Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

Н.Н. Белякова, К.Ю. Осипенко

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ “ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

Москва 1983

## 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

**1. Основные понятия.** Функциональное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию и ее производную, называется дифференциальным уравнением I-го порядка.

*Решением* (*частным решением*) уравнения (1) или (2) на отрезке $[a, b]$ называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно $x \in [a, b]$.

Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее это решение как неявную функцию, называют *интегралом* (*частным интегралом*) дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет в плоскости $(x, y)$ некоторую кривую, называемую *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Множество всех решений дифференциального уравнения (1) или (2) называют его *общим решением*. Общее решение может быть записано в виде функции $y = \varphi(x, C)$, такой, что всякое решение получается при некотором значении постоянной $C$. Уравнение, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Наряду с отысканием общего решения дифференциального уравнения можно ставить задачу нахождения частного решения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего *начальному условию* $y_0 = \varphi(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$. Эта задача называется *задачей Коши* для уравнения первого порядка.

Перейдем к рассмотрению некоторых случаев, в которых удается проинтегрировать уравнение I-го порядка.

**2. Уравнения с разделяющимися переменными.** Пусть в уравнении

$$y' = f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ может быть представлена в виде произведения функций $f_1(x)$ и $f_2(y)$, зависящих только от одной переменной, или в уравнении

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

коэффициенты при $dx$ и $dy$ представляются в таком же виде: $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$ и $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$. Тогда эти уравнения приводятся к виду

$$f_1(x)\,dx = \frac{1}{f_2(y)}\,dy,$$
$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$$

Интегрируя левые части этих уравнений по $x$, а правые по $y$ приходим к общему интегралу исходного уравнения.

**Пример 1.**

$$y' = \frac{3x+1}{4y^4+5}.$$

Решаем:

$$\frac{dy}{dx} = (3x+1)\frac{1}{4y^4+5},$$
$$(4y^4+5)\,dy = (3x+1)\,dx,$$
$$\int (4y^4+5)\,dy = \int (3x+1)\,dx + C,$$
$$\frac{4}{5}y^5 + 5y - \frac{3}{2}x^2 - x = C.$$

Здесь и далее под $\displaystyle\int f(x)\,dx$ будем понимать одну из первообразных для функции $f(x)$, избегая более громоздкой записи $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

Если в уравнении с разделяющимися переменными $y' = f_1(x)f_2(y)$ функция $f_2(y)$ имеет действительный корень $y_0$, то легко убедиться, что функция $y(x) = y_0$ является решением уравнения. При делении на $f_2(y)$ это решение может быть потеряно. Поэтому, получив указанным выше методом общее решение уравнения, нужно проверить входят ли в его состав (при некоторых значениях параметра $C$) упомянутые частные решения. Если нет, то их нужно включить в состав общего решения.

**Пример 2.**

$$y' = y\,\mathrm{tg}\,x.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C_1.$$

Для удобства потенцирования представляем параметр $C_1$ в виде $C_1 = \ln C$, $C \neq 0$ (при этом $C_1$ принимает все значения от $-\infty$ до

$+\infty$). Тогда

$$\ln|y\cos x| = \ln C,$$
$$y = \frac{C}{\cos x}. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что исходное уравнение имеет еще решение $y = 0$, которое не входит в общее решение (3), т.к. $C \neq 0$. Если теперь потребовать, чтобы $C$ принимало и значение 0, то $y = 0$ войдет в общее решение

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

С помощью подстановки $u(x) = ax + by(x) + d$ к уравнениям с разделяющимися переменными приводятся дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + d), \quad b \neq 0. \qquad (4)$$

**3. Однородные уравнения.** Дифференциальные уравнения I-го порядка называются *однородными*, если они приводятся к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (5)$$

С помощью подстановки $\dfrac{y}{x} = u(x)$ уравнение (5) приводится к виду

$$u + xu' = f(u).$$

Таким образом, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \qquad (6)$$

в случае $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$ приводятся к однородным с помощью замены переменных

