

**ЛЕММА ШВАРЦА В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И
БЕРГМАНА НА ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ИЗ \mathbb{C}^{n_1}**

К. Ю. Осипенко

Классическая лемма Шварца утверждает, что если функция f голоморфна в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, не превосходит там по модулю единицы и $f(0) = 0$, то для всех $z \in D$ $|f(z)| \leq |z|$. Тем самым

$$\sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ f(0)=0}} |f(z)| = |z|, \quad (1)$$

где BH_∞ — единичный шар пространства Харди H_∞ , определяемого как множество голоморфных в D функций, для которых

$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Экстремальные задачи типа (1) часто возникают в связи с оптимальным восстановлением функций. Приведем одну из возможных постановок задачи восстановления.

Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области Ω . Предположим, что для функций из этого класса известны значения в фиксированных точках z_1, \dots, z_n . Положим для $f \in W$

$$If := (f(z_1), \dots, f^{(k_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(k_n-1)}(z_n)).$$

Оператор I , называемый *информационным*, в многомерной ситуации содержит значения функций и ее частных производных в системе точек z_1, \dots, z_n . Рассмотрим задачу оптимального восстановления функций из класса W в фиксированной точке z по значениям If . *Погрешностью оптимального восстановления* назовем величину

$$e(z, W, I) := \inf_A \sup_{f \in W} |f(z) - A(If)|, \quad (2)$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $A: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $N = k_1 + \dots + k_n$ (или $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ в вещественном случае). Метод A_0 , на котором достигается нижняя грань в (2), называется *оптимальным*.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №96-01-00325, №96-15-96072 и №96-01-10035).

В работе [1] было доказано, что для выпуклого уравновешенного класса W имеет место равенство

$$e(z, W, I) = \sup_{\substack{f \in W \\ If=0}} |f(z)|. \quad (3)$$

Если рассмотреть задачу восстановления функций из BH_∞ в точке z по их значениям в нуле ($If = I_1 f := f(0)$), то в силу (3) с помощью леммы Шварца легко вычисляется погрешность оптимального восстановления

$$e(z, BH_\infty, I_1) = \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ f(0)=0}} |f(z)| = |z|. \quad (4)$$

Естественно рассмотреть более общую задачу, когда информационный оператор имеет вид

$$If = I_r f := (f(0), f'(0), \dots, f^{(r-1)}(0)).$$

Иными словами мы хотим найти оптимальный метод восстановления и его погрешность по “тейлоровской” информации. Аналогично (4) и здесь легко получить ответ

$$e(z, BH_\infty, I_r) = \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ f(0)=f'(0)=\dots=f^{(r-1)}(0)=0}} |f(z)| = |z|^r. \quad (5)$$

Заметим, что нахождение оптимального метода восстановления, как правило, требует несколько больших усилий по сравнению с нахождением его погрешности. Например, в рассматриваемом случае довольно естественный метод, при котором функция заменяется на ее отрезок ряда Тейлора

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z^k}{k!} f^{(k)}(0),$$

не является оптимальным. Оптимальным здесь является метод

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z^k}{k!} (1 - |z|^{2(r-k)}) f^{(k)}(0),$$

построенный в работе [2].

Решение ряда более общих задач восстановления и связанных с ними экстремальных задач на классах голоморфных функций рассматривались в работах [3], [4], [5].

Целью данной работы является решение экстремальных задач типа (5) для голоморфных функций многих переменных.

Пусть B — единичный шар в \mathbb{C}^n и \mathbb{S} — его граница:

$$B := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z|^2 := \sum_{k=1}^n |z_k|^2 < 1\},$$

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}.$$

Пространством Харди H_p называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0 < r < 1} \left(\int_{\mathbb{S}} |f(rz)|^p d\sigma(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in B} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty,$$

где σ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно вращений. Пространством Бергмана A_p называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{A_p} := \left(\int_B |f(z)|^p d\nu(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где ν — мера Лебега в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, нормированная так, что $\nu(B) = 1$. При $p = \infty$ $A_\infty = H_\infty$. Через BH_p и BA_p будем обозначать единичные шары в пространствах H_p и A_p .

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, т. е. упорядоченный набор неотрицательных целых чисел α_j , $1 \leq j \leq n$. Положим

$$D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|.$$

Введем также следующие обозначения

$$Q_n(\rho, u) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k + \rho/2} \binom{n-1}{k} u^k,$$

$$\lambda_n(\rho) := \min\{|u| : Q_n(\rho, u) = 0\},$$

$$\Phi_n(u, r, p) := \frac{u^r}{(1-u^2)^{n/p}} \left(\frac{\Gamma(n+rp/2)}{\Gamma(n)\Gamma(rp/2)} Q_n(rp, u^2) \right)^{1/p}.$$

Теорема. Для всех $1 \leq p < \infty$ $u, z \in B$

1) при $|z| < \lambda_n(rp)$

$$\sup_{\substack{f \in BH_p \\ (D^\alpha f)(0) = 0, |\alpha| \leq r-1}} |f(z)| = \Phi_n(|z|, r, p), \quad (6)$$

$$2) \text{ при } |z| < \lambda_{n+1}(rp)$$

$$\sup_{\substack{f \in BA_p \\ (D^\alpha f)(0)=0, |\alpha| \leq r-1}} |f(z)| = \Phi_{n+1}(|z|, r, p). \quad (7)$$

Доказательство этой теоремы, обобщающей лемму Шварца на случай голоморфных функций из классов Харди и Бергмана, основано на построении воспроизводящего ядра для функций из H_p с весом $|z|^{r(p-2)}$. Случай $r = 1$ был рассмотрен в работе [6].

Отметим, что при $1 \leq n \leq 5$ в [6] было доказано, что при всех $1 \leq p \leq \infty$ $\lambda_n(p) > 1$. Тем самым для $1 \leq n \leq 5$ экстремальные задачи (6) и (7) решены для всех $z \in B$.

Список литературы

- [1] К. Ю. Осипенко, *Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек*, Мат. заметки **19** (1976), 29–40.
- [2] К. Ю. Осипенко, *Оптимальная интерполяция аналитических функций*, Мат. заметки **12** (1972), 465–476.
- [3] К. Ю. Осипенко, *О точных значениях n -поперечников на классах, задаваемых операторами, не увеличивающими осцилляции*, Мат. сб. **188** (1997), 113–126.
- [4] К. Yu. Osipenko, K. Wilderotter, *Optimal information for approximating periodic analytic functions*, Math. Comput. **66** (1997), 1579–1592.
- [5] К. Yu. Osipenko, *Exact n -widths of Hardy–Sobolev classes*, Constr. Approx. **13** (1997), 17–27.
- [6] К. Yu. Osipenko, M. I. Stessin, *On optimal recovery of a holomorphic function in the unit ball of \mathbb{C}^n* , Constr. Approx. **8** (1992), 141–159.