УДК 517.51

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТОЧНОГО ТИПА ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Аннотация. Решается задача оптимального восстановления значений линейного оператора на $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$ по приближенно заданным значениям других операторов. Действие каждого из операторов в образах Фурье есть умножение на некоторую функцию. В качестве одного из приложений приводятся явные выражения для оптимальных методов восстановления решения уравнения теплопроводности (для непрерывной и разностной моделей) в данный момент времени по неточным его измерениям в другие моменты.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $T = \mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$, где d — натуральное число, а $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ — множества действительных и целых чисел. Обозначим $\widehat{T} = \mathbb{R}^d$, если $T = \mathbb{R}^d$ и $\widehat{T} = \mathbb{T}^d$ ($\mathbb{T}$ — единичная окружность), если $T = \mathbb{Z}^d$.

Пусть $\alpha(\cdot)$ — непрерывная функция на $\widehat{T}$ (вообще говоря, комплекснозначная), $R > 0$ и $F\colon L_2(T) \to L_2(\widehat{T})$ — преобразование Фурье. Положим

$$X_\alpha^R(T) = \{\, x(\cdot) \in L_2(T) \mid \alpha^r(\cdot)Fx(\cdot) \in L_2(\widehat{T})\ \ \forall\, r \in [0, R]\,\}.^1$$

Для каждого $r \in [0, R]$ определим оператор $A_r\colon X_\alpha^R(T) \to L_2(T)$ по правилу

$$A_r x(\cdot) = F^{-1}(\alpha^r(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot),$$

где $F^{-1}\colon L_2(\widehat{T}) \to L_2(T)$ — обратное преобразование Фурье.

В терминах обобщенных функций такой оператор всегда можно записать в виде свертки с некоторым ядром.

Естественные задачи, связанные с восстановлением функций и их производных, решений дифференциальных уравнений и др., сводятся к восстановлению такого сорта операторов. Приведем два простых примера Пусть $T = \mathbb{R}$ и $\alpha(\xi) = i\xi$. Тогда $A_r x(\cdot)$ — это r-ая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №07-01-90102, №06-01-00530, №08-01-00450) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-3233.2008.1).

[1] Здесь $\alpha^r(\xi) = |\alpha(\xi)|^r \exp(ir \arg \alpha(\xi))$, где arg — главное значение аргумента.

(дробная) производная по Вейлю. Если $\alpha(\xi) = e^{-\xi^2}$, то $A_r x(\cdot)$ — распределение температуры в бесконечном стержне в момент времени r при начальном распределении $x(\cdot)$.

Мы ставим следующую задачу: восстановить значения оператора A_{r_0} при условии, что приближенно известны значения операторов $A_{r_1}, \ldots, A_{r_n}$, $r_j \in [0, R]$, $j = 0, 1, \ldots, n$ (в терминах приведенных примеров — это восстановление функции и/или ее производных по приближенно известным другим производным, восстановление температуры стержня в данный момент времени по приближенным ее измерениям в другие моменты времени).

Точная постановка такова. Пусть известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(T)$, $j = 1, \ldots, n$, такие, что

$$\|A_{r_j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(T)} \le \delta_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le r_1 < \ldots < r_n \le R,$$

и $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Под задачей оптимального восстановления значений A_{r_0} по данной информации понимается следующее. Любое отображение $m\colon (L_2(T))^n \to L_2(T)$ объявляется методом восстановления. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}, m) = \sup_{\substack{x(\cdot), y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot) \in L_2(T) \\ \|A_{r_j} x(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(T)} \le \delta_j,\ j = 1, \ldots, n}} \|A_{r_0} x(\cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(T)};$$

здесь $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))$. Нас интересует величина

$$E_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}) = \inf_{m\colon (L_2(T))^n \to L_2(T)} e_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления.*

Для формулировки основного результата понадобятся некоторые определения. Скажем, что непрерывная функция $\alpha(\cdot)$ на $\widehat{T}$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, если 1) величины $a = \inf_{t \in \widehat{T}} |\alpha(t)|$ в случае $a > 0$ и $b = \sup_{t \in \widehat{T}} |\alpha(t)|$ в случае $b < \infty$ достигаются на $\widehat{T}$; 2) множество функций $y(\cdot) \in L_2(T)$ таких, что

$$F^{-1}\left(\frac{\alpha^{r_1}(\cdot)}{|\alpha(\cdot)|^{2r_1} + |\alpha(\cdot)|^{2r_2}} F y(\cdot)\right)(\cdot) \in X^R_\alpha(T)$$

