

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении температуры бесконечного стержня в момент времени  $\tau$  по ее приближенным измерениям в моменты  $t_1, \dots, t_n$ .

Приведем точную постановку. Распространение тепла в бесконечном стержне (т. е. на прямой  $\mathbb{R}$ ) описывается уравнением

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с заданным начальным распределением температуры

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Мы предполагаем, что  $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ . Единственным решением задачи (1)–(2) при  $t > 0$  является интеграл Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi$$

и при этом  $u(t, \cdot) \rightarrow u_0(\cdot)$  при  $t \rightarrow 0$  в метрике  $L_2(\mathbb{R})$ .

Пусть в моменты времени  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  приближенно известны распределения температур  $u(t_1, \cdot), \dots, u(t_n, \cdot)$ , т. е. известны функции  $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$  такие, что  $\|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_i$ , где  $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Любое отображение  $m: (L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R}) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  объявляется методом восстановления (температуры в  $L_2(\mathbb{R})$  в момент времени  $\tau$  по данной информации). Погрешность метода  $m$  определяется равенством

$$e(\tau, \delta, m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_i, \quad i=1, \dots, n}} \|u(\tau, \cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где  $y = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$ , а  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ . Нас интересует величина

$$E(\tau, \delta) = \inf_m e(\tau, \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем методам  $m: (L_2(\mathbb{R}))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ , которую назовем погрешностью оптимального восстановления, и метод  $\hat{m}$ , на котором нижняя грань достигается, называемый оптимальным методом восстановления (температуры в  $L_2(\mathbb{R})$  в момент времени  $\tau$  по данной информации).

Отметим, что такой подход к определению оптимального метода идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова тридцатых годов прошлого века, посвященных нахождению наилучшего средства приближения сразу для всех функций из данного класса.

Перед формулировкой теоремы сделаем некоторые построения. На плоскости с координатами  $(t, x)$  обозначим  $M = \text{co}\{(t_j, \ln(1/\delta_j)), 1 \leq j \leq n\} + \{(t, 0) \mid t \geq 0\}$ , где  $\text{co} A$  — выпуклая оболочка множества  $A$ . Пусть функция  $\theta(\cdot)$  на  $[0, \infty)$  определена равенством:  $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$  (причем  $\theta(t) = +\infty$ , если  $(t, x) \notin M$  ни для какого  $x$ ). Ясно, что  $\theta(\cdot)$  — ломаная на  $[t_1, \infty)$ . Пусть  $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$  — ее точки излома ( $s_1 = 1$ ), которые, очевидно, являются подмножеством точек  $\{t_1, \dots, t_n\}$  (если  $\theta(\cdot)$  — прямая, то считаем, что излом только один в точке  $t_1$ , т. е.  $k = 1$ ).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №07-01-90102, №06-01-00530).

**Теорема.** При всех  $\tau > t_1$

$$E(\tau, \delta) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Если  $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  для некоторого  $1 \leq j \leq k-1$ , то

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = u(\tau, \cdot; K(\cdot) * (\lambda_1 u(t_{s_j}, \cdot; y_{s_j}(\cdot)) + \lambda_2 u(t_{s_{j+1}}, \cdot; y_{s_{j+1}}(\cdot))))),$$

— оптимальный метод, где

$$\lambda_1 = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left( \frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{2(\tau - t_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left( \frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{2(t_{s_{j+1}} - \tau)}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

$K(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$  и преобразование Фурье функции  $K(\cdot)$  имеет вид

$$FK(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 e^{-2\xi^2 t_{s_j}} + \lambda_2 e^{-2\xi^2 t_{s_{j+1}}}}.$$

Если  $\tau > t_{s_k}$ , то

$$\widehat{m}(y)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - t_{s_k})}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau - t_{s_k})}} y_{s_k}(\xi) d\xi$$

— оптимальный метод.

Из выражения для оптимального метода видно, что при  $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  из всего наблюдаемого набора функций  $y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$  используются только две (и выбор их зависит от величин погрешности  $\delta_i$ ). Далее происходит их некоторое усреднение и сглаживание (свертка с ядром  $K(\cdot)$ ) и полученная таким образом функция воспринимается как первоначальное распределение температур.

Рассматриваемая задача является частным случаем общей задачи об оптимальном восстановлении линейного оператора по неточной информации, которая изучалась в работах [1]–[3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Melkman and C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 87–105.
- [2] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193:3** (2002), 79–100.
- [3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*E-mail address:* magaril@mirea.ru

“МАТИ” — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

*E-mail address:* kosipenko@yahoo.com