УДК 517.98

К. Ю. Осипенко

О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов

В работе предлагается некоторый подход к построению семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов по неточно заданной информации. Предложенный метод построения применяется для восстановления производных по неточно заданным другим производным в многомерном случае и для восстановления решений уравнения теплопроводности по неточно заданным распределениям температур в некоторые моменты времени.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, линейные операторы, уравнение теплопроводности, разностные уравнения.

§ 1. Введение

Пусть X — линейное пространство, Y, Z — линейные нормированные пространства. Задача об оптимальном восстановлении линейного оператора $\Lambda\colon X \to Z$ по неточно заданным значениям линейного оператора $I\colon X \to Y$ на множестве $W \subset X$ ставится как задача нахождения величины

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = \inf_{\varphi\colon Y \to Z} \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z,$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и отображения φ, на котором достигается нижняя грань, называемым *оптимальным методом восстановления* (здесь $\delta \geqslant 0$ — параметр, характеризующий ошибку задания значений оператора I). Первоначально эта задача была поставлена для случая, когда Λ — линейный функционал, Y — конечномерное пространство и информация известно точно ($\delta = 0$), в работе С. А. Смоляка [1]. Фактически эта постановка являлась обобщением задачи А. Н. Колмогорова о наилучшей квадратурной формуле на классе функций [2], в которой интеграл и значения функций заменены на произвольные линейные функционалы и нет условия линейности метода восстановления. В дальнейшем обобщениям этой задачи было посвящено много работ (см. [3]–[10], а также библиографию в этих работах).

Одной из первых работ, в которой рассматривалась задача построения оптимального метода восстановления для линейного оператора, была работа [4]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах [11]–[19]. Оказалось, что в некоторых случаях удается построить целое семейство оптимальных методов восстановления линейного оператора. Изучение таких семейств началось в работе [20] и продолжилось в работах [21], [22], [14] и [19].

Цель данной работы — предложить некоторый подход к построению семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов и продемонстрировать его применение к ряду конкретных задач.

§ 2. Общая постановка и построение семейств оптимальных методов

Будем рассматривать случай, когда в задаче оптимального восстановления само множество W (априорная информация об элементах из X) задается в виде ограничений, связанных с некоторым набором линейных операторов. Пусть $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ — линейные нормированные пространства, а $I_j\colon X \to Y_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, — линейные операторы. Пусть, кроме того, заданы числа $\delta_1, \dots, \delta_n \geqslant 0$ и задано множество натуральных чисел $J \subset \{1, \dots, n\}$. Положим $\overline{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J$.

Задача состоит в оптимальном восстановлении оператора I_0 на множестве

$$W_J = \{\, x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j \in J \,\}$$

по значениям операторов I_j, заданным с погрешностью δ_j, $j \in \overline{J}$ (при $J = \emptyset$ полагаем $W = X$). Точнее говоря, будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор

$$y = \{y_j\}_{j \in \overline{J}} \in Y_{\overline{J}} = \prod_{j \in \overline{J}} Y_j$$

такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leqslant \delta_j$, $j \in \overline{J}$. В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $\varphi\colon Y_{\overline{J}} \to Y_0$. *Погрешностью метода* $\varphi(\cdot)$ называется величина

$$e_J(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W_J,\ y \in Y_{\overline{J}} \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j \in \overline{J}}} \|I_0 x - \varphi(y)\|_{Y_0},$$

а *погрешностью оптимального восстановления* — величина

$$E_J(I, \delta) = \inf_{\varphi\colon Y_{\overline{J}} \to Y_0} e_J(I, \delta, \varphi) \tag{2.1}$$

(здесь $I = (I_0, I_1 \dots, I_n)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$). Методы, на которых достигается нижняя грань в (2.1) (если таковые существуют), называются *оптимальными*.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$. Предположим, что существуют $\widehat{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, n$, такие, что*

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j = 1, \dots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geqslant \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

Пусть, кроме того, множество линейных операторов $S_j\colon Y_j \to Y_0$, $j = 1, \dots, n$, таково, что

$$I_0 = \sum_{j=1}^n S_j I_j \tag{2.2}$$

и

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} S_j z_j\right\|_{Y_0}^{p} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|z_j\|_{Y_j}^{p} \tag{2.3}$$

для всех $z_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $J \in \{1, \ldots, n\}$ *методы*

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in \overline{J}} S_j y_j \tag{2.4}$$

являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_J(I, \delta) = \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^p\right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi\colon Y_{\overline{J}} \to Y_0$ — произвольный метод восстановления и $x \in X$ такой, что $\|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\|I_0 x\|_{Y_0} &= \|I_0 x - \varphi(0) - (I_0(-x) - \varphi(0))\|_{Y_0} \\ &\leqslant \|I_0 x - \varphi(0)\|_{Y_0} + \|I_0(-x) - \varphi(0)\|_{Y_0} \leqslant 2 e_J(I, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_J^p(I, \delta, \varphi) \geqslant \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j = 1, \ldots, n}} \|I_0 x\|_{Y_0}^p \geqslant \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^p.$$

В силу произвольности метода $\varphi(\cdot)$ получаем

$$E_J^p(I, \delta) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^p. \tag{2.6}$$

Для оценки p-ой степени погрешности метода $\widehat{\varphi}(\cdot)$ надо оценить значение следующей экстремальной задачи

$$\left\|I_0 x - \sum_{j \in \overline{J}} S_j y_j\right\|_{Y_0}^{p} \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j \in J,$$
$$\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j \in \overline{J}, \quad x \in X.$$

Положим $z_j = I_j x - y_j$, $j \in \overline{J}$. Тогда эта задача переписывается в виде

$$\left\|\left(I_0 - \sum_{j \in \overline{J}} S_j I_j\right)x + \sum_{j \in \overline{J}} S_j z_j\right\|_{Y_0}^{p} \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j \in J,$$
$$\|z_j\|_{Y_j} \leqslant \delta_j,\ j \in \overline{J}, \quad x \in X. \tag{2.7}$$

В силу равенства (2.2) и условия (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \left\|\left(I_0 - \sum_{j \in \overline{J}} S_j I_j\right)x + \sum_{j \in \overline{J}} S_j z_j\right\|_{Y_0}^{p} &= \left\|\sum_{j \in J} S_j I_j x + \sum_{j \in \overline{J}} S_j z_j\right\|_{Y_0}^{p} \\ &\leqslant \sum_{j \in J} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^p + \sum_{j \in \overline{J}} \widehat{\lambda}_j \|z_j\|_{Y_j}^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_J^p(I,\delta) \leqslant e_J^p(I,\delta,\widehat{\varphi}) \leqslant \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^p,$$

что вместе с (2.6) доказывает теорему.