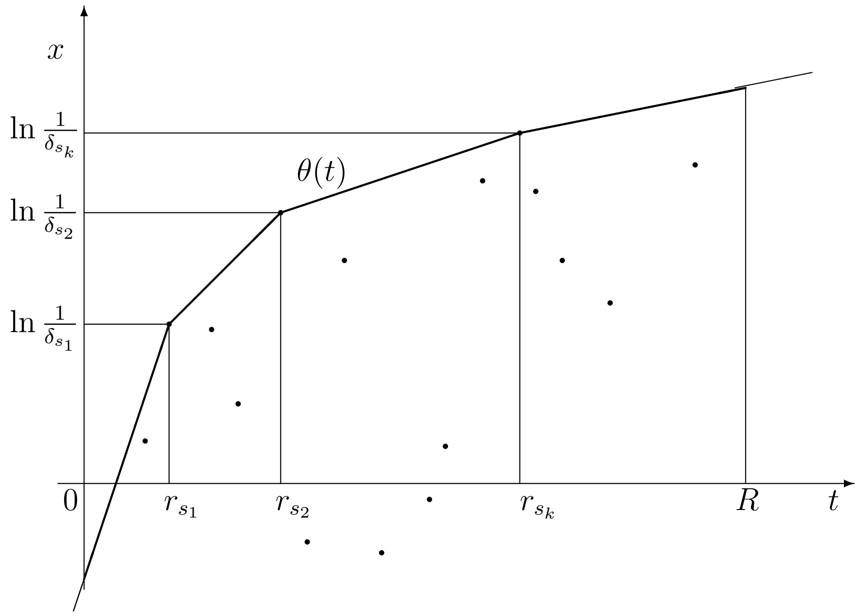
для всех $r_1, r_2 \in [0, R]$ плотно в $L_2(T)$.

На плоскости (t, x) построим следующее множество

$$M = \operatorname{co}\{(r_j, \ln 1/\delta_j),\ 1 \le j \le n\} + \{(t, t \ln 1/a) \mid t \le 0\} \\ + \{(t, t\ln 1/b) \mid t \ge 0\},$$

где co обозначает выпуклую оболочку соответствующего множества, а второе (третье) слагаемое отсутствует, если $a = 0$ ($b = \infty$). Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, R]$ по правилу: $\theta(t) = \max\{x \mid$

$(t,x)\in M\}$ и $\theta(t)=-\infty$, если $(t,x)\notin M$ для всех x. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная на $[r_1,r_n]$. Пусть $r_{s_1}<\ldots<r_{s_k}$ — ее точки излома.



Теорема 1. *Пусть $\alpha(\cdot)$ — непрерывная функция на $\widehat{T}$, удовлетворяющая условию $\mathcal{A}$. Тогда*

$$E_{r_0}(\overline{r},\overline{\delta})=e^{-\theta(r_0)}.$$

Если $r_0\in[r_{s_j},r_{s_{j+1}}]$, $1\le j\le k-1$, то метод

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=F^{-1}(\alpha^{r_0-r_{s_j}}(\cdot)\beta_j(\cdot)Fy_{s_j}(\cdot) + \alpha^{r_0-r_{s_{j+1}}}(\cdot)(1-\beta_j(\cdot))Fy_{s_{j+1}}(\cdot))(\cdot),$$

где

$$\beta_j(\cdot)=\frac{(r_{s_{j+1}}-r_0)\delta_{s_{j+1}}^2|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_j}}}{(r_{s_{j+1}}-r_0)\delta_{s_{j+1}}^2|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_j}}+(r_0-r_{s_j})\delta_{s_j}^2|\alpha(\cdot)|^{2r_{s_{j+1}}}}$$

является оптимальным.

Если $a>0$ и $0\le r_0<r_{s_1}$, то метод

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=F^{-1}\left(\alpha^{r_0-r_{s_1}}(\cdot)Fy_{s_1}(\cdot)\right)(\cdot).$$

оптимален.

Если $b<\infty$ и $r_{s_k}<r_0\le R$, то метод

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=F^{-1}\left(\alpha^{r_0-r_{s_k}}(\cdot)Fy_{s_k}(\cdot)\right)(\cdot)$$

оптимален.

Отметим, что оптимальный метод линеен, использует не более двух измерений и эти измерения предварительно “сглаживаются”.

