Выпуклый анализ

К. Ю. Осипенко

Оглавление

Предисловие

Курс выпуклого анализа читается студентам третьего курса факультета управления и прикладной математики МФТИ в осеннем семестре. Он является первой частью курса оптимизации, который продолжает читаться в последующих семестрах. Свойство выпуклости позволяет проще решать оптимизационные задачи. Этим объясняется появление этой темы в самом начале рассмотрения задач оптимизации. Более того, на примере выпуклых задач ярко демонстрируется принцип двойственности, при котором каждой оптимизационной задаче ставится в соответствие некоторая другая, называемая двойственной. Рассмотрение совместно этих двух задач позволяет глубже изучить их свойства и получить решения, как правило, и той, и другой. Оптимизационные выпуклые задачи находят много применений на практике, в частности, в экономике. Поэтому в читаемом курсе уделяется достаточно внимания задачам линейного программирования.

В основе предлагаемого пособия лежат лекции, который автор читал на механико-математическом факультете МГУ и на факультете управления и прикладной математики МФТИ. Автор существенно использовал в пособии книги своих коллег Г. Г. Магарил-Ильяева, В. М. Тихомирова [**5**] и Э. М. Галеева [**2**], которым автор глубоко благодарен за ценные обсуждения и советы.

Глава 1

Общая теория

1. Введение

Выпуклый анализ — раздел математики, в котором изучаются выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. Выпуклый анализ имеет весьма разнообразные приложения в технике и экономике. Многие приложения связаны с задачами оптимизации, которые при наличии выпуклости могут решаться более просто.

Пристальное внимание к выпуклости было привлечено в сороковых годах прошлого столетия. Оно было связано с появлением такого раздела, как линейное программирование. Первые нетривиальные задачи в этом направлении были решены Леонидом Витальевичем Канторовмчем. В 1939 году вышла его книга "Математические методы организации и планирования производства". Затем в пятидесятых годах мощное развитие линейного программирования, а потом и выпуклой оптимизации началось в США. Это было вызвано проблемами экономики и различными приложениями в военных областях. В 1975 году Канторовичу и Купмансу (американскому экономисту) была присуждена Нобелевская премия по экономике за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов.

Следует упомянуть американского математика-прикладника Данцига, которому принадлежит замечательный алгоритм решения задач линейного программирования, называемый симплекс-метод.

В 1970 году американский математик Рокафеллар опубликовал монографию, которая называлась "Выпуклый анализ". Тогда впервые и появилось это словосочетание. Сам Рокафеллар пишет, что это название предложил ему профессор Принстонского университета Таккер. С тех пор термин "выпуклый анализ" стал общеупотребительным.

2. Выпуклые множества

Пусть X — линейное пространство. Если $x, y \in X$, то множество

$$[x, y] = \{\, z \in X : z = (1-\alpha)x + \alpha y,\ 0 \le \alpha \le 1 \,\}$$

называется *отрезком* (соединяющим точки x и y).

Непустое множество A называется *выпуклым,* если для любых $x, y \in A$ $[x, y] \in A$. Пустое множество считается выпуклым по определению.

Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$. Точка

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \tag{1}$$

называется *выпуклой комбинацией точек* $x_1, \dots, x_n$.

Предложение 1. *Если A — выпуклое множество, то любая выпуклая комбинация точек $x_1, \dots, x_n \in A$ принадлежит A.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу точек. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для любой выпуклой комбинации из не более, чем $n-1$ точек. Пусть имеется точка x вида (1). Если $\alpha_1 = 1$, то $x = x_1 \in A$. Если $\alpha_1 < 1$, положим

$$\widetilde{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^{n} \widetilde{\alpha}_j = 1,$$

из предположения индукции вытекает, что

$$\widetilde{x} = \sum_{j=2}^{n} \widetilde{\alpha}_j x_j \in A.$$

Тогда из выпуклости A следует, что

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} x_j = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\widetilde{x} \in A.$$

□

Выпуклой оболочкой $\operatorname{co} A$ *множества* $A \subset X$ называется множество всех выпуклых комбинаций его точек

$$\operatorname{co} A = \left\{ x \in X : x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ x_1, \dots, x_n \in A,\ \alpha_j \geq 0, \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Среди всех выпуклых множеств, содержащих данное множество $A \subset X$, существует наименьшее, т.е. то, которое содержится в любом выпуклом множестве, содержащем A. Действительно, семейство всех выпуклых множеств, содержащих A, не пусто (в него входит, например, все пространство X). Пересечение всех множеств этого семейства будет выпуклым (т.к. пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпукло), содержащим A и наименьшим. Докажем, что это множество совпадает с $\operatorname{co} A$.

Предложение 2. *Множество* $\operatorname{co} A$ *является наименьшим выпуклым множеством, содержащим* A.

Доказательство. Из предложения 1 вытекает, что если некоторое выпуклое множество содержит A, то оно содержит любую выпуклую комбинацию точек из A, а значит, оно содержит $\operatorname{co} A$. Следовательно, пересечение всех выпуклых множеств содержит $\operatorname{co} A$. Осталось показать что $\operatorname{co} A$ выпукло, в этом случае оно совпадет с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих A. Рассмотрим две произвольные точки $\operatorname{co} A$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Для любого $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)\alpha_j x_j + \sum_{j=1}^{m} \alpha\beta_j y_j.$$

Так как
$$\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)\alpha_j + \sum_{j=1}^{m}\alpha\beta_j = (1-\alpha)+\alpha = 1,$$
то мы получили выпуклую комбинацию точек $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, которая принадлежит $\operatorname{co} A$. $\square$

Следствие 1. *Множество A является выпуклым в том и только в том случае, если $A = \operatorname{co} A$.*

Предложение 3. *Если A и B — выпуклые множества, то*
$$\operatorname{co}(A \cup B) = \{\, x \in X : x = (1-\alpha)a + \alpha b,\ a \in A,\ b \in B,\ \alpha \in [0,1] \,\}.$$

Доказательство. Из определения выпуклой оболочки вытекает, что $(1-\alpha)a + \alpha b \in \operatorname{co}(A \cup B)$ для всех $a \in A$, $b \in B$ и $\alpha \in [0,1]$. Пусть $x \in \operatorname{co}(A \cup B)$. Тогда
$$x = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j + \sum_{j=1}^{m}\beta_j y_j,$$
где $x_1, \dots, x_n \in A$, $y_1, \dots, y_m \in B$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$ и
$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j + \sum_{j=1}^{m}\beta_j = 1.$$
Положим
$$\alpha = \sum_{j=1}^{m}\beta_j.$$
Предположим, что $0 < \alpha < 1$. Тогда $x = (1-\alpha)a + \alpha b$, где
$$a = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{1-\alpha}x_j, \quad b = \sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\alpha}y_j.$$
В силу того, что
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{1-\alpha} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\alpha} = 1,$$
$a \in A$, а $b \in B$. При $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$ можно непосредственно убедиться, что справедливо то же представление. $\square$

3. Аффинные подпространства

Подмножество $Y \subset X$ называется *аффинным подпространством* X, если для любых $x, y \in Y$ точка $(1-\alpha)x + \alpha y \in Y$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Аффинной комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$ называется точка

$$x = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Предложение 4. *Если Y — аффинное подпространство, то любая аффинная комбинация точек $x_1, \dots, x_n \in Y$ принадлежит Y.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу точек. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для любой аффинной комбинации из не более, чем $n-1$ точек. Пусть имеется точка x вида (2) и $n > 1$. Среди $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ найдется отличное от единицы. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 1$. Положим
$$\widetilde{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^{n} \widetilde{\alpha}_j = 1,$$

из предположения индукции вытекает, что

$$\widetilde{x} = \sum_{j=2}^{n} \widetilde{\alpha}_j x_j \in Y.$$

Тогда из того, что Y аффинное подпространство следует, что

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\widetilde{x} \in Y.$$

□

Множество всех аффинных комбинаций точек из множества A называется *аффинной оболочкой* $\operatorname{aff} A$ *множества* A

$$\operatorname{aff} A = \left\{ x \in X : x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ x_1, \ldots, x_n \in A,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Среди всех аффинных подпространств, содержащих данное множество $A \subset X$, существует наименьшее, т.е. то, которое содержится в любом аффинном подпространстве, содержащем A. Действительно, семейство всех аффинных подпространств, содержащих A, не пусто (в него входит, например, все пространство X). Пересечение всех множеств этого семейства будет аффинным подпространством (т.к. пересечение любого семейства аффинных подпространств — аффинное подпространство), содержащим A и наименьшим. Докажем, что это множество совпадает с $\operatorname{aff} A$.

Предложение 5. *Множество* $\operatorname{aff} A$ *является наименьшим аффинным подпространством, содержащим* A.

Доказательство. Из предложения 4 вытекает, что если некоторое аффинное подпространство содержит A, то оно содержит любую аффинную комбинацию точек из A, а значит, оно содержит $\operatorname{aff} A$. Следовательно, пересечение всех аффинных подпространств содержит $\operatorname{aff} A$. Осталось показать что $\operatorname{aff} A$ является аффинным подпространством, в этом случае оно совпадет с пересечением всех аффинных подпространств, содержащих A. Рассмотрим две произвольные точки $\operatorname{aff} A$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)\alpha_j x_j + \sum_{j=1}^{m} \alpha\beta_j y_j.$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)\alpha_j + \sum_{j=1}^{m} \alpha\beta_j = (1-\alpha) + \alpha = 1,$$

то мы получили аффинную комбинацию точек $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, которая принадлежит $\operatorname{aff} A$. □

Следствие 2. *Множество* A *является аффинным подпространством в том и только в том случае, если* $A = \operatorname{aff} A$.

Предложение 6. *Каждое аффинное подпространство $Y \subset X$ представляется в виде $Y = a + L_Y$, где a — произвольная точка из Y, а L_Y — линейное подпространство из X, причем L_Y определено однозначно (не зависит от a).*

Доказательство. Пусть $a \in Y$. Положим

$$L_Y = \{\, x \in X : x = y - a, \quad y \in Y \,\}.$$

Докажем, что L_Y — линейное подпространство X. Пусть $x \in L_Y$. Тогда $x = y - a$, где $y \in Y$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу того, что $\lambda y + (1-\lambda)a \in Y$, имеем

$$\lambda x = \lambda(y - a) = \lambda y + (1-\lambda)a - a \in L_Y.$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in L_Y$ и $x_1 = y_1 - a$, а $x_2 = y_2 - a$, где $y_1, y_2 \in Y$. Так как $(y_1 + y_2)/2 \in Y$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} - a \in L_Y.$$

Из доказанного выше, положив $\lambda = 2$, получаем, что $x_1 + x_2 \in L_Y$.

Положим

$$M_Y = \{\, x \in X : x = y - b, \quad y \in Y \,\},$$

где $b \in Y$. В силу того, что $b - a \in L_Y$, имеем

$$b + L_Y = a + (b - a) + L_Y = a + L_Y = Y.$$

Следовательно, $M_Y = L_Y$. □

Размерностью аффинного подпространства Y называется размерность соответствующего линейного подпространства L_Y:

$$\dim Y = \dim L_Y.$$

Размерностью произвольного множества A называется размерность его аффинной оболочки $\operatorname{aff} A$:

$$\dim A = \dim \operatorname{aff} A.$$

Поскольку $\operatorname{co} A \subset \operatorname{aff} A$, то

$$\dim A = \dim \operatorname{co} A = \dim \operatorname{aff} A.$$

4. Теорема Каратеодори

Теорема 1 (Каратеодори). *Если $\dim \operatorname{co} A = d$, то любой элемент множества $\operatorname{co} A$ представляется в виде выпуклой комбинации не более, чем $d+1$ элемента множества A.*

Доказательство. Положим $Y = \operatorname{aff} A$. Тогда $\dim Y = d$. Пусть

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \quad n \geq d+2, \quad x_j \in A.$$

Тогда элементы $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1$ принадлежат линейному пространству L_Y (см. предложение 6), размерность которого d. Следовательно, они линейно зависимы. Тем самым существуют $\beta_2, \ldots, \beta_n$, не все равные нулю, для которых

$$\sum_{j=2}^{n} \beta_j (x_j - x_1) = 0.$$

Положим

$$\gamma_1 = -\sum_{j=2}^{n} \beta_j, \quad \gamma_j = \beta_j, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 0,$$

причем $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ не все равны нулю. Следовательно, среди чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ существуют отрицательные числа. Пусть

$$a = \min\left\{ -\frac{\alpha_j}{\gamma_j} : \gamma_j < 0 \right\} = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k}.$$

Тогда $\alpha_j + a\gamma_j \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Кроме того,

$$x = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + a\gamma_j) x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + a\gamma_j) = 1.$$

Так как $\alpha_k + a\gamma_k = 0$, то x представляется в виде выпуклой комбинации из $n-1$ точки. Если $n-1 > d+1$, то продолжая этот процесс придем к тому, что x представляется в виде выпуклой комбинации не более, чем $d+1$ элемента множества A. □

Пусть X — линейное нормированное пространство.

Теорема 2. *Выпуклая оболочка компакта в конечномерном пространстве X является компактом.*

Доказательство. Пусть $\dim X = d$, $A \subset X$ — компакт. Докажем, что $\operatorname{co} A$ — компакт. Для этого достаточно доказать, что из любой последовательности $\{x_k\} \subset \operatorname{co} A$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из $\operatorname{co} A$. По теореме Каратеодори

$$x_k = \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_{kj} x_{kj}, \quad x_{kj} \in A, \quad \alpha_{kj} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_{kj} = 1.$$

Так как A — компакт, то в последовательности $\{x_{k1}\}$ существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке $y_1 \in A$, а в этой подпоследовательности в $\{\alpha_{k1}\}$ существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторому числу $\alpha_1 \in [0, 1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_{k1} \to y_1$ и $\alpha_{k1} \to \alpha_1$ при $k \to \infty$. Аналогично, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $x_{kj} \to y_j$ и $\alpha_{kj} \to \alpha_j$ при $k \to \infty$ для любого $j = 2, \dots, d+1$. При этом

$$x_k \to \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_j y_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_j = 1.$$

Это означает, что предельная точка принадлежит $\operatorname{co} A$. □

Конической комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$ называется точка

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0.$$

Множество всех конических комбинаций точек из множества A называется *конической оболочкой* $\operatorname{cone} A$ *множества* A

$$\operatorname{cone} A = \left\{ x \in X : x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ x_1, \dots, x_n \in A,\ \alpha_j \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Напомним, что *линейной оболочкой множества* A называется множество всех линейных комбинаций элементов из множества A:

$$\operatorname{lin} A = \left\{ x \in X : x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ x_1, \ldots, x_n \in A,\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 3 (Каратеодори для конической оболочки). *Если* $\dim \operatorname{lin} A = d$, *то любой элемент множества* $\operatorname{cone} A$ *представляется в виде конической комбинации не более, чем* d *линейно независимых элементов множества* A.

