УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УСЛОВИЕ МИНИМУМА ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

А. В. АРУТЮНОВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматриваются задачи восстановления операторов по неточно заданной информации для случая, когда нормы операторов задаются интегралом по бесконечному интервалу. Исследуются условия, при которых двойственная к задаче восстановления экстремальная задача (как правило, невыпуклая), может быть решена с помощью условия минимума функции Лагранжа.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, линейные операторы, экстремальные задачи, функция Лагранжа.

The paper is concerned with recovery problems for linear operators with noisy information when the norms of the operators are defined by integrals over infinite intervals. We investigate conditions for when the dual extremal problem for optimal recovery (which are usually not convex) may be solved with the help of the Lagrangian minimality condition.

Keywords: optimal recovery, linear operators, extremal problems, Lagrange function.

Введение

Пусть X — линейное пространство, $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ — линейные нормированные пространства, а $I_j\colon X \to Y_j$, $j = 0, 1, \dots, m$, — заданные линейные операторы. Пусть даны целое k, $0 \le k < m$ и действительные $\delta_j \ge 0$, $j = 1, \dots, m$. Рассматривается задача оптимального восстановления оператора $I_0\colon X \to Y_0$ на множестве

$$W = \{\, x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, k \,\} \tag{1}$$

по значениям операторов $I_{k+1}, \dots, I_m$, заданным с погрешностью (при $k = 0$ полагаем $W = X$). Считается, что для каждого $x \in W$ известен вектор $y = (y_{k+1}, \dots, y_m) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_m$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j$, $j = k+1, \dots, m$. Требуется по вектору y указать элемент, наиболее близкий в метрике пространства Y_0 к $I_0 x$.

Публикация выполнена при поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008 и проект 1.962.2017) и РФФИ (проекты №17-51-52022, №17-01-00649). Лемма 2 и теорема 2 получены первым автором при поддержке РНФ (проект № 17-11-01168).

Перейдем к более точной формулировке задачи. Всякий метод, который по вектору y указывает аппроксимацию к элементу I_0x, представляет из себя некоторое отображение из пространства $Y_{k+1}\times\ldots\times Y_m$ в Y_0. Будем рассматривать всевозможные методы или, иными словами, всевозможные отображения $\varphi\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_m\to Y_0$. Для каждого такого отображения φ определим его погрешность восстановления равенством

$$e(I,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W,\ y\in Y_{k+1}\times\ldots\times Y_m\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=k+1,\ldots,m}}\|I_0x-\varphi(y)\|_{Y_0},$$

где $I=(I_0,I_1\ldots,I_m)$, а $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_mn)$. Надо найти погрешность оптимального восстановления, определяемую равенством

$$E(I,\delta)=\inf_{\varphi\colon Y_{k+1}\times\ldots\times Y_m\to Y_0}e(I,\delta,\varphi),\tag{2}$$

а также методы, на которых достигается эта нижняя грань (если таковые существуют), называемые оптимальными.

В действительности, мы восстанавливаем не сам оператор I_0 (он задан), а его значения на элементах из множества W по неточной информации об этих элементах. Однако, традиционно эта задача называется задачей о восстановлении оператора I_0.

В простейшем случае, когда $I_0,I_{k+1},\ldots,I_m$ — линейные функционалы, а W, в отличие от (1), — произвольное множество из X и $\delta_{k+1}=\ldots=\delta_m=0$, эта задача была поставлена С. А. Смоляком [1]. Им было доказано, что для выпуклого и центрально-симметричного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный. Обобщениям этой постановки посвящено много работ (см. [2–8], а также библиографию в них).

Общий результат, касающийся существования линейного оптимального метода для случая, когда $m=2$, а Y_0, Y_1 и Y_2 — гильбертовы пространства, был доказан в работе [9] и там же получены первые конкретные результаты о восстановлении линейных операторов. Дальнейшее развитие эта тематика получила в [10–12].

В работах [13, 14] на основе необходимых условий экстремума второго порядка для анормальных задач разработан метод, на основе которого в данной статье получен ряд результатов, касающихся оптимального восстановления линейных операторов.

1. Двойственная задача и условие минимума функции Лагранжа

Двойственной к задаче (2) называется экстремальная задача

$$\|I_0x\|_{Y_0}\to\max,\quad \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,m,\quad x\in X.\tag{3}$$

Значение этой задачи дает оценку снизу для величины $E(I,\delta)$ в силу следующего хорошо известного утверждения (см., например, лемму 1 из работы [10]).

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$E(I,\delta) \geq \sup_{\substack{x\in X \\ \|I_jx\|_{Y_j}\leq\delta_j,\ j=1,\dots,m}} \|I_0x\|_{Y_0}.$$

Предположим, что $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Y_j}$, $j=0,1,\dots,m$. Тогда удобнее перейти к квадрату значения задачи (3) и рассматривать задачу

$$\|I_0x\|^2_{Y_0} \to \max, \quad \|I_jx\|^2_{Y_j} \leq \delta_j^2,\ j=1,\dots,m, \quad x\in X. \tag{4}$$

Задача (4) эквивалентна следующей задаче

$$q_0(x) \to \min, \quad q_j(x) \leq \delta_j^2,\ j=1,\dots,m, \quad x\in X, \tag{5}$$

где квадратичные формы q_j определены равенствами

$$q_0(x) = -\langle I_0x, I_0x\rangle_{Y_0},\ \ q_j(x) = \langle I_jx, I_jx\rangle_{Y_j}, \quad j=1,\dots,m. \tag{6}$$

Нас будет интересовать вопрос, в каких случаях в квадратичной задаче (5) выполнено условие минимума функции Лагранжа, которое мы будем понимать в следующем усиленном смысле.

