

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НА КЛАССАХ, ЗАДАВАЕМЫХ ОПЕРАТОРАМИ, НЕ УВЕЛИЧИВАЮЩИМИ ОСЦИЛЛЯЦИИ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе предложен единый подход к задачам вычисления точных значений n -поперечников в равномерной метрике для классов периодических функций, задаваемых операторами (не обязательно линейными), обладающими определенными осцилляционными свойствами. Этот подход позволяет получать точные результаты об n -поперечниках как для классов функций, представимых в виде свертки с ядром, не увеличивающим осцилляции, так и для некоторых классов аналитических функций, которые не представляются в виде такой свертки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие экстремальные задачи теории приближений на классах гладких периодических функций удается решить с помощью исследования осцилляционных свойств функций из этих классов. Подход, основанный на таких исследованиях, привел к изучению классов функций, представимых в виде свертки с ядрами, не повышающими осцилляции. Для таких классов были получены довольно общие результаты, касающиеся оптимального восстановления, оптимальных квадратурных формул, n -поперечников, неравенств Колмогорова и ряд других (см. [1]–[3]).

Однако некоторые классы аналитических функций не удается представить в виде свертки с ядрами, не увеличивающими осцилляции. Тем не менее, на этих классах имеются результаты весьма близкие к гладкому случаю (см. [4]–[6]). В данной работе для задачи вычисления точных значений n -поперечников предлагается единый подход, обслуживающий как гладкий, так и аналитический случаи, основанный на введении специального класса операторов (вообще говоря, нелинейных), обладающих свойством неувеличения осцилляции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №96-01-00325).

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Напомним определения некоторых из n -поперечников. Пусть A — подмножество линейного нормированного пространства X . *Колмогоровским n -поперечником* называется величина

$$d_n(A, X) := \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|,$$

где X_n — произвольные n -мерные подпространства X .

Линейным n -поперечником называется величина

$$\lambda_n(A, X) := \inf_Y \inf_{P_n} \sup_{x \in A} \|x - P_n x\|,$$

где Y — всевозможные линейные нормированные пространства, содержащие A , а P_n — линейные ограниченные операторы, отображающие Y в X , ранг которых не превосходит n .

Гельфандовский n -поперечник определяется следующим образом:

$$d^n(A, X) := \inf_Y \inf_{Y^n} \sup_{x \in A \cap Y^n} \|x\|,$$

где Y имеет тот же смысл, что и в определении линейного n -поперечника, а Y^n — всевозможные подпространства Y коразмерности n (здесь предполагается, что $0 \in A$).

Информационным n -поперечником множества A назовем величину

$$(1) \quad i_n(A, X) := \inf_{\substack{Y \supset A \\ l_1, \dots, l_n \in Y^*}} \inf_{S: \mathbb{R}^n \rightarrow X} \sup_{x \in A} \|x - S(l_1 x, \dots, l_n x)\|_X,$$

где по-прежнему Y — всевозможные линейные нормированные пространства, содержащие A . Линейные функционалы, на которых достигается нижняя грань в (1) будем называть оптимальными функционалами для соответствующего информационного поперечника.

Лемма 1. Пусть A — центрально-симметричное множество, содержащее нуль. Тогда

$$(2) \quad d^n(A, X) \leq i_n(A, X) \leq \lambda_n(A, X).$$

Доказательство. Неравенство

$$i_n(A, X) \leq \lambda_n(A, X)$$

непосредственно следует из определений информационного и линейного поперечников. Докажем оценку снизу. Пусть $Y \supset A$ и $l_1, \dots, l_n \in Y^*$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x_\varepsilon \in A$, для которого $l_1 x_\varepsilon = \dots = l_n x_\varepsilon = 0$ и

$$\sup_{\substack{x \in A \\ l_1 x = \dots = l_n x = 0}} \|x\|_X \leq \|x_\varepsilon\|_X + \varepsilon.$$

Для всех S имеем

$$\|x_\varepsilon - S(0, \dots, 0)\|_X + \|-x_\varepsilon - S(0, \dots, 0)\|_X \geq 2\|x_\varepsilon\|_X.$$

Поэтому

$$\sup_{x \in A} \|x - S(l_1 x, \dots, l_n x)\|_X \geq \|x_\varepsilon\|_X \geq \sup_{\substack{x \in A \\ l_1 x = \dots = l_n x = 0}} \|x\|_X - \varepsilon \geq d^n(A, X) - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности l_1, \dots, l_n, S и $\varepsilon > 0$ получаем

$$i_n(A, X) \geq d^n(A, X).$$

□

Через L_p , $1 \leq p \leq \infty$, обозначим пространство вещественных 2π -периодических функций, для которых

$$\|x\|_p := \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^p dt < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty := \operatorname{vrai\,sup}_{t \in \mathbb{T}} |x(t)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Положим

$$BL_\infty := \{x \in L_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

Обозначим через \mathcal{F} множество операторов $F: BL_\infty \rightarrow L_\infty$ (вообще говоря, нелинейных), для которых