Доказательство. Пусть

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0.$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы, то $n \leq d$ и все доказано. Если элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы, то найдутся не все равные нулю $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j = 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что среди $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ есть отрицательные числа (если они все положительные, то можно рассматривать $-\gamma_1, \ldots, -\gamma_n$). Пусть

$$a = \min \left\{ -\frac{\alpha_j}{\gamma_j} : \gamma_j < 0 \right\} = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k}.$$

Тогда $\alpha_j + a\gamma_j \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и

$$x = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + a\gamma_j) x_j.$$

Так как $\alpha_k + a\gamma_k = 0$, то x представляется в виде конической комбинации из $n-1$ точки. Если эти элементы линейно зависимы, то продолжая этот процесс придем к тому, что x представляется в виде конической комбинации не более, чем d линейно независимых элементов множества A. □

5. Теоремы Радона и Хелли

Теорема 4 (Радона). *Пусть* X *— линейное пространство и* $\dim X = d$. *Тогда любое конечное множество из* X*, содержащее не менее* $d+2$ *точек, может быть разбито на два непересекающихся множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Доказательство. Пусть даны точки $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq d+2$. Векторы $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1$ — линейно зависимы, т.к. их не менее $d+1$. Следовательно, существуют $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j=2}^{n} \alpha_j (x_j - x_1) = 0.$$

Положим

$$\beta_1 = -\sum_{j=2}^{n} \alpha_j, \quad \beta_j = \alpha_j, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0,$$

причем $\beta_1, \dots, \beta_n$ не все равны нулю. Поменяем нумерацию и будем считать, что $\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$, а $\beta_{m+1}, \dots, \beta_n < 0$. Положим

$$\beta = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = -\sum_{j=m+1}^{n} \beta_j, \quad A = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad B = \{x_{m+1}, \dots, x_n\}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j x_j = \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j x_j, \tag{3}$$

где $\gamma_j = \beta_j / \beta$, $j = 1, \dots, m$, и $\gamma_j = -\beta_j/\beta$, $j = m+1, \dots, n$. Причем

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j = 1.$$

Таким образом, выпуклая комбинация в левой части равенства (3) лежит в $\operatorname{co} A$, а выпуклая комбинация в правой части равенства (3) лежит в $\operatorname{co} B$. Тем самым $\operatorname{co} A \cap \operatorname{co} B \neq \emptyset$. □

Теорема 5 (Хелли).

1. *Если* $\dim X = d$ *и в* X *имеются* $n \geq d+1$ *выпуклых множеств, любые* $d+1$ *из которых имеют общую точку, то и все эти множества имеют общую точку.*

2. *Пусть* X — *линейное нормированное пространство,* $\dim X = d$, $\mathcal{I}$ — *некоторое бесконечное множество индексов и* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ — *семейство замкнутых выпуклых подмножеств* X*, по крайней мере одно из которых компактно. Тогда если любое подсемейство из* $d+1$ *множеств имеет общую точку, то и все семейство имеет общую точку.*

Доказательство. 1. Будем доказывать утверждение индукцией по числу множеств n. При $n = d+1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq d+2$ и теорема доказана для любых $n-1$ выпуклых множеств. Обозначим данные множества через A_j, $j = 1, \dots, n$. Для каждого $k = 1, \dots, n$ возьмем произвольную точку

$$x_k \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} A_j$$

(по предположению индукции эти пересечения не пусты). Так как $n \geq d+2$, то к точкам $x_1, \dots, x_n$ применима теорема Радона. С возможной перенумерацией точек получаем, что существует натуральное число $m \leq n-1$, для которого множества $\operatorname{co}\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\operatorname{co}\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ имеют общую точку x. Точка x_j при всех $j = 1, \dots, m$ принадлежит каждому из множеств $A_{m+1}, \dots, A_n$. В силу выпуклости этих множеств каждое из них содержит $\operatorname{co}\{x_1, \dots, x_m\}$. Следовательно, каждое из этих множеств содержит точку x. Аналогично доказывается, что каждое из множеств $A_1, \dots, A_m$ содержит точку x. Тем самым доказано, что у всех множеств $A_1, \dots, A_n$ имеется общая точка.

2. Пусть A_{α_0} — компактное множество. Из 1 следует, что любое конечное семейство из множества замкнутых подмножеств $B_\alpha = A_\alpha \cap A_{\alpha_0}$, $\alpha \in \mathcal{I}$, содержащихся в A_{α_0} имеет общую точку. Предположим, что все семейство не имеет общей точки. Тогда множества $\{X \setminus B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ — открытые и образуют покрытие компактного множества A_{α_0}. В силу компактности из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие $\{X \setminus B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_n}$. Но тогда конечное семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_n}$ не может иметь общей точки. Полученное противоречие доказывает утверждение 2. □

6. Теоремы отделимости

Пусть A и B — непустые подмножества нормированного пространства X. Говорят, что ненулевой функционал $x^* \in X^*$ *отделяет множества A и B*, если

$$\sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle \le \inf_{x\in B}\langle x^*, x\rangle.$$

Если неравенство строгое, то говорят, что x^* *строго отделяет A и B*.

Пусть число $\gamma \in \mathbb{R}$ таково, что

$$\sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle \le \gamma \le \inf_{x\in B}\langle x^*, x\rangle.$$

Тогда, геометрически, отделимость множеств A и B означает, что они расположены по разные стороны от гиперплоскости

$$\{\, x \in X : \langle x^*, x\rangle = \gamma \,\}.$$

Пусть X — нормированное пространство, $\widehat{x} \in X$ и $r > 0$. Положим

$$B_r(\widehat{x}) = \{\, x \in X : \|x - \widehat{x}\|_X < r \,\}.$$

Если A — некоторое множество из X, то точка $\widehat{x} \in A$ называется *внутренней точкой* A, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(\widehat{x}) \subset A$. Множество внутренних точек A обозначается через $\operatorname{int} A$.

Напомним формулировку первой теоремы отделимости (см. [**4**, стр. 243]).

Теорема 6 (Первая теорема отделимости). *Пусть A и B — непустые выпуклые подмножества нормированного пространства X, причем $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ и $B \cap \operatorname{int} A = \emptyset$. Тогда множества A и B отделимы.*

Отсюда следует

Теорема 7 (Вторая теорема отделимости). *Пусть A — непустое замкнутое выпуклое подмножество нормированного пространства X и $\widehat{x} \notin A$. Тогда множества A и $\widehat{x}$ строго отделимы.*

Доказательство. Так как A замкнуто, то дополнение к A открыто и поэтому существует такое $r > 0$, что открытый шар $B_r(\widehat{x})$ не пересекается с A. Тогда по первой теореме отделимости существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$ такой, что

$$\sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle \le \inf_{x\in B_r(\widehat{x})}\langle x^*, x\rangle.$$

Но

$$\inf_{x\in B_r(\widehat{x})}\langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \widehat{x}\rangle,$$

так как ненулевой линейный непрерывный функционал не может достигать точной нижней грани во внутренней точке. Следовательно, множества A и $\widehat{x}$ строго отделимы. □

7. Вторая теорема отделимости в конечномерном случае

В этом разделе мы сформулируем и докажем теоремы отделимости в конечномерном случае. Начнем со второй теоремы отделимости.

Теорема 8. *Пусть A — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\widehat{x} \notin A$. Тогда множества A и $\widehat{x}$ строго отделимы.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in A$. Положим

$$A_0 = \{\, x \in A : |x - \widehat{x}| \le |x_0 - \widehat{x}| \,\}.$$

Функция $f(x) = |x - \widehat{x}|$ является непрерывной на ограниченном замкнутом множестве A_0 и, следовательно, по теореме Вейерштрасса достигает своего минимума в некоторой точке $\widehat{a}$. Тем самым $\widehat{a}$ — ближайшая точка к $\widehat{x}$ из множества A_0, а значит, и из множества A. Положим $x^* = (\widehat{a} - \widehat{x})^T$ и рассмотрим гиперплоскость $x^* \cdot x = x^* \cdot \widehat{a}$. Докажем, что эта гиперплоскость отделяет $\widehat{x}$ от A. Имеем

$$x^* \cdot \widehat{x} = x^* \cdot (\widehat{x} - \widehat{a} + \widehat{a}) = -|x^*|^2 + x^* \cdot \widehat{a} < x^* \cdot \widehat{a}.$$

Остается доказать, что $x^* \cdot x \ge x^* \cdot \widehat{a}$ для всех $x \in A$. Предположим, что нашлась точка $a_0 \in A$, для которой $x^* \cdot a_0 < x^* \cdot \widehat{a}$. Так как A — выпуклое множество, $(1-t)\widehat{a} + ta_0 \in A$ при всех $t \in [0,1]$. Имеем

$$|(1-t)\widehat{a} + ta_0 - \widehat{x}|^2 = |(x^*)^T + t(a_0 - \widehat{a})|^2 = |x^*|^2 + 2t\alpha + t^2|a_0 - \widehat{a}|^2,$$

где $\alpha = x^* \cdot (a_0 - \widehat{a}) < 0$. Поэтому при достаточно малых t

$$|(1-t)\widehat{a} + ta_0 - \widehat{x}|^2 < |x^*|^2 = |\widehat{a} - \widehat{x}|^2,$$

что противоречит тому, что $\widehat{a}$ — ближайшая точка к $\widehat{x}$ из точек множества A. □

8. Аффинная независимость. Симплексы

Перед доказательством первой теоремы отделимости для конечномерного случая нам потребуется некоторые вспомогательные утверждения. Пусть X — линейное пространство. Векторы $x_1, \dots, x_{k+1} \in X$ называются *аффинно независимыми,* если из того, что

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 0, \tag{4}$$

следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k+1} = 0$.

Предложение 7. *Векторы $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно независимы в том и только в том случае, если векторы $x_j - x_1$, $2 \le j \le k+1$, — линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно независимы и

$$\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j (x_j - x_1) = 0. \tag{5}$$

Тогда

$$\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j x_j - \left(\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j \right) x_1 = 0. \tag{6}$$

Из аффинной независимости $x_1, \dots, x_{k+1}$ вытекает, что $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{k+1} = 0$.

Пусть теперь векторы $x_j - x_1$, $2 \le j \le k+1$, — линейно независимы и выполняются условия (4). Тогда имеет место равенство (6), которое эквивалентно равенству (5). Из линейной независимости векторов $x_j - x_1$, $2 \le j \le k+1$, получаем, что $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{k+1} = 0$. Кроме того,

$$\lambda_1 = -\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j = 0.$$

□

Выпуклая оболочка аффинно независимых векторов $x_1, \dots, x_{k+1}$ называется *k-мерным симплексом*, а векторы $x_1, \dots, x_{k+1}$ — *вершинами симплекса.* Любой вектор из этого симплекса единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \ j = 1, \dots, k+1.$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ называются *барицентрическими координатами вектора x.*

Одномерные симплексы — это отрезки, двумерные — треугольники, трехмерные — тетраэдры.

Предложение 8. *Пусть $A \subset X$ и $0 < \dim A < \infty$. Тогда максимальное число аффинно независимых векторов в множестве A равно* $\dim A + 1$.

Доказательство. Предположим, что $x_1, \dots, x_{k+1} \in A$, являются аффинно независимыми и максимальное число аффинно независимых векторов в A равно $k+1$. Если предположить, что существует вектор $x_0 \in A$ такой, что $x_0 \notin \operatorname{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$, то векторы $x_0, x_1, \dots, x_{k+1}$ будут аффинно независимыми, что противоречит максимальности числа аффинно независимых векторов в A. Таким образом, $A \subset \operatorname{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$. Следовательно,

$$\operatorname{aff} A = \operatorname{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}.$$

Поэтому

$$k = \dim \operatorname{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = \dim \operatorname{aff} A = \dim A.$$

$\square$

Следствие 3. *Если A — выпуклое множество,* $\dim A = d$, $0 < d < \infty$, *то A содержит d-мерный симплекс.*

Предложение 9. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ — непустое выпуклое множество и* $\dim A = d$. *Тогда* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Доказательство. Из следствия 3 вытекает, что A содержит d-мерный симплекс. Пусть $a_1, \dots, a_{d+1}$ — его вершины. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 = 0$. Покажем, что любая точка этого симплекса с положительными барицентрическами координатами является внутренней точкой симплекса, а следовательно, и множества A. Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k a_k, \quad \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, \dots, d+1.$$

Пусть $e_1, \dots, e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$. Так как $a_2, \dots, a_{d+1}$ — линейно независимы, векторы стандартного базиса можно представить в виде

$$e_j = \sum_{k=2}^{d+1} \alpha_{jk} a_k, \quad j = 1, \dots, d.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, чтобы

$$\lambda_k - \varepsilon \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{jk}| > 0, \quad k = 2, \dots, d+1,$$

и

$$\sum_{k=2}^{d+1} \left(\lambda_k + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{jk}| \right) < 1.$$

Пусть x — произвольный вектор из $B_\varepsilon(0)$. Тогда его можно записать в виде

$$x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j = \sum_{j=1}^{d} x_j \sum_{k=2}^{d+1} \alpha_{jk} a_k = \sum_{k=2}^{d+1} \sum_{j=1}^{d} x_j \alpha_{jk} a_k,$$

где $|x_j| < \varepsilon$. Таким образом,

$$x_0 + x = \sum_{k=2}^{d+1} \Big(\lambda_k + \sum_{j=1}^{d} x_j \alpha_{jk}\Big) a_k = \sum_{k=2}^{d+1} \gamma_k a_k.$$

В силу выбора ε, имеем

$$\gamma_k > 0, \quad k = 2, \ldots, d+1, \quad \sum_{k=2}^{d+1} \gamma_k < 1.$$

Тем самым точка x_0 является внутренней точкой симплекса. □

9. Относительная внутренность. Первая теорема отделимости в конечномерном случае

Если рассмотреть отрезок на плоскости, то все его точки не являются внутренними, хотя ясно, что точки, отличные от концевых, обладают некоторыми свойствами, присущими внутренним точкам. Это наблюдение приводит к следующему понятию.

Пусть X — линейное нормированное пространство и $A \subset X$. Точка $x \in A$ называется *относительно внутренней точкой множества* A, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{aff} A \subset A$. Множество всех относительно внутренних точек A называется *относительной внутренностью* A и обозначается $\operatorname{ri} A$.

Предложение 10. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ — непустое выпуклое множество. Тогда*

a) $\operatorname{ri} A \neq \emptyset$;
b) *если $x_1 \in \operatorname{ri} A$, а $x_2 \in \operatorname{cl} A$, то все точки интервала (x_1, x_2) принадлежат* $\operatorname{ri} A$;
c) $\operatorname{ri} A$ *и* $\operatorname{cl} A$ *— выпуклые множества и* $\operatorname{cl} \operatorname{ri} A = \operatorname{cl} A$.

Доказательство. a). Предположим сначала, что $\dim A = d$. Тогда утверждение непосредственно вытекает из предложения 9. Если $\dim A = d_1 < d$, можно вместо аффинного подпространства $\operatorname{aff} A$ рассматривать $\mathbb{R}^{d_1}$. Те же аргументы, которые приводились при доказательстве предложения 9, показывают, что A содержит внутренние точки относительно пространства $\mathbb{R}^{d_1}$. Это означает, что $\operatorname{ri} A \neq \emptyset$.

b). В силу сделанного выше замечания будем считать, что $\operatorname{aff} A = \mathbb{R}^d$. Тогда $\operatorname{ri} A = \operatorname{int} A$. Пусть $y \in (x_1, x_2)$. Тогда $y = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, $0 < \alpha < 1$. Так как $x_2 \in \operatorname{cl} A$, то $x_2 \in A + B_\varepsilon(0)$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} y + B_\varepsilon(0) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 + B_\varepsilon(0) &\subset (1-\alpha)x_1 + \alpha(A + B_\varepsilon(0)) + B_\varepsilon(0) \\ &= (1-\alpha)(x_1 + B_\gamma(0)) + \alpha A, \end{aligned}$$

где $\gamma = \varepsilon(1+\alpha)/(1-\alpha)$. В силу того, что $x_1 \in \operatorname{int} A$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $x_1 + B_\gamma(0) \subset A$. Поэтому

$$y + B_\varepsilon(0) \subset (1-\alpha)A + \alpha A = A.$$

c). Будем снова предполагать, что $\operatorname{aff} A = \mathbb{R}^d$. Выпуклость $\operatorname{ri} A$ непосредственно следует из b). Докажем выпуклость $\operatorname{cl} A$. Пусть $x_1, x_2 \in \operatorname{cl} A$, а $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$. Для любого $\varepsilon > 0$

$$(x_j + B_\varepsilon(0)) \cap A \neq \emptyset, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\widehat{x}_j \in (x_j + B_\varepsilon(0)) \cap A$, $j = 1, 2$. Положим $\widehat{x} = (1-\alpha)\widehat{x}_1 + \alpha\widehat{x}_2$. Тогда $\widehat{x} \in A$. Кроме того,

$$\widehat{x} \in (1-\alpha)(x_1 + B_\varepsilon(0)) + \alpha(x_1 + B_\varepsilon(0)) = x + B_\varepsilon(0).$$

Тем самым в любой окрестности точки x есть точки из A. Следовательно, $x \in \operatorname{cl} A$.