Пусть даны действительные функции $f_j\colon X\to\mathbb{R}$, $j=0,1,\dots,m$. Будем говорить, что в экстремальной задаче

$$f_0(x) \to \min, \quad f_j(x) \leq 0,\ j=1,\dots,m, \tag{7}$$

выполнено условие минимума функции Лагранжа, если существуют такие $\lambda^j \geq 0$, $j=1,\dots,m$ (множители Лагранжа), для которых

$$\inf_{x\in X} L(x,\lambda) = \inf_{\substack{x\in X \\ f_j(x)\leq 0,\ j=1,\dots,m}} f_0(x).$$

Здесь L — функция Лагранжа, определяемая равенством

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{j=1}^m \lambda^j f_j(x), \quad \lambda = (\lambda^1,\dots,\lambda^m).$$

Приведенное условие минимума функции Лагранжа выполняется не всегда. Мы будем изучать задачу (5), являющуюся частным случаем общей задачи (7), однако, даже в ней это условие может нарушаться. Соответствующий пример дает задача (5) при $m=3$, $X=\mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\delta_j=1$ и

$$q_0(x) = -(x_1^2+x_2^2), \quad q_1(x) = (x_1+2x_2)^2,$$
$$q_2(x) = (x_1-2x_2)^2, \quad q_3(x) = 9x_1^2.$$

Рассмотрим задачу (5), в которой квадратичные формы q_j имеют более общий вид, чем рассмотренные выше. А именно, будем считать, что формы q_j имеют вид

$$q_j(x) = \langle Q_j x, x\rangle, \quad j = 0, \dots, m, \tag{8}$$

где $Q_j \colon X \to X^*$ заданные линейные операторы.

Предложение 1. *Пусть значение задачи* (5) *конечно и выполняется условие минимума функции Лагранжа, т.е. существуют такие* $\lambda^j \ge 0$, $j = 1, \dots, m$, *для которых*

$$\inf_{x\in X} L(x,\lambda) = \inf_{\substack{x\in X\\ q_j(x)\le\delta_j^2,\ j=1,\dots,m}} q_0(x), \quad \lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^m), \tag{9}$$

где функция Лагранжа L *определяется по формуле*

$$L(x,\lambda) = q_0(x) + \sum_{j=1}^m \lambda^j (q_j(x) - \delta_j^2).$$

Тогда

$$\inf_{\substack{x\in X\\ q_j(x)\le\delta_j^2,\ j=1,\dots,m}} q_0(x) = -\sum_{j=1}^m \lambda^j\delta_j^2 = -\min_{\mu\in\Lambda}\sum_{j=1}^m \mu^j\delta_j^2,\ \ \mu = (\mu^1, \dots, \mu^m), \tag{10}$$

где множество Λ *состоит из тех множителей Лагранжа* μ, *что* $\mu^j \ge 0$, $j = 1, \dots, m$ *и квадратичная форма* $q_0 + \mu^1 q_1 + \ldots + \mu^m q_m$ *неотрицательно определена. Кроме того, имеет место равенство*

$$\inf_{\substack{x\in X\\ q_j(x)\le\delta_j^2,\ j=1,\dots,m}} q_0(x) = \inf_{\substack{x\in X\\ \sum_{j=1}^m \lambda^j q_j(x)\le\sum_{j=1}^m\lambda^j\delta_j^2}} q_0(x). \tag{11}$$

Доказательство. В силу того, что значение задачи (5) конечно, при всех $x \in X$

$$q_0(x) + \sum_{j=1}^m \lambda^j q_j(x) \ge 0. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\inf_{x\in X} L(x,\lambda) = -\sum_{j=1}^m \lambda^j\delta_j^2.$$

Пусть $\mu \in \Lambda$ и $x \in X$ — допустимый элемент в задаче (5). Тогда

$$q_0(x) \ge L(x,\mu) \ge -\sum_{j=1}^m \mu^j\delta_j^2.$$

Беря нижнюю грань по всем допустимым элементам, получаем

$$-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2=\inf_{\substack{x\in X\\ q_j(x)\le\delta_j^2,\ j=1,\dots,m}}q_0(x)\ge-\sum_{j=1}^{m}\mu^j\delta_j^2.$$

Отсюда следует второе из равенств (10).

Докажем равенство (11). Пусть $x\in X$ и

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda^j q_j(x)\le\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2.$$

Тогда в силу ((12)

$$q_0(x)\ge q_0(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda^j q_j(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2\ge-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2.$$

Следовательно,

$$\inf_{\substack{x\in X\\ \sum_{j=1}^{m}\lambda^j q_j(x)\le\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2}}q_0(x)\ge-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2.$$

С другой стороны,

$$\inf_{\substack{x\in X\\ \sum_{j=1}^{m}\lambda^j q_j(x)\le\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2}}q_0(x)\le\inf_{\substack{x\in X\\ q_j(x)\le\delta_j^2,\ j=1,\dots,m}}q_0(x)=-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\delta_j^2.$$

□

В предположении, что X — гильбертово пространство приведем условие, обеспечивающее выполнение сформулированного условия минимума функции Лагранжа для квадратичной задачи (5), в которой квадратичные формы q_j имеют вид (8), где $Q_j\colon X\to X$ заданные линейные симметричные операторы. Отметим, что квадратичные формы q_j непрерывны, т.к. по теореме Хеллингера–Теплица симметричные операторы Q_j непрерывны.

Положим

$$\bar\Lambda=\left\{\,\bar\lambda=(\lambda^0,\dots,\lambda^m):\lambda^j\ge0,\ j=0,\dots,m,\quad\sum_{j=0}^{m}\lambda^j=1\right\}.$$

Напомним, что индекс квадратичной формы (обозначается он через ind) — это максимальная из размерностей линейных подпространств, на которых эта форма отрицательно определена. Индекс может принимать и бесконечное значение.