2. Примеры

1. **Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности.** Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по ее приближенным измерениям в моменты $t_1, \ldots, t_n$. Распространение тепла в $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, с заданным начальным распределением температуры

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (1)–(2) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi$$

и при этом $u(t, \cdot) \to u_0(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть в моменты времени $0 = t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1, \cdot), \ldots, u(t_n, \cdot)$, т. е. известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что $\|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j$, где $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Нас интересует восстановление температуры в момент времени $\tau > 0$ на основании информации о функциях $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$. Здесь погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E_\tau(\bar{t}, \bar{\delta}) = \inf_m \sup_{\substack{u_0(\cdot), y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|u(\tau, \cdot) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))$, а $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$).

Решение уравнения теплопроводности в образах Фурье имеет вид (см., например, [1])

$$Fu(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t} F u_0(\xi).$$

Тем самым поставленная задача является частным случаем задачи, рассмотренной в п. 1 для $T = \mathbb{R}^d$ и $\alpha(\xi) = e^{-|\xi|^2}$.

Нетрудно проверить, что условия теоремы 1 выполнены. В данном случае

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\alpha(\xi)| = 0, \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\alpha(\xi)| = 1,$$

поэтому

$$M = \operatorname{co}\{(t_j, \ln 1/\delta_j),\ 1 \le j \le n\} + \{(t, 0) \mid t \ge 0\}.$$

Функция $\theta(\cdot)$ на $[t_1, +\infty)$ определена равенством: $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$. Пусть $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ — точки излома $\theta(\cdot)$.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$E_\tau(\overline{t},\overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

При $\tau\in[t_{s_j},t_{s_{j+1}}]$, $1\le j\le k-1$, *метод*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\Big(e^{-(\tau-t_{s_j})|\xi|^2}\beta_j(\xi)Fy_{s_j}(\xi) \\ +e^{-(\tau-t_{s_{j+1}})|\xi|^2}(1-\beta_j(\xi))Fy_{s_{j+1}}(\xi)\Big)(\cdot),$$

где

$$\beta_j(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}e^{-2t_{s_j}|\xi|^2}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}e^{-2t_{s_j}|\xi|^2}+(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-2t_{s_{j+1}}|\xi|^2}}$$

является оптимальным. При $\tau>t_{s_k}$ *метод*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\Big(e^{-(\tau-t_{s_k})|\xi|^2}Fy_{s_k}(\xi)\Big)(\cdot)$$

— оптимальный.

2. **Восстановление температуры стержня по неточным дискретным данным.** Рассмотрим задачу оптимального восстановления температуры в $\mathbb{R}^d$ по неточным ее значениям в дискретном наборе точек в моменты времени $t_1,\ldots,t_n$. Будем считать что процесс распределения температуры описывается неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j}-u_{sj}}{\tau} = \sum_{p=1}^{d}\frac{u_{s+1,j+e_p}-2u_{s+1,j}+u_{s+1,j-e_p}}{h^2}, \tag{3}$$

где $u_{s,j}=u(s\tau,jh)$ — температура стержня в точке jh, $j\in\mathbb{Z}^d$, в момент времени $s\tau$, $s\in\mathbb{Z}_+$, а $e_1,\ldots,e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Предположим, что имеются приближенные значения температуры стержня в точках jh в моменты времени $t_k=r_k\tau$ $y_k=\{y_{kj}\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$, где $0\le r_1<\ldots<r_n$, $r_k\in\mathbb{Z}_+$, $k=1,\ldots,n$. Будем предполагать, что $\|u_{r_k}-y_k\|_{l_2}\le\delta_k$, $k=1,\ldots,n$, где $u_s=\{u_{s,j}\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ и для $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$

$$\|x\|_{l_2} = \Bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|x_j|^2\Bigg)^{1/2}.$$

Требуется восстановить значения температуры в тех же точках jh в момент времени $r_0\tau$, $r\ge0$, зная векторы y_k, $k=1,\ldots,n$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $m\colon(l_2)^n\to l_2$. Для данного метода m его погрешностью назовем величину

$$e_{r_0}(\overline{r},\overline{\delta},m) = \sup_{\substack{u_0,y_1,\ldots,y_n\in l_2\\ \|u_{r_k}-y_k\|_{l_2}\le\delta_k,\ k=1,\ldots,n}}\|u_r-m(\overline{y})\|_{l_2},$$

где, как и раньше, $\overline{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$. Величина

$$E_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}) = \inf_{m\colon (l_2)^n \to l_2} e_{r_0}(\overline{r}, \overline{\delta}, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Преобразование Фурье для вектора u_s имеет вид

$$Fu_s(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} u_{sj} e^{-i\langle j, \xi \rangle}.$$