Отметим, что двойственная экстремальная задача

$$\|I_0x\|_{Y_0} \to \max, \quad \|I_jx\|_{Y_j} \leqslant \delta_j, \quad j=1,\ldots,n,$$

“не различает” какие из операторов I_j являются информационными, а какие из них задают класс, на котором рассматривается задача восстановления. Иными словами, двойственная экстремальная задача не отличает априорную информацию от апостериорной. В силу этого из теоремы 1 вытекает, что если найдены операторы $S_j\colon Y_j \to Y_0$, $j=1,\ldots,n$, удовлетворяющие условиям (2.2) и (2.3), то решены сразу 2^n задач восстановления. Причем для получения соответствующего оптимального метода достаточно в методе

$$\widehat{\varphi}(y) = S_1y_1 + \ldots + S_ny_n$$

положить $y_j=0$ для $j\in J$.

§ 3. Восстановление в $L_p(\mathbb{R}^d)$

Обозначим через $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p<\infty$, совокупность всех измеримых функций $x(\cdot)$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{R}_+^d$. Для $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$ положим $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1}\ldots(i\xi_d)^{\alpha_d}$, $|\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1}\ldots|\xi_d|^{\alpha_d}$. Для $\alpha^0,\alpha^1,\ldots,\alpha^n\in\mathbb{R}_+^d$ положим

$$I_jx(\xi) = (i\xi)^{\alpha^j}x(\xi), \quad j=0,1,\ldots,n.$$

Множество измеримых функций $x(\cdot)$, для которых $\|I_jx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}<\infty$, $j=1,\ldots,n$, обозначим через X. Рассмотрим задачу (2.1) для $Y_0=Y_1=\ldots=Y_n=L_p(\mathbb{R}^d)$.

Положим

$$Q = \operatorname{co}\{(\alpha^1,\ln 1/\delta_1),\ldots,(\alpha^n,\ln 1/\delta_n)\},$$

где $\operatorname{co} M$ обозначает выпуклую оболочку множества M, и определим функцию $S(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$S(\alpha) = \max\{\, z\in\mathbb{R} : (\alpha,z)\in Q\,\}, \tag{3.1}$$

считая, что $S(\alpha)=-\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.

Пусть $\alpha^0\in\operatorname{co}\{\alpha^1,\ldots,\alpha^n\}$. Тогда точка $(\alpha^0,S(\alpha^0))$ принадлежит границе выпуклого многогранника Q. Проведем опорную гиперплоскость к выпуклому многограннику Q в точке $(\alpha^0,S(\alpha^0))$. Ее можно записать в виде $z=\langle\alpha,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a}$

при некоторых $\widehat{\eta} = (\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\widehat{a} \in \mathbb{R}$ (через $\langle \alpha, \widehat{\eta} \rangle$ обозначается скалярное произведение векторов α и $\widehat{\eta}$). По теореме Каратеодори найдутся точки $(\alpha^{j_k}, \ln 1/\delta_{j_k})$, $k = 1, \dots, s$, $s \leqslant d + 1$, из этой гиперплоскости такие, что

$$\alpha^0 = \sum_{k=1}^{s} \theta_{j_k} \alpha^{j_k}, \quad \theta_{j_k} > 0, \ k = 1, \dots, s, \quad \sum_{k=1}^{s} \theta_{j_k} = 1. \tag{3.2}$$

Положим $J_0 = \{j_1, \dots, j_s\}$ и

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\theta_j}{\delta_j^p} e^{-pS(\alpha^0)}, \quad j \in J_0.$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha^0 \in \mathrm{co}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$. Тогда для любого $J \in \{1, \dots, n\}$*

$$E_J(I, \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

При этом все методы

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in \overline{J} \cap J_0} a_j(\xi) y_j,$$

где измеримые функции $a_j(\cdot)$, $j \in J_0$, удовлетворяют условиям

$$\sum_{j \in J_0} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} \leqslant 1, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad \text{если } 1 < p < \infty, \tag{3.4}$$

$$\max_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j} \leqslant 1, \quad \text{если } p = 1, \tag{3.5}$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления.

Доказательство. Оценим значение экстремальной задачи

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0} x(\xi)|^p \, d\xi \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x(\xi)|^p \, d\xi \leqslant \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

Положим $\widehat{A} = e^{-p\widehat{a}}$, $\widehat{\xi}_j = e^{-\widehat{\eta}_j}$, $j = 1, \dots, d$, $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_d)$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим куб

$$B_\varepsilon = \{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d : \widehat{\xi}_j - \varepsilon \leqslant \xi_j \leqslant \widehat{\xi}_j, \ j = 1, \dots, d \}$$

и функцию

$$x_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \left(\widehat{A}/|B_\varepsilon|\right)^{1/p}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon \end{cases}$$

(через $|B_\varepsilon|$ обозначен объем куба B_ε). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x_\varepsilon(\xi)|^p \, d\xi \leqslant \widehat{A} |\widehat{\xi}|^{p\alpha^j} = e^{-p(\langle \alpha^j, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})}.$$

В силу того, что $z=\langle\alpha,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a}$ — уравнение опорной гиперплоскости к Q, имеем

$$\langle\alpha^j,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a}\geqslant\ln 1/\delta_j.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d}|(i\xi)^{\alpha^j}x_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi\leqslant\delta_j^p,\quad j=1,\ldots,n.$$

Тем самым $x_\varepsilon(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (3.6). Следовательно,