Следуя [14], будем говорить, что система квадратичных форм q_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, если для любых $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ квадратичная форма, определяемая соотношением,

$$\lambda^0 q_0(x) + \ldots + \lambda^m q_m(x) \quad x \in X,$$

либо неотрицательно определена, либо ее индекс больше m.

Теорема 1. *Пусть X — гильбертово пространство, инфимум в задаче* (5) *конечен и выполняется условие $\mathcal{A}$. Тогда для этой задачи справедливо условие минимума функции Лагранжа.*

Доказательство. Проведем его следуя [14]. Положим

$$D = \{\, x \in X : q_j(x) \le \delta_j^2,\ j = 1, \ldots, m \,\}, \quad \kappa = \inf_{x \in D} q_0(x).$$

Непустое множество D замкнуто поскольку функции q_j непрерывны. Поэтому D, наделенное индуцированной из полного пространства X метрикой, само является полным метрическим пространством. Поэтому к задаче (5) можно применить гладкий вариационный принцип Иоффе и Тихомирова — это теорема 1 из [15] (см. также теорему 2.6.5 из [16]). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Воспользуемся теоремой 1 из [15], взяв

$$\lambda = \sqrt[3]{\varepsilon},\ \alpha_n = \sqrt[3]{\varepsilon} 2^{-(n+1)},\ \beta_n = 2^{-(3n+2)},\ \varphi_{x,\alpha}(\xi) = 1 - \left| \frac{\xi - x}{\alpha} \right|^2.$$

Возьмем произвольную точку $w \in D$, для которой $q_0(w) \le \kappa + \varepsilon$. В силу указанной теоремы существуют (зависящие от ε) неотрицательная последовательность $\{\theta_n\}$ и последовательность $\{x_n\} \subset D$, сходящаяся к некоторой точке $x_* \in D$, такие, что при всех n

$$\theta_n \le 2^{-n}, \quad |x_n - w| \le \sqrt[3]{\varepsilon}, \quad q_0(x_n) \le q_0(w), \tag{13}$$

а функция

$$f_{0,\varepsilon}(x) = q_0(x) + \sqrt[3]{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n |x_n - x|^2$$

на множестве D достигает минимума в точке x_*. Отметим, что при этом в терминах теоремы 1 из [15] мы взяли $\theta_n = \sqrt[3]{\varepsilon^2} \gamma_n \alpha_n^{-2}$.

Применим к задаче с неравенствами

$$f_{0,\varepsilon}(x) \to \min, \quad q_j(x) - \delta_j^2 \le 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

в точке x_* необходимые условия второго порядка (это теорема 2.1 из [17]). По этой теореме существуют множители Лагранжа $\bar{\lambda}_\varepsilon = (\lambda_\varepsilon^0, \ldots, \lambda_\varepsilon^m) \in \bar{\Lambda}$, для которых выполняется уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x}(x_*, \bar{\lambda}_\varepsilon) = 0, \tag{14}$$

условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_\varepsilon^j\biggl(q_j(x_*)-\delta_j^2\biggr)=0,\ j=1,\dots,m, \tag{15}$$

и условия второго порядка

$$\operatorname{ind}\biggl(\frac{\partial^2\mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x^2}(x_*,\bar\lambda_\varepsilon)\biggr)\le m. \tag{16}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_\varepsilon(x,\bar\lambda)=\lambda^0 f_{0,\varepsilon}(x)+\sum_{j=1}^m\lambda^j\biggl(q_j(x)-\delta_j^2\biggr).$$

По построению функция $f_{0,\varepsilon}$ представима в виде сходящегося ряда квадратичных форм, причем этот ряд, а также ряд из производных сходятся равномерно на любом ограниченном множестве, а функции q_j являются квадратичными формами. Отсюда вытекают соотношения

$$\langle f_{0,\varepsilon}'(x),x\rangle=2f_{0,\varepsilon}(x),\quad \langle q_j'(x),x\rangle=2q_j(x),\quad j=0,\dots,m.$$

Поэтому, умножая равенство (14) на x_*, учитывая условия дополняющей нежесткости (15), получаем

$$\lambda_\varepsilon^0\biggl(q_0(x_*)+\sqrt[3]{\varepsilon}\sum_{n=1}^\infty\theta_n|x_n-x_*|^2\biggr)=-\sum_{j=1}^m\lambda_\varepsilon^j\delta_j^2. \tag{17}$$

Переходя во втором неравенстве (13) к пределу при $n\to\infty$, имеем $|x_*-w|\le\sqrt[3]{\varepsilon}$, откуда в силу (13) по неравенству треугольника при всех n $|x_n-x_*|\le 2\sqrt[3]{\varepsilon}$. Переходя в третьем неравенстве (13) к пределу при $n\to\infty$, получаем $q_0(x_*)\le q_0(w)\le\kappa+\varepsilon$, откуда $|q_0(x_*)-\kappa|\le\varepsilon$, поскольку $x_*\in D$ и, значит, $q_0(x_*)\ge\kappa$. Из полученных неравенств, учитывая, что $\lambda_\varepsilon^0\le 1$, получаем оценку

$$\left|\lambda_\varepsilon^0\biggl(q_0(x_*)+\sqrt[3]{\varepsilon}\sum_{n=1}^\infty\theta_n|x_n-x_*|^2\biggr)-\lambda_\varepsilon^0\kappa\right|\le 5\varepsilon. \tag{18}$$

Возьмем произвольное $\mu=(\mu^1,\dots,\mu^m)$, $\mu_j\ge 0$, $j=1,\dots,m$ и докажем, что при $\bar\mu_\varepsilon=(\lambda_\varepsilon^0,\mu)$ имеет место

$$\inf_{x\in X}\mathcal{L}_0(x,\bar\mu_\varepsilon)\le\lambda_\varepsilon^0\kappa+5\varepsilon. \tag{19}$$

Действительно, поскольку $x_*\in D$, то $\mu^j(q_j(x_*)-\delta_j^2)\le 0$, $j=1,\dots,m$, и, следовательно, $\mathcal{L}_\varepsilon(x_*,\bar\mu_\varepsilon)\le\lambda_\varepsilon^0 f_{0,\varepsilon}(x_*)$. Поэтому, используя очевидное неравенство $f_{0,\varepsilon}(x)\ge q_0(x)$, справедливое при всех $x\in X$, имеем

$$\inf_{x\in X}\mathcal{L}_0(x,\bar\mu_\varepsilon)\le\inf_{x\in X}\mathcal{L}_\varepsilon(x,\bar\mu_\varepsilon)\le\mathcal{L}_\varepsilon(x_*,\bar\mu_\varepsilon)\le\lambda_\varepsilon^0 f_{0,\varepsilon}(x_*).$$

Отсюда в силу (18) получаем (19).