Включение $\operatorname{cl}\operatorname{ri} A \subset \operatorname{cl} A$ очевидно. Пусть $x \in \operatorname{cl} A$. Из a) следует, что существует $x_1 \in \operatorname{ri} A$. Из b) вытекает, что $(x_1, x) \in \operatorname{ri} A$. Следовательно, $x \in \operatorname{cl}\operatorname{ri} A$. □

Теорема 9. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^d$ — непустые выпуклые множества и $\operatorname{ri} A \cap B = \emptyset$. Тогда A и B отделимы.*

Доказательство. Положим $C = \operatorname{ri} A - B$. Так как $\operatorname{ri} A$ — выпуклое множество (предложение 10, c)), то C — выпуклое множество и $0 \notin C$. Предположим $0 \notin \operatorname{cl} C$. Из предложения 10 (c)) вытекает, что $\operatorname{cl} C$ тоже выпуклое множество. Тогда по теореме 8 существует вектор $x' \in (\mathbb{R}^d)'$ такой, что $x' \cdot x < 0$ для всех $x \in \operatorname{cl} C$.

Пусть теперь $0 \in \operatorname{cl} C$. Возьмем произвольный вектор $x \in \operatorname{ri} C$ ($\operatorname{ri} C \neq \emptyset$ в силу предложения 10, a)). Тогда для любого $\lambda > 0$ вектор $-\lambda x \notin \operatorname{cl} C$. Действительно, в противном случае из предложения 10 (b)) вытекало бы, что

$$0 = \frac{\lambda}{\lambda+1} x + \frac{1}{\lambda+1}(-\lambda x) \in \operatorname{ri} C \subset C.$$

Тем самым существует последовательность векторов $x_k \notin \operatorname{cl} C$ такая, что $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. По второй теореме отделимости эти векторы можно строго отделить от $\operatorname{cl} C$. Следовательно, существуют $x'_k \in (\mathbb{R}^d)'$, $x'_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что

$$x'_k \cdot x < x'_k \cdot x_k \tag{7}$$

для всех $x \in \operatorname{cl} C$ и всех $k \in \mathbb{N}$. Разделив (7) на $|x'_k|$, можно считать $|x'_k| = 1$. Из того, что сфера в конечномерном пространстве ограничена и замкнута, вытекает существование подпоследовательности в $\{x'_k\}$, сходящейся к некоторому вектору x', $|x'| = 1$. Переходя к пределу по этой подпоследовательности, получим из (7), что $x' \cdot x \leq 0$ для всех $x \in \operatorname{cl} C$.

Итак, в обоих случаях доказано существование $x' \in (\mathbb{R}^d)'$ такого, что $x' \cdot x \leq 0$ для всех $x \in \operatorname{cl} C$, а значит, и для всех $x = a - b$, где $a \in \operatorname{ri} A$, а $b \in B$. Таким образом,

$$\sup_{a \in \operatorname{ri} A} x' \cdot a \leq \inf_{b \in B} x' \cdot b. \tag{8}$$

Неравенство (8) останется справедливым, если в левой части заменить $\operatorname{ri} A$ на $\operatorname{cl}\operatorname{ri} A$. А поскольку $A \subset \operatorname{cl} A = \operatorname{cl}\operatorname{ri} A$ (см. предложение 10, c)), то (8) верно и для A, что означает отделимость множеств A и B. □

10. Выпуклые функции

Мы будем рассматривать функции, которые принимают не только конечные значения. С этой целью вводится понятие расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Арифметические операции и неравенства для элементов расширенной прямой понимаются следующим образом: $-\infty < a < +\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $a + (\pm\infty) = \pm\infty$ для всех $a \in \mathbb{R}$,

$$a(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & a < 0, \end{cases},$$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

Пусть X — линейное пространство и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Множества

$$\operatorname{dom} f = \{\, x \in X : f(x) < +\infty \,\},$$
$$\operatorname{epi} f = \{\, (x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x),\ x \in \operatorname{dom} f \,\}$$

называются соответственно *эффективным множеством* и *надграфиком* (или *эпиграфом*) *функции* f. Функцию f называют *собственной*, если $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ и $f(x) > -\infty$ при всех $x \in X$.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если ее надграфик выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ и любого $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

которое называется *неравенством Йенсена*.

Пусть $X = \mathbb{R}^d$ и $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Через $f''(x)$ обозначим гессиан f в точке x

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Теорема 10. *Если функция $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^d$, то она является выпуклой в том, и только в том случае, если ее гессиан в любой точке $x \in \mathbb{R}^d$ удовлетворяет условию*

$$h^T f''(x) h \geq 0$$

для всех $h \in \mathbb{R}^d$ (матрица гессиана в любой точке является неотрицательно определенной).

Доказательство. Пусть f — выпуклая функция. Предположим, что существует $x \in \mathbb{R}^d$ и $h \in \mathbb{R}^d$ такие, что $h^T f''(x) h < 0$. По формуле Тейлора для $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(x + th) = f(x) + f'(x) h t + h^T f''(x) h \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$
$$f(x - th) = f(x) - f'(x) h t + h^T f''(x) h \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Отсюда, складывая эти равенства, получаем

$$f(x + th) - 2f(x) + f(x - th) = h^T f''(x) h t^2 + o(t^2).$$

Следовательно, при достаточно малых t

$$f(x + th) - 2f(x) + f(x - th) < 0,$$

т.е.

$$f\left(\frac{x - th}{2} + \frac{x + th}{2}\right) > \frac{1}{2} f(x - th) + \frac{1}{2} f(x + th),$$

что противоречит выпуклости f.

Пусть теперь $h^T f''(x) h \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и всех $h \in \mathbb{R}^d$. Для произвольных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1) - t(f(x_2) - f(x_1)).$$

Имеем $F(0) = F(1) = 0$,

$$F''(t) = (x_2 - x_1)^T f''(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Предположим, что при некотором $t \in (0,1)$ $F(t) > 0$. Тогда найдется точка $t_0 \in (0,1)$, в которой функция F будет достигать максимального значения и, значит, $F'(t_0) = 0$. Поскольку $F''(t) \geq 0$ при всех $t \in [t_0, 1]$, то $F'(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, 1]$. Тем самым функция F не убывает на отрезке $[t_0, 1]$, а значит, $F(1) > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $F(t) \leq 0$ для всех $t \in [0,1]$. Таким образом, для всех $t \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

что и означает выпуклость функции f. □

11. Теорема Каруша–Куна–Таккера

Пусть $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, — функции, определенные на некотором множестве A. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x) \to \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \tag{9}$$

Свяжем с задачей (9) следующую *функцию Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x),$$

где $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — набор *множителей Лагранжа.* Всякий элемент, для которого выполнены условия экстремальной задачи ($f_j(x) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$, $x \in A$), будем называть *допустимым.*

Лемма 1. *Пусть $\widehat{x}$ — допустимый элемент в задаче* (9) *и существует набор множителей Лагранжа $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ таких, что*

(*a*) $\min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda})$ (*условие минимума*);

(*b*) $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$ (*условие неотрицательности*);

(*c*) $\lambda_j f_j(\widehat{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, m$ (*условие дополняющей нежесткости*).

Тогда, если $\lambda_0 > 0$, то $\widehat{x}$ — экстремальный элемент в задаче (9).

Доказательство. Для любого допустимого в задаче (9) элемента $x \in A$ имеем

$$\lambda_0 f_0(x) \geq \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda}) = \lambda_0 f_0(\widehat{x}).$$

Деля на λ_0, получаем требуемое. □

Пусть X — вещественное линейное пространство, $f_j\colon X \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции и A — непустое выпуклое подмножество X. Задачу

$$f_0(x) \to \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad x \in A, \tag{10}$$

называют выпуклой задачей или задачей выпуклого программирования.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 11 (Каруша–Куна–Таккера).

1. *Если $\widehat{x}$ — минимум в задаче* (10), *то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, что выполнены условия* (*a*), (*b*) *и* (*c*) *из леммы* 1.

2. *Если существует допустимая в* (10) *точка $\widehat{x}$ и набор множителей Лагранжа $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющие условиям* (*a*), (*b*) *и* (*c*) *и при этом $\lambda_0 > 0$, то $\widehat{x}$ — решение задачи* (10).

3. *Если при выполнении условий 1 найдется точка $\overline{x} \in A$ такая, что $f_j(\overline{x}) < 0$, $1 \leq j \leq m$, то $\lambda_0 \neq 0$ (условие Слейтера).*

Доказательство. 1. Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи (10). Рассмотрим множество

$$M = \{\, \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1} : \exists\, x \in A : f_0(x) - f_0(\widehat{x}) < \mu_0, \\ f_j(x) \le \mu_j,\ j = 1, \dots, m \,\}.$$

Непосредственная проверка показывает, что это множество выпукло. Кроме того, легко видеть, что оно содержит все векторы с положительными компонентами (надо взять $x = \widehat{x}$) и тем самым его внутренность не пуста. Наконец, $0 \notin M$, так как в противном случае нашелся бы элемент $\overline{x} \in A$ такой, что $f_j(\overline{x}) \le 0$, $j = 1, \dots, m$, и $f_0(\overline{x}) - f_0(\widehat{x}) < 0$, в противоречие с тем, что $\widehat{x}$ — минимум.

Согласно первой теореме отделимости найдется такой ненулевой функционал, т. е. вектор $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (\mathbb{R}^{m+1})^*$, что

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \mu_j \ge 0 \tag{11}$$

для всех $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)^T \in M$. Пусть $\delta > 0$. Подставляя в (11) векторы $(1, \delta, \dots, \delta)^T, \dots, (\delta, \dots, \delta, 1)^T$, а затем устремляя δ к нулю, получаем, что $\lambda_j \ge 0$, $j = 0, 1, \dots, m$, т. е. доказано утверждение (b) теоремы.

Теперь подставим в (11) векторы $(\delta, \dots, \delta, f_j(\widehat{x}), \delta, \dots, \delta)^T$, $j = 1, \dots, m$ (они принадлежат M, надо взять $x = \widehat{x}$) и снова, устремляя δ к нулю, получим, что $\lambda_j f_j(\widehat{x}) \ge 0$. Но $\lambda_j f_j(\widehat{x}) \le 0$, так как $\lambda_j \ge 0$, а $f_j(\widehat{x}) \le 0$ и поэтому $\lambda_j f_j(\widehat{x}) = 0$, $j = 1, \dots, m$, что доказывает утверждение (c).

Пусть $x \in A$. Ясно, что $(f_0(x) - f_0(\widehat{x}) + \delta, f_1(x), \dots, f_m(x))^T \in M$. Подставляя этот вектор в (11), приходим (в пределе при $\delta \to 0$) к неравенству $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x) \ge \lambda_0 f_0(\widehat{x})$. Добавляя справа нулевые слагаемые $\lambda_j f_j(\widehat{x})$, $j = 1, \dots, m$, получаем, что $\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) \ge \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda})$ и (a) доказано.

2. Второе утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 1.

3. Докажем последнее утверждение теоремы. Если $\lambda_0 = 0$, то ненулевой множитель Лагранжа находится среди остальных и поэтому (с учетом (c)) $\mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\overline{x}) < 0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\widehat{x}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda})$, что противоречит (a). □

12. Субдифференциал

Пусть X — линейное нормированное пространство, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\widehat{x} \in X$ и функция f конечна в точке $\widehat{x}$. *Субдифференциалом функции f в точке $\widehat{x}$* называется множество (возможно пустое)

$$\partial f(\widehat{x}) = \{\, x^* \in X^* : f(x) - f(\widehat{x}) \ge \langle x^*, x - \widehat{x} \rangle,\ \forall\, x \in X \,\}.$$

Предложение 11. *Субдифференциал функции является выпуклым множеством.*

Доказательство. Если субдифференциал — пустое множество, то утверждение вытекает из того, что пустое множество — выпукло. Пусть субдифференциал функции f в точке $\widehat{x}$ не пуст и $x_1^*, x_2^* \in \partial f(\widehat{x})$. Тогда для всех $x \in X$

$$f(x) - f(\widehat{x}) \ge \langle x_1^*, x - \widehat{x} \rangle, \quad f(x) - f(\widehat{x}) \ge \langle x_2^*, x - \widehat{x} \rangle.$$

Отсюда при всех $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$(1 - \alpha)(f(x) - f(\widehat{x})) + \alpha(f(x) - f(\widehat{x})) \ge (1 - \alpha)\langle x_1^*, x - \widehat{x} \rangle + \alpha \langle x_2^*, x - \widehat{x} \rangle.$$

Следовательно,

$$f(x) - f(\widehat{x}) \ge \langle (1 - \alpha) x_1^* + \alpha x_2^*, x - \widehat{x} \rangle.$$

Это означает, что $(1 - \alpha) x_1^* + \alpha x_2^* \in \partial f(\widehat{x})$. □

Для функции одной переменной субдифференциал $\partial f(\widehat{x})$ это совокупность угловых коэффициентов k, при которых прямые $y = kx + b$, проходящие через точку $(\widehat{x}, f(\widehat{x}))$ лежат под графиком функции $y = f(x)$

Пример 12.1. Пусть $f(x) = |x|$. Тогда

$$\partial|x| = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ [-1, 1], & x = 0. \end{cases}$$

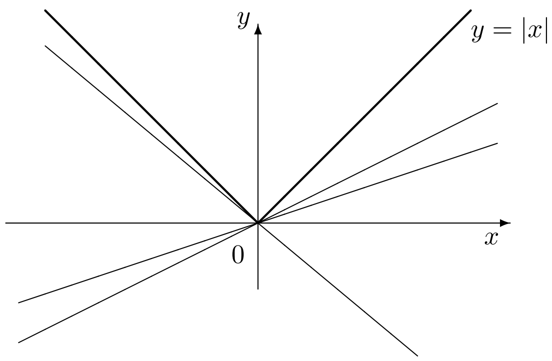

Рис. 1

На рис. 1 изображены несколько линий, проходящих через точку $(0, 0)$ с угловыми коэффициентами из множества $\partial|x|$ при $x = 0$.

Пример 12.2. Пусть X — линейное нормированное пространство и $f(x) = \|x\|$. Найдем сначала $\partial f(0)$. Поскольку $f(0) = 0$, то из определения субдифференциала вытекает, что

$$\partial f(0) = \{\, x^* \in X^* : \|x\| \geq \langle x^*, x\rangle, \ \forall\, x \in X \,\}.$$

Покажем, что единичный шар сопряженного пространства

$$BX^* = \{\, x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1 \,\}$$

содержится в $\partial f(0)$. Действительно, если $x^* \in BX^*$, то для всех $x \in X$

$$\langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\|\|x\| \leq \|x\|.$$

Если теперь $x^* \in \partial f(0)$, то $x^* \in BX^*$, ибо если $\|x^*\| > 1$, то существует $x \in X$ такой, что $\|x\| \leq 1$ и $\langle x^*, x\rangle > 1 \geq \|x\|$. Итак, доказано, что $\partial f(0) = BX^*$.