- (1) при всех $x \in BL_\infty$ $F(-x) = -Fx$;
- (2) при всех $\alpha \in \mathbb{T}$ $P_\alpha \circ F = F \circ P_\alpha$, где $(P_\alpha x)(\cdot) = x(\cdot + \alpha)$;
- (3) F непрерывен как оператор, действующий из подмножества BL_∞ пространства L_1 в L_1 (т. е. $\|Fx_m - Fx\|_1 \rightarrow 0$ при $\|x_m - x\|_1 \rightarrow 0$).

Для конечного, симметричного относительно нуля множества $M \subset \mathbb{Z}$ обозначим через \mathcal{T}_M множество вещественных тригонометрических полиномов из $\operatorname{span}\{e^{ikt}\}_{k \in M}$, $\mathcal{T}_\emptyset := \{0\}$. Пусть $G \in \mathcal{F}$. Через $CVD(M_0, M, G)$ будем обозначать множество операторов $F \in \mathcal{F}$, для которых выполнены следующие условия:

- (1) если x_1, x_2 различные функции из BL_∞ такие, что $Gx_1 \perp \mathcal{T}_M$, $Gx_2 \perp \mathcal{T}_M$, а $p \in \mathcal{T}_{M_0}$, то

$$S(p + Fx_1 - Fx_2) \leq S(x_1 - x_2),$$

где $S(f)$ — число перемен знака 2π -периодической функции f на периоде;

- (2) при всех $0 < \rho < 1$ и всех $x \in BL_\infty$ таких, что $\|x\|_\infty \leq 1$ и $Gx \perp \mathcal{T}_M$, существует функция $x_\rho \in BL_\infty$ такая, что $\|x_\rho\|_\infty < 1$, $Gx_\rho \perp \mathcal{T}_M$ и $\rho Fx = Fx_\rho$.
- (3) множество $\{Fx \mid x \in BL_\infty, Gx \perp \mathcal{T}_M\}$ — выпукло.
- (4) если $x \in BL_\infty$ и $Gx \perp \mathcal{T}_M$, то $Fx \perp \mathcal{T}_M$.

Последнее условие выполнено, например, если G — тождественный оператор, а F — оператор свертки, или если $G = F$. Эти два случая являются основными в рассматриваемых ниже примерах.

Для функции $f \in C(\mathbb{T})$ через $\text{dist } f$ обозначим максимальную длину подинтервала \mathbb{T} , на котором функция f не имеет нулей. Положим

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s) ds.$$

Обозначим через $\mathcal{K}(M, \delta)$ класс ядер $\Omega \in L_1$, для которых при всех $x \in BL_\infty$ и $p \in \mathcal{T}_M$ таких, что $x \perp \mathcal{T}_M$, а $\text{dist}(p + \Omega * x) < \delta$, выполнено неравенство

$$S(p + \Omega * x) \leq S(x),$$

причем, если $\Omega * x \in C^2(\mathbb{T})$, то

$$Z_2(p + \Omega * x) \leq S(x),$$

где Z_2 — число нулей функции, когда кратные нули считаются дважды, а интервалы, на которых функция тождественно равна нулю, отбрасываются. Будем также предполагать, что $c_j(\Omega) \neq 0$, $j \notin M$, где

$$c_j(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ijt} dt, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Предположим, что

$$(3) \quad \Omega_j \in \mathcal{K}(M_j, \delta_j), \quad j = 1, \dots, k,$$

$$F \in CVD(M_0, M, G), \quad M = \bigcup_{j=0}^k M_j.$$

Нас будут интересовать точные значения n -поперечников для классов

$$\mathcal{F}_\infty := \mathcal{F}_\infty(\Phi, M) := \{p + \Phi x \mid p \in \mathcal{T}_M, x \in BL_\infty, Gx \perp \mathcal{T}_M\},$$

где $\Phi x = \Omega_k * \dots * \Omega_1 * Fx$.

3. ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НА КЛАССАХ \mathcal{F}_∞

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и

$$\Theta_n := \{\theta \mid \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), 0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n < 2\pi\}.$$

Для $\eta \in \Theta_{2n}$ положим

$$h_\eta(t) := (-1)^j, \quad t \in [\eta_{j-1}, \eta_j), \quad j = 1, \dots, 2n+1,$$

где $\eta_0 := 0$, $\eta_{2n+1} := 2\pi$. Через $h_n(t)$ обозначим функцию $h_\eta(t)$, когда $\eta_j = (j-1)\pi/n$, $j = 1, \dots, 2n$.