Далее будем считать, что ε^{-1} принимает только натуральные значения. Переходя в ограниченной последовательности $(m+1)$-мерных векторов $\{\bar\lambda_\varepsilon\}$ к подпоследовательности, будем считать, что $\bar\lambda_\varepsilon \to \bar\lambda$ для некоторого вектора $\bar\lambda = (\lambda^0, \dots, \lambda^m)$. Очевидно, $\bar\lambda \in \bar\Lambda$.

Исследуем семейство квадратичных форм $\frac{\partial^2 \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x^2}(x, \bar\lambda)$. Как отмечалось выше, функция $f_{0,\varepsilon}$ представима в виде сходящегося ряда квадратичных форм, а функции q_j являются квадратичными формами. Поэтому квадратичная форма $\frac{\partial^2 \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x^2}(x, \bar\lambda)$ не зависит от переменной x, а зависит только от параметров $\bar\lambda$ и ε. Но если последовательность квадратичных форм, индекс каждой из которых не превышает одного и того же числа m, сходится равномерно на единичном шаре к некоторой квадратичной форме, то ее индекс также не превышает того же числа m. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.3 из [17]. Поэтому в силу (16) индекс квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_0}{\partial x^2}(x, \bar\lambda) = \lambda^0 q_0 + \dots + \lambda^m q_m$$

не превышает m. Следовательно, в силу условия $\mathcal{A}$ эта квадратичная форма неотрицательно определена.

Далее, в силу (17) и (18) выполняется $|\lambda_\varepsilon^0 \kappa + \sum_{j=1}^m \lambda_\varepsilon^j \delta_j^2| \le 5\varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\lambda^0 \kappa = -\sum_{j=1}^m \lambda^j \delta_j^2. \tag{20}$$

Но тогда $\lambda^0 > 0$, поскольку все λ^j неотрицательны и не равны нулю одновременно, а все δ_j по условию положительны. Поэтому, учитывая положительную однородность полученных соотношений по переменной $\bar\lambda$, деля их на λ^0, не теряя общности будем считать, что $\lambda^0 = 1$. Квадратичная форма $q_0 + \lambda^1 q_1 + \ldots + \lambda^m q_m$ неотрицательно определена, а минимум неотрицательно определенной квадратичной формы равен нулю. Поэтому

$$\min_{x \in X} L(x, \lambda) = -\sum_{j=1}^m \lambda^j \delta_j^2,$$

откуда в силу (20) получаем (9). □

Приведем достаточные условия, гарантирующие выполнение условия $\mathcal{A}$.

Лемма 2. *Пусть $\widetilde{X}$ — всюду плотное линейное подпространство пространства X. Пусть для любого $h \in \widetilde{X}$, $h \neq 0$, существует линейный оператор $B = B_h \colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ такой, что при всех $j = 0, 1, \ldots, m$*

$$1)\quad q_j(B^k h) \leq q_j(h), \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$2)\quad \langle Q_j B^{k_1} h, B^{k_2} h\rangle = 0, \quad 0 \leq k_1 < k_2 \leq m.$$

Тогда квадратичные формы $q_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, удовлетворяют условию $\mathcal{A}$.

Доказательство. Предположим, что существуют $\lambda^j \geq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$, при которых квадратичная форма

$$q = \lambda^0 q_0 + \lambda^1 q_1 + \ldots + \lambda^m q_m,$$

не является неотрицательно определенной. Тогда существует $h \in X$, для которого $q(h) < 0$. В силу того, что $\widetilde{X}$ — всюду плотно в X, можно считать, что $h \in \widetilde{X}$. Докажем, что индекс квадратичной формы q больше m. Рассмотрим систему векторов $x_j = B^j h$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Докажем, что при всех $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq 0$ для вектора

$$x = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k$$

имеет место неравенство $q(x) < 0$. В силу свойств 1) и 2) имеем

$$\begin{aligned} q_j(x) &= \langle Q_j \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k, \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k\rangle = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 \langle Q_j x_k, x_k\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 \langle Q_j B^k h, B^k h\rangle \leq \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 q_j(h) = q_j(h) \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$q(x) = \sum_{j=0}^{m} \lambda^j q_j(x) \leq \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 \biggl(\sum_{j=0}^{m} \lambda^j q_j(h)\biggr) = q(h) \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 < 0.$$

Следовательно, $x \neq 0$. Тем самым векторы $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — линейно независимы, а квадратичная форма q отрицательна определена на подпространстве размерности $m + 1$, образованном линейной оболочкой, натянутой на эти векторы. Таким образом, индекс этой формы больше m. $\square$

Замечание. Линейный оператор B_h нередко удобно брать в виде $B_h = A^{n(h)}$, где $A\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ —- заданный линейный оператор, а $n(h)$ при каждом h принимает натуральные значения.