Найдем теперь $\partial f(x_0)$ при $x_0 \neq 0$. Имеем

$$\partial f(x_0) = \{\, x^* \in X^* : \|x\| - \|x_0\| \geq \langle x^*, x - x_0\rangle, \ \forall\, x \in X \,\}.$$

Предположим, что $x^* \in \partial f(x_0)$. Подставив $x = 0$, получим, что $\langle x^*, x_0\rangle \geq \|x_0\|$. С другой стороны, если подставить $x = 2x_0$, то получим, что $\|x_0\| \geq \langle x^*, x_0\rangle$. Следовательно, $\langle x^*, x_0\rangle = \|x_0\|$. Тогда для всех $x \in X$ должно выполняться неравенство $\|x\| \geq \langle x^*, x\rangle$. Как было показано выше, это означает, что $x^* \in BX^*$. Нетрудно убедиться, что если $x^* \in BX^*$ и $\langle x^*, x_0\rangle = \|x_0\|$, то $x^* \in \partial f(x_0)$. Таким образом, при $x_0 \neq 0$

$$\partial f(x_0) = \{\, x^* \in BX^* : \langle x^*, x_0\rangle = \|x_0\| \,\}.$$

Пусть X — линейное нормированные пространства, а U — открытое подмножество X. Функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой в точке* $\widehat{x} \in U$, если найдется такой линейный функционал $x^* \in X^*$, что для всех $h \in X$, для которых $\widehat{x} + h \in U$ справедливо представление

$$f(\widehat{x} + h) = f(\widehat{x}) + \langle x^*, h\rangle + r(h), \tag{12}$$

где $r(h) = o(\|h\|_X)$ ($|r(h)|/\|h\|_X \to 0$ при $h \to 0$). Линейный функционал x^* называется *производной функции* f в точке $\widehat{x}$ и обозначается $f'(\widehat{x})$.

Следующее предложение показывает, что субдифференциал достаточно естественное обобщение понятия производной на выпуклые функции.

Предложение 12. *Пусть X — линейное нормированное пространство и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция, дифференцируемая в точке $\widehat{x}$. Тогда $\partial f(\widehat{x}) = \{f'(\widehat{x})\}$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Для любого достаточно малого $\alpha > 0$ имеем по неравенству Йенсена

$$f((1-\alpha)\widehat{x} + \alpha x) \le (1-\alpha) f(\widehat{x}) + \alpha f(x),$$

откуда

$$f(\widehat{x} + \alpha(x - \widehat{x})) - f(\widehat{x}) \le \alpha(f(x) - f(\widehat{x})).$$

В силу дифференцируемости функции f в точке $\widehat{x}$ имеем

$$\alpha\langle f'(\widehat{x}), x - \widehat{x}\rangle + o(\alpha) \le \alpha(f(x) - f(\widehat{x})).$$

Сокращая на α и переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получаем, что $f'(\widehat{x}) \in \partial f(\widehat{x})$.

Обратно, если $x^* \in \partial f(\widehat{x})$, то для любого $x \in X$ и любого $t > 0$ имеем $f(\widehat{x} + tx) - f(\widehat{x}) \ge t\langle x^*, x\rangle$. Следовательно,

$$t\langle f'(\widehat{x}), x\rangle + o(t) \ge t\langle x^*, x\rangle,$$

т. е. $\langle f'(\widehat{x}), x\rangle \ge \langle x^*, x\rangle$ для любого x и значит, $x^* = f'(\widehat{x})$. □

13. Теорема Ферма в субдифференциальной форме

Пусть X — линейное нормированное пространство и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная функция. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{13}$$

Теорема 12 (Ферма в субдифференциальной форме). *Точка $\widehat{x} \in \operatorname{dom} f$ является глобальным минимумом в задаче* (13) *тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(\widehat{x})$.*

Доказательство. Если $\widehat{x}$ — глобальный минимум, то $f(x) - f(\widehat{x}) \ge 0 = \langle 0, x - \widehat{x}\rangle$ для любого $x \in X$, т. е. $0 \in \partial f(\widehat{x})$. Если $0 \in \partial f(\widehat{x})$, то $f(x) - f(\widehat{x}) \ge \langle 0, x - \widehat{x}\rangle = 0$, т. е. $f(x) \ge f(\widehat{x})$ для любого $x \in X$. □

Из предложения 12 и теоремы 12 вытекает

Следствие 4. *Если в задаче* (13) *f — выпуклая функция, дифференцируемая в точке $\widehat{x}$, то $\widehat{x}$ — глобальный минимум в том и только в том случае, если $f'(\widehat{x}) = 0$.*

Предложение 13. *Если X — линейное нормированное пространство и у выпуклой собственной функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке $\widehat{x} \in \operatorname{dom} f$ локальный минимум, то в точке $\widehat{x}$ и глобальный минимум.*

Доказательство. Пусть $\widehat{x}$ — локальный минимум, т. е. существует такая окрестность U точки $\widehat{x}$, что $f(\widehat{x}) \le f(x)$ для всех $x \in U$. Пусть теперь x — произвольная точка из X. Для достаточно малых $0 < \alpha \le 1$ точки $(1-\alpha)\widehat{x} + \alpha x$ принадлежат U и поэтому (по неравенству Йенсена) $f(\widehat{x}) \le f((1-\alpha)\widehat{x} + \alpha x) \le (1-\alpha) f(\widehat{x}) + \alpha f(x)$, откуда следует, что $f(\widehat{x}) \le f(x)$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Если X — линейное нормированное пространство, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная выпуклая функция и для некоторого $x^* \in X^*$ в окрестности точки $\widehat{x} \in \operatorname{dom} f$ выполняется неравенство*

$$f(x) - f(\widehat{x}) \geq \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle, \tag{14}$$

то $x^* \in \partial f(\widehat{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $g(x) = f(x) - f(\widehat{x}) - \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle$ является выпуклой и в точке $\widehat{x}$ имеет локальный минимум, равный нулю. Из предложения 13 следует, что $\widehat{x}$ — глобальный минимум, т.е. для всех $x \in X$ выполняется неравенство (14). Это и означает, что $x^* \in \partial f(\widehat{x})$. □

14. Субдифференциальное исчисление. Теорема Моро–Рокафеллара

ТЕОРЕМА 13 (Моро–Рокафеллара). *Если $f_1, f_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственные выпуклые функции, хотя бы одна из которых непрерывна в точке $\widehat{x}$, то*

$$\partial(f_1 + f_2)(\widehat{x}) = \partial f_1(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что

$$\partial f_1(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x}) \subset \partial(f_1 + f_2)(\widehat{x}).$$

Пусть $x^* \in \partial f_1(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x})$. Это означает, что существуют $x_1^* \in \partial f_1(\widehat{x})$ и $x_2^* \in \partial f_2(\widehat{x})$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$. Имеем

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(\widehat{x}) - \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle &= f_1(x) - f_1(\widehat{x}) - \langle x_1^*, x - \widehat{x}\rangle \\ &\quad + f_2(x) - f_2(\widehat{x}) - \langle x_2^*, x - \widehat{x}\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(\widehat{x})$.

Докажем теперь, что

$$\partial(f_1 + f_2)(\widehat{x}) \subset \partial f_1(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x}).$$

Без ограничения общности можно читать, что $f_1(\widehat{x}) = f_2(\widehat{x}) = 0$. Если это не так, то можно рассмотреть функции

$$g_1(x) = f_1(x) - f_1(\widehat{x}), \quad g_2(x) = f_2(x) - f_2(\widehat{x}).$$

Докажем, что если

$$0 \in \partial(f_1 + f_2)(\widehat{x}), \tag{15}$$

то найдется $\widetilde{x}^* \in \partial f_1(\widehat{x})$ такой, что $-\widetilde{x}^* \in \partial f_2(\widehat{x})$. Из (15) следует, что для всех $x \in X$

$$(f_1 + f_2)(x) \geq (f_1 + f_2)(\widehat{x}) = 0. \tag{16}$$

Будем считать, что f_2 непрерывна в $\widehat{x}$. Положим

$$A = \{\, (x, v) : x \in \operatorname{dom} f_1,\ v < -f_1(x) \,\},$$
$$B = \operatorname{epi} f_2 = \{\, (x, u) : x \in \operatorname{dom} f_2,\ u \geq f_2(x) \,\}.$$

Эти два множества выпуклы и непусты. Они не пересекаются, так как из того, что $(x, v) \in A$ следует, учитывая (16), что $v < -f_1(x) \leq f_2(x)$. Тем самым $(x, v) \notin \operatorname{epi} f_2 = B$. Поскольку f_2 непрерывна в $\widehat{x}$, она ограничена в некоторой окрестности U этой точки. Положим

$$M = \sup_{x \in U} f_2(x).$$

Тогда открытое множество

$$V = \{\, (x, v) : x \in U,\ v > M \,\}$$

лежит в $\operatorname{epi} f_2$. Следовательно, $\operatorname{int} B \neq \emptyset$. По первой теореме отделимости (теорема 6, конечномерный случай — теорема 9) множества A и B можно отделить, т.е. существуют $x^* \in X^*$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю, такие, что для любых $(x_1, v) \in A$ и $(x_2, u) \in B$ выполняется неравенство

$$\langle x^*, x_1\rangle + \lambda v \leq \langle x^*, x_2\rangle + \lambda u. \tag{17}$$

Положим в (17) $x_1 = x_2 = \widehat{x}$, $v < 0$, а $u = f_2(x_2) = f_2(\widehat{x}) = 0$. Тогда

$$\langle x^*, \widehat{x}\rangle + \lambda v \leq \langle x^*, \widehat{x}\rangle.$$

Следовательно, $\lambda v \leq 0$, а так как $v < 0$, получаем, что $\lambda \geq 0$.

Если предположить, что $\lambda = 0$, то из (17) получаем

$$\sup_{x \in \operatorname{dom} f_1} \langle x^*, x\rangle \leq \inf_{x \in \operatorname{dom} f_2} \langle x^*, x\rangle.$$

Поскольку $x^* \neq 0$, а линейная функция, отличная от тождественного нуля, не может принимать минимального значения во внутренней точке, то

$$\langle x^*, \widehat{x}\rangle \leq \sup_{x \in \operatorname{dom} f_1} \langle x^*, x\rangle \leq \inf_{x \in \operatorname{dom} f_2} \langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \widehat{x}\rangle.$$

Полученное противоречие показывает, что $\lambda \neq 0$.

Пусть $x_1 = \widehat{x}$, $v < 0$, $x_2 \in X$, $u = f_2(x_2)$. Тогда из (17) получаем

$$\langle x^*, \widehat{x}\rangle + \lambda v \leq \langle x^*, x_2\rangle + \lambda f_2(x_2).$$

Устремляя v к нулю, получаем

$$\langle x^*, \widehat{x}\rangle \leq \langle x^*, x_2\rangle + \lambda f_2(x_2).$$

Отсюда

$$f_2(x_2) \geq \langle -\lambda^{-1} x^*, x_2 - \widehat{x}\rangle.$$

Следовательно, $-\lambda^{-1} x^* \in \partial f_2(\widehat{x})$.

Пусть теперь $x_2 = \widehat{x}$, $x_1 \in \operatorname{dom} f_1$. Тогда для любого $v < -f_1(x_1)$ выполняется неравенство

$$\langle x^*, x_1\rangle + \lambda v \leq \langle x^*, \widehat{x}\rangle + \lambda f_2(\widehat{x}) = \langle x^*, \widehat{x}\rangle.$$

Устремляя v к $-f_1(x_1)$, получаем

$$\langle x^*, x_1\rangle - \lambda f_1(x_1) \leq \langle x^*, \widehat{x}\rangle,$$

откуда $\lambda^{-1} x^* \in \partial f_1(\widehat{x})$. Тем самым доказано, что $0 \in \partial f_1(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x})$.

Предположим, что $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(\widehat{x})$. Положим

$$g(x) = f_1(x) - \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle.$$

Нетрудно убедиться, что $0 \in \partial(g + f_2)(\widehat{x})$. По доказанному выше $0 \in \partial g(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x})$. Тем самым найдется $\widetilde{x}^* \in \partial g(\widehat{x})$ такой, что $-\widetilde{x}^* \in \partial f_2(\widehat{x})$. Включение $\widetilde{x}^* \in \partial g(\widehat{x})$ означает, что выполняется неравенство

$$f_1(x) - \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle \geq \langle \widetilde{x}^*, x - \widehat{x}\rangle.$$

Следовательно, $x^* + \widetilde{x}^* \in \partial f_1(\widehat{x})$. Поэтому $x^* \in \partial f_1(\widehat{x}) + \partial f_2(\widehat{x})$. □

Следствие 5. *Если f — выпуклая функция, непрерывная в точке $\widehat{x}$, то $\partial f(\widehat{x}) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Отметим сначала, что функция f в силу непрерывности в точке $\widehat{x}$ является собственной (докажите!). Обозначим через $\delta\{\widehat{x}\}$ *индикаторную функцию точки* $\widehat{x}$

$$\delta\{\widehat{x}\}(x) = \begin{cases} 0, & x = \widehat{x}, \\ +\infty, & x \neq \widehat{x}. \end{cases}$$

Функция $\delta\{\widehat{x}\}$ является собственной выпуклой функцией и нетрудно убедиться, что $\partial\delta\{\widehat{x}\}(\widehat{x}) = X^*$. Рассмотрим функцию $f + \delta\{\widehat{x}\}$. Из теоремы Моро–Рокафеллара получаем

$$X^* = \partial(f + \delta\{\widehat{x}\})(\widehat{x}) = \partial f(\widehat{x}) + \partial\delta\{\widehat{x}\})(\widehat{x}) = \partial f(\widehat{x}) + X^*.$$

Отсюда следует, что $\partial f(\widehat{x}) \neq \emptyset$. □

15. Теорема Дубовицкого–Милютина

Теорема 14 (Дубовицкого–Милютина). *Если $f_1, \ldots, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклые функции, непрерывные в точке $\widehat{x}$, и*

$$f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\},$$

то

$$\partial f(\widehat{x}) = \mathrm{co}\biggl(\bigcup_{j\in I} \partial f_j(\widehat{x})\biggr),$$

где $I = \{j : f_j(\widehat{x}) = f(\widehat{x})\}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда

$$f_1(\widehat{x}) = \ldots = f_n(\widehat{x}) = f(\widehat{x}).$$

Докажем, что

$$\mathrm{co}\biggl(\bigcup_{j=1}^{n} \partial f_j(\widehat{x})\biggr) \subset \partial f(\widehat{x}). \tag{18}$$

Пусть $x^* \in \partial f_j(\widehat{x})$ при некотором j, $1 \le j \le n$. Тогда для всех $x \in X$

$$f(x) \ge f_j(x) \ge f_j(\widehat{x}) + \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle = f(\widehat{x}) + \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle.$$

Следовательно, $x^* \in \partial f(\widehat{x})$. Тем самым $\partial f_j(\widehat{x}) \subset \partial f(\widehat{x})$. Отсюда

$$\bigcup_{j=1}^{n} \partial f_j(\widehat{x}) \subset \partial f(\widehat{x}).$$

В силу выпуклости субдифференциала (см. предложения 11 и 1) имеет место (18).