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\ j=1,\ldots,n}}\|I_0x\|_{Y_0}^p\geqslant\int_{\mathbb{R}^d}|(i\xi)^{\alpha^0}x_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi\geqslant\widehat{A}|\widehat{\xi}_\varepsilon|^{p\alpha^0},$$

где

$$\widehat{\xi}_\varepsilon=(\widehat{\xi}_1-\varepsilon,\ldots,\widehat{\xi}_d-\varepsilon).$$

Устремив ε к нулю, будем иметь

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\ j=1,\ldots,n}}\|I_0x\|_{Y_0}^p\geqslant e^{-pa}|\widehat{\xi}|^{p\alpha^0}=e^{-p(\langle\alpha^0,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a})}=e^{-pS(\alpha^0)}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\ j=1,\ldots,n}}\|I_0x\|_{Y_0}^p\geqslant\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j\delta_j^p.$$

Определим операторы $S_j\colon L_p(\mathbb{R}^d)\to L_p(\mathbb{R}^d)$, $j=1,\ldots,n$, следующим образом

$$S_jz(\xi)=\begin{cases}a_j(\xi)z(\xi), & j\in J_0,\\ 0, & j\notin J_0,\end{cases}$$

где $a_j(\cdot)$, $j\in J_0$, удовлетворяют условиям (3.3)–(3.5). Имеем

$$\Bigl\|\sum_{j=1}^n S_jz_j(\cdot)\Bigr\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p=\int_{\mathbb{R}^d}\Bigl|\sum_{j\in J_0}a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigr|^p\,d\xi.\tag{3.7}$$

По неравенству Гельдера при $1<p<\infty$

$$\Bigl|\sum_{j\in J_0}a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigr|=\Bigl|\sum_{j\in J_0}\frac{a_j(\xi)}{\widehat{\lambda}_j^{1/p}}\widehat{\lambda}_j^{1/p}z_j(\xi)\Bigr|\leqslant\Omega(\xi)\Bigl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|^p\Bigr)^{1/p},$$

где

$$\Omega(\xi)=\Bigl(\sum_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}}\Bigr)^{1/p'},\quad 1/p+1/p'=1.$$

При $p=1$ получаем неравенство

$$\Bigl|\sum_{j\in J_0}a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigr|\leqslant\Omega(\xi)\Bigl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|\Bigr),$$

в котором

$$\Omega(\xi) = \max_{j\in J_0} \frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j}.$$

Используя полученные неравенства, из (3.7) следует, что

$$\Big\|\sum_{j=1}^n S_j z_j(\cdot)\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Omega^p(\xi)\bigg(\sum_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j |z_j(\xi)|^p\bigg)\,d\xi.$$

В силу условий (3.4)–(3.5) получаем

$$\Big\|\sum_{j=1}^n S_j z_j(\cdot)\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j \|z_j(\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Остается показать, что множество функций $a_j(\cdot)$, $j\in J_0$, удовлетворяющих условиям (3.3)–(3.5) не пусто. Рассмотрим на $\mathbb{R}^d$ функцию

$$f(\eta) = -1 + \sum_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j e^{-p\langle \alpha^j - \alpha^0, \eta\rangle}.$$

Это, очевидно, выпуклая функция, причем легко убедиться, что $f(\widehat{\eta}) = 0$ и производная этой функции в точке $\widehat{\eta}$ также равна нулю. Отсюда вытекает, что $f(\eta) \geqslant 0$ при всех $\eta\in\mathbb{R}^d$. Следовательно,

$$-e^{-p\langle\alpha^0,\eta\rangle} + \sum_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j e^{-p\langle\alpha^j,\eta\rangle} \geqslant 0.$$

Положив $e^{-\eta_j} = |\xi_j|$, $j = 1,\ldots,d$, получаем, что

$$-|\xi|^{p\alpha^0} + \sum_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j} \geqslant 0 \tag{3.8}$$

при всех $\xi\in\mathbb{R}^d$. Положим

$$a_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0} \frac{\widehat{\lambda}_j(-i\xi)^{\alpha^j}|\xi|^{(p-2)\alpha^j}}{\sum\limits_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{p\alpha^j}}, \quad j\in J_0.$$

Легко убедиться, что условие (3.3) выполнено. При $p = 1$, учитывая (3.8), получаем

$$\frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j} = \frac{|\xi|^{\alpha^0}}{\sum\limits_{j\in J_0} \widehat{\lambda}_j |\xi|^{\alpha^j}} \leqslant 1.$$

Если $p > 1$, то

$$\sum_{j\in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} = \sum_{j\in J_0} \frac{|\xi|^{p'\alpha^0}\widehat{\lambda}_j^{p'}|\xi|^{(p-1)p'\alpha^j}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}\left(\sum\limits_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}\right)^{p'}} = \frac{|\xi|^{p'\alpha^0}\sum\limits_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}}{\left(\sum\limits_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}\right)^{p'}}$$

$$= \left(\frac{|\xi|^{p\alpha^0}}{\sum\limits_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}}\right)^{p'-1}.$$

Теперь из (3.8) следует, что

$$\sum_{j\in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} \leqslant 1.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$. Для функции $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ через $D^\alpha x(\cdot)$ будем обозначать производную порядка α по Вейлю, определяемую равенством

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(i\xi)^\alpha Fx(\xi)e^{i\langle\xi,t\rangle}\,d\xi,$$

где $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$.

Пусть $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{R}^d_+$. Положим

$$I_j = D^{\alpha^j} \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Множество измеримых функций $x(\cdot)$, для которых $\|D^{\alpha^j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$, $j = 1, \ldots, n$, обозначим через X. Рассмотрим задачу (2.1) для $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_n = L_2(\mathbb{R}^d)$. Используя ранее введенные обозначения для $p = 2$, получаем

Теорема 3. *Пусть $\alpha^0 \in \operatorname{co}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$. Тогда для любого $J \in \{1, \ldots, n\}$*

$$E_J(I, \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

При этом все методы

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j\in\overline{J}\cap J_0} \Lambda_j y_j,$$

где $\Lambda_j\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $j \in J_0$, — линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид: $F\Lambda_j y_j(\cdot) = a_j(\cdot)Fy_j(\cdot)$, а измеримые функции $a_j(\cdot)$, $j \in J_0$, удовлетворяют условиям

$$\sum_{j\in J_0}(i\xi)^{\alpha^j}a_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0},$$

$$\sum_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} \leqslant 1,$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления.