Например, пусть X — гильбертово пространство пар вектор-функций $w(t) = (\xi(t), u(t))$, $t \in \mathbb{R}$, где $u(\cdot)$ измеримая по Лебегу m-мерная функция $u(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, у которой квадрат модуля суммируем на $\mathbb{R}$ (множество таких функций будем обозначать через $L_2^m(\mathbb{R})$), а абсолютно непрерывная n-мерная функция $\xi(\cdot)$ является решением уравнения

$$\dot{\xi} = D\xi + Eu(t), \tag{21}$$

и при этом $\xi(\cdot) \in L_2^n(\mathbb{R})$. Здесь D, E — заданные действительные матрицы нужных размеров. Квадратичные формы q_j определим равенствами

$$q_j(w(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}} \left(\langle G_j\xi(t), \xi(t)\rangle + 2\langle Q_j\xi(t), u(t)\rangle + \langle R_j u(t), u(t)\rangle\right) dt, \tag{22}$$

где G_j, Q_j, R_j — заданные матрицы нужных размеров.

Как известно (см. [18]), подпространство $\widetilde{X}$, состоящее из финитных вектор-функций $w(\cdot) \in X$, всюду плотно в X. В качестве оператора A возьмем сдвиг функций по времени на единицу, т.е. $Aw(t) = w(t-1)$. В силу леммы 2 и замечания к ней в этом примере условие $\mathcal{A}$ выполняется. Эти же рассуждения остаются справедливыми, если в (22) интегрирование осуществляется не по прямой $\mathbb{R}$, а по положительному лучу $\mathbb{R}^+$ или по отрицательному лучу $\mathbb{R}^-$, а на траекторию $\xi(\cdot)$ наложено дополнительное условие $\xi(0) = 0$. При этом в первом случае в определении пространства X надо дополнительно считать, что $u(t) = 0$, $\xi(t) = 0$ при всех $t \le 0$, а во втором случае, что $u(t) = 0$, $\xi(t) = 0$ при всех $t \ge 0$, а в качестве оператора A надо взять оператор сдвига $Aw(t) = w(t+1)$.

Перейдем к более общей конструкции. Пусть (T, Σ, μ) — измеримое пространство, где T — непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств T (называемых измеримыми) и μ — неотрицательная счетно-аддитивная σ-финитная мера μ. Последнее означает, что в T существует такая последовательность измеримых подмножеств $T_n \in \Sigma$, что $\mu(T_n) < \infty$ для всех n и $\bigcup_n T_n = T$.

Пусть Y — гильбертово пространство. Рассмотрим пространство $L_2(T, \mu, Y)$, состоящее из измеримых отображений $f\colon T \to Y$, у которых квадрат модуля $|f|^2 = \langle f, f\rangle$ суммируем на T. Скалярное произведение в нем определяется обычным образом. Известно ([19]), что само пространство $L_2(T, \mu, Y)$ является гильбертовым.

Пусть в семействе измеримых множеств выделено некоторое его подсемейство $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$. Относительно $\widetilde{\Sigma}$ будем предполагать, что $\mu(e) < \infty$ для всех $e \in \widetilde{\Sigma}$ и это подсемейство замкнуто относительно операции конечного объединения, т.е. если $e_1, e_2 \in \widetilde{\Sigma}$, то $e_1 \bigcup e_2 \in \widetilde{\Sigma}$.

На пространстве $L_2(T, \mu, Y)$ рассмотрим квадратичные формы

$$q_j(f) = \int_T \langle C_j f(t), f(t) \rangle \, d\mu, \quad j = 0, \ldots, m. \tag{23}$$

Здесь $C_j \colon Y \to Y$ заданные симметричные линейные операторы.

Теорема 2. *Пусть $X \subset L_2(T, \mu, Y)$ — заданное замкнутое линейное подпространство. Предположим, что линейное подпространство $\widetilde{X}$ всюду плотно в X, и существует измеримое отображение $\varphi \colon T \to T$* [1]*, которое удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *мера μ инвариантна относительно φ на $\widetilde{\Sigma}$ в том смысле, что $\varphi^{-1}(e) \in \widetilde{\Sigma}$ и $\mu(e) = \mu(\varphi^{-1}(e))$ для любого $e \in \widetilde{\Sigma}$;*

2) *для любого измеримого множества $e \in \widetilde{\Sigma}$ существует такое натуральное $n = n(e)$, что $\mu(e \bigcap \varphi^{-jn}(e)) = 0$ при каждом $j = 1, \ldots, m$ (φ^{-s} — это s-ая итерация обратного отображения φ^{-1});*

3) *линейный оператор суперпозиции $f \to f \circ \varphi = f(\varphi)$ инвариантен относительно подпространства $\widetilde{X}$, и для любой функции $f \in \widetilde{X}$ ее носитель принадлежит $\widetilde{\Sigma}$, т.е. $\{t \in T : f(t) \neq 0\} \in \widetilde{\Sigma}$.*

Тогда для квадратичной задачи (5), в которой квадратичные формы q_j определены формулой (23), справедливо условие минимума функции Лагранжа.

Отметим, что в силу первых двух предположений относительно меры μ, если она является ненулевой, то $\mu(T) = \infty$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $h(\cdot) \in \widetilde{X}$ и построим соответствующий ей, удовлетворяющий условиям леммы 2, линейный оператор B_h.

Пусть $e_0 = \{t \in T : h(t) \neq 0\}$ — носитель функции h. Тогда $e_0 \in \widetilde{\Sigma}$ в силу условия 3). В силу условия 2) существует такое натуральное $n = n(e_0)$, что $\mu(e_0 \bigcap \tilde{\varphi}^j(e_0)) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, где $\tilde{\varphi} = \varphi^{-n}$.

Введем в рассмотрение множества $e_j = \tilde{\varphi}^j(e_0)$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда в силу условия 1) $e_j \in \widetilde{\Sigma}$. Кроме того, $\mu(e_j \bigcap e_0) = 0$ при каждом $j = 1, \ldots, m$, а также $\mu(e_j) = \kappa$, где $\kappa = \mu(e_0) < \infty$, поскольку мера μ инвариантна также относительно преобразований φ^{nj}.