Будем предполагать выполненными условия (3). Положим

$$\delta := \min_{1 \leq j \leq k} \delta_j, \quad m := \begin{cases} \sup\{j \mid j \in M\} & M \neq \emptyset, \\ -1, & M = \emptyset. \end{cases}$$

Лемма 2. Для всех $n > \max\{m, 2\pi/\delta\}$ имеет место равенство

$$\inf_{\substack{p \in \mathcal{T}_M \\ \eta \in \Theta_{2n}, Gh_\eta \perp \mathcal{T}_M}} \|p + \Phi h_\eta\|_\infty = \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} G_\sigma(t) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(t - 2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\sigma^2/2} \cos jt, \quad \sigma > 0. \end{aligned}$$

Хорошо известны следующие свойства ядра G_σ (см. [7]): при всех $f \in L_\infty$ $G_\sigma * f$ — аналитические функции и, кроме того,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \|G_\sigma * f\|_\infty = \|f\|_\infty, \quad Z(G_\sigma * f) \leq S(f),$$

где $Z(g)$ — число нулей функции g с учетом кратности. Предположим, что существуют $p \in \mathcal{T}_M$ и $\eta \in \Theta_{2n}$, для которых $Gh_\eta \perp \mathcal{T}_M$ и

$$\|p + \Phi h_\eta\|_\infty < \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Тогда при достаточно малых σ

$$\|p_\sigma + \Phi_\sigma h_\eta\|_\infty < \|\Phi_\sigma h_n\|_\infty,$$

где $p_\sigma = G_\sigma * p \in \mathcal{T}_M$, $\Phi_\sigma x = G_\sigma * \Phi x$. В силу свойств свертки и оператора F имеем

$$(4) \quad P_{\pi/n}(\Phi_\sigma h_n) = \Phi_\sigma(P_{\pi/n} h_n) = \Phi_\sigma(-h_n) = -\Phi_\sigma h_n.$$

Отсюда следует существование точек $0 \leq t_1 < \dots < t_{2n} < 2\pi$ таких, что

$$(5) \quad (\Phi_\sigma h_n)(t_j) = \varepsilon(-1)^j \|\Phi_\sigma h_n\|_\infty, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

где $\varepsilon = 1$ или -1 . Тем самым для любого $\alpha \in \mathbb{T}$

$$(6) \quad 2n \leq S(P_\alpha(\Phi_\sigma h_n) - p_\sigma - \Phi_\sigma h_\eta) = S(\Phi_\sigma(P_\alpha h_n) - p_\sigma - \Phi_\sigma h_\eta).$$

Если при каком-либо α $h_\eta = P_\alpha h_n$, то

$$2n \leq S(P_\alpha(\Phi_\sigma h_n) - p_\sigma - \Phi_\sigma h_\eta) = S(p) \leq 2m < 2n.$$

Тем самым для всех α $P_\alpha h_n \neq h_\eta$.

Из того, что $c_s(\Omega_j) \neq 0$, $s \notin M_j$, следует существование тригонометрических полиномов $p_j \in \mathcal{T}_{M_j}$, $j = 0, \dots, k$, для которых

$$p_\sigma + \Phi_\sigma h_\eta = p_k + \Omega_k * (p_{k-1} + \dots + \Omega_1 * G_\sigma * (p_0 + Fh_\eta) \dots).$$

Положим

$$\begin{aligned} f_j &:= p_j + \Omega_j * (p_{j-1} + \dots + \Omega_1 * G_\sigma * (p_0 + Fh_\eta) \dots), \quad j = 1, \dots, k, \\ g_j &:= \Omega_j * \dots * \Omega_1 * G_\sigma * Fh_\eta, \quad j = 1, \dots, k, \\ f_0 &:= G_\sigma * (p_0 + Fh_\eta), \quad g_0 := G_\sigma * Fh_\eta, \\ \mu_j &:= \frac{\|f_j\|_\infty}{\|g_j\|_\infty}, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \mu := \max_{0 \leq j \leq k-1} \mu_j. \end{aligned}$$

Докажем, что $\mu_0 \geq 1$. Предположим противное. Тогда аналогично предыдущим рассуждениям (см. (4)–(6)) можно показать, что при всех $\alpha \in \mathbb{T}$

$$S(P_\alpha g_0 - f_0) \geq 2n.$$

Выбрав $\alpha = -\eta_1$, имеем

$$\begin{aligned} 2n \leq S(G_\sigma * F(P_\alpha h_n) - G_\sigma * (p_0 + Fh_\eta)) &\leq S(F(P_\alpha h_n) - p_0 - Fh_\eta) \\ &\leq S(h_n(\cdot + \alpha) - h_\eta(\cdot)) \leq 2(n-1). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что $\mu \geq 1$. Пусть $\mu = \mu_s$, $0 \leq s \leq k-1$. Выберем $\alpha \in \mathbb{T}$ так, чтобы разность

$$P_\alpha g_s - \mu_s^{-1} f_s$$

имела кратный нуль. Аналогично равенствам (4) получаем

$$(7) \quad P_{\pi/n} g_j = -g_j.$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{dist}(P_\alpha g_j - \mu_s^{-1} f_j) \leq \frac{2\pi}{n} < \delta.$$