Пусть $x^* \in \partial f(\widehat{x})$. Положим

$$\varphi_j(x) = f_j(x) - f_j(\widehat{x}) - \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \varphi_k(x) < 0, \\ \varphi_j(x) \le 0, \quad j \neq k. \end{cases} \tag{19}$$

Предположим, что для всех k эти системы совместны и обозначим через x_k какое-либо решение каждой из этой системы. Рассмотрим точку

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Тогда при каждом $k = 1, \ldots, n$

$$\varphi_k(\widetilde{x}) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_k(x_j) \le \frac{1}{n}\varphi_k(x_k) < 0.$$

Отсюда

$$f_k(\widetilde{x}) - f(\widehat{x}) - \langle x^*, \widetilde{x} - \widehat{x}\rangle < 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тем самым

$$f(\widetilde{x}) - f(\widehat{x}) - \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle < 0,$$

что противоречит тому, что $x^* \in \partial f(\widehat{x})$. Следовательно, найдется k, $1 \le k \le n$, для которого система (19) будет несовместна. Из непрерывности функций f_j, $j = 1, \dots, n$, в точке $\widehat{x}$ следует, что существует окрестность U точки $\widehat{x}$, в которой все функции f_j конечны. Тогда для такого k экстремальная задача

$$\varphi_k(x) \to \min, \quad \varphi_j(x) \le 0, \quad j \ne k, \quad x \in U$$

будет иметь решение $\widehat{x}$. По теореме Каруша–Куна–Таккера (теорема 11) найдутся $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$, не все равные нулю, для которых при всех $x \in U$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(x) \ge \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(\widehat{x}) = 0.$$

Из предложения 13 вытекает, что это неравенство выполняется для всех $x \in X$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Тогда получаем, что для всех $x \in X$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\widehat{x}) - \langle x^*, x - \widehat{x} \rangle \ge 0.$$

Следовательно, пользуясь теоремой Моро–Рокафеллара, получаем

$$x^* \in \partial\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j\right)(\widehat{x}) = \sum_{j=1}^n \partial(\lambda_j f_j)(\widehat{x})$$
$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j \partial f_j(\widehat{x}) \subset \operatorname{co}\left(\bigcup_{j=1}^n \partial f_j(\widehat{x})\right).$$

Рассмотрим теперь общий случай. Положим $J = \{j : f_j(\widehat{x}) < f(\widehat{x})\}$ и $g(x) = \max_{j \in I} f_j(x)$. В силу непрерывности функций f_j, $j = 1, \dots, n$, в точке $\widehat{x}$ существует окрестность V точки $\widehat{x}$, в которой $f_j(x) < f(x)$ для всех $j \in J$. Тогда в окрестности V функции f и g совпадают. Из предложения 14 получаем, что $\partial f(\widehat{x}) = \partial g(\widehat{x})$, а для $\partial g(\widehat{x})$ нужное равенство уже доказано. □

16. Субдифференциальная форма теоремы Каруша–Куна–Таккера

Пусть X — линейное нормированное пространство, $f_j \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $j = 0, 1, \dots, m$, — выпуклые функции. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \min, \quad f_j(x) \le 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in X. \tag{20}$$

Теорема 15 (Каруша–Куна–Таккера в субдифференциальной форме). *Пусть $\widehat{x} \in X$ — минимум в задаче (20) и функции f_j, $j = 0, 1, \dots, m$, — непрерывны в точке $\widehat{x}$. Тогда найдутся числа $\lambda_j \ge 0$, $j = 0, 1, \dots, m$, такие, что*

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j = 1, \quad \lambda_j f_j(\widehat{x}) = 0, \ j = 1, \dots, m,$$

и

$$0 \in \sum_{j=0}^m \lambda_j \partial f_j(\widehat{x}).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \max\{f_0(x) - f_0(\widehat{x}), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}.$$

Точка $\widehat{x}$ является глобальным минимум этой функции. Действительно, если бы в некоторой точке $\widetilde{x} \in X$ выполнялось бы неравенство $f(\widetilde{x}) < 0$, то это означало бы, что $f_0(\widetilde{x}) < f_0(\widehat{x})$ и $f_j(\widetilde{x}) < 0$, $j = 1, \ldots, m$, что противоречит минимальности $\widehat{x}$ в задаче (20). Тогда из теоремы Ферма в субдифференциальной форме (теорема 12) следует, что $0 \in \partial f(\widehat{x})$. По теореме Дубовицкого–Милютина (теорема 14) имеем

$$\partial f(\widehat{x}) = \mathrm{co}\Big(\bigcup_{j\in I} \partial f_j(\widehat{x})\Big),$$

где $I = \{0\} \cup \{j : f_j(\widehat{x}) = 0,\ 1 \le j \le m\}$. Таким образом (см. предложение 3), найдутся $x_j^* \in \partial f_j(\widehat{x})$, $j \in I$, такие, что

$$0 = \sum_{j\in I} \lambda_j x_j^*, \quad \sum_{j\in I} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \ge 0,\ j \in I.$$

Осталось положить $\lambda_j = 0$ для $j \notin I$. □

17. Двойственность выпуклых множеств

В вопросах, связанных с изучением выпуклых объектов (выпуклых множеств, выпуклых функций и выпуклых экстремальных задач), важную роль играет феномен *двойственности.* Он заключается в том, что каждому выпуклому объекту можно сопоставить двойственный выпуклый объект, который тесно связан с исходным и совместное их исследование, как правило, бывает весьма плодотворным.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Напомним, что *гиперплоскостью* называется множество

$$H = \{\, x \in X : \langle x^*, x\rangle = \gamma \,\}, \quad x^* \in X^*, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Гиперплоскость разбивает все пространство на два полупространства

$$H_+ = \{\, x \in X : \langle x^*, x\rangle \le \gamma \,\}, \quad H_- = \{\, x \in X : \langle x^*, x\rangle \ge \gamma \,\}.$$

В основе двойственности выпуклых множеств лежит следующий факт. Выпуклое замкнутое множество в линейном нормированном пространстве X допускает двойное описание: первое (на языке исходного пространства) есть просто определение выпуклости и замкнутости, второе (на языке сопряженного пространства X^*) состоит в том, что это множество является пересечением всех полупространств, его содержащих. Докажем последнее утверждение.

Предложение 15. *Выпуклое замкнутое множество в линейном нормированном пространстве есть пересечение всех полупространств, содержащих это множество.*

Доказательство. Пусть A — выпуклое замкнутое множество в линейном нормированном пространстве X. Обозначим через B пересечение всех полупространств, содержащих A. Так как каждое из полупространств содержит A, то и их пересечение тоже содержит A, т.е. $A \subset B$. Предположим, что существует точка $\widehat{x} \in B$, не принадлежащая A. По второй теореме отделимости ([**6**, теорема 12, стр. 23]) множество A и точка $\widehat{x}$ строго отделимы, т.е. существует ненулевой функционал $x^* \in X$, для которого

$$\sup_{x\in A} \langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \widehat{x}\rangle.$$

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для для всех $x \in A$

$$\langle x^*, x\rangle \le \gamma,$$

где $\gamma = \langle x^*, \widehat{x}\rangle - \varepsilon$. Тем самым нашлось полупространство, содержащее A и не содержащее $\widehat{x}$, что противоречит тому, что $\widehat{x}$ принадлежит всем полупространствам, содержащим A. □

18. Двойственность выпуклых функций

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутой,* если множество $\operatorname{epi} f$ замкнуто в $X \times \mathbb{R}$.

Выясним теперь, как аналитически можно интерпретировать тот факт, что надграфик выпуклой замкнутой функции есть пересечение всех содержащих его полупространств.

Напомним, что функция $a(x) = \langle x^*, x\rangle + \alpha$, где $x^* \in X^*$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, называется *аффинной.*

Теорема 16 (о поточечной верхней грани аффинных функций). *Функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является выпуклой и замкнутой тогда и только тогда, когда она есть поточечная верхняя грань аффинных функций, не превосходящих f.*

Доказательство. Если f — поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, то ее надграфик есть пересечение надграфиков этих функций, которые, очевидно, выпуклы и замкнуты и поэтому функция f выпукла и замкнута.

Обратно, пусть функция f выпукла и замкнута. Если $f(x) \equiv +\infty$, то она есть, например, поточечный предел констант. Пусть функция f не равна тождественно $+\infty$ и $x_0 \in X$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_0 < f(x_0)$. Ясно, что $(x_0, \alpha_0) \notin \operatorname{epi} f$. По второй теореме отделимости ([**6**, теорема 12, стр. 23]) найдется $x^* \in X^*$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\sup_{(x,\alpha)\in \operatorname{epi} f} (\langle x^*, x\rangle + \gamma\alpha) < \langle x^*, x_0\rangle + \gamma\alpha_0. \tag{21}$$

Заметим, что $\gamma \le 0$, ибо в противном случае, увеличивая α, пришли бы к противоречию с неравенством (21).

Пусть $f(x_0) < +\infty$. Подставляя точку $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{epi} f$ в (21), получаем, что $\gamma(\alpha_0 - f(x_0)) > 0$. Но $\alpha_0 - f(x_0) < 0$ и поэтому в данном случае $\gamma < 0$. Можно считать, что $\gamma = -1$ (деля, если необходимо, обе части неравенства (21) на $-\gamma$). Тогда, обозначая через c верхнюю грань в (21), это неравенство можно записать в виде двух неравенств

$$\langle x^*, x_0\rangle - c > \alpha_0, \quad \langle x^*, x\rangle - c \le \alpha \quad \forall\ (x,\alpha) \in \operatorname{epi} f. \tag{22}$$

Рассмотрим аффинную функцию $a(x) = \langle x^*, x\rangle - c$. Если $f(x) = +\infty$, то, очевидно, $a(x) < f(x)$. Если $f(x) < +\infty$, то из второго неравенства в (22) при $\alpha = f(x)$ следует, что $a(x) \le f(x)$. Таким образом, это неравенство выполняется для всех $x \in X$. Из первого неравенства в (22) следует, что $\alpha_0 < a(x_0)$, и значит, $\alpha_0 < a(x_0) \le f(x_0)$. Выбирая α_0 сколь угодно близко к $f(x_0)$, получаем, что во всех точках, где функция f конечна, она есть поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, не превосходящих f.

Пусть теперь $f(x_0) = +\infty$. Для доказательства теоремы в этом случае надо для любого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ построить аффинную функцию, не превосходящую f, значение которой в точке x_0 больше α_0. Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Если в (21) $\gamma < 0$ (как и выше, считаем тогда, что $\gamma = -1$), то из (22) вытекает, что $a(x_0) =$

$\langle x^*, x_0\rangle - c > \alpha_0$ и все доказано. Если же $\gamma = 0$ (отделяющая гиперплоскость "вертикальна"), то (21) запишется так

$$\langle x^*, x_0\rangle - c > 0, \quad \langle x^*, x\rangle - c \le 0 \quad \forall\ (x,\alpha) \in \operatorname{epi} f. \tag{23}$$

По доказанному выше существует аффинная функция a, которая всюду не превосходит f. Для каждого $\mu > 0$ рассмотрим аффинную функцию $a_\mu(x) = a(x) + \mu(\langle x^*, x\rangle - c)$. Из второго неравенства в (23) следует, что эта функция также всюду не превосходит f, а из первого, что $a_\mu(x_0) = a(x_0) + \mu(\langle x^*, x_0\rangle - c) > \alpha_0$ для достаточно больших μ. Итак, f есть поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, ее не превосходящих. □

19. Сопряженные функции. Преобразование Лежандра–Фенхеля–Юнга

Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция на X^*, определяемая равенством

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle - f(x)), \tag{24}$$

называется *сопряженной к f* или *преобразованием Лежандра–Фенхеля–Юнга*.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 19.1. Пусть $X = \mathbb{R}$. Тогда $X^* = \mathbb{R}$ и $\langle x^*, x\rangle = x^* x$. Для $f(x) = e^x$ имеем

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(x^* x - e^x) = \begin{cases} x^*\ln x^* - x^*, & x^* > 0,\\ 0, & x^* = 0,\\ +\infty, & x^* < 0.\end{cases}$$

Пример 19.2. Пусть $X = \mathbb{R}^d$ с нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$. Тогда $X^* = (\mathbb{R}^d)^*$ и

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{j=1}^d x_j^* x_j.$$

Для

$$f(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^d |x_j|^p, \quad 1 < p < \infty,$$

имеем

$$f^*(x^*) = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^d |x_j^*|^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Функция f^* есть верхняя грань выпуклых замкнутых функций $\langle x^*, x\rangle - f(x)$. Поэтому надграфик f^* есть пересечение надграфиков этих функций, т.е. пересечение выпуклых замкнутых множеств. Значит, f^* — выпуклая замкнутая функция.

Второй сопряженной к f называется функция $f^{**}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}(\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)).$$

По тем же соображениям, что были приведены выше, f^{**} — выпуклая и замкнутая функция.

Если f — собственная функция, то из определений вытекают неравенства

$$\langle x^*, x\rangle \le f(x) + f^*(x^*), \quad \langle x^*, x\rangle \le f^*(x^*) + f^{**}(x),$$

которые называются *неравенствами Юнга.* Кроме того, $f(x) \geq f^{**}(x)$, так как $f(x) \geq \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$ для всех $x^* \in X^*$, и следовательно,

$$f(x) \geq \sup_{x^* \in X^*} (\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)) = f^{**}(x).$$

Следующий результат об условии совпадения f с ее второй сопряженной служит базой теории двойственности выпуклых функций.

Теорема 17 (Фенхеля-Моро). *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда $f = f^{**}$ в том и только том случае, когда f выпукла и замкнута.*

Доказательство. Если $f = f^{**}$, то как было отмечено, f^{**} выпукла и замкнута, поэтому и f такова.

Докажем, что при условии выпуклости и замкнутости f имеет место равенство $f = f^{**}$. Если $f(x) \equiv +\infty$, то, очевидно, $f^{**}(x) \equiv +\infty$. Пусть $f \not\equiv +\infty$. По доказанному существует такая аффинная функция $a(x) = \langle x^*, x\rangle - \alpha$, что $\langle x^*, x\rangle - \alpha \leq f(x)$ для всех $x \in X$. Это равносильно тому, что

$$\alpha \geq \sup_{x \in X} (\langle x^*, x\rangle - f(x)) = f^*(x^*).$$

Так как по теореме 16 f — верхняя грань таких функций, то для всех $x \in X$

$$f(x) = \sup_{\substack{x^* \in X^*,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha \geq f^*(x^*)}} (\langle x^*, x\rangle - \alpha). \tag{25}$$

Поскольку f не равна тождественно $+\infty$, то f^* нигде не обращается в $-\infty$ и поэтому в (25) вместо α можно взять $f^*(x^*)$. Следовательно,

$$f(x) = \sup_{x^* \in X^*} (\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)) = f^{**}(x)$$

для всех $x \in X$. □

Теорема 18. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда*

$$f^* = f_0^*,$$

где

$$\operatorname{epi} f_0 = \operatorname{cl} \operatorname{co} \operatorname{epi} f.$$

Доказательство. В силу определения f^* для всех $x \in X$

$$\langle x^*, x\rangle - f(x) \leq f^*(x^*).$$

Тогда для функции $a(x) = \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$ имеем

$$a(x) \leq f(x).$$

Отсюда $\operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} a$. Так как $\operatorname{epi} a$ — выпуклое и замкнутое множество, то

$$\operatorname{cl} \operatorname{co} \operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} a.$$

Следовательно, $a(x) \leq f_0(x)$. Это означает, что при всех $x \in X$

$$\langle x^*, x\rangle - f_0(x) \leq f^*(x^*).$$

Таким образом,

$$f_0^*(x^*) \leq f^*(x^*).$$

С другой стороны, в силу того, что $f_0(x) \leq f(x)$, имеем

$$\langle x^*, x\rangle - f(x) \leq \langle x^*, x\rangle - f_0(x) \leq f_0^*(x^*).$$

Поэтому

$$f^*(x^*) \leq f_0^*(x^*).$$

□

Так как f_0 — выпуклая и замкнутая функция, то из теоремы 17 вытекает, что

$$f_0^{**} = f_0.$$

Тем самым получаем

Следствие 6. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Тогда*

$$f^{**} = f_0.$$

20. Двойственность экстремальных задач

Применим теорему Фенхеля–Моро к построению двойственных задач. Пусть X — линейное нормированное пространство и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{26}$$

Включим ее в серию "подобных" ей задач (или, как говорят, "возмутим" данную задачу). Точнее говоря, пусть Y — линейное нормированное пространство и функция $F\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что $F(x,0) = f(x)$ для всех $x \in X$. Каждому $y \in Y$ сопоставим задачу

$$F(x,y) \to \min, \quad x \in X. \tag{27}$$

Семейство таких задач называется *возмущением задачи* (26), а функция $S\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$, сопоставляющая $y \in Y$ значение задачи (27), называется *S-функцией данного семейства.* Ясно, что $S(0)$ — значение исходной задачи (26).