[1] т.е. множество $\varphi^{-1}(e)$ измеримо для любого измеримого множества $e \in \Sigma$

Докажем, что

$$\mu\left(e_{k_1}\bigcap e_{k_2}\right)=0\quad \forall\ k_1,k_2:\ 0\le k_1<k_2\le m. \tag{24}$$

При $k_1=0$ эти равенства отмечены выше. Пусть $k_1\ge 1$. Докажем, что тогда

$$\mu\left(e_{k_1}\bigcup e_{k_2}\right)=\mu\left(e_{k_1-1}\bigcup e_{k_2-1}\right). \tag{25}$$

Действительно, поскольку образ объединения множеств равен объединению их образов, то имеем

$$\tilde\varphi\left(e_{k_1}\bigcup e_{k_2}\right)=\tilde\varphi(e_{k_1})\bigcup\tilde\varphi(e_{k_2})=e_{k_1-1}\bigcup e_{k_2-1}\quad\Longrightarrow$$
$$\mu\left(e_{k_1}\bigcup e_{k_2}\right)=\mu\left(\tilde\varphi\left(e_{k_1}\bigcup e_{k_2}\right)\right)=\mu\left(e_{k_1-1}\bigcup e_{k_2-1}\right),$$

что доказывает (25).

Из (25), последовательно уменьшая натуральное число k_1 до нуля, получаем, что $\mu(e_{k_1}\bigcup e_{k_2})=\mu(e_0\bigcup e_j)$ при $j=k_2-k_1$. Но $\mu(e_0\bigcap e_j)=0$ и, следовательно, $\mu(e_{k_1}\bigcup e_{k_2})=2\kappa$. Кроме того, $\mu(e_{k_1})+\mu(e_{k_2})=2\kappa$, откуда в силу равенства $\mu(e_{k_1}\bigcap e_{k_2})=\mu(e_{k_1})+\mu(e_{k_2})-\mu(e_{k_1}\bigcup e_{k_2})$ получаем (24).

В силу условия 3) определим линейный оператор суперпозиции $A\colon\widetilde X\to\widetilde X$ соотношением $(Af)(t)=f(\varphi(t))$, $t\in T$, и оператор $B_h\colon\widetilde X\to\widetilde X$ соотношением $B_h=A^n$, где $n=n(e_0)$. По построению $(B_h^k h)(t)=h(\varphi^{nk}(t))=0$ для почти всех $t\notin e_k$. Отсюда в силу (24) при всех $k_1<k_2$ для почти всех $t\in T$ вытекает равенство $\langle C_j(B_h^{k_1}h)(t),(B_h^{k_2}h)(t)\rangle=0$. Из сказанного непосредственно следует справедливость условия 2) леммы 2.

Докажем условие 1) леммы 2. Для этого достаточно доказать, что для всех j и k выполняется равенство

$$\int_T\langle C_jh(t),h(t)\rangle\,d\mu=\int_T\langle C_jh(\varphi^{nk}(t)),h(\varphi^{nk}(t))\rangle\,d\mu. \tag{26}$$

Действительно, докажем, что для произвольного множества конечной меры $\widetilde T\subset T$ имеет место равенство

$$\int_{\widetilde T}\langle C_jh(t),h(t)\rangle\,d\mu=\int_{\widetilde T}\langle C_jh(\varphi^{nk}(t)),h(\varphi^{nk}(t))\rangle\,d\mu. \tag{27}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Возьмем такую простую функцию h_ε, что $|\langle C_jh(t),h(t)\rangle-\langle C_jh_\varepsilon(t),h_\varepsilon(t)\rangle|\le\varepsilon$ для почти всех $t\in T$. Пусть функция h_ε принимает счетное число значений y_s,

$s = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\int_{\widetilde{T}} \langle C_j h_\varepsilon(t), h_\varepsilon(t)\rangle \, d\mu = \sum_{s=1}^{\infty} \langle C_j y_s, y_s\rangle \mu(T_s), \quad T_s = \{t \in \widetilde{T} : h_\varepsilon(t) = y_s\}.$$

Рассмотрим простую функцию $h_\varepsilon(\varphi^{nk})$. При каждом s имеем

$$\mu\left(\{t \in \widetilde{T} : h_\varepsilon(\varphi^{nk}(t)) = y_s\}\right) = \mu\left(\varphi^{(-nk)}(T_s)\right) = \mu(T_s).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{\widetilde{T}} \langle C_j h_\varepsilon(t), h_\varepsilon(t)\rangle \, d\mu = \int_{\widetilde{T}} \langle C_j h_\varepsilon(\varphi^{nk}(t)), h_\varepsilon(\varphi^{nk}(t))\rangle \, d\mu,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем (27). Справедливость (26) вытекает из того, что равенство (27) выполняется для произвольного множества $\widetilde{T}$ конечной меры. Таким образом, условие 1) леммы 2 также выполняется (причем со знаком равенства).

По лемме 2 квадратичные формы $q_j(x)$, $x \in X$, $j = 0, 1, \ldots, m$, определенные соотношениями (23), удовлетворяют условию $\mathcal{A}$. Поэтому справедливость теоремы 2 вытекает из теоремы 1. $\square$

Приведем несколько естественных примеров, в которых выполняются основные предположения теоремы 2. Пусть вначале $T = \mathbb{R}^d$ — это d-мерное пространство с мерой Лебега μ. Тогда в качестве $\widetilde{\Sigma}$ можно взять семейство измеримых по Лебегу ограниченных множеств. В качестве отображения φ возьмем сдвиг на произвольный фиксированный ненулевой вектор $\bar{t} \in \mathbb{R}^d$, т.е. $\varphi(t) = t + \bar{t}$, $t \in \mathbb{R}^d$.