Переходя в (3) к образам Фурье, получаем

$$\frac{Fu_{s+1}(\xi) - Fu_s(\xi)}{\tau} = \sum_{p=1}^{d} \frac{e^{i\xi_p} Fu_{s+1}(\xi) - 2Fu_{s+1}(\xi) + e^{-i\xi_p} Fu_{s+1}(\xi)}{h^2},$$

откуда

$$Fu_{s+1}(\xi) = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} \sum_{p=1}^{d} (1 - \cos \xi_p)\right)^{-1} Fu_s(\xi).$$

Следовательно,

$$Fu_s(\xi) = \alpha^s(\xi) Fu_0(\xi), \quad \alpha(\xi) = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} \sum_{p=1}^{d} (1 - \cos \xi_p)\right)^{-1}.$$

В рассматриваемом случае

$$a = \inf_{\xi \in \mathbb{T}^d} |\alpha(\xi)| = \left(1 + \frac{4d\tau}{h^2}\right)^{-1}, \quad b = \sup_{\xi \in \mathbb{T}^d} |\alpha(\xi)| = 1.$$

Поэтому

$$M = \operatorname{co}\{(r_j, \ln 1/\delta_j),\ 1 \le j \le n\} + \{(r, 0) \mid r \ge 0\} \\ + \left\{ \left(r, -r \ln\left(1 + \frac{4d\tau}{h^2}\right)\right) \middle| r \le 0 \right\}.$$

Функция $\theta(\cdot)$ на $[0, +\infty)$ определена равенством: $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$, а $r_{s_1} < \ldots < r_{s_k}$ — точки излома $\theta(\cdot)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает равенство для погрешности оптимального метода и вид оптимального метода для соответствующих $\theta(\cdot)$ и $\alpha(\cdot)$.

Если описывать процесс распространения тепла в стержне явной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \sum_{p=1}^{d} \frac{u_{s,j+e_p} - 2u_{sj} + u_{s,j-e_p}}{h^2},$$

то решение в образах Фурье будет задаваться равенством

$$Fu_s(\xi) = \alpha^s(\xi)Fu_0(\xi), \quad \alpha(\xi) = 1 - \frac{2\tau}{h^2}\sum_{p=1}^{d}(1-\cos\xi_p).$$

В этом случае соответствующий результат может быть также легко получен из теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы опирается на один факт, касающийся оптимального восстановления линейных операторов. Для его формулировки приведем сначала более общую постановку задачи оптимального восстановления.

Пусть X — векторное пространство, Z — нормированное пространство, $Y_1,\dots,Y_n$ — пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $I_j\colon X \to Y_j$, $j=1,\dots,n$, — линейные операторы. Рассматривается задача оптимального восстановления линейного оператора $A\colon X\to Z$ на классе

$$W_k = \{\, x\in X : \|I_jx\|_{Y_j} \le \delta_j,\ 1\le j\le k,\ 0\le k<n \,\}$$

(при $k=0$ считаем, что $W_0 = X$) по информации о значениях операторов $I_{k+1},\dots,I_n$, заданных неточно, т. е. предполагается, что для каждого $x\in W_k$ известен вектор $y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ такой, что

$$\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j, \quad j=k+1,\dots,n.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z$. Погрешностью метода восстановления m называется величина

$$e(A,W_k,I,\delta,m) = \sup_{x\in W_k}\ \sup_{\substack{y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=k+1,\dots,n}} \|Ax-m(y)\|_Z.$$

Нас интересует величина

$$E(A,W_k,I,\delta) = \inf_{m\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z} e(A,W_k,I,\delta,m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань (если таковой существует), который называется *оптимальным методом.*

Теорема 3. *Пусть существуют такие числа $\widehat{\lambda}_j\ge0$, $j=1,\dots,n$, что значения задач*

$$(4)\qquad \|Ax\|_Z^2\to\max, \quad \|I_jx\|_{Y_j}^2\le\delta_j^2, \quad j=1,\dots,n, \quad x\in X$$

и

$$(5)\qquad \|Ax\|_Z^2\to\max, \quad \sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^2, \quad x\in X$$

совпадают.

Пусть, далее, $\widetilde{Y}$ *— плотное подмножество в* $Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ *такое, что для каждого* $y=(y_{k+1},\ldots,y_n)\in\widetilde{Y}$ *существует решение* x_y *задачи*

$$\sum_{j=1}^{k}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|^2_{Y_j}+\sum_{j=k+1}^{n}\widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|^2_{Y_j}\to\min,\quad x\in X \tag{6}$$

и, кроме того, существует такой линейный непрерывный оператор $\Lambda\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n\to Z$,[2] *что* $\Lambda y=Ax_y$ *для всех* $y\in\widetilde{Y}$.