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0,$$

где $x_0$ и $y_0$ находятся из системы уравнений

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0,$$
$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

Поскольку при такой замене $dx = du$, $dy = dv$, то уравнение (6) преобразуется к виду (5) относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2u + b_2v + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$
$$= f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{v}{u}}{a_2 + b_2\dfrac{v}{u}}\right) = \varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Если в уравнении (6) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \lambda$ и, следовательно, $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, то оно принимает вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y). \tag{7}$$

Сведение уравнения (7) к уравнению с разделяющимися переменными рассматривалась выше (см. (4)).

**Пример 3.**

$$y' = \frac{2y - x - 4}{2x - y + 5}.$$

Сделаем замену

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0,$$

где

$$-x_0 + 2y_0 - 4 = 0,$$
$$2x_0 - y_0 + 5 = 0.$$

Находим $x_0 = -2$, $y_0 = 1$ и $x = u - 2$, $y = v + 1$. Тогда

$$\frac{dv}{du} = \frac{2v - u}{2u - v} = \frac{2\dfrac{v}{u} - 1}{2 - \dfrac{v}{u}}.$$

Полагая $w(u) = \dfrac{v}{u}$ или $v = wu$, получаем

$$\frac{dw}{du}u + w = \frac{2w - 1}{2 - w}, \quad \frac{dw}{du}u = \frac{w^2 - 1}{2 - w}.$$

После интегрирования $\displaystyle\int \frac{2 - w}{w^2 - 1} = \int \frac{du}{u} + \ln|C|$, $C \neq 0$, получаем:

$$\ln\left|\frac{w - 1}{w + 1}\right| - \frac{1}{2}\ln|w^2 - 1| = \ln|u| + \ln|C|,$$
$$\ln\left|\frac{w - 1}{(w + 1)^3}\right| = \ln|Cu^2|,$$
$$w - 1 = Cu^2(w + 1)^3. \tag{8}$$

При делении были потеряны решения $w = 1$ и $w = -1$. Поэтому нужно требовать, чтобы параметр $C$ принимал значения 0 и $\infty$ (последнее для выполнения равенства (7) при $w = -1$).

Возвращаясь к $v$, имеем: $v - u = C(v+u)^3$, и, к $x$ и $y$ ($u = x+2$, $v = y - 1$), окончательно получим

$$y - x - 3 = C(y + x + 1)^3.$$

**4. Линейные уравнения.** Дифференциальные уравнения I-го порядка называются *линейными*, если они имеют вид

$$a(x)y' + P(x) + Q(x) = 0$$

или

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{9}$$

Если $q(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется *однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \tag{10}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Проинтегрировать неоднородное линейное уравнение (9) можно одним из следующих способов:

а) *Метод вариации постоянной*

Решение имеется в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{11}$$

который получается, если в (10) постоянную $C$ заменить на функцию $C(x)$. Подставляя это выражение, в уравнение (9), получим уравнение относительно неизвестной функции $C(x)$:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x).$$

Откуда

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}\,dx + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в (11), окончательно получим:

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{12}$$

**Пример 4.**

$$y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x.$$

Проинтегрируем сначала соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} y \operatorname{ctg} x = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln |C|, \quad y = C \sin x,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Варьируем постоянную

$$y = C(x) \sin x, \quad y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x,$$

и подставляем в исходное уравнение:

$$C'(x) \sin x = 2x \sin x,$$

$$C(x) = x^2 + C,$$

$$y = (x^2 + C) \sin x.$$

б) *Метод подстановки*

Будем искать решение уравнения (9) в виде $y = u(x)v(x)$.

Тогда оно принимает вид:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{13}$$

Найдем функцию $v(x)$ из условия, что выражение в скобках обращается в 0:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,$$

$v = e^{-\int p(x)\, dx}$ — одно из решений уравнения. Теперь подставляем найденную функцию $v(x)$ в (13) и получаем уравнение для нахождения $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int p(x)\, dx} = q(x),$$

$$u = \int q(x) e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная, а интеграл обозначает одну из первообразных.