Как уже было отмечено, $S^{**}(0) \le S(0)$, а если S-функция выпукла и замкнута, то по теореме Фенхеля–Моро $S^{**}(0) = S(0)$. Выпишем задачу, значением которой является величина $S^{**}(0)$. По определению

$$S^{**}(0) = \sup_{y^* \in Y^*} (-S^*(y^*)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} S^*(y^*) &= \sup_{y\in Y}(\langle y^*, y\rangle - \inf_{x\in X} F(x,y)) \\ &= \sup_{(x,y)\in X\times Y} (\langle 0, x\rangle + \langle y^*, y\rangle - F(x,y)) = F^*(0,y^*). \end{aligned}$$

Таким образом, задача, значение которой равно $S^{**}(0)$ имеет вид

$$-F^*(0,y^*) \to \max, \quad y^* \in Y^*. \tag{28}$$

Задача (28) называется *двойственной задачей к* (26) (относительно заданного возмущения).

Глава 2

Линейное программирование

1. Задача линейного программирования в нормальной форме и двойственная к ней

Пусть $c^* \in (\mathbb{R}^d)^*$, A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Задачу

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0, \tag{29}$$

называют *задачей линейного программирования* (*в нормальной форме*). Здесь $x \in \mathbb{R}^d$, а неравенства понимаются покоординатно.

В терминах общей постановки здесь $f(x) = c^* \cdot x$, когда $Ax \geq b$, $x \geq 0$ и $f(x) = +\infty$ в противном случае.

Выпишем двойственную задачу к (29) относительно возмущения

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax \geq b + y, \quad x \geq 0, \tag{30}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ (т.е. $F(x,y) = c^* \cdot x$, когда $Ax \geq b + y$, $x \geq 0$ и $F(x,y) = +\infty$ в противном случае). Имеем

$$\begin{aligned}
F^*(0,y^*) &= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n} (y^* \cdot y - F(x,y)) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (y^* \cdot y - \inf_{\substack{Ax\geq b+y\\ x\geq 0}} c^* \cdot x) \\
&= \sup_{\substack{Ax\geq b+y\\ x\geq 0,\ y\in\mathbb{R}^n}} (y^* \cdot y - c^* \cdot x) \\
&= \begin{cases} \sup\limits_{x\geq 0}(y^* \cdot (Ax-b) - c^* \cdot x), & \text{если } y^* \geq 0, \\ +\infty, & \text{если не так.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\geq 0}(y^* \cdot (Ax-b) - c^* \cdot x) &= \sup_{x\geq 0}((y^*A - c^*) \cdot x - y^* \cdot b) \\
&= \begin{cases} -y^* \cdot b, & \text{если } y^*A - c^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{если не так.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$F^*(0,y^*) = \begin{cases} -y^* \cdot b, & \text{если } y^*A \leq c^*,\ y^* \geq 0, \\ +\infty, & \text{если не так,} \end{cases}$$

и следовательно, двойственная задача имеет вид

$$y^* \cdot b \to \max, \quad y^*A \leq c^*, \quad y^* \geq 0. \tag{31}$$

2. Конус. Замкнутость конечнопорожденного конуса

Мы докажем некоторые теоремы, касающиеся существования решений в задачах (29) и (31), а также двойственных связей между ними. Перед этим нам потребуется ряд предварительных результатов.

Пусть X — линейное пространство. Непустое множество $K \subset X$ называется *конусом,* если для всех $x \in K$ и всех $\alpha \geq 0$ $\ \alpha x \in K$.

Множество $K \subset X$ называется *конечнопорожденным конусом,* если существуют $x_1, \ldots, x_n \in X$ такие, что

$$K = \operatorname{cone}\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Предложение 16. *В линейном нормированном пространстве конечнопорожденный конус замкнут.*

Доказательство. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $K = \operatorname{cone}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$

$$K = \{\, x \in X : x = \alpha x_1,\ \alpha \geq 0 \,\}.$$

Если $x_1 = 0$, то, очевидно, конус K замкнут. Предположим, что $x_1 \neq 0$ и $\alpha_k x_1 \to \widehat{x}$ при $k \to +\infty$. Тогда последовательность $\{\|\alpha_k x_1\|\}$ ограничена, и следовательно, последовательность $\{\alpha_k\}$ ограничена. Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_k \to \widehat{\alpha}$ при $k \to +\infty$. Имеем

$$\|\widehat{x} - \widehat{\alpha} x_1\| = \|\widehat{x} - \alpha_k x_1 - (\widehat{\alpha} x_1 - \alpha_k x_1)\| \leq \|\widehat{x} - \alpha_k x_1\| + |\widehat{\alpha} - \alpha_k| \|x_1\|.$$

В силу того, что правую часть этих соотношений можно сделать при достаточно больших k сколь угодно малой, $\widehat{x} = \widehat{\alpha} x_1$.

Пусть утверждение верно для конусов, порожденных $n-1$ точкой, $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $K = \operatorname{cone}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Докажем замкнутость конуса K. Если конус K содержит точки $-x_1, \ldots, -x_n$, то K — конечномерное подпространство, и следовательно, замкнутое множество. В противном случае существует точка из множества $-x_1, \ldots, -x_n$, которая не принадлежит K. Пусть для определенности это будет $-x_n$. Тогда

$$K = \{\, x \in X : x = x' + \alpha x_n,\ x' \in K',\ \alpha \geq 0 \,\},$$

где $K' = \operatorname{cone}\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{n-1}}\}$. Пусть $x^k = {x'}^k + \alpha_k x_n$ — последовательность точек из K сходящаяся к некоторой точке $\widehat{x} \in X$. Докажем, что $\widehat{x} \in K$. Если последовательность $\{\alpha_k\}$ неограничена, то из нее можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Тогда, поделив на α_k и пользуясь тем, что сходящаяся последовательность точек ограничена, получим

$$\frac{{x'}^k}{\alpha_k} + x_n = \frac{x^k}{\alpha_k} \to 0.$$

Тем самым

$$\frac{{x'}^k}{\alpha_k} \to -x_n.$$

В силу замкнутости K' точка $-x_n \in K' \subset K$, что противоречит сделанному ранее предположению. Таким образом, последовательность $\{\alpha_k\}$ ограничена, и следовательно, из нее можно выбрать сходящуюся. Будем считать, что $\alpha_k \to \widehat{\alpha}$ при $k \to +\infty$. Тогда

$$x^k - \alpha_k x_n \to \widehat{x} - \widehat{\alpha} x_n.$$

В силу замкнутости K' $\widehat{x} - \widehat{\alpha} x_n \in K'$. Тем самым существует точка $y' \in K'$, для которой $\widehat{x} - \widehat{\alpha} x_n = y'$. Это означает, что $\widehat{x} = y' + \widehat{\alpha} x_n \in K$. $\square$

3. Существование решения задачи линейного программирования и двойственной к ней

Теорема 19 (существования). *Если значение задачи* (29) ((31)) *конечно, то она имеет решение.*

Доказательство. Начнем с задачи (29). Рассмотрим множество

$$K = \{\, (y, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R}^d,\ x \geq 0,\ c^* \cdot x \leq \alpha,\ Ax \geq y \,\}. \tag{32}$$

Нетрудно убедиться, что K — выпуклый конус. Покажем, что K — конечнопорожденный конус. Пусть $(y, \alpha) \in K$. Тогда найдется $x \in \mathbb{R}^d$, $x \geq 0$, для которого $c^* \cdot x \leq \alpha$ и $Ax \geq y$. Следовательно, найдутся такие $\beta_0 \geq 0$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T \geq 0$, что $c^* \cdot x + \beta_0 = \alpha$ и $Ax - \beta = y$. Тем самым

$$(y, \alpha) = (Ax - \beta, c^* \cdot x + \beta_0) = (Ax, c^* \cdot x) + (-\beta, \beta_0).$$

Переходя к координатной записи, считая, что

$$c^* = (c_1, \ldots, c_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nd} \end{pmatrix},$$

а $e_1, \ldots, e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$, получаем

$$(y, \alpha) = \sum_{j=1}^{d} x_j (Ae_j, c^* \cdot e_j) + (-\beta, \beta_0) = \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j + \sum_{j=0}^{n} \beta_j \xi_{d+j+1},$$

где $\xi_j = (Ae_j, c^* \cdot e_j) = ((a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T, c_j)$, $j = 1, \ldots, d$, $\xi_{d+1} = ((0, \ldots, 0)^T, 1)$,

$$\xi_{d+2} = ((-1, \ldots, 0)^T, 0), \ldots, \xi_{d+n+1} = ((0, \ldots, -1)^T, 0).$$

Таким образом, $K \subset \operatorname{cone}\{\xi_1, \ldots, \xi_{d+n+1}\}$. Нетрудно убедиться, что $\xi_j \in K$ при всех $j = 1, \ldots, d+n+1$. Для этого надо взять $x = e_j$ при $j = 1, \ldots, d$, а при $j = d+1, \ldots, d+n+1$ надо взять $x = 0$. Так как K является выпуклым конусом, то $\operatorname{cone}\{\xi_1, \ldots, \xi_{\mathrm{d+n+1}}\} \subset \mathrm{K}$. Тем самым доказано, что K — конечнопорожденный конус. Из предложения 16 вытекает, что он замкнут.

Пусть $\widehat{\alpha}$ — значение задачи (29). Тогда существует последовательность $\{x^k\}$ допустимых в задаче (29) векторов, для которых последовательность $\{\alpha^k\}$, $\alpha^k = c^* \cdot x^k$, сходится к $\widehat{\alpha}$. Так как векторы x^k допустимы в задаче (29), то $(b, \alpha^k) \in K$. Поэтому точка $(b, \widehat{\alpha})$ принадлежит замыканию K. В силу замкнутости K $(b, \widehat{\alpha}) \in K$. Это означает, что найдется вектор $\widehat{x} \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\widehat{x} \geq 0$, $A\widehat{x} \geq b$ и $c^* \cdot \widehat{x} \leq \widehat{\alpha}$, но последнее неравенство строгим быть не может (иначе значение задачи (29) было бы меньше $\widehat{\alpha}$), поэтому $\widehat{x}$ — решение (29).

Для задачи (31) надо рассмотреть конус

$$K_1 = \{\, (z^*, \alpha) \in (\mathbb{R}^d)^* \times \mathbb{R} : \exists\, y^* \in (\mathbb{R}^n)^*,\ y^* \geq 0,\ y^* \cdot b \geq \alpha,\ y^* A \leq z^* \,\}.$$

В остальном схема рассуждений остается той же, как и в предыдущем случае. □

4. Теорема о двойственности в задаче линейного программирования

Теорема 20 (двойственности). *Для задач* (29) *и* (31) *справедлива следующая альтернатива: либо значения этих задач конечны, равны и в каждой из них существует решение, либо в одной из них множество допустимых элементов пусто, а в другой или множество допустимых элементов пусто, или ее значение бесконечно.*

Пусть $\widehat{x}$ и $\widehat{y}^*$ допустимые элементы в задачах (29) *и* (31). *Тогда они являются решениями этих задач тогда и только тогда, когда*

$$c^* \cdot \widehat{x} = \widehat{y}^* \cdot b. \tag{33}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство задач, зависящих от $y \in \mathbb{R}^n$

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax \geq y, \quad x \geq 0. \tag{34}$$

Обозначим черер S_1 S-функцию этого семейства

$$S_1(y) = \inf_{x \geq 0,\ Ax \geq y} c^* \cdot x.$$

Докажем, что $\operatorname{epi} S_1 = K$, где конус K определен равенством (32). Пусть $(y, \alpha) \in \operatorname{epi} S_1$. Это означает, что $S_1(y) \leq \alpha$. Если $S_1(y) = -\infty$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ (и, в частности, для α) существует $x \in \mathbb{R}^d$ такой, что $Ax \geq y$, $x \geq 0$ и $c^* \cdot x \leq a$. Следовательно, $(y, \alpha) \in K$. Если $S_1(y)$ конечно, то по теореме 19 существует решение задачи (34), т.е. такой $\widehat{x} \in \mathbb{R}^d$, что $\widehat{x} \geq 0$, $A\widehat{x} \geq y$ и $c^* \cdot \widehat{x} = S_1(y) \leq \alpha$. Значит, и в этом случае $(y, \alpha) \in K$. Тем самым доказано, что $\operatorname{epi} S_1 \subset K$.

Пусть теперь $(y, \alpha) \in K$. Это значит, что существует такой $x \in \mathbb{R}^d$, для которого $x \geq 0$, $Ax \geq y$ и $c^* \cdot x \leq \alpha$. Следовательно, $S_1(y) \leq \alpha$, и значит $(y, \alpha) \in \operatorname{epi} S_1$.

Итак, доказано, что надграфиком функции S_1 является конус K. В силу того, что K — выпуклое и замкнутое множество, функция S_1 — выпукла и замкнута. Для S-функции задачи (30) имеем

$$S(y) = S_1(y + b).$$

Поэтому функция S также является выпуклой и замкнутой.

Если $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, то по теореме Фенхеля–Моро (теорема 17) $S(0) = S^{**}(0)$, а $S^{**}(0)$ — значение двойственной задачи (31). Если $0 \in \operatorname{dom} S$, то значения задач (29) и (31) конечны, равны и по теореме существования у каждой из них существует решение. Если $0 \notin \operatorname{dom} S$, то $S(0) = S^{**}(0) = +\infty$. Следовательно, множество допустимых элементов в задаче (29) пусто, а значение двойственной задачи бесконечно.

Пусть существует $y_0 \in \mathbb{R}^n$, для которого $S(y_0) = -\infty$. В этом случае $S^*(y^*) \equiv +\infty$. Следовательно, $S^{**}(y) \equiv -\infty$. Это означает, что задача (31) несовместна. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае $S(y) = -\infty$ для всех $y \in \operatorname{dom} S$ (докажите это!). Поэтому если $0 \in \operatorname{dom} S$, то $S(0) = -\infty$, т.е. значение задачи (29) бесконечно, а если $0 \notin \operatorname{dom} S$, то $S(0) = +\infty$, и следовательно, задача (29) несовместна.

Пусть $\widehat{x}$ и $\widehat{y}^*$ являются решениями задач (29) и (31). Тогда по доказанному выше (поскольку значения конечны) значения задач совпадают, т.е. выполняется равенство (33).