Тогда $E(A,W_k,I,\delta)=S$, *где* S *— общее значение задач* (4) *и* (5) *и метод* $\widehat{m}=\Lambda$ *является оптимальным.*

Доказательство. Оценим сначала снизу величину $E(A,W_k,I,\delta)$. Пусть $x\in X$, $\|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j$, $j=1,\ldots,k$, и m — произвольный метод восстановления. Тогда

$$\begin{aligned}2\|Ax\|_Z&=\|Ax-m(0)-(-Ax-m(0))\|_Z\\&\le\|Ax-m(0)\|_Z+\|-Ax-m(0)\|_Z\le 2e(A,W_k,I,\delta,m).\end{aligned}$$

Переходя к верхней грани по всем указанным x, а затем к нижней грани по всем m, получаем, что

$$E(A,W_k,I,\delta)\ge\sup_{\|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,n}\|Ax\|_Z=S.$$

Перейдем к оценке сверху $E(A,W_k,I,\delta)$ и построению оптимального метода. Рассмотрим векторное пространство $E=Y_1\times\ldots\times Y_n$ с полускалярным произведением

$$(y^1,y^2)_E=\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j(y^1_j,y^2_j)_{Y_j},$$

где $y^1=(y^1_1,\ldots,y^1_n)$, $y^2=(y^2_1,\ldots,y^2_n)$. Тогда экстремальная задача (6) может быть переписана в виде

$$\|\widetilde{I}x-\widetilde{y}\|^2_E\to\min,\quad x\in X, \tag{7}$$

где $\widetilde{I}x=(I_1x,\ldots,I_nx)$, а $\widetilde{y}=(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)$. Нетрудно убедиться, что если x_y — решение задачи (7), то для всех $x\in X$ выполняется равенство $(\widetilde{I}x_y-\widetilde{y},\widetilde{I}x)_E=0$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\|\widetilde{I}x-\widetilde{y}\|^2_E&=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y+\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\|^2_E=\\&=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|^2_E-2\operatorname{Re}(\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y,\widetilde{I}x_y-\widetilde{y})_E+\|\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\|^2_E=\\&=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|^2_E+\|\widetilde{I}x_y-\widetilde{y}\|^2_E.\end{aligned}$$

[2]Норма элемента $y=(y_{k+1},\ldots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ определяется как $\|y\|=\left(\sum_{j=k+1}^{n}\|y_j\|^2_{Y_j}\right)^{1/2}$.

Таким образом, для всех $x \in X$

$$(8)\quad \|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|_E^2 \le \|\widetilde{I}x-\widetilde{y}\|_E^2=\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2+\sum_{j=k+1}^n \widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|_{Y_j}^2.$$

Пусть $x \in W_k$ и $y=(y_{k+1},\dots,y_n)\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_n$ таковы, что $\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j$, $j=k+1,\dots,n$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует элемент $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_{k+1},\dots,\widetilde{y}_n)\in\widetilde{Y}$ такой, что $\|y_j-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}<\varepsilon$, $j=1,\dots,n$, и тем самым

$$\|I_jx-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\le\|I_jx-y_j\|_{Y_j}+\|y_j-\widetilde{y}_j\|_{Y_j}\le\delta_j+\varepsilon,\quad j=k+1,\dots,n.$$

Положим $z=x-x_y$. Тогда из (8) следует, что

$$(9)\qquad \sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2\le\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2,$$

где $\widetilde{\delta}_j=\delta_j$, если $1\le j\le k$ и $\widetilde{\delta}_j=\delta_j+\varepsilon$, если $k+1\le j\le n$. Нетрудно убедиться, что при всех $c_1,c_2>0$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{z\in X\\ \sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2\le a^2}}\|Az\|_Z=\frac{c_1}{c_2}\sup_{\substack{x\in X\\ \sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2\le b^2}}\|Ax\|_Z.$$

Поэтому, учитывая (9) и совпадение значений задач (4) и (5), получаем

$$\begin{aligned}\|Ax-Ax_{\widetilde{y}}\|_Z=\|Az\|_Z&\le\sup_{\substack{z\in X\\ \sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2\le\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2}}\|Az\|_Z\\
&=\left(\frac{\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^2}\right)^{1/2}\sup_{\substack{z\in X\\ \sum_{j=1}^m\widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2\le\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^2}}\|Ax\|_Z\\
&=\left(\frac{\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^2}\right)^{1/2}\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\dots,n}}\|Ax\|_Z.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon>0$, следует, что

$$\|Ax-\Lambda y\|_Z\le\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\dots,n}}\|Ax\|_Z=S.$$