Доказательство. Переходя к образам Фурье и пользуясь равенством Парсеваля, условия

$$\|D^{\alpha^j}x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta_j^2,$$
$$\|D^{\alpha^j}x(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta_j^2,$$

могут быть переписаны в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha^j}|f(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta_j^2,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j}f(\xi) - Y_j(\xi)|^2 \leqslant \delta_j^2,$$

где

$$f(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}Fx(\cdot), \quad Y_j(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}Fy_j(\cdot).$$

Для любого метода восстановления $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^m \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $m = card\overline{J}$,

$$\|D^{\alpha^0}x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0}f(\xi) - \Phi(y)(\xi)|^2\,d\xi,$$

где

$$\Phi(y)(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}F\varphi(y)(\cdot).$$

Тем самым рассматриваемая задача эквивалентна задаче (для $p = 2$), решение которой дано в теореме 2.

Отметим, что из теорем 1 и 2 вытекает равенство

$$\sup_{\|D^{\alpha^j}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta_j,\ j=1,\ldots,n} \|D^{\alpha^0}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = e^{-S(\alpha^0)} = \prod_{j\in J_0}\delta_j^{\theta_j}. \tag{3.9}$$

Экстремальная задача в левой части (3.9) тесно связана с нахождением точной константы в обобщенном неравенстве Харди–Литлвуда–Полиа, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\|D^{\alpha^0}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \prod_{j\in J_0}\|D^{\alpha^j}x(\cdot)\|^{\theta_j}_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

(подробнее см. [23]).

§ 4. Обобщенное уравнение теплопроводности на сфере

Положим

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{\,x\in\mathbb{R}^d : |x| = 1\,\}, \quad d \geqslant 2,$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$. Оператор Лапласа–Бельтрами Δ_S определяется для функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right)_{\big|x=x'},$$

где Δ — оператор Лапласа. Обозначим через $\mathcal{H}_k$ множество сферических гармоник порядка k. Известно (см. [24]), что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, при этом $\dim \mathcal{H}_0 = a_0 = 1$,

$$\dim \mathcal{H}_k = a_k = (d + 2k - 2)\frac{(d + k - 3)!}{(d - 2)!k!}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Выберем в $\mathcal{H}_k$ ортонормированный базис $Y_j^{(k)}(\cdot)$, $j = 1, \dots, a_k$. Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$Y(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

а $\Lambda_k = k(k + d - 2)$ — собственные значения оператора $-\Delta_S$.

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$u(\cdot, 0) = f(\cdot),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Если

$$f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot), \tag{4.2}$$

то методом Фурье несложно получить решение этой задачи

$$u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Предположим, что приближенно известны решения рассматриваемой задачи при $t = 0, T$. Требуется восстановить решение в момент времени τ, $0 < \tau < T$. Для функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, имеющих разложение (4.2), положим $I_1 f(\cdot) = f(\cdot)$,

$$I_0 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

$$I_2 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot).$$

Тем самым мы приходим к задаче (2.1) при $X = Y_0 = Y_1 = Y_2 = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $p = 2$ и $J = \emptyset$.

Теорема 4. *Если* $\delta_1/\delta_2 \in \left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$ *при некотором* $m \in \mathbb{Z}_+$, *то для всех* α_{kj}, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, \ldots, a_k$, *удовлетворяющих условию*

$$\frac{\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2} \leqslant 1, \tag{4.3}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}(T-\tau)} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2}(T-\tau)}}{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2}T}},$$

$$\lambda_2 = \frac{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}\tau} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}\tau}}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\left(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)y_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj}y_{kj}^{(2)}\right)Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где

$$y_s(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(s)}Y_j^{(k)}(\cdot), \quad s = 1, 2,$$

являются оптимальными, а

$$E_\emptyset(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2}.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$, *то метод*

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}\sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(1)}Y_j^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а $E_\emptyset(I, \delta) = \delta_1$.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|I_0 f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \to \max, \quad \|I_j f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Эту задачу можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} f_k^2 \to \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leqslant \delta_1^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T} f_k^2 \leqslant \delta_2^2, \tag{4.4}$$

где

$$f_k^2 = \sum_{j=1}^{a_k} c_{jk}^2, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Пусть $\delta_1/\delta_2 \in \left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$. Определим f_m и f_{m+1} из условий

$$f_m^2 + f_{m+1}^2 = \delta_1^2,$$

$$e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} f_m^2 + e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T} f_{m+1}^2 = \delta_2^2.$$

Имеем

$$f_m^2 = \frac{\delta_2^2 - \delta_1^2 e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}},$$
$$f_{m+1}^2 = \frac{\delta_1^2 e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} T} - \delta_2^2}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2} T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2} T}}.$$

Последовательность $\{f_k\}$, в которой $f_k = 0$ при $k \neq m, m+1$ является допустимой в экстремальной задаче (4.4). Поэтому

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|I_j f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta_j,\ j=1,2}} \|I_0 f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \geqslant e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}\tau} f_m^2 + e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}\tau} f_{m+1}^2$$
$$= \lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0,1]$, то последовательность $\{f_k\}$, в которой $f_0 = \delta_1^2$, а $f_k = 0$ при $k \geqslant 1$, является допустимой в задаче (4.4). Поэтому в этом случае

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|I_j f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta_j,\ j=1,2}} \|I_0 f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \geqslant f_0^2 = \delta_1^2.$$

Пусть снова $\delta_1/\delta_2 \in \left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$. Для функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, имеющих разложение (4.2), определим операторы $S_j\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $j = 1, 2$, равенствами

$$S_1 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right) c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$
$$S_2 f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} \alpha_{kj} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где α_{kj} удовлетворяют условию (4.3). Нетрудно убедиться, что $I_0 = S_1 I_1 + S_2 I_2$. Для $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеем

$$\|S_1 f_1(\cdot) + S_2 f_2(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\left(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right) f_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} f_{kj}^{(2)}\right)^2,$$