Пусть $\widehat{x}$ и $\widehat{y}^*$ допустимы в задачах (29) и (31) и справедливо равенство (33). Для произвольных допустимы в задачах (29) и (31) векторов x и y^* имеем

$$c^* \cdot x \geq (y^* A) \cdot x = y^* \cdot (Ax) \geq y^* \cdot b.$$

Поэтому для всех допустимых x

$$c^* \cdot x \geq \widehat{y}^* \cdot b = c^* \cdot \widehat{x}.$$

Отсюда вытекает, что $\widehat{x}$ — решение задачи (29). Из аналогичных соотношений

$$\widehat{y}^* \cdot b = c^* \cdot \widehat{x} \geq y^* \cdot b$$

вытекает, что $\widehat{y}^*$ — решение задачи (31). □

5. Различные формы задач линейного программирования и соответствующие двойственные задачи

Мы рассмотрели задачу линейного программирования в нормальной форме (29). Существуют и другие формы этой задачи. Пусть $c^* \in (\mathbb{R}^d)^*$, A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Задачу

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax \geq b, \tag{35}$$

называют *задачей линейного программирования в общей форме.* Напомним, что $x \in \mathbb{R}^d$, а неравенства понимаются покоординатно.

Задачу

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \tag{36}$$

называют *задачей линейного программирования в канонической форме.*

Задачи в различных формах легко сводятся друг к другу путем введения дополнительных переменных и изменением матрицы A. Покажем для примера сведение задачи в нормальной форме (29) к задаче в канонической форме (36). Положим $\widetilde{x} = (x_{d+1}, \dots, x_{d+n})^T$. Тогда задача (29) может быть записана в виде

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax - \widetilde{x} = b, \quad x \geq 0, \quad \widetilde{x} \geq 0.$$

Введем обозначения: $\overline{c}^* = (c^*, 0)$, $\overline{x} = (x, \widetilde{x})^T$, $\overline{A} = (A\ -I)$. Теперь задача (29) запишется в виде

$$\overline{c}^* \cdot \overline{x} \to \min, \quad \overline{A}\overline{x} = b, \quad \overline{x} \geq 0.$$

Отметим, что во всех трех формах задач линейного программирования ((29), (35) и (36)) отыскание точной нижней грани можно заменить на отыскание точной верхней грани (простой заменой вектора c^* на $-c^*$ задачу можно свести к одному из рассмотренных видов).

Для получения двойственных задач к задачам (35) и (36) их надо свести к задаче в нормальной форме (29), двойственная к которой уже известна (31). Начнем с задачи (35). Представим вектор x в виде разности двух неотрицательных векторов $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^d_+$ и $\widehat{x} \in \mathbb{R}^d_+$. Тогда задача (35) запишется в виде

$$c^* \cdot \widetilde{x} - c^* \cdot \widehat{x} \to \min, \quad A\widetilde{x} - A\widehat{x} \geq b, \quad \widetilde{x} \geq 0, \quad \widehat{x} \geq 0.$$

Введя обозначения $\overline{c}^* = (c^*, -c^*)$, $\overline{x} = (\widetilde{x}, \widehat{x})^T$, $\overline{A} = (A\ -A)$, перепишем эту задачу в виде

$$\overline{c}^* \cdot \overline{x} \to \min, \quad \overline{A}\overline{x} \geq b, \quad \overline{x} \geq 0.$$

Двойственная к этой задаче имеет вид (см. (31))

$$y^* \cdot b \to \max, \quad y^*\overline{A} \leq \overline{c}^*, \quad y^* \geq 0.$$

Легко убедиться, что условие $y^*\overline{A} \leq \overline{c}^*$ означает равенство $y^*A = c^*$. Тем самым двойственной к задаче (35) является задача

$$y^* \cdot b \to \max, \quad y^*A = c^*, \quad y^* \geq 0. \tag{37}$$

Рассмотрим теперь задачу линейного программирования в канонической форме (36). Ее можно записать так

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax \geq b, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Положив

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},$$

перепишем эту задачу в виде

$$c^* \cdot x \to \min, \quad \overline{A}x \geq \overline{b}, \quad x \geq 0.$$

Тогда двойственная задача имеет вид

$$\overline{y}^* \cdot \overline{b} \to \max, \quad \overline{y}^*\overline{A} \leq c^*, \quad \overline{y}^* \geq 0.$$

Если записать $\overline{y}^*$ в виде $\overline{y}^* = (\widetilde{y}^*, \widehat{y}^*)$, то эта задача примет вид

$$(\widetilde{y}^* - \widehat{y}^*) \cdot b \to \max, \quad (\widetilde{y}^* - \widehat{y}^*)A \le c^*, \quad \widetilde{y}^* \ge 0, \quad \widehat{y} \ge 0.$$

Так как любой вектор можно представить в виде разности двух неотрицательных векторов, двойственная задача в окончательном виде принимает форму

$$y^* \cdot b \to \max, \quad y^* A \le c^*. \tag{38}$$

Из проведенных рассуждений и теоремы 20 вытекает

Следствие 7. *Пусть $\widehat{x}$ и $\widehat{y}^*$ допустимые элементы в задачах* (36) *и* (38). *Тогда они являются решениями этих задач тогда и только тогда, когда*

$$c^* \cdot \widehat{x} = \widehat{y}^* \cdot b. \tag{39}$$

6. Задача линейного программирования со смешанными ограничениями

Рассмотрим задачу линейного программирования со смешанными ограничениями

$$c_1^* \cdot x_1 + c_2^* \cdot x_2 \to \min, \quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \ge b_1, \tag{40}$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \quad x_1 \ge 0,$$

где $c_j^* \in (\mathbb{R}^{d_j})^*$, $j = 1, 2$, $x_j \in \mathbb{R}^{d_j}$, $j = 1, 2$, матрицы A_{kj} имеют соответственно размеры $n_k \times d_j$, $k, j = 1, 2$, а $b_k \in \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2$. Запишем вектор x_2 в виде $x_2 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)}$, где $x_2^{(j)} \ge 0$, $j = 1, 2$. Тогда задача (40) перепишется в виде

$$c_1^* \cdot x_1 + c_2^* \cdot x_2^{(1)} - c_2^* \cdot x_2^{(2)} \to \min,$$
$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2^{(1)} - A_{12}x_2^{(2)} \ge b_1,$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2^{(1)} - A_{22}x_2^{(2)} \ge b_2,$$
$$-A_{21}x_1 - A_{22}x_2^{(1)} + A_{22}x_2^{(2)} \ge -b_2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2^{(1)} \ge 0, \quad x_2^{(2)} \ge 0.$$

Введем следующие обозначения

$$\overline{c}^* = (c_1^*, c_2^*, -c_2^*), \quad \overline{x} = (x_1, x_2^{(1)}, x_2^{(1)})^T, \quad \overline{b} = (b_1, b_2, -b_2)^T,$$
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} \\ -A_{21} & -A_{22} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Теперь задачу (40) можно записать в виде (29)

$$\overline{c}^* \cdot \overline{x} \to \min, \quad \overline{A}\overline{x} \ge \overline{b}, \quad \overline{x} \ge 0.$$

Запишем двойственную к ней задачу

$$\overline{y}^* \cdot \overline{b} \to \max, \quad \overline{y}^* \overline{A} \le \overline{c}^*, \quad \overline{y}^* \ge 0.$$

Представив $\overline{y}^*$ в виде $\overline{y}* = (y_1^*, y_2^{(1)*}, y_2^{(2)*})$, получим

$$y_1^* \cdot b_1 + y_2^{(1)*} \cdot b_2 - y_2^{(2)*} \cdot b_2 \to \max,$$
$$y_1^* A_{11} + y_2^{(1)*} A_{21} - y_2^{(2)*} A_{21} \le c_1^*,$$
$$y_1^* A_{12} + y_2^{(1)*} A_{22} - y_2^{(2)*} A_{22} \le c_2^*,$$
$$-y_1^* A_{12} - y_2^{(1)*} A_{22} + y_2^{(2)*} A_{22} \le -c_2^*,$$
$$y_1^* \ge 0, \quad y_2^{(1)*} \ge 0, \quad y_2^{(2)*} \ge 0.$$

Положив $y_2^* = y_2^{(1)*} - y_2^{(2)*}$, мы приходим к задаче, двойственной (40)

$$(41) \quad y_1^* \cdot b_1 + y_2^* \cdot b_2 \to \max, \quad y_1 * A_{11} + y_2^* A_{21} \le c_1,$$
$$y_1 * A_{12} + y_2^* A_{22} = c_2, \quad y_1^* \ge 0.$$

Из теоремы 20 вытекает

Теорема 21. *Для того чтобы задача* (40) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы двойственная задача* (41) *имела решение. При этом значения задач* (40) *и* (41) *совпадают.*

7. Выпуклый анализ и теория линейных неравенств

Двойственность в задачах линейного программирования и соответствующий результат о решениях в двойственных задачах (теорема 20) позволяют достаточно легко получать критерии существования решений в ряде задач из теории линейных неравенств.

Теорема 22 (Минковского–Фаркаша). *Пусть A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Для того чтобы система*

$$Ax = b$$

имела решение $x \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ такого, что $y^* A \le 0$, выполнялось неравенство $y^* \cdot b \le 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$(42) \qquad 0 \cdot x \to \min, \quad Ax = b, \quad x \ge 0.$$

Это задача линейного программирования в канонической форме. Двойственной к ней является задача

$$(43) \qquad y^* \cdot b \to \max, \quad y^* A \le 0.$$

По теореме двойственности задача (42) имеет решение (а тем самым множество ее допустимых значений не пусто, а значение задачи равно нулю) в том и только том случае, когда задача (43) имеет решение, равное нулю. Последнее означает, что $y^* \cdot b \le 0$ для всех $y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, удовлетворяющих условию $y^* A \le 0$. □

Теорема 23 (Ки Фаня). *Пусть A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Для того чтобы система неравенств*

$$Ax \le b$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ такого, что $y^* \ge 0$ и $y^* A = 0$, выполнялось неравенство $y^* \cdot b \ge 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$(44) \qquad 0 \cdot x \to \min, \quad -Ax \ge -b.$$

Это задача линейного программирования в общей форме. Двойственной к ней является задача

$$y^* \cdot (-b) \to \max, \quad y^*(-A) = 0, \quad y^* \ge 0.$$

Эту задачу можно переписать в виде

$$(45) \qquad y^* \cdot b \to \min, \quad y^* A = 0, \quad y^* \ge 0.$$

По теореме двойственности задача (44) имеет решение (а тем самым множество ее допустимых значений не пусто, а значение задачи равно нулю) в том и только том случае, когда задача (45) имеет решение, равное нулю. Последнее означает, что $y^* \cdot b \ge 0$ для всех $y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, удовлетворяющих условию $y^* A = 0$, $y^* \ge 0$. □

Теорема 24 (Гейла). *Пусть A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Для того чтобы система неравенств*

$$Ax \leq b$$

имела решение $x \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ такого, что $y^* \geq 0$ и $y^*A \geq 0$, выполнялось неравенство $y^* \cdot b \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$0 \cdot x \to \min, \quad -Ax \geq -b, \quad x \geq 0. \tag{46}$$

Это задача линейного программирования в нормальной форме. Двойственной к ней является задача

$$y^* \cdot (-b) \to \max, \quad y^*(-A) \leq 0, \quad y^* \geq 0.$$

Эту задачу можно переписать в виде

$$y^* \cdot b \to \min, \quad y^*A \geq 0, \quad y^* \geq 0. \tag{47}$$

По теореме двойственности задача (46) имеет решение (а тем самым множество ее допустимых значений не пусто, а значение задачи равно нулю) в том и только том случае, когда задача (47) имеет решение, равное нулю. Последнее означает, что $y^* \cdot b \geq 0$ для всех $y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, удовлетворяющих условию $y^*A \geq 0$, $y^* \geq 0$. □

8. Крайние точки в задаче линейного программирования

Пусть X — линейное пространство и $A \subset X$. Точка $x \in A$ называется *крайней точкой множества* A, если из того, что $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ при некоторых $\alpha \in (0,1)$ и $x_1, x_2 \in A$ вытекает, что $x_1 = x_2$. Иными словами, точка x не является внутренней точкой никакого отрезка с концами, принадлежащими A.

Множество в $\mathbb{R}^d$, образованное пересечением конечного числа полупространств, называется *полиэдром.* В частности, множество допустимых точек в задаче (35) (как и в любой другой задаче линейного программирования, так как они равносильны) является полиэдром. Крайние точки полиэдра называются его *вершинами.* Легко понять, что минимум линейной функции, если он конечен, достигается в вершинах полиэдра.

Таким образом, для решения задач линейного программирования надо перебрать все вершины и выбрать ту, значение в которой минимизируемой линейной функции минимально. Однако в прикладных задачах число вершин может быть очень большим. В связи с этим возникает задача "целесообразного" перебора. Одна из таких процедур и называется *симплекс-методом.*

Будем рассматривать задачу линейного программирования в канонической форме (для удобства рассматриваем задачу максимизации)

$$c^* \cdot x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{48}$$

Напомним, что здесь $c^* \in (\mathbb{R}^d)^*$, A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$.

Двойственной задачей к (48) является задача (см. (38))

$$y^* \cdot b \to \min, \quad y^*A \geq c^*. \tag{49}$$

Предложение 17. *Пусть вектор $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$, $x_1, \ldots, x_k > 0$, — допустимый в задаче (48). Тогда x является крайней точкой множества допустимых векторов в (48) в том и только в том случае, если столбцы $a^1, \ldots, a^k$ матрицы A линейно независимы.*

Доказательство. Пусть x — крайняя точка. Докажем, что столбцы $a^1, \dots, a^k$ матрицы A линейно независимы. Предположим противное. Если столбцы $a^1, \dots, a^k$ линейно зависимы, то найдутся не все равные нулю $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j = 0.$$

Тем самым $A\lambda = 0$ для вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$. Тогда точка $x + t\lambda$ является допустимой для всех t достаточно близких к нулю. Отсюда следует, что точка x не является крайней. Получили противоречие. Таким образом, столбцы $a^1, \dots, a^k$ линейно независимы.

Пусть теперь столбцы $a^1, \dots, a^k$ линейно независимы. Докажем тогда, что допустимая точка x — крайняя точка. Предположим противное. В таком случае существуют допустимые точки y и z, $y \neq z$, и число $t \in (0,1)$ такие, что $x = (1-t)y + tz$. Из этого равенства и того, что $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$, а $y, z \geq 0$, вытекает, что $y = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T$, $z = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)^T$. В силу того, что $Ay = b$ и $Az = b$, получаем $A(y - z) = 0$. Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{k} (y_j - z_j) a^j = 0.$$

Тем самым столбцы $a^1, \dots, a^k$ линейно зависимы. Получили противоречие. □

Так как число линейно независимых столбцов не может превышать числа строк матрицы, то из предложения 17 следует, что крайняя точка содержит не более n положительных координат.

Задача (48) называется *невырожденной*, если любая крайняя точка множества допустимых значений содержит ровно n положительных координат. Если $b = 0$, то нетрудно убедиться, что $x = 0$ — крайняя точка. Поэтому в невырожденной задаче $b \neq 0$.

Предложение 18. *Пусть (48) — невырожденная задача и* $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$, $x_1, \dots, x_k > 0$, *— допустимая точка в этой задаче. Тогда*

a) $k \geq n$,

b) точка x является крайней точкой множества допустимых элементов тогда и только тогда, когда $k = n$.