Учитывая доказанную оценку снизу, получаем, что $E(A,W_k,I,\delta)=S$ и $\widehat{m}=\Lambda$ — оптимальный метод. □

Теперь, опираясь на этот результат, докажем теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Задача, соответствующая задаче (4) из общей теоремы, имеет вид

$$(10)\qquad \|A_{r_0}x(\cdot)\|_{L_2(T)}^2\to\max,\quad \|A_{r_j}x(\cdot)\|_{L_2(T)}^2\le\delta_j^2,\quad j=1,\dots,n.$$

Найдем значение этой задачи. Переходя к образам Фурье, будем иметь по теореме Планшереля

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \quad \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} |Fx(\xi)|^2 \, d\xi \le \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Нетрудно показать, что в этой задаче нет решения, поэтому рассмотрим ее расширение на множество всех неотрицательных мер $d\mu(\cdot)$ на $\widehat{T}$:

(11)

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\mu(\xi) \le \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это задача линейного (но бесконечномерного) программирования. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \lambda) = -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — набор множителей Лагранжа.

Если мы найдем допустимую в (11) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n$, такие, что ($\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n)$)

$$\min_{d\mu(\cdot) \ge 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) \tag{12}$$

и

$$\widehat{\lambda}_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{13}$$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ будет решением задачи (11). Действительно, пусть $d\mu(\cdot)$ — допустимая мера в (11). Тогда используя это обстоятельство (и учитывая, что $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n$), а затем (12) и (13), будем иметь

$$\begin{aligned} -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\mu(\xi) &\ge -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\mu(\xi) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) \ge \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) = \\ &- \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\widehat{\mu}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \left(\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_j} \, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = \\ &- \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0} \, d\widehat{\mu}(\xi) \end{aligned}$$

откуда следует требуемое.

Пусть $r_0 \in [r_{s_j}, r_{s_{j+1}}]$, $1 \le j \le k-1$. Предъявим такую допустимую в (11) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda}$, что выполняются условия (12) и (13). Положим $d\widehat{\mu}(\xi) = C\delta(\xi - \xi_0)$, где

$\delta(\cdot - \xi_0)$ — дельта-функция в точке ξ_0, и выберем C и ξ_0 так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_p^2, \quad p = s_j, s_{j+1}. \tag{14}$$

Отсюда последует, что

$$C = \delta_{s_j}^{\frac{2r_{s_j+1}}{r_{s_{j+1}}-r_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2r_{s_j}}{r_{s_{j+1}}-r_{s_j}}},$$

$$\ln \frac{1}{|\alpha(\xi_0)|} = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}. \tag{15}$$

Из вида множества M вытекает, что при $a > 0$ и конечном b

$$\ln \frac{1}{b} < \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}} < \ln \frac{1}{a}.$$

Следовательно, в силу непрерывности $\alpha(\cdot)$ найдется точка $\xi_0 \in \widehat{T}$, для которой выполнено равенство (15). Нетрудно убедиться в существовании такой точки и в случае, когда $a = 0$ и/или $b = \infty$.

Положим $\widehat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j, s_{j+1}$, а $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ выберем так, чтобы прямая $y = \widehat{\lambda}_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} x$ была касательной к кривой

$$\begin{cases} y = |\alpha(\xi)|^{2(r_0 - r_{s_j})}, \\ x = |\alpha(\xi)|^{2(r_{s_{j+1}} - r_{s_j})} \end{cases} \tag{16}$$

в точке ξ_0. Простой подсчет показывает, что в этом случае

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{s_j} &= \frac{r_{s_{j+1}} - r_0}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{2(r_0 - r_{s_j})}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}}, \\ \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} &= \frac{r_0 - r_{s_j}}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{\frac{2(r_{s_{j+1}} - r_0)}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}}, \end{aligned} \tag{17}$$

Ясно, что это положительные числа и поэтому с данной мерой $\widehat{\mu}(\cdot)$ и набором $\widehat{\lambda}$ условия (13) выполняются.

