9), получаем, что ее значение не превосходит величины

$$\|S_{a_1, a_2}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}(\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2).$$

Если подобрать такие $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ и $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, что $\|S_{a_1, a_2}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1$ и

$$\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2 = \delta_1^{2(1-\frac{k}{n})}\delta_2^{\frac{2k}{n}}, \quad (10)$$

то это будет означать (с учетом полученной оценки снизу для $E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2)$), что соответствующий метод оптимален и

$$E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{1-\frac{k}{n}}\delta_2^{\frac{k}{n}}.$$

В силу (8), переходя к образам Фурье, получаем, что функции $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$ связаны соотношением: $(i\xi)^k = a_1(\xi) + (i\xi)^n a_2(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}$. Подставляя в $S_{a_1, a_2}(\cdot)$ вместо функции $a_2(\cdot)$ ее выражение через $a_1(\cdot)$, будем иметь

$$S_{a_1, a_2}(\xi) = \frac{|a_1(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|(i\xi)^k - a_1(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2n}}.$$

Тогда условие $\|S_{a_1, a_2}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1$, как нетрудно проверить, может быть записано в виде неравенства (4) (с $a_1(\cdot)$ вместо $a(\cdot)$). Числа $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ должны быть такими, что (помимо (10)), выражение под корнем

в правой части (4) должно быть неотрицательно на \mathbb{R} . Если из (10) найти λ_2 как функцию λ_1 и поставить ее в выражение под корнем в (4), то его неотрицательность означает, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$-\xi^{2k} + \lambda_2 \left(\xi^{2n} - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{-2} \right) + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{-2\frac{k}{n}} \geq 0. \quad (11)$$

Очевидно, что функция слева обращается в ноль в точке $(\delta_1/\delta_2)^{-1/n}$. Для того чтобы неравенство (11) было справедливо, эта точка должна быть точкой минимума данной функции. Из этого условия легко находится λ_2 . Выражение для λ_1 следует из (10). Таким образом, с найденными λ_1 и λ_2 выражение под корнем в (4) неотрицательно на \mathbb{R} .

Из (4) нетрудно вывести, что функции $\xi \mapsto a(\xi)$ и $\xi \mapsto (i\xi)^{-n}((i\xi)^k - a(\xi))$ принадлежат $L_\infty(\mathbb{R})$ и тем самым Λ_1 и Λ_2 — линейные непрерывные операторы. \square

Доказательство следствия. Из теоремы сразу следует, что функция

$$a_1(\xi) = \frac{\lambda_1(i\xi)^k}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}$$

определяет оптимальный метод. Положим $a_2(\xi) = (i\xi)^{-n}((i\xi)^k - a_1(\xi))$. Подставляя выражения для λ_i , $i = 1, 2$, в выражения для $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$, находим, что $a_i(\cdot) = FK_{0,\infty}^i(\cdot)$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что $a_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, и поэтому метод (5) можно записать в виде сверток с ядрами $K_{0,\infty}^1(\cdot)$ и $K_{0,\infty}^2(\cdot)$. Это доказывает следствие для случая $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \infty$.

Пусть $(\sigma_1, \sigma_2) \in (0, \widehat{\sigma}_1] \times [\widehat{\sigma}_2, \infty)$. Покажем, что функции $a_i(\cdot) = FK_{\sigma_1, \sigma_2}^i(\cdot)$ с теми же λ_i , $i = 1, 2$, также определяют оптимальный метод. Действительно, $a_1(\xi) = (i\xi)^k$ на интервале $|\xi| < \sigma_1$ и значит, $S_{a_1, a_2}(\xi) = |\xi|^{2k}/\lambda_1$. Поскольку $\sigma_1 \leq \widehat{\sigma}_1$, то элементарно проверяется, что $S_{a_1, a_2}(\xi) \leq 1$, если $|\xi| < \sigma_1$. На промежутке $\sigma_1 \leq |\xi| < \sigma_2$ функции

$a_i(\cdot)$ являются сужениями функций $FK_{0,\infty}^i(\cdot)$, $i = 1, 2$ на этот промежуток и поэтому, по уже доказанному, $S_{a_1, a_2}(\xi) \leq 1$, когда $\sigma_1 \leq |\xi| < \sigma_2$. Наконец, если $|\xi| \geq \sigma_2$, то $S_{a_1, a_2}(\xi) = |\xi|^{2(k-n)}/\lambda_2 \leq 1/\widehat{\sigma}_2^{2(n-k)}\lambda_2 = 1$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства, М., Иностранная литература, 1948.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функци. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функци. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
- [4] Л. Хермандер. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., Иностранная литература, 1962.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН