Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра "Высшая математика"

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
16.06.87

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания и варианты лабораторных работ

Сост.: В.А. Авакян
А.С. Леонов
К.Ю. Осипенко

Москва 1988

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания и варианты лабораторных работ по высшей математике предназначены для студентов I курса дневного отделения. Рассматриваются три из наиболее употребляемых численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей: метод Гаусса, метод квадратичного корня и метод прогонки [**1**]. При этом метод Гаусса используется обычно для решения систем общего вида, метод квадратного корня для решения систем с симметричной положительно определенной матрицей, а метод прогонки — для решения систем с трехдиагональной матрицей, часто встречающихся в приложениях [**2, 3**].

1. МЕТОД ГАУССА

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)}, \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(0)}x_n = b_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(0)}x_1 + a_{n2}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(0)}x_n = b_n^{(0)}. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, для определенности, что коэффициент $a_{11}^{(0)} \neq 0$, хотя на самом деле он может, конечно, оказаться равным нулю, и мы должны будем начать с какого-либо другого уравнения системы (1), в котором коэффициент при x_1 не равен нулю. Преобразуем систему (1), исключая x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого разделим первое уравнение на $a_{11}^{(0)}$ и, умножая его последовательно на $a_{21}^{(0)}, a_{31}^{(0)}, \ldots, a_{n1}^{(0)}$, вычтем полученные уравнения соответственно из второго, третьего, … , последнего уравнений системы

(1). В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} x_n = \dfrac{b_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \\ \left(a_{22}^{(0)} - \dfrac{a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{21}^{(0)} \right) x_2 + \ldots + \left(a_{2n}^{(0)} - \dfrac{a_{1n}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{21}^{(0)} \right) x_n \\ \qquad = \left(b_2^{(0)} - \dfrac{b_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{21}^{(0)} \right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(a_{n2}^{(0)} - \dfrac{a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{n1}^{(0)} \right) x_2 + \ldots + \left(a_{nn}^{(0)} - \dfrac{a_{1n}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{n1}^{(0)} \right) x_n \\ \qquad = \left(b_n^{(0)} - \dfrac{b_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{n1}^{(0)} \right). \end{cases} \tag{2}$$

Теперь первое уравнение оставляем без изменения, а к остальным $n-1$ уравнений применяем указанную выше процедуру, исключив x_2 из последних $n-2$ уравнений, и т.д. Таким образом, повторив указанную процедуру n раз, окончательно преобразуем исходную систему (1) к виду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)}, \\ x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{3}$$

Или сокращенно

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j = b_i^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}. \tag{5}$$

Процесс приведения системы (1) к виду (3) называется прямым ходом метода Гаусса, решения же системы (1) определяются из системы (3) в результате обратного хода, задаваемого формулами:

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)}, \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n. \end{cases} \tag{6}$$

В результате прямого и обратного ходов метода Гаусса количество действий **[1]** порядка $Q = 2n^3/3$ (при $n > 7$).

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса большое значение имеет рациональная запись результатов промежуточных вычислений.

I этап. В таблицу записываются коэффициенты при неизвестных и свободные члены заданной системы (1) (см. табл. 1). Затем к этим числам присоединяются строка коэффициентов первого уравнения системы (2).

II этап. Записываются коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы (2), кроме коэффициентов первого уравнения. Затем к этим числам присоединяются строки коэффициентов второго уравнения системы (3).

K-ый этап. Записываются коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы, которая получается после k-ой процедуры. Затем к этим числам присоединяются строки коэффициентов k-го уравнения системы (3). На n-ом этапе находится неизвестное x_n и заканчивается прямой ход. Далее, с помощью обратного хода находятся по формулам (6) остальные неизвестные $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

Для контроля вычислений по указанной схеме применяют следующий метод:

Рассмотрим новую систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, что и в (1), но со свободными членами, равными сумме всех элементов строки.

$$c_i^{(0)} = a_{i1}^{(0)} + a_{i2}^{(0)} + \ldots + a_{in}^{(0)} + b_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — решение системы (1), то легко заметить, что $\alpha_1{+}1, \alpha_2{+}1, \ldots, \alpha_n{+}1$ будут решениями системы со свободными членами $c_i^{(0)}$.

