Точные неравенства для производных и преобразования Фурье

Осипенко К. Ю.[1]

[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* kosipenko@yahoo.com

Под неравенствами для производных колмогоровского типа на прямой традиционно понимают неравенства вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$. При этом считается, что функции $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R})$, имеют $(n-1)$-ую производную, локально абсолютно непрерывную на $\mathbb{R}$, и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(\mathbb{R})$. Неравенства (1) с наименьшей константой K называются точными. В 1939 году Колмогоровым были найдены точные константы в (1) при $p = q = r = \infty$ в общем случае, т.е. при любых $n \geqslant 2$ и $0 < k < n$. Этот результат является наиболее ярким в данной проблематике, поэтому точные неравенства вида (1) часто называют неравенствами типа Колмогорова.

Точным неравенствам для производных посвящено довольно много работ, но результаты, аналогичные по своей завершенности колмогоровскому, получены на прямой лишь еще в трех случаях ($p = q = r = 2$ — Харди–Литтлвуд–Полиа (1934), $p = q = r = 1$ — Стейн (1957), $p = r = 2$, $q = \infty$ — Тайков (1968)).

В работе [1], занимаясь задачей об оптимальном восстановлении производных по неточно заданному преобразованию Фурье, авторы доказали, что при всех $2 < p \leqslant \infty$ и всех $0 \leqslant k < n$ имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant K\|Fx(\cdot)\|^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}}_{L_p(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\frac{k+1/2-1/p}{n+1/2-1/p}}_{L_2(\mathbb{R})},$$

где

$$K = \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\left(\frac{\sqrt{k+1/2-1/p}B^{1/2-1/p}}{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-1/p}}\right)^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}},$$

$$B = B\left(\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}, 2\frac{1-1/p}{1-2/p}\right),$$

$B(\cdot,\cdot)$ — B-функция Эйлера, а $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$.

В связи с получением этого точного неравенства возник вопрос о нахождении точных неравенств вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant K\|Fx(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

В докладе приводятся результаты относительно точных неравенств вида (2) и их обобщений на многомерный случай. В частности приведен следующий результат из работы [2].

Определим оператор $(-\Delta)^{n/2}$, $n \geqslant 0$ (n — не обязательно целое), следующим образом

$$(-\Delta)^{n/2}x(\cdot) = F^{-1}(|\xi|^n Fx(\xi))(\cdot), \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2}.$$

Положим

$$\gamma = \frac{n - k - d/2}{n + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widetilde{q} = \frac{1}{1/2 + \gamma(1/2 - 1/p)}, \quad I_0 = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \geqslant 0$, $k + p > 1$, а $n > k + d/2$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{k/2}x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant K_p(k, n, I_0)\|Fx(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\|(-\Delta)^{n/2}x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$K_p(k, n, I) = \frac{\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{2}}}{(2\pi)^{d\frac{2n-k-d/p}{2n+d(1-2/p)}}}\left(\frac{B\left(\widetilde{q}\gamma/2 + 1, \widetilde{q}(1-\gamma)/2\right) I}{2(n - k - d/2)}\right)^{1/\widetilde{q}}.$$

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
2. *Osipenko K. Yu.* Inequalities for derivatives with the Fourier transform // Appl. Comp. Harm. Anal.—2021.—V. 53.—P. 132–150.