

# ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМУМА

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, В. М. ТИХОМИРОВ

Аннотация. В работе с общих позиций теории экстремума рассматриваются проблемы восстановления линейных функционалов на классах гладких и аналитических функций.

**0. Постановка задачи о восстановлении линейных функционалов.** Пусть в линейном пространстве  $X$  над  $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  задано множество (класс)  $C \subset X$  и линейный функционал  $x'$  на  $X$ . Будем считать, что о каждом элементе  $x \in C$  мы располагаем информацией  $y = Fx$ , где  $F: C \rightarrow Y$  — линейный оператор из  $X$  в другое линейное пространство  $Y$ . Задача состоит в том, чтобы восстановить наилучшим образом значение линейного функционала  $x'$  на классе  $C$  по информации, задаваемой оператором  $F$ . В это вкладывается следующий смысл. Методом восстановления будем называть любую функцию  $\varphi: F(C) \rightarrow K$ . Погрешностью такого метода называется величина

$$e(x', C, F, \varphi) = \sup_{x \in C} |\langle x', x \rangle - \varphi(Fx)|,$$

где  $\langle x', x \rangle$  — значение функционала  $x'$  на элементе  $x$ . Погрешностью оптимального восстановления ( $x'$  на  $C$  по  $F$ ) называется величина

$$(1) \quad E(x', C, F) = \inf_{\varphi} e(x', C, F, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем функциям (методам)  $\varphi: F(C) \rightarrow K$ . Метод  $\widehat{\varphi}$ , на котором достигается нижняя грань в (1), называется оптимальным методом восстановления.

В работе исследуются задачи восстановления значений функций на классах Соболева  $W_p^K(\mathbb{T})$  и Харди–Соболева  $W^r H_p(D)$  по коэффициентам Фурье, Тейлора и значениям в других точках с общих позиций теории экстремальных задач.

**1. Принцип Лагранжа для задач оптимального восстановления.** Решения упомянутых задач, равно как и многих других задач об оптимальном восстановлении линейных функционалов,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 99-01-01181 и 00-15-96109), INTAS-97-1050, Research Grant 12513 of the Royal Swedish Acad. of Sci.

базируются на связи исходной задачи (1) со следующей выпуклой экстремальной задачей:

$$(2) \quad \operatorname{Re}\langle x', x \rangle \rightarrow \max, \quad Fx = 0, \quad x \in C.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 \operatorname{Re}\langle x', x \rangle + \operatorname{Re}\langle \lambda, Fx \rangle,$$

где  $\lambda_0 \leq 0$  и  $\lambda \in Y'$  ( $Y'$  — алгебраически сопряженное к  $Y$ ) — множители Лагранжа. Принцип Лагранжа для выпуклых задач состоит в том, что если  $\hat{x}$  — решение задачи, то найдутся множители Лагранжа (не равные нулю одновременно) такие, что функция Лагранжа достигает минимума в точке  $\hat{x}$  на множестве тех ограничений, которые в нее не включены (в данном случае на  $C$ ). Этот факт является центральным утверждением следующей теоремы (см. [1]).

**Теорема 1 (Принцип Лагранжа для задач восстановления).**

*Пусть  $X$  и  $Y$  линейные пространства над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ,  $C$  — выпуклое уравновешенное подмножество  $X$  и  $F: X \rightarrow Y$  — линейный оператор. Тогда для того чтобы допустимая в (2) точка  $\hat{x}$  была решением этой задачи необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой множитель Лагранжа  $\hat{\lambda} \in Y'$ , что*

$$(3) \quad \min_{x \in C} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}, -1) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1).$$

*При этом  $\hat{\lambda}$  — оптимальный метод восстановления в (1) и  $E(x', C, F) = \operatorname{Re}\langle x', \hat{x} \rangle$ .*

Доказательство всех приводимых ниже результатов опирается на сформулированный принцип. Используя равенство (3) как необходимое условие, мы находим соответствующие  $\hat{x}$  и  $\hat{\lambda}$ , а затем, пользуясь достаточностью этого соотношения или непосредственной проверкой, убеждаемся, что  $\hat{x}$  — решение задачи (2), а  $\hat{\lambda}$  — оптимальный (причем линейный) метод восстановления.