Присоединим к таблице еще один столбец составленный из чисел $c_i^{(0)}$. Выполняя с этим столбцом те же вычисления, что и с предыдущими, мы решаем одновременно две системы уравнений со свободными членами $b_i^{(0)}$ и $c_i^{(0)}$. При правильных вычислениях решения второй системы должны быть на единицу больше решений системы (1). Кроме того, мы имеем возможность контролировать и промежуточные вычисления, поскольку в процессе вычисления сумма элементов строки должна быть равна последнему элементу.

Пример:
Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3,0000x_1 \ +0,1123x_2 - 0,1425x_3 - 0,2513x_4 = -2,1202, \\ 0,3113x_1 \ +4,0000x_2 + 0,2357x_3 - 0,1273x_4 = \ 0,6012, \\ -0,2054x_1 + 0,3042x_2 + 5,0000x_3 - 0,2090x_4 = -3,1723, \\ -0,2932x_1 - 0,1456x_2 + 0,2283x_3 + 3,0000x_4 = \ 2,0200. \end{cases}$$

Приведем таблицу вычислений при решении этой системы методом Гаусса.

Таблица I

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Сумма коэфф. строк
3,0000	0,1123	-0,1425	-0,2513	-2,1202	0,5983
0,3113	4,0000	0,2357	0,1273	0,6012	5,2755
-0,2054	0,3042	5,0000	-0,2090	-3,1723	1,7175
-0,2932	-0,1456	0,2283	3,0000	2,0200	4,8095
1	0,0374	-0,0475	-0,0838	-0,7067	0,1994
	3,9984	0,2505	0,1534	0,8212	5,2134
	0,3119	4,9992	-0,2262	-3,3175	1,7585
	-0,1346	0,2144	2,9754	1,8128	4,8680
	1	0,0628	0,385	0,2059	1,3071
		4,9706	-0,2382	-3,3817	1,3508
		0,2229	2,9806	1,8405	5,0439
		1	-0,0479	-0,6803	0,2718
			2,9913	1,9921	4,9833
			1	0,6660	1,6660
-0,6899	0,2210	-0,6484	0,6660		
0,3100	1,2210	0,3516	1,6660		

Варианты систем для решения
по методу Гаусса

$$(3,0000-h)x_1+0,1123x_2-0,1425x_3+(-0,2513+h)x_4 = -2,1202-h,$$
$$(0,3113-h)x_1+(4,0000+h)x_2+0,2357x_3-0,1273x_4 = 0,6012+h,$$
$$-0,2054x_1+(0,3042+h)x_2+(5,0000-h)x_3-(0,2090+h)x_4 = -3,1723-h,$$
$$(-0,2932+h)x_1+(-0,1456+h)x_2+0,2283x_3+(3,0000-h)x_4 = 2,0200-h,$$

$h=0,0013N$, $1\le N\le 100$.

2. МЕТОД КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Этот метод применим для решения линейной системы

$$Ax=b, \tag{1}$$

в которой матрица A — симметрическая, т.е. ее элементы удовлетворяют равенствам $A_{ij}=a_{ji}$ и $|A|\neq 0$. Представим матрицу A в виде произведения двух транспонированных между собой треугольных матриц

$$A=T'T, \tag{2}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы T' и T, получаем следующие уравнения:

$$t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + \ldots + t_{ii}t_{ij} = a_{ij}, \quad i \le j.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{gathered} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j > 1, \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, \quad 1 < i \le n, \\ t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}}, \quad i < j. \end{gathered} \tag{3}$$

В силу того, что

$$|A| = |T'||T| = t_{11}^2 t_{22}^2 \dots t_{nn}^2 \ne 0,$$

все элементы $t_{ii} \ne 0$, и, значит, величины (3) имеют смысл. Если $t_{ii}^2 < 0$, то элементы t_{ij} будут мнимыми. Метод применим и в этом случае.