Тем самым общее решение исходного уравнения найдено

$$y = \left( \int q(x) e^{-\int p(x)\, dx}\, dx + C \right) e^{-\int p(x)\, dx}.$$

**Пример 5.**

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Полагаем $y(x) = u(x)v(x)$ и приводим исходное уравнение к виду:

$$\frac{du}{dx}v = u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Решая уравнение $\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0$, находим частное решение $v = x$.

Тогда при этом $v$

$$\frac{du}{dx}x = x^2,$$

$$u = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)x = \frac{1}{2}x^3 + Cx,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

**5. Уравнение Бернулли.** *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение I-го порядка вида

$$y' + p(x) = q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$ (при $m = 0$ — это линейное уравнение, при $m = 1$ — уравнение с разделяющимися переменными).

Данный тип уравнений решается путем сведения их к линейным уравнениям заменой

$$z(x) = y^{1-m}(x).$$

**Пример 6.**

$$(x - y)ydx - x^2dy = 0,$$

$$xy - y^2 - x^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^2.$$

Полагаем $z = y^{-1}$. Тогда $z' = -\frac{y'}{y^2}$ или

$$y' = -y^2z' = -\frac{1}{z^2}z'$$

и уравнение принимает вид:

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2}.$$

Ищем решение в виде $z = u(x)v(x)$

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Если $v = \dfrac{1}{x}$, то $\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{1}{x}v = 0$ и

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad du = \frac{dx}{x}.$$

Откуда $u = \ln|x| + C$.

Тем самым общее решение имеет вид

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{uv} = \frac{x}{\ln|x| + C},$$

где $C$ — произвольная постоянная, которая может принимать значение $\infty$ т.к. при переходе к функции $z$ было потеряно решение $y = 0$. Полученное общее решение можно переписать в другом виде:

$$\ln|x| = \frac{x}{y} - C, \quad |x| = e^{-C + \frac{x}{y}},$$

$$x = C_1 e^{\frac{x}{y}}.$$

### 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

**1. Основные понятия.** Дифференциальное уравнение $n$-го порядка — это уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Множество всех решений уравнения — это *общее решение*. В данном случае оно может быть записано в виде $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, где любое решение получается при некотором значении параметров $C_1, \ldots, C_n$. Общее решение, задаваемое в виде неявной функции

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Кроме задачи отыскания общего решения дифференциального уравнения (1) или (2), рассматривают *задачу Коши*: для уравнения (2) найти частное решение удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

Если известно общее решение уравнения $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, то для решения задачи Коши нужно из системы уравнений

$$\begin{array}{c} \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0^{(n-1)}, \end{array}$$

определить значения констант $C_1, \ldots, C_n$ (в этом случае будут удовлетворяться начальные условия (3)).

**2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.**
а) *Уравнение вида* $y^{(n)} = f(x)$.

Уравнения данного вида решаются путем кратного интегрирования.

**Пример 1.**

Найти общее и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, уравнения

$$y'' = -\frac{1}{x^2}.$$

Интегрируем:

$$y' = -\int \frac{dx}{x^2} + C_1 = \frac{1}{x} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{x} + C_1\right) dx + C_2 = \ln|x| + C_1 x + C_2.$$

Находим частное решение:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 0, \\ y'(1) = 1 + C_1 = 1. \end{cases}$$

Получаем $C_1 = 0$, $C_1 = 0$ и частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид $y = \ln|x|$.
б) *Уравнение, не содержащее искомой функции и ее производных до* $(k-1)$*-го порядка включительно.* Уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4}$$

В этом случае порядок уравнения может быть понижен до $n-k$ путем замены $p(x) = y^{(k)}(x)$. Действительно, тогда уравнение (4) принимает вид

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Определяя из него $p = p(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$, далее получим $y$ из уравнения $y^{(k)} = p(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ путем $k$-кратного интегрирования.