Следовательно, в силу свойств ядер Ω_j при $s > 0$ имеем

$$\begin{aligned} (8) \quad 2n \leq S(P_\alpha g_k - \mu_s^{-1} f_k) &\leq \dots \leq S(P_\alpha g_s - \mu_s^{-1} f_s) < Z_2(P_\alpha g_s - \mu_s^{-1} f_s) \\ &\leq S(P_\alpha g_{s-1} - \mu_s^{-1} f_{s-1}) \leq \dots \leq S(P_\alpha g_0 - \mu_s^{-1} f_0) \\ &\leq S(F(P_\alpha h_n) - \mu_s^{-1}(p_0 + Fh_\eta)). \end{aligned}$$

Если $\mu_s > 1$, то по свойству 2) операторов из множества $CVD(M_0, M, G)$ найдется функция $h^* \in BL_\infty$ такая, что $\|h^*\|_\infty < 1$, $Gh^* \perp \mathcal{T}_M$ и $\mu_s^{-1} Fh_\eta = Fh^*$. При $\mu_s = 1$ положим $h^* = h_\eta$. Таким образом,

$$S(F(P_\alpha h_n) - \mu_s^{-1}(p_0 + Fh_\eta)) \leq S(h_n(\cdot + \alpha) - h^*(\cdot)) \leq 2n,$$

что противоречит (8). Если $s = 0$, то неравенства (8) заменяются на следующие

$$\begin{aligned} 2n \leq S(P_\alpha g_k - \mu_0^{-1} f_k) &\leq \dots \leq S(P_\alpha g_0 - \mu_0^{-1} f_0) < Z_2(P_\alpha g_0 - \mu_0^{-1} f_0) \\ &\leq S(F(P_\alpha h_n) - \mu_s^{-1}(p_0 + Fh_\eta)). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

$$\|p + \Phi h_\eta\|_\infty \geq \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Из равенства

$$P_{\pi/n} G h_n = -G h_n$$

вытекает, что $G h_n - 2\pi/n$ -периодическая функция. Поэтому $G h_n \perp \mathcal{T}_M$. \square

Положим $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_{[-n,n] \cap \mathbb{Z}}$

$$a_j(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos jt \, dt, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$b_j(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin jt \, dt, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$I_{2n-1}(f) := (a_0(f), a_1(f), b_1(f), \dots, a_{n-1}(f), b_{n-1}(f)).$$

В дальнейшем будем предполагать, что при $k = 0$ $F(BL_\infty) \subset C(\mathbb{T})$ и, кроме того, оператор F непрерывен как оператор, действующий из подмножества BL_∞ пространства L_1 в $C(\mathbb{T})$ (т. е. $\|F x_m - F x\|_\infty \rightarrow 0$ при $\|x_m - x\|_1 \rightarrow 0$).

Лемма 3. *При всех $n > \max\{m, 2\pi/\delta\}$ существует линейный оператор $\mathcal{L}: \mathbb{T}^{2n-1} \rightarrow \mathcal{T}_{n-1}$, для которого*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_\infty} \|f - \mathcal{L}(I_{2n-1}(f))\|_\infty = \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$(9) \quad \sup_{\substack{f \in \mathcal{F}_\infty \\ I_{2n-1}(f)=0}} \|f\|_\infty = \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Предположим, что найдется функция $f \in \mathcal{F}_\infty$, для которой $I_{2n-1}(f) = 0$ и $\|f\|_\infty > \|\Phi h_n\|_\infty$. Пусть $f = \Phi x$, $x \in BL_\infty$. Тогда при достаточно малых σ $\|\Phi_\sigma x\|_\infty > \|\Phi_\sigma h_n\|_\infty$. Оставив за g_j те же обозначения, что и в лемме 2, положим

$$f_j := \Omega_j * \dots * \Omega_1 * G_\sigma * F x, \quad j = 1, \dots, k, \quad f_0 := G_\sigma * F x,$$

$$\nu_j := \frac{\|f_j\|_\infty}{\|g_j\|_\infty}, \quad j = 0, \dots, k, \quad \nu := \max_{0 \leq j \leq k} \nu_j.$$