После представления матрицы A в виде (2) система (1) может быть записана в виде

$$T'Tx = b.$$

Последняя система эквивалентна двум системам

$$T'y = b, \quad Tx = y,$$

или в раскрытом виде:

$$\begin{cases} t_{11}y_1 = b_1, \\ t_{12}y_1 + t_{22}y_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{1n}y_1 + t_{2n}y_2 + \ldots + t_{nn}y_n = b_n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n = y_1, \\ \qquad\quad t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n = y_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t_{nn}x_n = y_n. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{t_{11}}, \\ y_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}}, \quad i > 1 \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{t_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}}, \quad i < n. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, первоначально прямым ходом метода квадратного корня находят коэффициенты t_{ij} и y_i, а затем обратным ходом находятся неизвестные x_i. При этом вычисления заносят в таблицу, приведенную в примере, применяя контроль с помощью сумм.

Число операций, необходимых для нахождения решения системы (1) по методу квадратного корня, имеет порядок $\sim n^3/3$ [**1**].

Пример. Методом квадратного корня решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0,1123x_2 - 0,1425x_3 - 0,2513x_4 = -2,1202, \\ 0,1123x_1 + 4x_2 + 0,2357x_3 + 0,1273x_4 = 0,6012, \\ -0,1425x_1 + 0,2357x_2 + 5x_3 - 0,2090x_4 = -3,1723, \\ -0,2513x_1 + 0,1273x_2 - 0,2090x_3 + 3x_4 = 2,0200. \end{cases}$$

Решение. Записываем коэффициенты системы a_{ij} и свободные члены b_i в начальный раздел А таблицы I и подставим столбец Σ, равный сумме всех элементов в каждой строке. Затем приступаем к заполнению раздела Б. Находим элементы t_{ik} по формулам (3) и y_i по формулам (4). Для получения элементов $\overline{y}_i$ надо столбец свободных членов заменить на столбец Σ. Проверка на этапе Б состоит в том, что полученные значения $\overline{y}_i$ должны равняться сумме всех остальных чисел в данной строке. На этапе В по формулам (5) находим значения x_i. Используя вместо y_i значения $\overline{y}_i$, находим $\overline{x}_i$. Проверка на этапе В заключается в том, что значения $\overline{x}_i$ должны быть на единицу больше значений x_i.

Таблица I

Разделы	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	Σ
А	3	0,1123	-0,1425	-0,2513	-2,1202	0,5983
	0,1123	4	0,2357	0,1273	0,6012	5,0765
	-0,1425	0,2357	5	-0,2090	-3,1723	1,7119
	-0,2513	0,1273	-0,2090	3	2,0200	4,6870
	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	y_i	$\overline{y}_i$
Б	1,7321	0,0648	-0,0823	-0,1451	-1,2241	0,3451
		1,9989	0,1206	0,0684	0,3404	2,5284
			2,2313	-0,1027	-1,4853	0,6433
				1,7215	0,9681	2,6897
В	-0,6971	0,1897	-0,6398	0,5624	x_i	
	0,3029	1,1897	0,3602	1,5624	$\overline{x}_i$	

Варианты систем для решения
по методу квадратного корня

$$
\begin{aligned}
&(3,0000-h)x_1+0,1123x_2-0,1425x_3+(-0,2513+h)x_4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=-2,1202+h,\\
&0,1123x_1+(4,0000+h)x_2+0,2357x_3+0,1273x_4=0,6012-h,\\
&-0,1425x_1+0,2357x_2+(5,0000-h)x_3-(0,2090+h)x_4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=-3,1723+h,\\
&(-0,2513+h)x_1+0,1273x_2-(0,2090+h)x_3+(3,0000-h)x_4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=2,0200-h,
\end{aligned}
$$

$h=0,0013N,\ 1\le N\le 747.$

3. МЕТОД ПРОГОНКИ

Рассмотрим систему с “трехдиагональной” матрицей вида:

$$
\begin{bmatrix}
-b_1 & c_1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\\
a_2 & -b_2 & c_2 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_3 & -b_3 & c_3\ldots & 0 & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 0\ldots & a_{n-1} & -b_{n-1} & c_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & a_n & -b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \ldots\\ x_{n-1}\\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ d_3\\ \ldots\\ d_{n-1}\\ d_n \end{bmatrix}
\qquad (1)
$$

Для решения такой системы по методу Гаусса требуется около $2n^3/3$ операций. Существует, однако, специальный метод — метод прогонки, предназначенный для решения таких трехдиагональных систем, в котором для получения решения требуется всего около $9n$ операций [**1**]. Таким образом, метод прогонки дает значительный выигрыш в скорости решения систем (для системы размерности 10×10 приблизительно в 7,5 раз).