Пусть теперь $T = \mathbb{Z}^d$, где $\mathbb{Z}^d$ — множество целочисленных d-мерных векторов z, а μ — дискретная мера такая, что $\mu(z) = 1$ для любой точки $z \in \mathbb{Z}^d$. В качестве $\widetilde{\Sigma}$ возьмем семейство ограниченных подмножеств из $\mathbb{Z}^d$, а в качестве φ — сдвиг на произвольный ненулевой целочисленный вектор $\bar{z}$, т.е. $\varphi(z) = z + \bar{z}$, $z \in \mathbb{Z}^d$.

Вот еще один пример. Пусть T — это цилиндр $T = T_1 \times T_2$. Здесь T_1 — это либо $\mathbb{R}^d$ либо $\mathbb{Z}^d$, а заданная на T_1 мера μ_1 — это либо мера Лебега, либо описанная выше дискретная мера, соответственно. В качестве T_2 возьмем измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$ с соответствующей мерой μ_2. Меру μ на T определим как произведение мер, т.е. $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. В этом случае, как и выше, в качестве $\widetilde{\Sigma}$ возьмем семейство измеримых ограниченных подмножеств (впрочем, $\widetilde{\Sigma}$ естественно так брать всегда, когда T наделено метрикой). А вот в качестве φ надо брать сдвиг вдоль пространства T_1, т.е. $\varphi(t) = t + (\bar{t}_1, 0)$, $t = (t_1, t_2) \in T$, где $\bar{t}_1$ — произвольный ненулевой элемент из T_1. Отметим, что во всех рассмотренных случаях подпространство $\widetilde{X}$ состоит из финитных функций.

2. Задачи восстановления при выполнении условия минимума функции Лагранжа

Оказывается, что при выполнении условия минимума функции Лагранжа для задачи (5) (и некотором дополнительном условии разрешимости) можно явно выразить погрешность оптимального восстановления $E(I,\delta)$ в терминах соответствующих множителях Лагранжа, а также найти оптимальный метод восстановления.

В декартовом произведении пространств $\widehat{Y} = Y_{k+1} \times \ldots \times Y_m$ определим норму обычным образом по формуле

$$\|y\|_{\widehat{Y}} = \left(\sum_{j=k+1}^{m} \|y_j\|_{Y_j}^2\right)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Пусть в задаче* (5)*, где* q_j*,* $j = 0,1,\ldots,m$*, определены равенствами* (6)*, справедливо условие минимума функции Лагранжа с множителями Лагранжа* λ^j*,* $j = 1,\ldots,m$*. Предположим, что существуют всюду плотные линейные подпространства* $\widetilde{Y}_j \subseteq Y_j$*,* $j = k+1,\ldots,m$ *и линейный непрерывный оператор* $A\colon Y_{k+1} \times \ldots \times Y_m \to Y_0$ *такие, что для любых* $y = (y_{k+1},\ldots,y_m) \in \widetilde{Y}_{k+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_m$ *существует решение* $x_y \in X$ *уравнения*

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda^j I_j^* I_j x = \sum_{j=k+1}^{m} I_j^* y_j \tag{28}$$

и $Ay = I_0 x_y$*. Тогда погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(I,\delta) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda^j \delta_j^2\right)^{1/2},$$

а метод $\varphi(y) = A\Lambda y$*, где* $\Lambda y = (\lambda^{k+1} y_{k+1},\ldots,\lambda^m y_m)$ *является оптимальным.*

Доказательство. Из леммы 1 и предложения 1 вытекает оценка снизу

$$E(I,\delta) \ge \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda^j \delta_j^2\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Получим оценку сверху. Рассмотрим линейное пространство $E = Y_1 \times \ldots \times Y_m$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^{m} \lambda^j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j},$$

где
$$y^1 = (y_1^1, \dots, y_m^1), \quad y^2 = (y_1^2, \dots, y_m^2).$$
Положим
$$\widetilde{I}x = (I_1x, \dots, I_mx), \quad \widetilde{y}_0 = (0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_m).$$
Если $x_{\Lambda y} \in X$ — решение уравнения (28), то для всех $x \in X$
$$(\widetilde{I}x_{\Lambda y}, \widetilde{I}x)_E = (\widetilde{y}_0, \widetilde{I}x)_E.$$
Отсюда получаем
$$\|\widetilde{I}x - \widetilde{y}_0\|_E^2 = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_{\Lambda y} + \widetilde{I}x_{\Lambda y} - \widetilde{y}_0\|_E^2 = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_{\Lambda y}\|_E^2 + \|\widetilde{I}x_{\Lambda y} - \widetilde{y}_0\|_E^2.$$
Таким образом, для всех $x \in X$
$$\|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_{\Lambda y}\|_E^2 \le \|\widetilde{I}x - \widetilde{y}_0\|_E^2 = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \|I_jx\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda^j \|I_jx - y_j\|_{Y_j}^2. \quad (30)$$