где $f_{kj}^{(1)}, f_{kj}^{(2)}$ — коэффициенты Фурье функций $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$. Из неравенства Коши–Буняковского, учитывая условие (4.3), получаем

$$\left(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right) f_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj} f_{kj}^{(2)}\right)^2$$
$$\leqslant \left(\frac{\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2}\right)\left(\lambda_1 (f_{kj}^{(1)})^2 + \lambda_2 (f_{kj}^{(2)})^2\right)$$
$$\leqslant \lambda_1 (f_{kj}^{(1)})^2 + \lambda_2 (f_{kj}^{(2)})^2.$$

Таким образом,

$$\|S_1f_1(\cdot)+S_2f_2(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Big(\lambda_1(f_{kj}^{(1)})^2+\lambda_2(f_{kj}^{(2)})^2\Big)$$
$$=\lambda_1\|f_1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}+\lambda_2\|f_2(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Покажем, что существуют α_{kj}, $k=0,1,\ldots$, $j=1,\ldots,a_k$, удовлетворяющие условию (4.3). Рассмотрим на плоскости (x,y) множество точек с координатами

$$x_k=e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T},$$
$$y_k=e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau},\quad k=0,1,\ldots.$$

Это множество точек лежит на вогнутой кривой $y=x^{\tau/T}$. Проведем прямую через точки (x_{m+1},y_{m+1}) и (x_m,y_m). Нетрудно убедиться, что уравнение этой прямой записывается в виде $y=\lambda_1+\lambda_2x$. В силу вогнутости кривой, на которой лежат рассматриваемые точки, имеем

$$y_k\leqslant\lambda_1+\lambda_2x_k,\quad k=0,1,\ldots.$$

Следовательно, для всех $k=0,1,\ldots$

$$\frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}}{\lambda_1+\lambda_2e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}\leqslant1.$$

Положим

$$\widehat{\alpha}_{kj}=\frac{\lambda_2e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}}{\lambda_1e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}+\lambda_2}.$$

Тогда

$$\frac{\Big(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}-\widehat{\alpha}_{kj}\Big)^2}{\lambda_1e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}+\frac{\widehat{\alpha}_{kj}^2}{\lambda_2}=\frac{e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}}{\lambda_1e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}+\lambda_2}=\frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}}{\lambda_1+\lambda_2e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}\leqslant1.$$

Если $\delta_1/\delta_2\in(0,1]$, то положим $S_1=I_0$, а $S_2=0$. Тогда

$$\|S_1f_1(\cdot)+S_2f_2(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}=\|I_0f_1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}\sum_{j=1}^{a_k}(f_{kj}^{(1)})^2$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}(f_{kj}^{(1)})^2=\|f_1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 1.

Условие (4.3) можно записать в эквивалентной форме

$$(\alpha_{kj}-\widehat{\alpha}_{kj})^2\leqslant\lambda_1\lambda_2e^{4\Lambda_k^{\alpha/2}T}\frac{-e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}+\lambda_1+\lambda_2e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}{\Big(\lambda_1+\lambda_2e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}\Big)^2}.$$

Тем самым все α_{kj}, удовлетворяющие условию (4.3), имеют вид

$$\alpha_{kj} = \widehat{\alpha}_{kj} + \theta_{kj} e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T} \sqrt{\lambda_1\lambda_2} \frac{\sqrt{-e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}},$$

где $|\theta_{kj}| \leqslant 1$.

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени τ по неточно заданному решению в момент времени $T > \tau$ на классе

$$W = \{\, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta_1 \,\},$$

то из той же теоремы 1 (при $J = \{1\}$) будет следовать, что методы $\widehat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$ будут оптимальными. Оказывается, что среди этого семейства оптимальных методов есть подсемейство оптимальных методов, которые обладают некоторым преимуществом по сравнению с остальными.

Для того, чтобы указать это подсемейство, сформулируем сначала расширенный вариант рассматриваемой задачи. Пусть задан некоторый класс функций $\mathcal{F} \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Положим

$$e(\mathcal{F}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in\Omega,\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(\cdot,T)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,\tau) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

$$E(\mathcal{F}, \delta) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1})\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\mathcal{F}, \delta, \varphi).$$

Задача о нахождении погрешности оптимального восстановления $E(\mathcal{F}, \delta)$ и соответствующего оптимального метода отличается от рассмотренной ранее лишь произвольным классом $\mathcal{F}$.

Будем говорить, что метод $\varphi(y)(\cdot)$ точен на множестве $L \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, если $\varphi(u(\cdot, T))(\cdot) = u(\cdot, \tau)$ для всех $f(\cdot) \in L$.

Предложение 1. *Если $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$ — оптимальный метод для класса $\mathcal{F}$, являющийся линейным и точным на множестве $L \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, содержащем ноль, то он оптимален и на классе $\mathcal{F} + L$. При этом*

$$E(\mathcal{F}, \delta) = E(\mathcal{F} + L, \delta). \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $f(\cdot) \in \mathcal{F} + L$, $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$, где $f_1(\cdot) \in \mathcal{F}$, $f_2(\cdot) \in L$. Обозначим через $u_j(\cdot,\cdot)$ решение уравнения (4.1) с начальной функцией $f_j(\cdot)$, $j = 1, 2$. Пусть функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такова, что $\|u(\cdot, T) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta$. Положим $y_1(\cdot) = y(\cdot) - u_2(\cdot, T)$. Ясно, что $y_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Так как $u_1(\cdot, T) - y_1(\cdot) = u(\cdot, T) - y(\cdot)$, то

$$\|u_1(\cdot, T) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta. \tag{4.6}$$

Из линейности и точности $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$ на L следует равенство

$$\|u(\cdot, \tau) - \widehat{\varphi}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \|u_1(\cdot, \tau) - \widehat{\varphi}(y_1)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}. \tag{4.7}$$