**2. Оптимальное восстановление значений функций из обобщенных соболевских классов по коэффициентам Фурье.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ , функция  $K(\cdot) \in L_{p'}(\mathbb{T})$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ,  $\mathbb{T}$  — окружность, реализованная как  $[-\pi, \pi]$  с идентифицированными концами) и  $\alpha_k, \beta_k$  — коэффициенты Фурье функции  $K(\cdot)$ . Предположим, что  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$  ( $\beta_0 = 0$ ) за исключением конечного (возможно пустого) множества  $Q \subset \mathbb{Z}_+$ . Обозначим  $\mathcal{T}_Q = \operatorname{span}\{\cos k\cdot, \sin k\cdot\}_{k \in Q}$  и положим

$$\mathcal{W}_p^K(\mathbb{T}, Q) = \left\{ x(\cdot) \mid x(\cdot) = y(\cdot) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} K(\cdot - t)u(t) dt, \quad y(\cdot) \in \mathcal{T}_Q, \right. \\ \left. u(\cdot) \in \mathcal{T}_Q^\perp, \quad u(\cdot) \in L_p(\mathbb{T}) \right\},$$

где  $\mathcal{T}_Q^\perp$  — аннулятор  $\mathcal{T}_Q$ .

Обобщенным соболевским классом  $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$  назовем множество тех функций из  $\mathcal{W}_p^K(\mathbb{T}, Q)$ , для которых  $\|u(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq 1$ . Если  $Q = \{0\}$  и  $K(\cdot) = B_r(\cdot)$ , где  $B_r(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-r} \cos(kt - \pi r/2)$  (ядро Бернулли), то  $W_p^{B_r}(\mathbb{T}, \{0\})$  совпадает с соболевским классом  $W_p^r(\mathbb{T})$ .

Поставим задачу о восстановлении функции  $x(\cdot)$  в точке  $\theta \in \mathbb{T}$  на классе  $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$  по значениям ее коэффициентов Фурье  $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n-1}$  ( $b_0 = 0$ ). Через  $\text{Four}_n$  обозначим отображение  $x(\cdot) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})$ . Будем считать, что  $Q \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ , т.к. в противном случае погрешность оптимального восстановления равна  $+\infty$  и тем самым любой метод оптимален.

**Теорема 2 (об оптимальном восстановлении по коэффициентам Фурье).** Пусть  $1 < p \leq \infty$  и

$$\widehat{p}(t) = A_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

— полином наилучшего приближения функции  $K(\cdot)$  подпространством  $\mathcal{T}_{n-1}$  тригонометрических полиномов в метрике  $L_{p'}(\mathbb{T})$ . Тогда метод

$$x(\theta) \approx \widehat{\mu}_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\widehat{\mu}_k(\theta) a_k + \widehat{\nu}_k(\theta) b_k),$$

где  $\widehat{\mu}_0 = 1/2$ , если  $0 \in Q$ , и  $\widehat{\mu}_0 = A_0/(2\alpha_0)$ , если  $0 \notin Q$ ;  $\widehat{\mu}_k(\theta) = \cos k\theta$ ,  $\widehat{\nu}_k(\theta) = \sin k\theta$ , если  $k \in Q \setminus \{0\}$ , и

$$\widehat{\mu}_k(\theta) = \frac{(\alpha_k A_k + \beta_k B_k) \cos k\theta + (\alpha_k B_k - \beta_k A_k) \sin k\theta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

$$\widehat{\nu}_k(\theta) = \frac{(\beta_k A_k - \alpha_k B_k) \cos k\theta + (\alpha_k A_k + \beta_k B_k) \sin k\theta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

если  $k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus Q$ , является оптимальным методом восстановления  $x(\theta)$  на  $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$  по коэффициентам Фурье  $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n-1}$ .