Пусть $\nu = \nu_s$, $0 \leq s \leq k$. В силу наших предположений $\nu_s > 1$. Выберем $\alpha \in \mathbb{T}$ так, чтобы разность

$$P_\alpha g_s - \nu_s^{-1} f_s$$

имела кратный нуль. Из равенств (7) вытекает, что функции g_j имеют период $2\pi/n$. Следовательно, $I_{2n-1}(g_j) = 0$. Тем самым

$$I_{2n-1}(P_\alpha g_s - \nu_s^{-1} f_s) = 0.$$

Так как тригонометрическая система является чебышевской, то отсюда следует (см. [1, стр. 41]), что

$$S(P_\alpha g_s - \nu_s^{-1} f_s) \geq 2n.$$

В силу того, что $\text{dist}(P_\alpha g_s - \nu_s^{-1} f_s) \leq 2\pi/n < \delta$ имеем

$$\begin{aligned} 2n &\leq S(P_\alpha g_s - \nu_s^{-1} f_s) < Z_2(P_\alpha g_s - \nu_s^{-1} f_s) \leq S(P_\alpha g_{s-1} - \nu_s^{-1} f_{s-1}) \\ &\leq \dots \leq S(P_\alpha g_0 - \nu_s^{-1} f_0) \leq S(F(P_\alpha h_n) - \nu_s^{-1} Fx) \\ &\leq S(h_n(\cdot + \alpha) - x^*(\cdot)) = 2n, \end{aligned}$$

где x^* определяется равенством $\nu_s^{-1} Fx = Fx^*$, $\|x^*\|_\infty < 1$, $Gx^* \perp \mathcal{T}_M$. Полученное противоречие доказывает равенство (9).

Рассмотрим теперь задачу об оптимальном восстановлении значения $f(0)$ на классе \mathcal{F}_∞ по информации $I_{2n-1}(f)$. Из общих результатов, касающихся задач восстановления вытекает существование линейного оптимального метода восстановления, то есть таких чисел $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$, что

$$(10) \quad \sup_{f \in \mathcal{F}_\infty} |f(0) - \alpha_0 a_0(f) - \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j a_j(f) + \beta_j b_j(f))| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{F}_\infty \\ I_{2n-1}(f)=0}} \|f\|_\infty = \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Пусть g — произвольная функция из \mathcal{F}_∞ . Для $t \in \mathbb{T}$ положим $f_t(\tau) := g(t + \tau)$. Так как $f_t \in \mathcal{F}_\infty$, $a_0(f_t) = a_0(g)$ и

$$\begin{aligned} a_j(f_t) &= a_j(g) \cos jt + b_j(g) \sin jt, \\ b_j(f_t) &= -a_j(g) \sin jt + b_j(g) \cos jt, \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots,$$

то, положив

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I_{2n-1}(g)) &:= \alpha_0 a_0(g) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \left((\alpha_j \cos jt - \beta_j \sin jt) a_j(g) + (\alpha_j \sin jt + \beta_j \cos jt) b_j(g) \right), \end{aligned}$$

из (10) при $\tau = 0$ будем иметь

$$|g(t) - \mathcal{L}(I_{2n-1}(g))| \leq \|\Phi h_n\|_\infty.$$

В силу произвольности $t \in \mathbb{T}$ получаем

$$\|g - \mathcal{L}(I_{2n-1}(g))\|_\infty \leq \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Так как для $g = \Phi h_n$ последнее неравенство обращается в равенство, то утверждение леммы доказано. \square

Теперь докажем основной результат работы.

Теорема 1. При всех $n > \max\{m, 2\pi/\delta\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} d_{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) &= \lambda_{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) = d^{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) = i_{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) \\ &= d_{2n-1}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) = \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) = d^{2n-1}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) \\ &= i_{2n-1}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) = \|\Phi h_n\|_\infty. \end{aligned}$$

При этом коэффициенты Фурье $a_0(f), a_1(f), b_1(f), \dots, a_{n-1}(f), b_{n-1}(f)$ являются оптимальными функционалами для величин i_{2n-1} и i_{2n} .

Доказательство. Докажем сначала оценку снизу для колмогоровского и гельфандовского $2n$ -поперечников. Положим

$$S^{2n} := \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \sum_{s=1}^{2n+1} |\xi_s| = 2\pi \right\},$$

$$\tau_0(\xi) := 0, \quad \tau_j(\xi) := \sum_{s=1}^j |\xi_s|, \quad j = 1, \dots, 2n+1.$$

Для $\xi \in S^{2n}$ определим функции

$$g_\xi(t) := \text{sign } \xi_j, \quad \tau_{j-1}(\xi) \leq t < \tau_j(\xi), \quad j = 1, \dots, 2n+1, \quad f_\xi := \Phi g_\xi.$$