Выражение справа в (4.7) в силу (4.6) не превосходит величины $e(\mathcal{F},\delta,\widehat{\varphi})$, которая равна $E(\mathcal{F},\delta)$, так как метод $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$ оптимален. Учитывая это обстоятельство и переходя в левой части (4.7) к верхней грани по $f(\cdot)\in\mathcal{F}+L$ и соответствующим $y(\cdot)$, получаем, что

$$e(\mathcal{F}+L,\delta,\widehat{\varphi})\leqslant E(\mathcal{F},\delta).$$

Отсюда и из того, что $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}+L$, имеем

$$E(\mathcal{F},\delta)\leqslant E(\mathcal{F}+L,\delta)\leqslant e(\mathcal{F}+L,\delta,\widehat{\varphi})\leqslant E(\mathcal{F},\delta).$$

Следовательно, $\widehat{\varphi}(y)(\cdot)$ — оптимальный метод для класса $\mathcal{F}+L$ и справедливо равенство (4.5).

Предположим, что $\delta_1/\delta_2\in\left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T},e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$. Нетрудно показать, что при достаточно большом m выполняется неравенство $\lambda_2\geqslant 1$. Тем самым, если δ_1 фиксировано, то при достаточно малых δ_2 выполняется неравенство $\lambda_2\geqslant 1$. В этом случае положим

$$\widehat{k}=\max\left\{k\in\mathbb{Z}_+:\Lambda_k\leqslant\left(\frac{\ln\lambda_2}{2(T-\tau)}\right)^{2/\alpha}\right\}.$$

Несложно убедиться, что

$$\widehat{k}=\left[\sqrt{\frac{(d-2)^2}{4}+\left(\frac{\ln\lambda_2}{2(T-\tau)}\right)^{2/\alpha}}-\frac{d-2}{2}\right]$$

($[a]$ — целая часть числа a).

Рассмотрим методы

$$\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)=\sum_{k=0}^{\widehat{k}}\sum_{j=1}^{a_k}e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}Y_j^{(k)}(\cdot)+\sum_{k=\widehat{k}+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\alpha_{kj}y_{kj}Y_j^{(k)}(\cdot),$$

где α_{kj}, $k=\widehat{k}+1,\widehat{k}+2,\ldots$, $j=1,\ldots,a_k$, удовлетворяют условию (4.3). В силу того, что для

$$\alpha_{kj}=e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)},\quad k=0,1,\ldots\widehat{k},\quad j=1,\ldots,a_k,$$

выполнены условие (4.3), методы $\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)$ — оптимальные на классе W.

Кроме того, методы $\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)$ — точные на подпространстве

$$L_{\widehat{k}}=\sum_{k=0}^{\widehat{k}}\mathcal{H}_k.$$

Действительно, пусть $f(\cdot)\in L_{\widehat{k}}$. Тогда

$$f(\cdot)=\sum_{k=0}^{\widehat{k}}\sum_{j=1}^{a_k}c_{kj}Y_j^{(k)}(\cdot).$$

Поэтому

$$u(x', T) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Следовательно,

$$\widehat{\varphi}_0(u(\cdot, T))(\cdot) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\cdot) = u(\cdot, \tau).$$

Тем самым из предложения 1 вытекает, что методы $\widehat{\varphi}_0(y)(\cdot)$ не только оптимальны на классе W, но они остаются оптимальными на более широком классе $W + L_{\widehat{k}}$.

§ 5. Оптимальное восстановление решений разностных уравнений

Рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечном стержне, описываемый дискретной моделью, а именно, неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2}. \tag{5.1}$$

Здесь τ и h — положительные числа, $(s, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$, $u_{s,j}$ — температура стержня в момент времени $s\tau$ в точке jh.

Обозначим через $l_{2,h}$ множество векторов $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, для которых

$$\|x\|_{l_{2,h}} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty, \quad h > 0.$$

Предположим, что приближенно измерена температура стержня в нулевой момент времени и в момент времени $n\tau$, т. е. приближенно известны векторы $u_0 = \{u_{0,j}\}$ и $u_n = \{u_{n,j}\}$, или, точнее говоря, нам известны векторы $y_1, y_2 \in l_{2,h}$ такие, что

$$\|u_0 - y_1\|_{l_{2,h}} \leqslant \delta_1, \quad \|u_n - y_2\|_{l_{2,h}} \leqslant \delta_2,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, 2$. По этой информации требуется восстановить вектор $u_m = \{u_{m,j}\}$, где $0 < m < n$, т. е. восстановить значение температуры стержня в момент времени $m\tau$.

Тем самым мы снова приходим к задаче (2.1), в которой $X = Y_0 = Y_1 = Y_2 = l_2$, $p = 2$, $J = \emptyset$, а операторы $I_j \colon l_{2,h} \to l_{2,h}$, $j = 0, 1, 2$, определены равенствами

$$I_0 u_0 = u_m, \quad I_1 u_0 = u_0, \quad I_2 u_0 = u_n.$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}$ назовем функцию

$$Fx(\xi) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\xi}.$$

Несложно убедиться, что $Fx(\cdot) \in L_2([-\pi/h, \pi/h])$ и

$$\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h, \pi/h])} = 2\pi \|x\|^2_{l_{2,h}}. \tag{5.2}$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (5.1)

$$h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{u_{s+1,j}-u_{sj}}{\tau}e^{-ijh\xi}=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{u_{s+1,j+1}-2u_{s+1,j}+u_{s+1,j-1}}{h^2}e^{-ijh\xi}.$$

Отсюда

$$\frac{U_{s+1}(\xi)-U_s(\xi)}{\tau}=\frac{e^{ih\xi}-2+e^{-ih\xi}}{h^2}U_{s+1}(\xi),$$

где

$$U_s(\xi)=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_{s,j}e^{-ijh\xi}.$$

Тем самым

$$U_{s+1}(\xi)=\left(1+\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{h\xi}{2}\right)^{-1}U_s(\xi).$$

Следовательно,

$$U_s(\xi)=\Lambda^s(\xi)U_0(\xi),\quad \Lambda(\xi)=\left(1+\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{h\xi}{2}\right)^{-1}.$$