**Пример 2.**

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Полагая $\dfrac{d^4y}{dx^4} = p$, получаем $\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{x}p = 0$. Разделяя в нем переменные и интегрируя, находим:

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad p = C_1 x,$$

откуда

$$\frac{d^4y}{dx^4} = C_1 x \quad \text{и} \quad y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5.$$

в) *Уравнение, не содержащее независимого переменного :*

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В этом случае порядок уравнения понижается на единицу подстановкой $y' = p(y)$. Следует обратить внимание, что $p$ — функция переменной $y$, поэтому:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = p,\\
&\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,\\
&\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p
\end{aligned}$$

и т.д. Таким образом, $y^{(k)}(x)$ выражается через функцию $p$ и ее производные по $y$ до $(k-1)$-го порядка включительно, что и приводит к понижению порядка на единицу.

**Пример 3.**

$$y''y - 2(y')^2 = 0.$$

Делаем подстановку $y' = p(y)$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{dp}{dy}py - 2p^2 = 0.$$

Тогда $p = 0$ и $y = C$, где $C$ — произвольная константа, есть решение уравнения, или

$$y\frac{dp}{dy} - 2p = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\begin{gathered}
\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y},\\
\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_1|,\\
p = C_1y^2.
\end{gathered}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1dx.$$

Интегрируя находим:

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{y} = C_1x + C_2,\\
y = -\frac{1}{C_1x + C_2}.
\end{gathered}$$

**3. Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка.** Уравнение называется *линейным*, если оно имеет вид

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x).$$

Если $a_n(x) \neq 0$ на некотором отрезке $[a, b]$, то разделив на $a_n(x)$, получим уравнение

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x). \tag{5}$$

Будем считать функции $f(x), p_0(x), p_1(x)), \ldots, p_{n-1}(x)$ непрерывными на $[a, b]$.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение (5) называется *однородным.* Общее решение линейного однородного уравнения представляет линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами $n$ линейно независимых решений этого уравнения:

$$y(x) = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (5) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения $\overline{y}$:

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n + \overline{y}.$$

Тем самым для отыскания общего решения однородного уравнения нужно знать его $n$ линейно независимых решений, а неоднородного — еще некоторое частное решение последнего. Если подбор частного решения неоднородного уравнения затруднен, а общее решение $\sum\limits_{i=1}^{n} C_iy_i$ однородного уравнения известно, то неоднородное уравнение можно проинтегрировать *методом вариации постоянных.* Он заключается в том, что постоянные $C_1, \ldots, C_n$ варьируются и решение ищется в виде

$$y = C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n,$$

где неизвестные функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \quad C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ \quad C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n' = f(x). \end{cases} \tag{6}$$

**Пример 4.** Найдем общее решение уравнения

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = \ln x.$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Нетрудно увидеть, что это линейное уравнение 2-го порядка имеет два решения $y_1 = x^2$ и $y_2 = \dfrac{1}{x}$, которые являются линейно независимыми функциями в области $x > 0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x},$$

и решение исходного неоднородного уравнения мы ищем в виде:

$$y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \frac{1}{x},$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2'(x) \dfrac{1}{x} = 0, \\ C_1' 2x + C_2'(x) \left( -\dfrac{1}{x^2} \right) = \ln x. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$C_1' = \frac{\ln x}{3x},$$

$$C_2' = -\frac{x^2}{3} \ln x,$$

и

$$C_1 = \frac{1}{6} \ln^2 x + \overline{C}_1,$$

$$C_2 = -\frac{x^3}{9} \ln x + \frac{x^3}{27} + \overline{C}_2,$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ — произвольные константы. Таким образом, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = \left( \frac{1}{6} \ln^2 x + \overline{C}_1 \right) x^2 + \left( -\frac{x^3}{9} \ln x + \frac{x^3}{27} + \overline{C}_2 \right) \frac{1}{x}$$
$$= \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} \left( \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{9} \right).$$

