

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ИХ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К. Ю. Осипенко

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

`kosipenko@yahoo.com`

0.1 Введение

При изучении численных методов мы сталкиваемся с огромным числом алгоритмов. Например, для вычисления интеграла от функции по ее значениям в точках существует множество квадратурных формул. Для интерполяции функции по ее значениям в точках можно тоже применять различные методы: кусочно-линейная интерполяция, интерполяция сплайнами, наконец, можно воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа. Как разобраться в этом множестве методов? Можно ли выбрать в каком-то смысле наилучший метод?

Как правило, при построении численного метода используются те или иные (часто довольно естественные) идеи, а затем исследуется полученный метод: выясняется его сходимость, устойчивость по отношению к неточным исходным данным и т.д. Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все (!) возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной — как же перебрать все методы? Наша цель — показать, что во многих случаях такая постановка позволяет прийти до конкретных методов.

0.2 Постановка задачи оптимального восстановления

Предположим нам надо решить некоторую задачу. Обозначим ее через p . Как правило, у нас есть некоторая исходная информация об этой задаче, которая может быть неполной и неточной. Будем обозначать ее через I_p . Предположим также, что у нас есть некоторый

метод (алгоритм) для решения этой задачи m . Чтобы иметь возможность сравнивать различные методы, мы должны сопоставить каждому методу некоторое число, называемое погрешность решения для данного метода. Будем его обозначать через $e(p, I, m)$.

Обычно мы хотели бы, чтобы данный метод был применим не к одной задаче, а к целому множеству задач P подобного типа. Тогда погрешностью данного метода m на этом множестве естественно назвать величину

$$e(P, I, m) = \sup_{p \in P} e(p, I, m).$$

Если мы хотим найти хороший метод для решения множества задач P , то надо искать его таким, чтобы величина $e(P, I, m)$ была как можно меньше. Пусть M — множество допустимых методов. Тогда метод \hat{m} такой, что

$$e(P, I, \hat{m}) = \inf_{m \in M} e(P, I, m) = E(P, I, M),$$

будет называться оптимальным методом восстановления, а величина $E(P, I, M)$ — погрешностью оптимального восстановления.

Еще один тип задач возникает, когда имеется возможность выбирать тип исходной информации о решаемых задачах. Конечно, при увеличении объема исходной информации следует ожидать более точного решения задач. Однако это ведет к все большим затратам, направленным на получение исходной информации. Поэтому, как правило, фиксируют объем исходной информации (например, число данных измерений) и сравнивают получаемые погрешности при различных типах исходной информации. Тем самым приходят к следующей задаче о нахождении информации оптимального типа

$$E(P, \mathcal{I}, M) = \inf_{I \in \mathcal{I}} E(P, I, M),$$

где \mathcal{I} — множество возможных типов исходной информации.

0.3 Восстановление сигналов по точному спектру

Теперь займемся задачей о восстановлении периодической функции по ее набору коэффициентов Фурье. Ясно, что если эти коэффициенты измеряются с ошибкой, то не нужно брать их слишком много.

Но даже если берется некоторый конечный набор точно измеренных коэффициентов Фурье, оказывается, что они не все нужны. С этого примера, в котором не вся точно измеренная информация является полезной, мы и начнем.

Обозначим через \mathbb{T} единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность 2π -периодических функций $x(\cdot)$ на \mathbb{T} , суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пусть $W_2^1(\mathbb{T})$ — пространство абсолютно непрерывных 2π -периодических функций, для которых $x'(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. Через $W_2^1(\mathbb{T})$ будем обозначать класс функций $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$. Пусть о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ мы располагаем следующей информацией: нам известен конечный набор ее коэффициентов Фурье

$$\begin{aligned} a_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \cos kt dt, & k \in A, \\ b_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \sin kt dt, & k \in B, \end{aligned}$$

где $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, а $B \subset \mathbb{N}$. По этой информации мы хотим найти наилучший способ восстановления в метрике $L_2(\mathbb{T})$ функции $x(\cdot)$ сразу для всех функций $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$.

В это вкладывается следующий смысл. В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения

$$m: \mathbb{R}^N \longrightarrow L_2(\mathbb{T}), \quad N = \text{card } A + \text{card } B$$

($\text{card } M$ — число элементов в множестве M). *Погрешностью* данного метода m называется величина

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})} \|x(\cdot) - m(I_{A,B}x)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $I_{A,B}x = (\{a_k(x)\}_{k \in A}, \{b_k(x)\}_{k \in B})$. Нас интересует величина

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \longrightarrow L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, m),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод \hat{m} , на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т.е. такой метод \hat{m} , что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \hat{m}).$$

Положим

$$k_a = \min_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k, \quad k_b = \min_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k, \quad k_0 = \min\{k_a, k_b\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Если $0 \notin A$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \infty$. Если $0 \in A$, то*

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \frac{1}{k_0}$$

и методы

$$m(I_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \sum_{k \in A_1} a_k \cos kt + \sum_{k \in B_1} b_k \sin kt, \quad (1)$$

являются оптимальными.