Положим $a=(1+4\tau/h^2)^{-1}$,

$$\lambda_1=\begin{cases}0, & \delta_2/\delta_1\in(0,a^n],\\ \left(1-\dfrac{m}{n}\right)\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2m/n}, & \delta_2/\delta_1\in(a^n,1),\\ 1, & \delta_2/\delta_1\in[1,+\infty),\end{cases}$$

$$\lambda_2=\begin{cases}a^{2(m-n)}, & \delta_2/\delta_1\in(0,a^n],\\ \dfrac{m}{n}\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2(m/n-1)}, & \delta_2/\delta_1\in(a^n,1),\\ 0, & \delta_2/\delta_1\in[1,+\infty).\end{cases}.$$

Теорема 5. *Имеет место равенство*

$$E_\emptyset(I,\delta)=\sqrt{\lambda_1\delta_1^2+\lambda_2\delta_2^2}.$$

Для всех $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих при $\delta_2/\delta_1\in(a^n,1)$ условию

$$\Lambda^{2m}(\xi)\left(\frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1}+\Lambda^{-2n}(\xi)\frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2}\right)\leqslant 1, \tag{5.3}$$

а в остальных случаях равенству

$$\alpha(\xi)=\begin{cases}1, & \delta_2/\delta_1\in(0,a^n],\\ 0, & \delta_2/\delta_1\in[1,+\infty),\end{cases}$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1,y_2)=F^{-1}(\Lambda^m(\cdot)(1-\alpha(\cdot))Fy_1(\cdot)+\Lambda^{m-n}(\cdot)\alpha(\cdot)Fy_2(\cdot))$$

являются оптимальными.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u_m\|^2_{l_{2,h}} \to \max, \quad \|u_0\|^2_{l_{2,h}} \leqslant \delta_1^2, \quad \|u_n\|^2_{l_{2,h}} \leqslant \delta_2^2.$$

Переходя к образам Фурье, получим следующую задачу

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\cdot)U_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} \to \max, \quad \frac{1}{2\pi}\|U_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} \leqslant \delta_1^2,$$
$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\cdot)U_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} \leqslant \delta_2^2. \quad (5.4)$$

Предположим, что $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$. Функция $\Lambda(\xi)$ при $\xi \in [0, \pi/h]$ монотонно убывает от 1 до a. Поэтому найдется $\widehat{\xi} \in (0, \pi/h)$ такое, что $\Lambda^n(\widehat{\xi}) = \delta_2/\delta_1$. Положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\delta_1, & \xi \in (\widehat{\xi}, \widehat{\xi}+\varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (\widehat{\xi}, \widehat{\xi}+\varepsilon). \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_{\widehat{\xi}}^{\widehat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2n}(\xi)\,d\xi \leqslant \delta_1^2\Lambda^{2n}(\widehat{\xi}) = \delta_2^2.$$

Тем самым функция $\widehat{U}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h} \\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2 \\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}} \|u_m\|^2_{l_{2,h}} \geqslant \frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_{\widehat{\xi}}^{\widehat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2m}(\xi)\,d\xi$$
$$= \delta_1^2\Lambda^{2m}(c),$$

где $c \in [\widehat{\xi}, \widehat{\xi}+\varepsilon]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h} \\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2 \\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}} \|u_m\|^2_{l_{2,h}} \geqslant \delta_1^2\Lambda^{2m}(\widehat{\xi}) = \delta_1^{2(1-m/n)}\delta_2^{2m/n} = \lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2.$$

Предположим, что $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$. Положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\dfrac{\delta_2}{\Lambda^n(\xi)}, & \xi \in (\pi/h-\varepsilon, \pi/h], \\ 0, & \xi \notin (\pi/h-\varepsilon, \pi/h]. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \delta_2^2,$$

а
$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\frac{\delta_2^2}{\varepsilon}\int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h}\Lambda^{-2n}(\xi)\,d\xi\leqslant\delta_2^2a^{-2n}\leqslant\delta_1^2.$$
Тем самым функция $\widehat{U}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,
$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\frac{\delta_2^2}{\varepsilon}\int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h}\Lambda^{2(m-n)}(\xi)\,d\xi$$
$$=\delta_2^2\Lambda^{2(m-n)}(c),$$
где $c\in[\pi/h-\varepsilon,\pi/h]$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем
$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\delta_2^2a^{2(m-n)}=\lambda_2\delta_2^2.$$

Если, наконец, $\delta_2/\delta_1\in[1,+\infty)$, положим для достаточно малых $\varepsilon>0$
$$\widehat{U}_0(\xi)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\delta_1, & \xi\in(0,\varepsilon),\\ 0, & \xi\notin(0,\varepsilon).\end{cases}$$
Тогда
$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\delta_1^2,$$
а
$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\Lambda^{2n}(\xi)\,d\xi\leqslant\delta_1^2\leqslant\delta_2^2.$$
Таким образом, функция $\widehat{U}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,
$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\cdot)\widehat{U}_0(\cdot)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\Lambda^{2m}(\xi)\,d\xi$$
$$=\delta_1^2\Lambda^{2m}(c),$$
где $c\in[0,\varepsilon]$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем
$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\delta_1^2.$$

Займемся теперь оценкой (2.3). Пусть $\delta_2/\delta_1\in(a^n,1)$. Определим операторы $S_j\colon l_{2,h}\to l_{2,h}$, $j=1,2$, так, чтобы
$$F(S_1u)(\cdot)=\Lambda^m(\cdot)(1-\alpha(\cdot))Fu(\cdot),$$
$$F(S_2u)(\cdot)=\Lambda^{m-n}(\cdot)\alpha(\cdot)Fu(\cdot).$$