**4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.** Если в линейном однородном уравнении

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (7)$$

все коэффициенты $a_i$ постоянны, то мы можем выписать все $n$ его частных линейно независимых решений. Для этого составляем характеристический многочлен и выписываем характеристическое уравнение для уравнения (7):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{8}$$

Как известно из алгебры, это уравнение имеет ровно $n$ комплексных корней, причем, если комплексное число $\alpha + i\beta$ — корень этого уравнения, то комплексно сопряженное число $\alpha + i\beta$ — также корень, т.к. коэффициенты многочлена действительны.

Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ действительны и различны, то нетрудно убедиться, что им соответствуют $n$ линейно независимых решений

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}.$$

Если корни действительны, но среди них есть кратные, т.е. уравнение (8) имеет вид:

$$(\lambda - \lambda_1)^{s_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{s_k} = 0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все различные корни и $s_1 + \ldots + s_k = n$, то им соответствует следующий набор $n$ линейно независимых решений:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{s_1 - 1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{s_k - 1}e^{\lambda_k x}.$$

Таким образом, корню $\lambda_i$ кратности $s_i$ соответствует ровно $s_i$ линейно независимых решений.

Если среди корней $\lambda_i$ имеются комплексные, то паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствует два линейно независимых решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Так как комплексно сопряженные корни имеют одинаковую кратность, то в общем случае, когда эта кратность равна $s$ им соответствует $2s$ линейно независимых решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Общее же решение уравнения (7) будет произвольной линейной комбинацией, найденных $n$ линейно независимых решений.

**Пример 5.**

$$y^{(7)} - 3y^{(6)} + 5y^{(5)} - 7y^{(4)} + 7y^{(3)} - 5y'' + 3y' - y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^7 - 3\lambda^6 + 5\lambda^5 - 7\lambda^4 + 7\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Преобразуем характеристический многочлен

$$(\lambda^7 - 3\lambda^6 + 3\lambda^5 - \lambda^4) + (2\lambda^5 - 6\lambda^4 + 6\lambda^3 - 2\lambda^2)$$
$$+ (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = \lambda^4(\lambda - 1)^3 + 2\lambda^2(\lambda - 1)^3 + (\lambda - 1)^3$$
$$= (\lambda - 1)^3(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - 1)^3(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2.$$

Характеристическое уравнение принимает вид

$$(\lambda-1)^3(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2=0.$$

Корень $\lambda_1=1$ имеет кратность 3, а комплексно сопряженные корни $\lambda_{2,3}=\pm i$ имеют кратность 2. Получаем семь линейно независимых решений:

$$e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x.$$

Общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x+C_4\cos x+C_5\sin x+C_6x\cos x+C_7x\sin x.$$

Рассматривая линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f(x) \tag{9}$$

для некоторых функций можно указать вид частного решения. Выписывая общее решение однородного уравнения по предыдущим рекомендациям, мы тем самым найдем общее решение неоднородного уравнения (9).

Если

$$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x),$$

где $P_m(x)$ многочлен степени $m$, то частное решение может быть найдено в виде

$$\overline{y}=e^{\alpha x}Q_m(x),$$

когда $\alpha$ не является корнем характеристического многочлена (8), и в виде

$$\overline{y}=x^se^{\alpha x}Q_m(x),$$

когда $\alpha$ — корень кратности $s$ уравнения (8), с помощью метода неопределенных коэффициентов. ($Q_m(x)$ — некоторый другой многочлен той же степени $m$).