Уже здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда оптимальных методов много. Возникает вопрос, какой из оптимальных методов выбрать. Один из естественных способов — выбирать метод, который использует наименьшее количество исходных данных (в нашем случае — коэффициентов Фурье). По этому критерию из множества методов (1) следует выбрать метод

$$\hat{m}(I_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

После выбора данного метода все остальные измеренные коэффициенты Фурье оказываются лишними (они не используются оптимальным методом \hat{m}). Тем не менее, если у нас есть возможность измерить фиксированное число коэффициентов Фурье, какие лучше всего измерять, чтобы погрешность оптимального восстановления была минимальной. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2 При всех $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N-1} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) \\ &= \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

причем нижняя грань достигается для

$$A = \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad B = \{1, \dots, N-1\}.$$

0.4 Восстановление функции по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью

Рассмотрим теперь задачу восстановления функции на том же классе $W_2^1(\mathbb{T})$, когда вместо точных значений коэффициентов Фурье известны их приближенные значения $\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}$ и $\{\tilde{b}_k\}_{k \in B}$ такие, что

$$|a_k(x) - \tilde{a}_k| \leq \delta, \quad k \in A, \quad |b_k(x) - \tilde{b}_k| \leq \delta, \quad k \in B.$$

В этом случае *погрешностью* метода m называется величина

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), y \in l_\infty^N \\ \|I_{A,B}x - y\|_{l_\infty^N} \leq \delta}} \|x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где l_∞^N — векторы $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, $N = \text{card } A + \text{card } B$, с нормой

$$\|y\|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leq j \leq N} |y_j|.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \inf_{m: l_\infty^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta, m),$$

а метод \hat{m} , на котором достигается нижняя грань, будем по-прежнему называть *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$p_0 = \max \left\{ p : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^2 < 1, \quad 0 \leq p \leq k_0 - 1 \right\}.$$

Теорема 3 Если $0 \notin A$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \infty$. Если $0 \in A$, то

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \frac{1}{p_0 + 1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}(p_0 + 1)(8p_0^2 + 13p_0 + 3)},$$

а метод

$$\widehat{m}((\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B}))(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} \left(1 - \frac{k^2}{(p_0 + 1)^2}\right) (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$$

является оптимальным.

Здесь в оптимальном методе пришлось отбрасывать часть исходной информации и сглаживать оставшиеся данные — умножать их на величины

$$1 - \frac{k^2}{(p_0 + 1)^2},$$

которые убывают с ростом k , т.е. чем больше частота, тем сильнее соответствующую гармонику надо сглаживать.

Но, может быть, можно было обойтись и без этого, воспользовавшись “естественным” методом

$$m((\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B}))(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k \in A} \tilde{a}_k \cos kt + \sum_{k \in B} \tilde{b}_k \sin kt?$$

У этого метода на функции $p^{-1} \cos pt \in W_2^1(\mathbb{T})$ при

$$p \geq \max_{k \in A \cup B} k$$

и $\tilde{a}_k = \delta$, $k \in A$, $\tilde{b}_k = \delta$, $k \in B$, квадрат погрешности равен величине

$$\frac{\delta^2}{2} + \delta^2(\text{card } A + \text{card } B) + \frac{1}{p^2},$$

которая неограниченно возрастает при увеличении исходных данных.

Если отбросить лишние данные, но не сглаживать оставшиеся, т.е. воспользоваться методом

$$m_0((\{\tilde{a}_k\}_{k \in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k \in B}))(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt),$$

то квадрат погрешности такого метода на функции

$$\frac{1}{(p_0 + 1)} \cos(p_0 + 1)t \in W_2^1(\mathbb{T})$$

при $\tilde{a}_k = \delta$, $k = 0, 1, \dots, p_0$, $\tilde{b}_k = \delta$, $k = 1, \dots, p_0$, $\tilde{a}_k = \tilde{b}_k = 0$, $k > p_0$, равен величине

$$\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{1}{(p_0 + 1)^2},$$

что больше величины

$$\|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{1 - 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0} k^2}{(p_0 + 1)^2}.$$

Тем самым метод m_0 не является оптимальным.

Положим

$$N_\delta = \max \left\{ p : 2\delta^2 \sum_{k=0}^p k^2 < 1, p \geq 0 \right\}.$$

Аналогом теоремы 2 является

Теорема 4 При всех $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N-1} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) \\ &= \inf_{\text{card } A + \text{card } B \leq 2N} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) \\ &= \frac{1}{\hat{N}_\delta + 1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6} (\hat{N}_\delta + 1)(8\hat{N}_\delta^2 + 13\hat{N}_\delta + 3)}, \end{aligned}$$

где $\hat{N}_\delta = \min\{N_\delta, N - 1\}$, причем нижняя грань достигается для

$$A = \{0, 1, \dots, \hat{N}_\delta\}, \quad B = \{1, \dots, \hat{N}_\delta\}.$$

Ряд общих результатов о восстановлении функций и их производных по неточно заданному спектру можно найти в работах [1] и [2] (см. также обзорную статью [3]).

Литература

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193:3** (2002), 79–100.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление операторов по неточной информации. Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. “Исследования по выпуклому анализу”, Владикавказ, 2009, с. 158–192.