Метод прогонки состоит из двух этапов. Этап 1 (прямой ход) — нахождение "прогоночных коэффициентов" ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\begin{gathered}
\xi_1 = \eta_1 = 0, \quad \xi_2 = c_1/b_1, \quad \eta_2 = -d_1/b_1, \\
\xi_3 = c_2/(b_2 - a_2\xi_2), \quad \eta_3 = (a_2\eta_2 - d_2)/(b_2 - a_2\xi_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{i+1} = c_i/(b_i - a_i\xi_i), \quad \eta_{i+1} = (a_i\eta_i - d_i)/(b_i - a_i\xi_i), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_n = c_{n-1}/(b_{n-1} - a_{n-1}\xi_{n-1}), \\
\eta_n = (a_{n-1}\eta_{n-1} - d_{n-1})/(b_{n-1} - a_{n-1}\xi_{n-1}), \\
\xi_{n+1} = 0, \quad \eta_{n+1} = (a_n\eta_n - d_n)/(b_n - a_n\xi_n).
\end{gathered} \tag{2}$$

Особенностью формул (2) является вычисление "последующих" величин ξ_{i+1}, η_{i+1} по уже найденным ξ_i, η_i. Попутно можно найти определитель трехдиагональной матрицы системы (1):

$$\det A = (a_1\xi_1 - b_1)(a_2\xi_2 - b_2)\ldots(a_n\xi_n - b_n).$$

Этап 2 (обратный ход) — нахождение решения системы (1) по формулам:

$$x_n = \eta_{n+1}, \quad x_{n-1} = \xi_n x_n + \eta_n, \quad x_{n-2} = \xi_{n-1}x_{n-1} + \eta_{n-1}, \ldots, \\
x_i = \xi_{i+1}x_{i+1} + \eta_{i+1}, \ldots, x_1 = \xi_2 x_2 + \eta_2. \tag{3}$$

Для некоторых матриц метод прогонки может приводить к существенному накоплению ошибок округления при счете и к искажению вследствие этого полученного решения. Однако показано, что этот эффект отсутствует при условии преобладания диагональных элементов матрицы:

$$|b_i| > |a_i| + |c_i| \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Метод прогонки широко используется при приближенном решении многих задач математической физики (задачи теории упругости, теории теплопроводности и др.) **[2, 3]**.

Пример. Решить методом прогонки систему:

$$\begin{cases}
-2x_1 + x_2 = 1, \\
x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2, \\
x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\
x_3 - 4x_4 = 0.
\end{cases}$$

Составим таблицу коэффициентов:

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0	2	1	1
2	1	4	2	2
3	2	5	1	3
4	1	4	0	0

Результаты расчета по прямому ходу (формулы eqref222), а затем по обратному ходу метода прогонки (формулы eqref333) оформим в виде таблицы:

i	$\xi_i=\frac{c_{i-1}}{b_{i-1}-a_{i-1}\xi_{i-1}}$	$\eta_i=\frac{a_{i-1}\eta_{i-1}-d_{i-1}}{b_{i-1}-a_{i-1}\xi_{i-1}}$	$b_i-a_i\xi_i$	$a_i\eta_i-d_i$	
1	0	0	2	-1	-1.20792
2	0.5	-0.5	3.5	-2.5	-1.41585
3	0.57143	-0.71426	3.85714	-4.42858	-1.22772
4	0.25926	-1.14815	3.74071	-1.14815	-0.30693
5	0	-0.30693			$x_i=\xi_{i+1}x_{i+1}+\eta_{i+1}$
прямой ход					обратный ход

Варианты систем для решения методом прогонки

$$\begin{cases} [-5+(-1)^N/N]x_1+2x_2 &= 2+(-1)^N, \\ 2x_1+[-7+2(-1)^N/N]x_2-2x_3 &= 1, \\ -3x_2+[-9-3/N]x_3+x_4 &= 3-(-1)^N, \\ -2x_3+[-11+(-1)^N]x_4 &= 4 \end{cases}$$

$(N=1,2,\ldots)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.