**Пример 6.**

$$y''-4y'+4y=e^{2x}.$$

Решаем однородное уравнение

$$y''-4y'+4y=0.$$

Из характеристического уравнения

$$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$$

получаем $\lambda=2$ корень кратности 2, и общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}.$$

Далее, $f(x)=e^{2x}$, где $P_m(x)=1$, т.е. $m=0$, а $\alpha=2$ корень кратности 2 характеристического уравнения. Таким образом, частное решение ищем в виде $\overline{y}=x^2e^{2x}A$. Так как эта функция должна быть решением исходного уравнения, то при ее подстановке в него оно должно удовлетворяться (тождественно при любом $x$ из области определения):

$$(x^2e^{2x}A)'' - 4(x^2e^{2x}A)' + 4(x^2e^{2x}A) = e^{2x},$$
$$2Ae^{2x} = e^{2x}.$$

Отсюда $2A = 1$ и $A = \dfrac{1}{2}$; $\overline{y} = \dfrac{x^2}{2}e^{2x}$. Общее, решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x}.$$

Если

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x),$$

то частное решение может быть найдено в виде

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x),$$

когда комплексное число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (8), и в виде

$$\overline{y} = x^s e^{\alpha x}(U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x),$$

когда $\alpha + i\beta$ — корень кратности $s$, где $U_k(x)$ и $V_k(x)$ — некоторые многочлены степени $k = \max(m, n)$. В частности, если в $f(x)$ функция $Q_n(x) = 0$, то в решении $\overline{y}$ в общем случае $V_k(x) \not\equiv 0$; то же верно и для $P_m(x)$.

**Пример 7.**

$$y'' + 2y' + 5y = e^x \sin x. \tag{10}$$

Составляем характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Находим два корня $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x.$$

Тогда как $f(x) = e^x \sin x$, где $\alpha + i\beta = 1 + i$ не является корнем, характеристического уравнения, $P_m(x) \equiv 0$, $m = 0$, и $Q_n(x) \equiv 1$, $n = 0$, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$\overline{y} = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Тогда

$$\overline{y}' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x),$$
$$\overline{y}'' = 2e^x(-A\sin x + B\cos x).$$

После подстановки а уравнение (10) получаем равенство:

$$(7A + 4B)e^x\cos x + (-4A + 7B)e^x\sin x = e^x\sin x.$$

Пользуясь линейной независимостью функций $e^x \cos x$ и $e^x \sin x$, получаем систему для нахождения неопределенных коэффициентов $A$ и $B$:

$$\begin{aligned} 7A + 4B &= 0, \\ -4A + 7B &= 1. \end{aligned}$$

Откуда $A = -\dfrac{4}{65}$, $B = \dfrac{7}{65}$ и

$$\overline{y} = e^x(-\frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\sin x).$$

Таким образом, общее решение исходного неоднородного уравнения (10) выписывается в виде:

$$y = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x - \frac{4}{65}e^x\cos x + \frac{7}{65}e^x\sin x.$$

Если правая часть уравнения (9) может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, и можно указать частные решения $\overline{y}_1(x)$ и $\overline{y}_2(x)$ уравнения (9) с правой частью $f_1(x)$ и $f_2(x)$, соответственно, то частное решение для правой части $f(x)$ будет равно $\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x)$.

**Пример 8.**

$$y'' + y' = 2\sin^2 x.$$

Для однородного уравнения

$$y'' + y' = 0$$

его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ и общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть может быть записана так:

$$f(x) = 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = -\cos 2x.$$

Так как $f_1(x)$ имеет вид $P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x) \equiv 1$, $m = 0$ и $\alpha = 0$, то для уравнения $y'' + y' = 1$ частное решение имеет вид: $\overline{y}_1 = xQ_0(x) = Ax$, ибо $\lambda_1 = 0 = \alpha$ — корень характеристического уравнения. Находим:

$$\begin{gathered} (Ax)'' + (Ax)' = 1, \\ A = 1, \\ \overline{y}_1(x) = x. \end{gathered}$$