При этом

$$E(x(\theta), W_p^K(\mathbb{T}, Q), \text{Four}_n) = \frac{1}{\pi} \|K(\cdot) - \widehat{p}(\cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{T})}.$$

Скажем, что функция  $K(\cdot) \in L_1(\mathbb{T})$  обладает  $\gamma$ -свойством Фавара (при данном  $n \in \mathbb{N}$ ), если найдется такой полином  $\widehat{q}(\cdot) \in \mathcal{T}_{n-1}$  и  $\gamma \in [0, \pi/n)$ , что функция  $(K(t) - \widehat{q}(t)) \sin n(t + \gamma)$  неотрицательна или неположительна для п.в.  $t \in \mathbb{T}$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае  $\widehat{q}(\cdot)$  — полином наилучшего приближения для  $K(\cdot)$  в  $L_1(\mathbb{T})$  и имеет место равенство

$$\|K(\cdot) - \widehat{q}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = \left| \int_{\mathbb{T}} K(t) \text{sign} \sin n(t + \gamma) dt \right|.$$

Если  $K(\cdot)$  непрерывно, то  $\widehat{q}(\cdot)$  находится как полином, интерполирующий  $K(\cdot)$  в нулях  $\sin n(\cdot + \gamma)$ , и тем самым из теоремы 2 определяется оптимальный метод восстановления и его погрешность.

Среди ядер, удовлетворяющих  $\gamma$ -свойству Фавара, выделяется класс ядер, не повышающих осцилляции.

Примером ядер такого вида может служить ядро

$$K_\beta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mt}{\operatorname{ch} m\beta}.$$

Класс  $W_\infty^{K_\beta}(\mathbb{T}, \emptyset)$  совпадает с классом  $h_{\infty, \beta}$ , являющимся множеством вещественных  $2\pi$ -периодических функций  $f(\cdot)$ , аналитически продолжаемых в полосу  $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \beta\}$  и удовлетворяющих в ней условию  $|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1$ .

Пусть  $P(D)$  — дифференциальный полином с постоянными вещественными коэффициентами степени  $r$

$$P(D) = D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \dots + a_0, \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Через  $h_{\infty, \beta}^P$  обозначим класс вещественных  $2\pi$ -периодических функций  $f(\cdot)$ , аналитически продолжаемых в полосу  $S_\beta$  и удовлетворяющих в ней условию  $|\operatorname{Re}(P(D)f)(z)| \leq 1$ . Тогда  $h_{\infty, \beta}^P = W_\infty^{K_{P, \beta}}(\mathbb{T}, Q)$ , где  $K_{P, \beta}(\cdot) = (K_P * K_\beta)(\cdot)$ ,

$$K_P(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ P(im) \neq 0}} \frac{e^{imt}}{P(im)}, \quad Q = \{m \in \mathbb{Z}_+ : P(im) = 0\}.$$

Положим

$$h_n(t) = \operatorname{sign} \sin nt, \quad \delta = \pi/h(P(\cdot)),$$

где  $h(P(\cdot))$  — максимум мнимой части нулей полинома  $P(\cdot)$ .

**Лемма.** Ядро  $K_{P, \beta}(\cdot)$  при  $n > \max\{\sup_{j \in Q} j, 2\pi/\delta\}$  обладает  $\gamma$ -свойством Фавара для  $\gamma$ , определяемого из условия

$$(K_{P, \beta} * h_n)(\gamma) = -\|(K_{P, \beta} * h_n)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

Эта лемма вместе с теоремой 2 позволяет выписать формулы для оптимального метода восстановления значений функций из классов  $h_{\infty, \beta}^P$  по коэффициентам Фурье.