Пусть X_{2n} — произвольное $2n$ -мерное подпространство L_q , $1 < q < \infty$. Предположим, что $X_{2n} = \text{span}\{f_1, \dots, f_{2n}\}$ и

$$f_\xi^* := \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j(\xi) f_j$$

— элемент наилучшего приближения f_ξ подпространством X_{2n} . Положим

$$E(\mathcal{F}_\infty, X_{2n}) := \sup_{f \in \mathcal{F}_\infty} \inf_{g \in X_{2n}} \|f - g\|_q.$$

Если $\mathcal{T}_M \not\subset X_{2n}$, то $E(\mathcal{F}_\infty, X_{2n}) = \infty$. Будем считать, что $\mathcal{T}_M \subset X_{2n}$, $\dim \mathcal{T}_M = r$ и $\{f_j\}_{j=1}^r$ — базис \mathcal{T}_M . Положим $I_M(f) := \{a_j(f), b_j(f)\}_{j \in M \cap \mathbb{Z}_+}$. Рассмотрим отображение

$$\alpha(\xi) := (I_M(Gg_\xi), \alpha_{r+1}(\xi), \dots, \alpha_{2n}(\xi)).$$

Отображение $\alpha: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — непрерывное и нечетное. Поэтому по теореме Борсука существует $\xi^* \in S^{2n}$, для которого $\alpha(\xi^*) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} E(\mathcal{F}_\infty, X_{2n}) &\geq \inf_{g \in X_{2n}} \|f_{\xi^*} - g\|_q = \|\Phi g_{\xi^*} - \sum_{j=1}^r \alpha_j(\xi^*) f_j\|_q \\ &\geq \inf_{\substack{p \in \mathcal{T}_M \\ \eta \in \Theta_{2n}, Gh_\eta \perp \mathcal{T}_M}} \|p + \Phi h_\eta\|_q. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d_{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_q) \geq \inf_{\substack{p \in \mathcal{T}_M \\ \eta \in \Theta_{2n}, Gh_\eta \perp \mathcal{T}_M}} \|p + \Phi h_\eta\|_q.$$

Переходя к пределу при $q \rightarrow \infty$ и пользуясь леммой 2, будем иметь

$$d_{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) \geq \inf_{\substack{p \in \mathcal{T}_M \\ \eta \in \Theta_{2n}, Gh_\eta \perp \mathcal{T}_M}} \|p + \Phi h_\eta\|_\infty = \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Получим теперь оценку снизу для гельфандовских $2n$ -поперечников. Пусть Y — некоторое линейное нормированное пространство, содержащее F_∞ , и

$$X^{2n} = \{f \in Y \mid \langle l_j, f \rangle = 0, j = 1, \dots, 2n, l_j \in Y^*\}.$$

Рассмотрим отображение $J: \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, задаваемое равенством

$$Jp = (l_1 p, \dots, l_{2n} p).$$

Если $\text{Ker } J \neq 0$, то

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_\infty \cap X^{2n}} \|f\|_\infty = \infty.$$

Если же $\text{Ker } J = 0$, то среди функционалов l_1, \dots, l_{2n} существуют r линейно независимых на \mathcal{T}_M . Будем считать, что таковыми являются l_1, \dots, l_r . Тогда остальные функционалы на \mathcal{T}_M могут быть представлены в виде

$$\langle l_j, p \rangle = \sum_{s=1}^r c_{js} \langle l_s, p \rangle, \quad j = r+1, \dots, 2n.$$

Положим

$$L_j := l_j - \sum_{s=1}^r c_{js} l_s, \quad j = r+1, \dots, 2n,$$

и рассмотрим отображение

$$\alpha(\xi) := (I_M(Gf_\xi), \langle L_{r+1}, f_\xi \rangle, \dots, \langle L_{2n}, f_\xi \rangle).$$

По теореме Борсука существует $\xi^* \in S^{2n}$, для которого $\alpha(\xi^*) = 0$. Так как $\text{Ker } J = 0$, то найдется тригонометрический полином $p^* \in \mathcal{T}_M$ такой, что

$$\langle l_s, p^* \rangle = -\langle l_s, f_{\xi^*} \rangle, \quad s = 1, \dots, r.$$

Для $r+1 \leq j \leq 2n$ имеем

$$\langle l_j, p^* + f_{\xi^*} \rangle = \left\langle L_j + \sum_{s=1}^r c_{js} l_s, p^* + f_{\xi^*} \right\rangle = \sum_{s=1}^r c_{js} \langle l_s, p^* + f_{\xi^*} \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$p^* + f_{\xi^*} \in X^{2n}.$$

Тем самым

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_\infty \cap X^{2n}} \|f\|_\infty \geq \|p^* + f_{\xi^*}\|_\infty \geq \inf_{\substack{p \in \mathcal{T}_M \\ \eta \in \Theta_{2n}, Gh_\eta \perp \mathcal{T}_M}} \|p + \Phi h_\eta\|_\infty = \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Отсюда

$$d^{2n}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty) \geq \|\Phi h_n\|_\infty.$$