Так как $f_2(x)$ имеет вид $e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, где $P_m(x) = -1$, $m = 0$, $Q_n(x) = 0$, $n = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то для уравнения $y'' + y' = -\cos 2x$ с правой частью $f_2(x)$ частное решение имеет вид:

$$\overline{y}_2(x) = B\cos 2x + D\sin 2x,$$

ибо число $\alpha + i\beta = 2i$ не есть корень характеристического уравнения. Находим:

$$(B\cos 2x + D\sin 2x)'' + (B\cos 2x + D\sin 2x)' = -\cos 2x,$$

откуда $-2B - 4D - 0$, $2D - 4B = -1$ и

$$B = \frac{1}{5}, \quad D = -\frac{1}{10}, \quad \overline{y}_2(x) = \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Таким образом, частное решение для неоднородного уравнения с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеет вид:

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x) = x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x,$$

а общее решение:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x,$$

Если подбор частного решения неоднородного уравнения затруднен, то для интегрирования неоднородного уравнения можно воспользоваться методом вариации постоянных, разобранным в предыдущем пункте 3.

## 3. Варианты домашних заданий

Во всех дифференциальных уравнениях, в которых не указаны начальные условия, нужно найти общее решение. Если дополнительно указаны начальные условия, то нужно найти частное решение, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Вариант 1.

1. $\operatorname{tg} y dx - \operatorname{ctg} x dy = 0$.
2. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.
3. $6yy'' - 5(y')^2 = 0$.
4. $y'' - 2y = 4x^2 e^x$.
5. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

Вариант 2.

1. $(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$.
2. $x' - x\operatorname{ctg} t = 4\sin t$.
3. $y'' = 2y^3$, $y(1) = y'(1) = 1$.
4. $y'' + y = \sin 3x \cos x$.
5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

## Вариант 3.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$.
2. $x' = \dfrac{x}{t} + \dfrac{x^2}{t^3}$, $x(2) = 4$.
3. $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.
4. $4y'' + 12y' + 9y = 2\cos 4x$.
5. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

## Вариант 4.

1. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$.
2. $x^2 + (y')^2 = 1$.
3. $yy'' + (y')^2 = yy'$.
4. $y'' + 3y = 4x^2 - 8$.
5. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

## Вариант 5.

1. $\dfrac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \dfrac{x}{t}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x - y)$.
3. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.
4. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$.
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

## Вариант 6.

1. $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0$.
2. $y' = 2x + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$.
3. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.
4. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.
5. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

## Вариант 7.

1. $(y')^3 - y'e^{2x} = 0$.
2. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$.
4. $y'' - 3y' = 2e^{3x}$.
5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Вариант 8.

1. $x' + 5x = 10t + 2,\ x(1) = 2.$
2. $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 3)dy = 0.$
3. $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0.$
4. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x.$
5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$

Вариант 9.

1. $\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}.$
2. $ydx - xdy = x^2ydy.$
3. $\dfrac{1}{2}y'' = e^{4y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. $y^{(4)} - 16y = x^2 - e^x.$
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x} \ln x.$

Вариант 10.

1. $y \sin x + y' \cos x = 1.$
2. $(y')^2 + y^2 = 4.$
3. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}.$
4. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}.$
5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Вариант 11.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x + \sin t.$
2. $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0.$
3. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0,\ y'(2) = 4.$
4. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5.$
5. $y'' + 16y = \operatorname{ctg} 4x.$

Вариант 12.

1. $y' = e^{x-y}.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^3}.$
3. $(y'')^2 + (y')^2 = 1.$
4. $y'' + 5y' = 3x^2 - 8.$
5. $y'' + 2 \operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x.$

Вариант 13.

1. $(y')^2 = 9y^4.$
2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{1+x} + y^2 = 0.$
3. $y'' - \operatorname{ctg} x y' = \operatorname{ctg} x.$
4. $y'' + 4y = e^{2x} \sin 2x.$
5. $3y'' - 6y' + 3y = \dfrac{e^x}{x}.$

Вариант 14.

1. $y' = \dfrac{x+y-3}{1-x+y}.$
2. $y' - \dfrac{3y}{x} + x^3y^2 = 0.$
3. $y'' + (y')^2 = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$
5. $y'' + 16y = \operatorname{tg} 4x.$

Вариант 15.