Нетрудно убедиться, что для всех $u_0 \in l_{2,h}$

$$F((I_0 - S_1 I_1 - S_2 I_2)u)(\cdot) \equiv 0.$$

Поэтому $I_0 = S_1 I_1 + S_2 I_2$. В силу (5.2) получаем

$$\|S_1 z_1 + S_2 z_2\|^2_{l_{2,h}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2m}(\xi) \left|(1 - \alpha(\xi) F z_1(\xi) + \Lambda^{-n}(\xi)\alpha(\xi) F z_2(\xi)\right|^2 \, d\xi.$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\Lambda^{2m}(\xi) \left|(1 - \alpha(\xi) F z_1(\xi) + \Lambda^{-n}\alpha(\xi) F z_2(\xi)\right|^2 \leqslant \Omega(\xi)(\lambda_1 |F z_1(\xi)|^2 + \lambda_2 |F z_2(\xi)|^2),$$

где

$$\Omega(\xi) = \Lambda^{2m}(\xi) \left(\frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi) \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2} \right).$$

В силу условия (5.3) получаем

$$\begin{aligned} \|S_1 z_1 + S_2 z_2\|^2_{l_{2,h}} &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (\lambda_1 |F z_1(\xi)|^2 + \lambda_2 |F z_2(\xi)|^2) \, d\xi \\ &= \lambda_1 \|z_1\|^2_{l_{2,h}} + \lambda_2 \|z_2\|^2_{l_{2,h}}. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_1 y_1 + S_2 y_2$$

являются оптимальными, а

$$E_\emptyset(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$. Определим оператор $S_2 \colon l_{2,h} \to l_{2,h}$ так, чтобы

$$F(S_2 u)(\cdot) = \Lambda^{m-n}(\cdot) F u(\cdot).$$

Так как

$$F((I_0 - S_2 I_2) u_0)(\xi) \equiv 0,$$

то $I_0 = S_2 I_2$. Кроме того,

$$\|S_2 z_2\|^2_{l_{2,h}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2(m-n)}(\xi) |F z_2(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant a^{2(m-n)} \|z_2\|^2_{l_{2,h}}.$$

Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_2 y_2$$

является оптимальным, а

$$E_\emptyset(I, \delta) = a^{m-n} \delta_2.$$

Наконец, если $\delta_2 \geqslant \delta_1$, определим оператор $S_1 \colon l_{2,h} \to l_{2,h}$ так, чтобы

$$F(S_1 u)(\cdot) = \Lambda^m(\cdot) F u(\cdot).$$

Тогда $I_0 = S_1 I_1$ и

$$\|S_1 z_1\|^2_{l_{2,h}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \Lambda^{2m}(\xi)|Fz_1(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \|z_1\|^2_{l_{2,h}}.$$

Из теоремы 1 следует, что метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2) = S_1 y_1$$

является оптимальным, а

$$E_\emptyset(I, \delta) = \delta_1.$$

Докажем, что при $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$ множество функций $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условию (5.3) не пусто. Рассмотрим вогнутую функцию

$$y = x^{m/n}, \quad x \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Проведем касательную к графику этой функции в точке $x_0 > 0$. Нетрудно убедиться, что касательная будет иметь вид $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$, где

$$\widehat{\lambda}_1 = \left(1 - \frac{m}{n}\right) x_0^{m/n}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{m}{n} x_0^{m/n-1}.$$

В силу вогнутости кривой (5.5) для всех $x \geqslant 0$ будет выполняться неравенство

$$x^{m/n} \leqslant \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x.$$

Положим

$$x = \Lambda^{2n}(\xi), \quad x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2.$$

Тогда $\widehat{\lambda}_j = \lambda_j$, $j = 1, 2$, и для всех $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ выполняется неравенство

$$\Lambda^{2m}(\xi) \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)} \leqslant 1.$$

Положив

$$\alpha(\xi) = \frac{\lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)},$$

получаем

$$\Lambda^{2m}(\xi)\left(\frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} + \Lambda^{-2n}(\xi)\frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2}\right) = \frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1 + \lambda_2 \Lambda^{2n}(\xi)} \leqslant 1.$$

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени $m\tau$ по неточно заданному решению в момент времени $n\tau$ на классе

$$W = \{\, u_0 \in l_{2,h} : \|u_0\|_{l_{2,h}} \leqslant \delta_1 \,\},$$

то из той же теоремы 1 будет следовать, что методы $\widehat{\varphi}(0, y_2)(\cdot)$ будут оптимальными.

Отметим, что для непрерывной модели распространения тепла результат, полученный в работе [25] для $t_1 = 0$, $t_2 = T$ ($n = 2$) и промежуточной точки τ_0, в которой требуется восстановить распределение температуры, в одномерном случае совпадет с предельным значением погрешности восстановления и одним из методов, построенных в теореме 5 при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ (в этом случае надо положить $a = 0$).

Отметим также, что задача, аналогичная рассмотренной, когда процесс распространения тепла происходит на окружности, рассматривалась в работе [22].

Список литературы

[1] С. Ф. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.

[2] С. М. Никольский, “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *Успехи мат. наук*, **5**:2 (1950), 165–177.

[3] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.)*, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.

[4] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 87–105.

[5] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A General Theory of Optimal Algorithms*, Academic Press, New York, 1980.

[6] В. В. Арестов, “‘Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[8] L. Plaskota, *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge University Press, 1996.

[9] K. Yu. Osipenko, *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000.

[10] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2003.

[11] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[12] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функ. анал. и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64.

[13] К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

[14] К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106.

[15] K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.

[16] В. В. Арестов, “Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**:4 (2018), 34–56.

[17] V. V. Arestov, “Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform”, *Mathematical Optimization Theory and Operation Research. MOTOR 2019 (M. Khachay,*

Y. Kochetov, P. Pardalos, eds.), Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2019, 434–448.

[18] V. V. Arestov, "Uniform approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the space L_r", *Analysis Math.*, **46**:3 (2020), 425–445.

[19] К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление в весовых пространствах с однородными весами", *Матем. сб.*, **213**:3 (2022), 111–138.

[20] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру", *Функ. анал. и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79.

[21] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации", *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302.

[22] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений по неточным измерениям", *Проблемы математического анализа*, **69** (2013), 47–54.

[23] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, "О неравенствах для производных колмогоровского типа", *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106.

[24] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[25] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., "Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям", *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54.

К. Ю. Осипенко (K. Yu. Osipenko)
Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступило в редакцию
03.06.2022