Так как кривая (16) вогнута, то для всех $\xi \in \widehat{T}$

$$|\alpha(\xi)|^{2(r_0 - r_{s_j})} \le \widehat{\lambda}_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} |\alpha(\xi)|^{2(r_{s_{j+1}} - r_{s_j})}$$

или, равносильно, для всех $\xi \in \widehat{T}$

$$-|\alpha(\xi)|^{2r_0} + \widehat{\lambda}_{s_j} |\alpha(\xi)|^{2r_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} |\alpha(\xi)|^{2r_{s_{j+1}}} \ge 0.$$

Отсюда нетрудно вывести, что выполняется условие (12).

Наконец, так как для любых $p = 1, \dots, n$

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p}\, d\widehat{\mu}(\xi) = C |\alpha(\xi_0)|^{2r_p} = \delta_{s_j}^{2\frac{r_{s_{j+1}} - r_p}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{r_p - r_{s_j}}{r_{s_{j+1}} - r_{s_j}}} =$$

$$= e^{-2\theta_j(r_p)} \le e^{-2\theta(r_p)} \le \delta_p^2,$$

где $\theta_j(\cdot)$ — прямая, проходящая через точки $(r_{s_j}, \ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(r_{s_{j+1}}, \ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$, то мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в (11).

Таким образом, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11) и ее значение таково

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\widehat{\mu}(\xi) = C|\alpha(\xi_0)|^{2r_0} = \delta_{s_j}^{2\frac{r_{s_{j+1}}-r_0}{r_{s_{j+1}}-r_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{r_0-r_{s_j}}{r_{s_{j+1}}-r_{s_j}}} = e^{-2\theta(r_0)}.$$

Рассмотрим случай, когда $r_{s_k} < r_0 \le R$. Пусть сначала $b < \infty$. Положим

$$\widehat{\lambda}_{s_k} = b^{2(r_0 - r_{s_k})}, \quad \widehat{\lambda}_j = 0,\ j \ne s_k, \quad d\widehat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_k}^2 b^{-2r_{s_k}} \delta(\cdot - \xi_b),$$

где ξ_b — точка, в которой достигается верхняя грань $|\alpha(\cdot)|$ (напомним, равная b). Нетрудно проверяется, что выполнены условия (12) и (13) и мера допустима, поскольку для всех $p = 1, \ldots, n$

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 b^{2(r_p - r_{s_k})} = e^{-2\theta_k(r_p)} \le e^{-2\theta(r_p)} \le \delta_p^2,$$

где $\theta_k(\cdot)$ — прямая, совпадающая с ломаной $\theta(\cdot)$ при $r > r_{s_k}$. Таким образом, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11), а ее значение равно

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 b^{2(r_0 - r_{s_k})} = e^{-2\theta(r_0)}.$$

Пусть теперь $b = \infty$, тогда $s_k = n$. Существует последовательность ξ_l такая, что $b_l = |\alpha(\xi_l)| \to \infty$ при $l \to \infty$. Положим $d\widehat{\mu}_l(\cdot) = \delta_n^2 b_l^{-2r_n} \delta(\cdot - \xi_l)$. Если уравнение $\theta(\cdot)$ при $r_{s_{k-1}} < r \le r_{s_k} = r_n$ имеет вид $\theta(r) = \beta(r - r_n) + \ln(1/\delta_n)$, то при $b_l > e^{-\beta}$

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_p}\, d\widehat{\mu}_l(\xi) = \delta_n^2 b_l^{2(r_p - r_n)} \le e^{-2\theta(r_p)} \le \delta_p^2.$$

Тем самым меры $d\widehat{\mu}_l(\cdot)$ являются допустимыми, а

$$\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\widehat{\mu}_l(\xi) = \delta_n^2 b_l^{2(r_0 - r_n)} \to \infty$$

при $l \to \infty$. Отсюда следует, что значение задачи (11) равно $+\infty$.

При $r_1 < r_0 < r_{s_1}$ (в этом случае $a > 0$) положим

$$\widehat{\lambda}_{s_1} = a^{2(r_0 - r_{s_1})}, \quad \widehat{\lambda}_j = 0,\ j \ne s_1, \quad d\widehat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_1}^2 a^{-2r_{s_1}} \delta(\cdot - \xi_a),$$

где ξ_a — точка, где достигается нижняя грань $|\alpha(\cdot)|$. Аналогично предыдущим случаям показывается, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11) и значение ее равно $e^{-2\theta(r_0)}$.

Когда $a = 0$ значение задачи (11) равно $+\infty$ и рассуждения здесь такие же как в случае $b = \infty$.