Из неравенств (2) и монотонности поперечников следует, что остается оценить сверху $\lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_\infty, L_\infty)$. Эта оценка вытекает из леммы 3. \square

4. ПРИМЕРЫ КЛАССОВ \mathcal{F}_∞

Для $\Omega \in L_1$ положим

$$W_M(\Omega) := \{f : f = p + \Omega * x, p \in \mathcal{T}_M, x \in BL_\infty, x \perp \mathcal{T}_M\}.$$

Назовем функцию $\Omega \in L_1$ *ядром, не увеличивающим осцилляций*, если при всех $x \in L_\infty$ таких, что $x \perp \mathcal{T}_M$, $x \neq 0$, и при всех $p \in \mathcal{T}_M$ имеет место неравенство

$$S(p + \Omega * x) \leq S(x).$$

Очевидно, что оператор $Fx = \Omega * x$ принадлежит классу $CVD(M, M, Id)$ (Id — тождественный оператор). Следовательно,

$$W_M(\Omega) = \mathcal{F}_\infty(\Phi, M),$$

где $\Phi x = Fx$ ($k = 0$, $G = Id$).

При $M = \emptyset$ ядра, не увеличивающие осцилляции называются *функциями плотности, не увеличивающими осцилляции* или *CVD-ядрами* (cyclic variation diminishing kernels). Для классов функций, представимых в виде свертки с ядрами такого типа, теорема 1 доказана А. Пинкусом [1, стр. 179].

Пусть $Q(D)$ — дифференциальный полином с постоянными вещественными коэффициентами

$$Q(D) = D^{\deg Q} + \sum_{m=0}^{\deg Q-1} a_m D^m, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Положим

$$\Omega_Q(t) := \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ Q(im) \neq 0}} \frac{e^{imt}}{Q(im)}.$$

Пусть

$$M = \{m \in \mathbb{Z} : Q_j(im) = 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_M(\Omega_Q) &= W_\infty^Q \\ &:= \{f : f^{(\deg Q-1)} \text{ — абс. непрерывна, } \|Q(D)f\|_\infty \leq 1\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $h(Q)$ максимум мнимой части нулей полинома Q . Из работ [8] и [3] вытекает, что при $h(Q) \leq 1/2$ ядро Ω_Q не увеличивает осцилляции (при этом $M = \emptyset$, если $Q(0) = 0$, и $M = \{0\}$, если $Q(0) \neq 0$). Таким образом, при $h(Q) \leq 1/2$ теорема 1 справедлива для класса W_∞^Q .

Если $Q(D) = D^r$, то класс W_∞^Q совпадает с классом Соболева W_∞^r , для которого точные значения изучаемых поперечников были найдены В. М. Тихомировым [9].

Существуют полиномы Q , нули которых находятся сколь угодно далеко от вещественной оси, а соответствующие им ядра Ω_Q являются ядрами, не повышающими осцилляции. Например, ядро Ω_Q для

$$(11) \quad Q(D) = D(D^2 + 1^2) \dots (D^2 + m^2)$$

является ядром, не повышающим осцилляции с $M = \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}$ (см. [10]).

В общем случае полином $Q(D)$ может быть представлен в виде

$$(12) \quad Q(D) = \prod_{j=1}^k Q_j(D),$$

где $Q_j(D)$ — дифференциальные полиномы с вещественными коэффициентами такие, что $\deg Q_j \leq 2$. Из работы [3] следует, что $\Omega_{Q_j} \in \mathcal{K}(M_j, \delta_j)$, где

$$(13) \quad M_j = \{m \in \mathbb{Z} : Q_j(im) = 0\}, \quad \delta_j = \pi/h(Q_j).$$

Поэтому, положив $\Phi x = \Omega_{Q_k} * \dots * \Omega_{Q_1} * x$, получаем, что

$$W_\infty^Q = \mathcal{F}_\infty(\Phi, M), \quad M = \bigcup_{j=1}^k M_j \quad (F = G = Id, M_0 = \emptyset).$$

Обозначим через h_∞^β (H_∞^β) класс вещественных 2π -периодических функций, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ и удовлетворяющих в ней условию

$$|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1 \quad (|f(z)| \leq 1).$$

Хорошо известно (см., например [11, стр. 269]), что

$$h_\infty^\beta = \{f : f = K_\beta * x, x \in BL_\infty\},$$

где

$$K_\beta(t) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mt}{\operatorname{ch} m\beta}.$$