1. $(4y + 2x + 3)y' - 2y - x - 1 = 0.$
2. $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0.$
3. $y'' = 3\sqrt{y},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
4. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\cos 2x + 2\sin 2x).$
5. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

Вариант 16.

1. $xyy' = 1 - x^2.$
2. $3xdy = y(1 + x\sin x - 3y^3 \sin x)dx.$
3. $yy'' - (y')^2 - yy' = 0.$
4. $y'' - 8y' + y = \cos x.$
5. $y'' + 9y = \operatorname{ctg} 3x.$

Вариант 17.

1. $xy' - y = y^3.$
2. $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right) dy = 0.$
3. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$
4. $y'' - 5y' - 6y = 2e^{-x}.$
5. $y'' + y = \dfrac{1}{2\cos 2x}.$

Вариант 18.

1. $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1.$
2. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0.$
3. $xy'' + y' = 1 + x.$
4. $y'' + 4y' - 5y = 2x^2 + 6.$
5. $2y'' - 4y' + 2y = \dfrac{e^x}{x}.$

Вариант 19.

1. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0,\ y(0) = 1.$
2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2.$
3. $y^2y'' = y(y')^2 + (y')^3.$
4. $y'' - 3y' + 2y = 3x^2 + x.$
5. $2y'' + 4y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

Вариант 20.

1. $y' = (x+y)^2.$
2. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$
3. $yy'' - (y')^2 = y'.$
4. $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x.$
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x}.$

Вариант 21.

1. $y' = (8x + 2y + 1)^2.$
2. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0,\ y(2) = 1.$
3. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$
4. $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = t^2 - 3.$
5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{9 - x^2}}.$

Вариант 22.

1. $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}.$
2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3.$
3. $y'' + (y')^2 = x(y')^2.$
4. $\dfrac{d^6x}{dt^6} - \dfrac{d^4x}{dt^4} = 1.$
5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 4x}.$

Вариант 23.

1. $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.
2. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.
3. $yy'' + (y')^2 = 0$.
4. $x'' + x = \sin t - \cos 2t$.
5. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{16-x^2}}$.

Вариант 24.

1. $4(y')^2 - 9x = 0$.
2. $x^3dx - (x^4 + y^3)dy = 0$.
3. $xy'' - y' \ln \dfrac{y'}{x} = 0$.
4. $y'' + 2y' + y = 2\sin x$.
5. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вариант 25.

1. $y' = \left(1 + \dfrac{y-1}{2x}\right)^2$.
2. $xy' + y = xy^2 \ln x$.
3. $y'' + \dfrac{1}{x}y' = \dfrac{1}{x^3}$.
4. $y'' - 6y' + 10y = 100,\ y(0) = 10,\ y'(0) = 5$.
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Вариант 26.

1. $y'(x + \sin y) = 1$.
2. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.
3. $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.
4. $y''' - y = e^x$.
5. $y'' + 25y = \operatorname{ctg} 5x$.

Вариант 27.

1. $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0.$
2. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$
3. $y''y^3 = 1,\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1.$
4. $y'' - 2y = 4x^2e^x.$
5. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x.$

Вариант 28.

1. $xdy + ydx = y^2dx.$
2. $e^ydx + (xe^y - 2ydy = 0.$
3. $yy'' = (y')^2.$
4. $x'' + 9x = t\sin 3t.$
5. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x.$

Вариант 29.

1. $y\dfrac{dp}{dy} = -p + p^2.$
2. $xy(xy^2+1)dy - dx = 0.$
3. $2(y')^2 = y''(y-1),\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$
4. $y'' - 2y' + y = (3x-5)e^x.$
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}.$

Вариант 30.

1. $xdy - ydx = y^2dx.$
2. $2yp\dfrac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2.$
3. $xy'' + y' = 1 + x.$
4. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}.$
5. $y'' + y = 1 - \dfrac{1}{\sin x}.$