Итак, для всех возможных случаев найдено значение задачи (11). Осуществляя стандартную аппроксимацию δ-функции δ-образными последовательностями, получаем, что значение этой задачи совпадает со значением задачи (10). Покажем теперь, что, в свою очередь, значение задачи (10) совпадает со значением такой задачи

$$
(18) \qquad \|A_{r_0}x(\cdot)\|^2_{L_2(T)} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|A_{r_j}x(\cdot)\|^2_{L_2(T)} \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2,
$$

где $(\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n)$ — найденный выше набор множителей Лагранжа. Эта задача соответствует задаче (5) из общей теоремы.

Снова переходя к образам Фурье, а затем к неотрицательным мерам, редуцируем (18) к такой задаче

$$
(19) \quad \int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\widehat{T}} \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\mu(\xi) \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.
$$

Ее функция Лагранжа имеет вид

$$
\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \nu) = -\int_{\widehat{T}} |\alpha(\xi)|^{2r_0}\, d\mu(\xi) + \\
+ \nu \left(\int_{\widehat{T}} \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j |\alpha(\xi)|^{2r_j}\, d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 \right).
$$

Если $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (11) (мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$, очевидно, допустима в (19)) и $\widehat{\nu} = 1$, то нетрудно видеть, что выполнены аналоги условий (12) и (13) для данного случая и значит, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (19). Далее, по тем же соображениям, что и выше, значения задач (19) и (18) совпадают. Но поскольку совпадают значения задач (11) и (19), то совпадают значения задач (18) и (10).

Теперь построим оптимальный метод для случая, когда $r_0 \in [r_{s_j}, r_{s_{j+1}}]$. Рассмотрим, в соответствии с общей теоремой, задачу

(20)

$$
\widehat{\lambda}_{s_j} \|A_{r_{s_j}}x(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|^2_{L_2(T)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \|A_{r_{s_{j+1}}}x(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot)\|^2_{L_2(T)} \to \min, \\
x(\cdot) \in X^R_\alpha(T).
$$

Для всех $y_{s_j}(\cdot), y_{s_{j+1}}(\cdot)$ из плотного множества в $(L_2(T))^n$ (см. условие $\mathcal{A}$, которому удовлетворяет $\alpha(\cdot)$) преобразование Фурье решения $\widehat{x}(\cdot)$ задачи (20) записывается в виде

$$
F\widehat{x}(\cdot) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} \overline{\alpha^{r_{s_j}}(\cdot)} F y_{s_j}(\cdot) + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \overline{\alpha^{r_{s_{j+1}}}(\cdot)} F y_{s_{j+1}}(\cdot)}{\widehat{\lambda}_{s_j} |\alpha(\cdot)|^{2r_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} |\alpha(\cdot)|^{2r_{s_{j+1}}}}.
$$

Этим определен линейный непрерывный оператор из плотного множества в $(L_2(T))^n$ в $L_2(T)$. Беря его суперпозицию с оператором A_{r_0} и продолжая ее по непрерывности на все пространство $(L_2(T))^n$ (подставляя еще вместо множителей Лагранжа их выражения по формулам (17)), получаем оптимальный метод для рассматриваемой ситуации.

Случаи, когда $a > 0$, $0 \le r_0 < r_{s_1}$ и $b < \infty$, $r_{s_k} < r_0 \le R$ рассматриваются вполне аналогично. □

Сделаем несколько заключительных замечаний. Если в задачах восстановления линейных функционалов получены достаточно общие результаты (см., например, [2]–[4]), то для аналогичных задач с линейными операторами удается строить оптимальные методы, привлекая еще и соображения, связанные со спецификой евклидовых пространств. Первые результаты такого плана были получены в [5]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [6]–[8], где использовался подход, основанный на общих принципах теории экстремума.

Применение теории оптимального восстановления линейных операторов к задачам математической физики можно найти в работах [9]–[13]. Результат, приведенный в теореме 2 в качестве одного из примеров применения общей теоремы 1, был доказан в работе [14].

Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. “О неравенствах для производных колмогоровского типа” *Матем. сб.*, **187**:12 (1997), 73–106.

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения*, М.: Эдиториал УРСС, 2003.

[5] Melkman A. A., Micchelli C. A., “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[8] Осипенко К. Ю., “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

[9] Осипенко К. Ю. “О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным”, *Владикавказский мат. журн.*, **6**:4 (2004), 55–62.

[10] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. “On optimal recovery of heat equation solutions”. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[11] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815.

[12] Балова Е. А. “Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 323–334.

[13] Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V. “Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data”, *J. Complexity*, **23**:4–6 (2007), 653–661.

[14] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
E-mail address: magaril@mirea.ru

“МАТИ” — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского
E-mail address: kosipenko@yahoo.com