### 3. Восстановление значений функций на классах Харди.

Пространством Харди  $\mathcal{H}_p(D)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , называется множество аналитических в единичном диске  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  функций  $f(\cdot)$ , для которых

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p(D)} = \begin{cases} \sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Классом Харди назовем следующее множество

$$H_p(D) = \{f(\cdot) \in \mathcal{H}_p(D) \mid \|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p(D)} \leq 1\}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $C = H_p(D)$ ,  $\tau, z_1, \dots, z_n \in D$ ,  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ ,

$$Ff(\cdot) = (f(z_1), \dots, f^{(k_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(k_n-1)}(z_n)).$$

Тогда метод

$$f(\tau) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{k_j-1} \widehat{\mu}_{jk} f^{(k)}(z_j),$$

где

$$\widehat{\mu}_{jk} = \frac{B(\tau)(1-|\tau|^2)^{(p-2)/p}}{k!(k_j-k-1)!} \left( \frac{(1-\bar{z}_j z)^{k_j}}{\omega_j(z)(\tau-z)(1-\bar{\tau}z)^{(p-2)/p}} \right) \Big|_{z=z_j}^{(k_j-k-1)},$$

$$B(z) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z} \right)^{k_j}, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \left( \frac{z-z_m}{1-\bar{z}_m z} \right)^{k_m},$$

является оптимальным на классе  $H_p(D)$  по информации  $Ff(\cdot)$ .

При этом

$$E(f(\tau), H_p(D), F) = \frac{|B(\tau)|}{(1-|\tau|^2)^{1/p}}.$$

**Следствие.** При  $p = \infty$  и

$$Ff(\cdot) = \text{Tay}_n f(\cdot) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0))$$

$$E(f(\tau), H_\infty(D), \text{Tay}_n) = \frac{|\tau|^n}{(1-|\tau|^2)^{1/p}},$$

а оптимальный метод восстановления доставляет формула

$$f(\tau) \approx \sum_{j=0}^{n-1} \tau^j (1-|\tau|^{2(n-j)}) \frac{f^{(j)}(0)}{j!}.$$

Оптимальность приведенных методов иным путем была доказана в работах [2], [3] ( $p = \infty$ ) и [4] ( $1 \leq p < \infty$ ).

**4. Восстановление значений функций на классах Харди–Соболева.** Обозначим через  $W^r H_\infty(D)$  класс Харди–Соболева — множество аналитических в  $D$  функций, для которых  $|f^{(r)}(z)| \leq 1$ ,  $z \in D$ .

**Теорема 4.** Пусть  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $\tau \in D$ . Тогда метод

$$f(\tau) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k + \sum_{k=r}^{n+r-1} \left( 1 - \frac{k!}{(k-r)!} \frac{(2n+r-k)!}{(2n+2r-k)!} |\tau|^{2(n+r-k)} \right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k$$

является оптимальным на классе  $W^r H_\infty(D)$  по информации  $\text{Tay}_{n+r} f(\cdot) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0))$ . При этом

$$E(f(\tau), W^r H_\infty, \text{Tay}_{n+r}) = \frac{n!}{(n+r)!} |\tau|^{n+r}.$$

**5. Восстановление по значениям в равномерной сетке на окружности на классе  $W^1 H_\infty(D)$ .**

**Теорема 5.** Пусть  $0 < \rho < 1$  и  $\tau \in (-1, 1)$ . Тогда метод

$$f(\tau) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\mu}_j f(\rho e^{ij2\pi/n}),$$

где

$$\hat{\mu}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^{n-k} (1 - q_k \alpha^n \rho^{2n}) - p_k \alpha^k \rho^{2k} (1 - \alpha^n)}{1 - q_k \rho^{2n}} e^{ikj2\pi/n},$$

$$\alpha = \frac{\tau}{\rho}, \quad p_k = \frac{n-k}{n+k}, \quad q_k = \frac{k}{2n-k} p_k,$$

является оптимальным на классе  $W^1 H_\infty(D)$  и для его погрешности имеет место равенство

$$E(f(\tau), W^1 H_\infty, F) = \frac{|\tau^n - \rho^n|}{n}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва: Эдиториал УРСС, 2000.
- [2] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12, 4. С. 465–476.
- [3] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19, 1. С. 29–40.
- [4] Fisher, S. D., Micchelli, C. A. The  $n$ -width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. 4. P. 789–801.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