Ядро K_β является CVD -ядром (см. [1, стр. 62]). Таким образом,

$$h_\infty^\beta = W_\emptyset(K_\beta).$$

Рассмотрим теперь класс H_∞^β . В силу того, что функция $w = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} z$ конформно отображает внутренность единичного круга на полосу $|\operatorname{Re} w| < 1$, имеем

$$f(\cdot) \in H_\infty^\beta \iff \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} f(\cdot) \in h_\infty^\beta.$$

Поэтому

$$H_\infty^\beta = \{ f : f = \varphi(K_\beta * x), x \in BL_\infty \},$$

где $\varphi(w) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} w$. Поскольку $\operatorname{sign} \varphi(w) = \varphi(\operatorname{sign} w)$ при $w \in [-1, 1]$, то нетрудно убедиться, что оператор

$$Fx = \varphi(K_\beta * x),$$

принадлежит множеству $CVD(\emptyset, M, F)$ при всех M . Тем самым

$$H_\infty^\beta = \mathcal{F}_\infty(\Phi, \emptyset), \quad \Phi x = Fx \quad (k = 0, G = F).$$

Для дифференциального полинома $Q(D)$ с вещественными коэффициентами через $h_\infty^{Q,\beta}$ ($H_\infty^{Q,\beta}$) обозначим класс вещественных 2π -периодических функций, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих условию

$$Q(D)f \in h_\infty^\beta \quad (Q(D)f \in H_\infty^\beta).$$

В обозначениях (12) и (13) имеем

$$h_\infty^{Q,\beta} = \mathcal{F}(\Phi_1, M), \quad H_\infty^{Q,\beta} = \mathcal{F}(\Phi_2, M),$$

где $\Phi_1 x = \Omega_{Q_k} * \dots * \Omega_{Q_1} * K_\beta * x$, $\Phi_2 x = \Omega_{Q_k} * \dots * \Omega_{Q_1} * \varphi(K_\beta * x)$, $M = \bigcup_{j=1}^k M_j$ (в первом случае $G = Id$, а во втором — $G = F$).

Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *При всех $n > 2h(Q)$*

$$\begin{aligned} d_{2n}(W, L_\infty) &= \lambda_{2n}(W, L_\infty) = d^{2n}(W, L_\infty) = i_{2n}(W, L_\infty) \\ &= d_{2n-1}(W, L_\infty) = \lambda_{2n-1}(W, L_\infty) = d^{2n-1}(W, L_\infty) = i_{2n-1}(W, L_\infty) \\ &= \begin{cases} \|\Omega_Q * h_n\|_\infty, & W = W_\infty^Q, \\ \|\Omega_Q * K_\beta * h_n\|_\infty, & W = h_\infty^{Q,\beta}, \\ \|\Omega_Q * \varphi(K_\beta * h_n)\|_\infty, & W = H_\infty^{Q,\beta}, \end{cases} \end{aligned}$$

При этом коэффициенты Фурье $a_0(f), a_1(f), b_1(f), \dots, a_{n-1}(f), b_{n-1}(f)$ являются оптимальными функционалами для величин i_{2n-1} и i_{2n} .

Утверждение этой теоремы для класса W_∞^Q (для колмогоровского, линейного и гельфандовского поперечников) было получено в работе [3]. Четные поперечники класса $H_\infty^{Q,\beta}$ при $Q(D) = D^r$ были найдены в работе [6].

Идея построения общей теории для гладкого и аналитического случаев неоднократно высказывалась профессором В. М. Тихомировым, которому автор признателен за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [2] Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Наилучшие квадратурные формулы и методы восстановления функций, определяемых ядрами, не увеличивающими осцилляцию// Матем. сб. 1986. Т.130, №1. С.105–119.
- [3] Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Некоторые экстремальные задачи на классах функций, задаваемых линейными дифференциальными операторами// Матем. сб. 1989. Т.180, №10. С.1355–1395.
- [4] Осипенко К. Ю. Об *n*-поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе// Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т.58, №4. С.55–79.
- [5] Osipenko K. Yu. Exact values of *n*-widths and optimal quadratures on classes of bounded analytic and harmonic functions// J. Approx. Theory. 1995. V.82, №1. P.156–175.
- [6] Osipenko K. Yu. Exact *n*-widths of Hardy–Sobolev classes// Constr. Approx. 1996. V.
- [7] Karlin S. Total Positivity. V. I. Stanford: Stanford Univ. Press, 1968.
- [8] Крейн М. Г. К теории наилучшего приближения периодических функций// ДАН СССР. 1938. Т.18, №4–5. С.245–251.
- [9] Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Матем. сб. 1969. Т.80(122). С.290–304.
- [10] Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Оператор $D(D^2 + 1^2) \dots (D^2 + n^2)$ и тригонометрическая интерполяция// Anal. math. 1989. Т.15, №4. С.291–306.
- [11] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

МАТИ — Российский государственный
технологический университет
им. К. Э. Циолковского