

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ Г. Г., ОСИПЕНКО К. Ю.

Многие проблемы (в математике, технике, экономике) формулируются (или могут быть сформулированы) как задачи выбора наилучшего (в том или ином смысле) способа достижения цели в условиях неполной и/или неточной информации, т. е. в условиях неопределенности. Например, простейшая задача о квадратурах заключается в том, чтобы наилучшим образом приблизить (восстановить) интеграл от функции по неполной информации о самой функции, а именно, зная ее значения лишь в конечном наборе точек. Параметры математических моделей, описывающих реальные физические или технологические процессы известны, как правило, неточно, скажем, приближенно известны коэффициенты дифференциального уравнения, а мы хотим восстановить как можно точнее его решение. Мы наблюдаем на экране значение непрерывного сигнала в дискретные моменты времени, а хотим, по возможности точнее, знать (восстановить) его значение в какой-то промежуточный момент времени. Список подобных примеров можно продолжать сколь угодно долго.

Приведем общую постановку задачи оптимального восстановления, которая охватывает значительное число задач, представляющих теоретический и прикладной интерес. Пусть задано множество (класс)  $C$  и отображение  $f: C \rightarrow Z$ , где  $(Z, d)$  — метрическое пространство. Принадлежность элемента классу  $C$  составляет "глобальную" информацию о нем. Кроме того, о самом элементе имеется "локальная" (индивидуальная) информация, состоящая в том, что известно отображение (вообще говоря, многозначное, что соответствует информации, заданной неточно)  $F: C \rightarrow Y$ , где  $Y$  — некоторое множество. Отображение  $F$  назовем *информационным оператором*. Задача состоит в том, чтобы *восстановить по возможности наилучшим способом значение  $f(x)$ ,  $x \in C$ , по информации  $y \in F(x)$* . В это вкладывается следующий смысл. Любое

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00-15-96109 и №02-01-00386), программы "Университеты России" (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S. CRDF—R.F. Ministry of Education Award VZ-0100-0.

отображение  $m: F(C) \rightarrow Z$  назовем *методом восстановления*. Погрешностью такого метода назовем величину

$$e(f, C, F, m) = \sup_{x \in C, y \in F(x)} d(f(x), m(y)),$$

а *погрешность оптимального восстановления* ( $f$  на  $C$  по  $F$ ), которую обозначим  $E(f, C, F)$ , определим как значение следующей экстремальной задачи:

$$(1) \quad e(f, C, F, m) \rightarrow \inf,$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям

$$m: F(C) \rightarrow Z.$$

Метод  $\hat{m}$ , на котором достигается нижняя грань в (1), называется *оптимальным методом восстановления*.

В докладе будет рассмотрен ряд примеров, где найден оптимальный метод восстановления и вычислена погрешность оптимального восстановления. Здесь же, в качестве иллюстрации, приведем задачу об оптимальном восстановлении в метрике  $L_2$  производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье. Пусть  $C$  — это соболевский класс  $W_2^2(\mathbb{T})$ , т. е. совокупность  $2\pi$ -периодических функций  $x(\cdot)$ , у которых первая производная  $\dot{x}(\cdot)$  абсолютно непрерывна и  $\|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$ . На этом классе рассмотрим задачу восстановления первой производной функции  $x(\cdot)$  по конечному набору ее коэффициентов Фурье  $x_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-ijt} dt$ , заданным с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции  $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$  нам известны числа  $y_j$ ,  $|j| \leq N$ , такие, что  $|x_j - y_j| \leq \delta$ ,  $|j| \leq N$ ,  $\delta > 0$ . Здесь информационным оператором является многозначное отображение  $F_\delta^N$ , ставящее в соответствие каждой функции  $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$  множество  $F_\delta^N x(\cdot) = \{y = \{y_j\}_{|j| \leq N} : |x_j - y_j| < \delta\}$ . Задача заключается в нахождении величины

$$E(\dot{x}(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \inf_{m: \mathbb{C}^{2N+1} \rightarrow L_2(\mathbb{T})} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ y \in F_\delta^N x(\cdot)}} \|\dot{x}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

и соответствующего оптимального метода.

**Теорема 1.** Пусть

$$p_0 = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j| \leq p} j^4 < 1, 0 \leq p \leq N \right\}.$$

Тогда

$$E(\dot{x}(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1},$$

*a метод*

$$\dot{x}(t) \approx \sum_{|j| \leq N} ij \widehat{x}_j e^{ijt} = \sum_{|j| \leq p_0} ij \left( 1 - \left( \frac{j}{p_0 + 1} \right)^2 \right) y_j e^{ijt}$$

*является оптимальным.*

Отметим, что если  $p_0 < N$ , то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье, известных с той же погрешностью, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*E-mail address:* georg@magaril.mccme.ru

“МАТИ— РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

*E-mail address:* konst@osipenko.mccme.ru