Пусть $x \in W$ и $y = (y_{k+1}, \dots, y_m) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_m$ таковы, что $\|I_jx - y_j\| \le \delta_j$, $j = k+1, \dots, m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует
$$\widetilde{y} = (\widetilde{y}_{k+1}, \dots, \widetilde{y}_m) \in \widetilde{Y}_{k+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_m,$$
такой, что
$$\|y_j - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \le \varepsilon, \quad j = k+1, \dots, m.$$
Тем самым,
$$\|I_jx - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \le \|I_jx - y_j\|_{Y_j} + \|y_j - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \le \delta_j + \varepsilon, \quad j = k+1, \dots, m.$$
Положим $z = x - x_{\Lambda\widetilde{y}}$. Тогда из (30) следует, что
$$\sum_{j=1}^{m} \lambda^j \|I_jz\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \widetilde{\delta}_j^2, \quad (31)$$
где
$$\widetilde{\delta}_j = \begin{cases} \delta_j, & 1 \le j \le k, \\ \delta_j + \varepsilon, & k+1 \le j \le m. \end{cases}$$
Для погрешности метода $\varphi(y) = A\Lambda y$ получим оценку
$$\begin{aligned} \|I_0x - A\Lambda y\|_{Y_0} &\le \|I_0x - A\Lambda\widetilde{y}\|_{Y_0} + \|A\Lambda(\widetilde{y} - y)\|_{Y_0} \\ &\le \|I_0x - I_0x_{\Lambda\widetilde{y}}\|_{Y_0} + \|A\Lambda\|(m-k)\varepsilon. \end{aligned}$$
Нетрудно убедиться, что при всех $a, b > 0$
$$\sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^m \lambda^j \|I_jz\|_{Y_j}^2 \le a^2}} \|I_0z\|_{Y_0}^2 = \frac{a^2}{b^2} \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^m \lambda^j \|I_jx\|_{Y_j}^2 \le b^2}} \|I_0x\|_{Y_0}^2.$$

Учитывая ((31) и предложение 1, получим

$$\|I_0x - I_0x_{\Lambda\widetilde{y}}\|^2_{Y_0} = \|I_0z\|^2_{Y_0} \le \sup_{\substack{z\in X \\ \sum_{j=1}^m \lambda^j\|I_jz\|^2_{Y_j} \le \sum_{j=1}^m \lambda^j\widetilde{\delta}_j^2}} \|I_0z\|^2_{Y_0}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^m \lambda^j\widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^m \lambda^j\delta_j^2} \sup_{\substack{z\in X \\ \sum_{j=1}^m \lambda^j\|I_jz\|^2_{Y_j} \le \sum_{j=1}^m \lambda^j\delta_j^2}} \|I_0z\|^2_{Y_0} = \sum_{j=1}^m \lambda^j\widetilde{\delta}_j^2.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получим

$$\|I_0x - A\Lambda y\|_{Y_0} \le \left(\sum_{j=1}^m \lambda^j\delta_j^2\right)^{1/2}. \tag{32}$$

Из (29) и (32) следует, что

$$E(I,\delta) = \left(\sum_{j=1}^m \lambda^j\delta_j^2\right)^{1/2},$$

а метод $\varphi(y) = A\Lambda y$ является оптимальным. □

Сделаем несколько замечаний. Уравнение (28) возникает из необходимости решить следующую экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^k \lambda^j\|I_jx\|^2_{Y_j} + \sum_{j=k+1}^m \lambda^j\|I_jx - y_j\|^2_{Y_j} \to \min, \quad x \in X,$$

которая возникает при методике построения оптимального метода восстановления, предложенной в работе [9]. Однако, в некоторых случаях это уравнение имеет решение не для всех $y_j \in Y_j$, $j = k+1,\dots,m$. Такая ситуация возникает, например, при восстановлении решения уравнения теплопроводности в фиксированный момент времени по неточно заданным решениям этого уравнения в другие моменты времени [12]. В связи с этим приходится рассматривать решение уравнения (28) на декартовом произведении множеств, всюду плотных в Y_j, $j = k+1,\dots,m$.

Вернемся к общей конструкции, описываемой теоремой 2. Будем считать, что T, μ, Y и X таковы, что выполнены условия этой теоремы. Рассмотрим задачу (2), где X то же, что и в теореме 2, а $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ — гильбертовы пространства. Положим $C_0 = -I_0^*I_0$, $C_j = I_j^*I_j$, $j = 1,\dots,m$. Из теоремы 2 вытекает справедливость условия минимума функции Лагранжа с некоторыми множителями Лагранжа $\lambda^j \ge 0$, $j = 1,\dots,m$, из которого, в частности, вытекает неотрицательная определенность квадратичной формы, порожденной линейным оператором $C = \lambda^1C_1 + \dots + \lambda^mC_m$.

Мы дополнительно предположим, что оператор C строго положителен, т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $\langle Cx, x\rangle \geq \varepsilon|x|^2$ для всех $x \in Y$. Тогда оператор C непрерывно обратим. Поэтому по теореме 3

$$E(I,\delta) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda^j \delta_j^2\right)^{1/2},$$

а метод

$$\varphi(y) = I_0(\lambda^1 C_1 + \ldots + \lambda^m C_m)^{-1}(\lambda^{k+1} I_{k+1}^* y_{k+1} + \ldots + \lambda^m I_m^* y_m)$$

является оптимальным.

Список литературы

[1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.

[3] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Матем. заметки. 1976. Т 19, № 1. С. 29–40.

[4] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery. In: Optimal estimation in approximation theory (ed. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin) // Plenum Press: New York, 1977. P. 1–54.

[5] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.

[6] Traub J. F., Woźniakowski H. A general theory of optimal algorithms. Academic Press: New York, 1980.

[7] Plaskota L. Noisy information and computational complexity. Cambridge University Press, 1996.

[8] Osipenko K. Yu. Optimal recovery of analytic functions. Nova Science Publ., Inc.: Huntington; New York, 2000.

[9] Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16. P. 87–105.

[10] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 3. С. 79–100.

[11] Осипенко К. Ю. Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 15–34.

[12] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54.

[13] Арутюнов А. В. Теорема Милютина в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11, С. 1551–1553.

[14] Арутюнов А. В. Принцип Лагранжа в квадратичных задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1560–1566.

[15] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Несколько замечаний о вариационных принципах // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 2. С. 305–311.

[16] Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.

[17] Арутюнов А. В. Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, № 3 (405). С. 3–62.

[18] Арутюнов А. В. Аппроксимация решений линейных управляемых систем финитными решениями // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 780–784.

[19] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Арутюнов Арам Владимирович,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
arutun@orc.ru

Осипенко Константин Юрьевич,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991,
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Москва, 127051
kosipenko@yahoo.com