Доказательство. *a*). Предположим, что $k < n$. Тогда из теоремы 3 следует, что найдутся $s \leq k$ линейно независимых столбцов $a^{j_1}, \dots, a^{j_s}$ матрицы A и такие $\beta_1, \dots, \beta_s > 0$, что элемент $y = (y_1, \dots, y_d)$, в котором

$$y_j = \begin{cases} \beta_s, & j = j_s. \\ 0, & j \notin \{j_1, \dots, j_s\}, \end{cases}$$

является допустимым. Из предложения 17 вытекает, что y — крайняя точка, но она содержит $s \leq k < n$ положительных координат, что противоречит предположению о невырожденности задачи (48).

b). Если $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$ — крайняя точка, то по определению невырожденной задачи $k = n$.

Пусть $k = n$. Если столбцы $a^1, \dots, a^n$ матрицы A линейно зависимы, то из теоремы 3 вытекает, что найдется крайняя точка с $p < n$ числом положительных координат, что противоречит невырожденности задачи (48). Поэтому столбцы $a^1, \dots, a^n$ линейно независимы. Тогда из предложения 17 следует, что x — крайняя точка. □

9. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Приведем схему решения задач по симплекс-методу. Будем рассматривать невырожденную задачу линейного программирования в канонической форме (48).

Пусть дана крайняя точка $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, $x_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$ (для удобства записи схемы решения считаем, что положительные координаты стоят первыми). Один из методов нахождения начальной крайней точки будет описан ниже. Вектор x можно представить в виде $x = (x_b, \widetilde{x})^T$, где $x_b = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $x_b > 0$, а $\widetilde{x} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{d-n}$. Аналогично матрицу A можно представить в виде $A = (A_b\, \widetilde{A})$, где матрица A_b состоит из столбцов $a^1, \ldots, a^n$. Из предложения 17 вытекает, что матрица A_b невырожденная.

Построим *симплексную таблицу* для этой крайней точки (см. рис. 1).

	c^*		c_1	$\ldots$	c_n	c_{n+1}	$\ldots$	c_{k_0}	$\ldots$	c_d	t
базис		$b\,(x_b)$	a^1	$\ldots$	a^n	a^{n+1}	$\ldots$	a^{k_0}	$\ldots$	a^d	
a^1	c_1	x_1	1	$\ldots$	0	$x_{1,n+1}$	$\ldots$	x_{1k_0}	$\ldots$	x_{1d}	t_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a^{j_0}	c_{j_0}	x_{j_0}	0	$\ldots$	0	$x_{j_0,n+1}$	$\ldots$	$x_{j_0k_0}$	$\ldots$	x_{j_0d}	t_{j_0}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a^n	c_n	x_n	0	$\ldots$	1	$x_{n,n+1}$	$\ldots$	x_{nk_0}	$\ldots$	x_{nd}	t_n
z		$c_b^* \cdot x_b$	c_1	$\ldots$	c_n	$c_b^* \cdot x^{n+1}$	$\ldots$	$c_b^* \cdot x^{k_0}$	$\ldots$	$c_b^* \cdot x^d$	
Δ			0	$\ldots$	0	Δ_{n+1}	$\ldots$	Δ_{k_0}	$\ldots$	Δ_d	

Рис. 1. Симплексная таблица

Сделаем ряд пояснений к этой таблице. В первом столбце, начиная с третьей строки по $n+2$ обозначены базисные векторы, соответствующие положительным координатам крайней точки (в нашем случае это $a^1, \ldots, a^n$). Во втором столбце на соответствующих местах стоят значения c_j вектора c^* с теми же номерами, что и столбцы a^j.

Последний столбец заполняется при исследовании симплексной таблицы.

В первой строке, начиная с четвертого столбца, стоят элементы $c_1, \ldots, c_d$. Вторая строка, начиная с третьего столбца, — векторы $b, a^1, \ldots, a^d$. Под ними — разложение этих векторов по базису $a^1, \ldots, a^n$. Ясно, что в силу того, что $Ax = b$,

$$b = \sum_{j=1}^{n} a^j x_j.$$

Тем самым разложением вектора b является вектор x_b ненулевых координат крайней точки x. Предположим, что векторы a^k, $k = 1, \ldots, d$, имеют следующее разложение по базису $a^1, \ldots, a^n$

$$a^k = \sum_{j=1}^{n} a^j x_{jk}.$$

Таким образом, $a^k = A_b x^k$, и следовательно, $A = A_b X$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1d} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x_{n1} & \ldots & x_{nd} \end{pmatrix}$$

— матрица разложений векторов $a^1, \dots, a^d$ по базису $a^1, \dots, a^n$, а x^k — столбцы этой матрицы. Тогда $X = A_b^{-1}A$. Очевидно, что при $k = 1, \dots, n$ разложения векторов a^k тривиальны: $a^k = a^k$. Поэтому матрица X на самом деле имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & x_{1,n+1} & \dots & x_{1d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & x_{n,n+1} & \dots & x_{nd} \end{pmatrix}.$$

Положим $c_b^* = (c_1, \dots, c_n)$. В предпоследней строке z в столбце под вектором x_b запишем $z_0 = c_b^* \cdot x_b$. Тогда z_0 — значение функционала в начальной крайней точке x. Под векторами a^k, $k = 1, \dots, d$, запишем $z_k = c_b^* \cdot x^k$, то есть

$$z = (z_1, \dots, z_d) = c_b^* X.$$

Очевидно, что $z_k = c_k$ при $k = 1, \dots, n$.

В последней строке Δ, начиная с четвертого столбца, записывается разность между элементами предпоследней строки и элементами первой строки: $\Delta = z - c^*$.

Далее следует исследовать симплексную таблицу.

Предложение 19. *Если $\Delta \geq 0$, то вектор x — решение задачи* (48), *а вектор $y^* = c_b^* A_b^{-1}$ — решение двойственной задачи* (49).

Доказательство. Условие $\Delta \geq 0$ означает, что $z \geq c^*$. Тем самым $c_b^* X \geq c^*$. Подставляя выражение c_b^* через y^*, получаем, что $y^* A_b X \geq c^*$. Следовательно, $y^* A \geq c^*$. Таким образом, y^* — допустимый элемент в задаче (49). Кроме того,

$$c^* \cdot x = c_b^* \cdot x_b = y^* A_b \cdot x_b = y^* \cdot A_b x_b = y^* \cdot b.$$

Из следствия 7 (с соответствующими заменами экстремальных задач с минимума на максимум и наоборот) вытекает утверждение предложения. □

Предложение 20. *Если для некоторого k $\Delta_k < 0$ и $x^k \leq 0$, то значение задачи* (48) *равно $+\infty$.*

Доказательство. Положим

$$x(t) = x - t \begin{pmatrix} x^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t e_k$$

($e_1, \dots, e_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$). В силу того, что $x^k \leq 0$, $x(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Кроме того,

$$Ax(t) = Ax - tA_b x^k + tAe_k = b - ta^k + ta^k = b.$$

Значит, $x(t)$ — допустимый элемент при всех $t \geq 0$. При этом

$$c^* \cdot x(t) = c_b^* \cdot x_b - tc_b^* \cdot x^k + tc_k^* = c_b^* \cdot x_b - t\Delta_k.$$

Отсюда видно, что $c^* \cdot x(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. □

Пусть в строке Δ имеются отрицательные числа, а соответствующие столбцы x^k содержат положительные числа. Предположим, что

$$\min_k \Delta_k = \Delta_{k_0},$$

где минимум берется именно по тем столбцам, которые обладают указанным выше свойством. Очевидно, что $n + 1 \leq k_0 \leq d$. Столбец, соответствующий индексу k_0, называется разрешающим столбцом (если минимум достигается на нескольких значениях k, то выбираем любой из таких столбцов). Для тех j, при которых $x_{jk_0} > 0$, положим

$$t_j = \frac{x_j}{x_{jk_0}}.$$

Эти значения ставим соответственно в последнем столбце симплексной таблицы. Пусть

$$t_{j_0} = \min_j t_j.$$

Строка вектора a^{j_0} называется разрешающей. Элемент $x_{j_0k_0}$ называется разрешающим элементом симплексной таблицы.

Далее необходимо из числа базисных векторов исключить вектор a^{j_0}, вместо него взять a^{k_0}.

Теорема 25. *Если не выполнены условия предложений* 19 *и* 20, *то точка* x' *с новыми базисными векторами*

$$a^1, \dots, a^{j_0-1}, a^{k_0}, a^{j_0+1}, \dots, a^n$$

является новой крайней точкой, а значение функционала при этом возрастает на величину $-t_{j_0}\Delta_{k_0}$. *Новая симплексная таблица (для новой крайней точки) может быть построена из старой с помощью следующих соотношений:*

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \dfrac{x_{j_0}x_{jk_0}}{x_{j_0k_0}}, & 1 \le j \le n, \\ \dfrac{x_{j_0}}{x_{j_0k_0}}, & j = k_0, \end{cases}$$

$$x'_{jk} = \begin{cases} x_{jk} - \dfrac{x_{j_0k}x_{jk_0}}{x_{j_0k_0}}, & j \ne j_0,\ 1 \le j \le n, \\ \dfrac{x_{j_0k}}{x_{j_0k_0}}, & j = k_0. \end{cases} \tag{50}$$

Доказательство. Положим

$$x' = x - t_{j_0}\begin{pmatrix} x^{k_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_{j_0}e_{k_0}.$$

Докажем, что вектор x' является новой крайней точкой. Покажем сначала, что он является допустимым вектором. Имеем

$$Ax' = Ax - t_{j_0}A_b x^{k_0} + t_{j_0}Ae_{k_0} = b - t_{j_0}a^{k_0} + t_{j_0}a^{k_0} = b.$$

Кроме того, при $j = 1, \dots, n$

$$x'_j = x_j - t_{j_0}x_{jk_0} = x_j - \frac{x_{j_0}}{x_{j_0k_0}}x_{jk_0} \ge 0.$$

При этом $x'_{j_0} = 0$. Для $n+1 \le j \le d$, $j \ne k_0$, получаем $x'_j = 0$, а

$$x'_{k_0} = t_{j_0} = \frac{x_{j_0}}{x_{j_0k_0}} > 0.$$

По построению у вектора x' по сравнению с вектором x добавилась одна положительная координата k_0, а координата j_0 обратилась в ноль. Поскольку по предложению 18 у допустимой точки не менее n положительных координат, то в ноль обратилась только координата j_0. Таким образом, у точки x' ровно

n положительных координат, и из того же предложения 18 следует, что x' — крайняя точка.

Для новой крайней точки имеем

$$c^* \cdot x' = c^* \cdot x - t_{j_0} c_b^* \cdot x^{k_0} + t_{j_0} c^* \cdot e_{k_0} = c^* \cdot x - t_{j_0} z_{k_0} + t_{j_0} c_{k_0} \\ = c^* \cdot x - t_{j_0} \Delta_{k_0}.$$

Тем самым

$$c^* \cdot x' - c^* \cdot x = -t_{j_0} \Delta_{k_0}.$$

Вычислим теперь координаты x'_{jk} разложения столбцов a^k матрицы A по базису $a^1, \ldots, a^{j_0-1}, a^{k_0}, a^{j_0+1}, \ldots, a^n$. В старом базисе мы имели следующие разложения

$$a^k = \sum_{j=1}^{n} a^j x_{jk} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a^j x_{jk} + a^{j_0} x_{j_0 k}, \quad k = 1, \ldots, d. \tag{51}$$

В частности, при $k = k_0$

$$a^{k_0} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a^j x_{jk_0} + a^{j_0} x_{j_0 k_0}.$$

Поскольку $x_{j_0 k_0} \neq 0$, то выразим a^{j_0} из последнего уравнения

$$a^{j_0} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a^j \frac{x_{jk_0}}{x_{j_0 k_0}} + \frac{a^{k_0}}{x_{j_0 k_0}}$$

и подставим в (51). Имеем

$$a^k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a^j x_{jk} + \left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a^j \frac{x_{jk_0}}{x_{j_0 k_0}} + \frac{a^{k_0}}{x_{j_0 k_0}}\right) x_{j_0 k} \\ = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a^j \left(x_{jk} - \frac{x_{jk_0} x_{j_0 k}}{x_{j_0 k_0}}\right) + a^{k_0} \frac{x_{j_0 k}}{x_{j_0 k_0}}, \quad k = 1, \ldots, d.$$

Получим разложения по базису $a^1, \ldots, a^{j_0-1}, a^{k_0}, a^{j_0+1}, \ldots, a^n$. При этом коэффициенты разложения соответствуют соотношениям (50). □

Затем новая симплексная таблица вновь исследуется, и так далее, пока не придем к решению задачи. Формулы для вычисления элементов таблицы, лежащих под векторами $b, a^1, \ldots, a^d$, и не лежащими в разрешающей строке, называются правилом прямоугольника — элементы, участвующие в этих формулах, стоят в вершинах прямоугольника в симплексной таблице.

10. Пример применения симплекс-метода

Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования с использованием симплекс метода.

Пример 10.1. Пусть требуется решить задачу линейного программирования

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max, \quad x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \qquad = 1,$$
$$2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 3,$$

с заданной начальной крайней точкой $x = (0, 0, 1, 3)^T$.

Базисные векторы здесь $a^3 = (1, 0)^T$ и $a^4 = (0, 1)^T$. Составим первую симплексную таблицу (рис. 2).

	c^*		2	1	1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^3	1	1	1	-1	1	0	
a^4	-1	3	2	**1**	0	1	3
z		-2	-1	-2	1	-1	
Δ			-3	-3	0	0	

Рис. 2

Из таблицы видно, что в качестве разрешающего столбца можно взять столбцы a^1 или a^2. Возьмем столбец a^2. Тогда разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор a^4 на вектор a^2. Для нового базиса с помощью формул (50) строим вторую симплексную таблицу (рис. 3).

	c^*		2	1	1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^3	1	4	3	0	1	1	
a^2	1	3	2	1	0	1	
z		7	5	1	1	2	
Δ			3	0	0	3	

Рис. 3

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\widehat{x} = (0, 3, 4, 0)^T$ является решением задачи, а ее значение равно 7.

Если бы в качестве разрешающего столбца в первой симплексной таблице мы взяли столбец a^1, то пришли бы к той же точке, но за большее число шагов.

11. Метод искусственного базиса для нахождения начальной крайней точки

Будем снова рассматривать задачу линейного программирования в канонической форме

$$(52) \qquad c^* \cdot x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0,$$

где $c^* \in (\mathbb{R}^d)^*$, A — матрица размера $n \times d$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \geq 0$. Если это не так, например $b_j < 0$, то умножим обе части j-го уравнения на -1.

Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные $\widetilde{x} = (x_{d+1}, \ldots, x_{d+n})^T$ и единичную матрицу I.

$$(53) \qquad -\sum_{j=1}^{n} x_{d+j} \to \max, \quad Ax + I\widetilde{x} = b, \quad x \geq 0, \quad \widetilde{x} \geq 0.$$

Точка $\widehat{x} = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_n)^T$ является допустимой в задаче (53). Кроме того, значение задачи конечно. Из теоремы 20 вытекает, что решение в этой задаче существует.

Из предложения 17 вытекает, что точка $\widehat{x}$ является крайней для задачи (53). Будем решать эту задачу симплекс-методом. При этом могут встретиться следующие ситуации.

1. Решение задачи (53) содержит ненулевые искусственные переменные. Это означает, что в исходной задаче (52) нет допустимых элементов. Действительно, если не все искусственные переменные нулевые, то значение задачи (53) отрицательное, а если существует допустимый вектор $(x_1^0, \ldots, x_d^0)^T$ в задаче (52), то вектор $(x_1^0, \ldots, x_d^0, 0, \ldots, 0)^T$ является допустимым в задаче (53), а значение максимизируемого функционала на нем равно нулю.

2. Решение задачи (53) не содержит ненулевых искусственных переменных и среди базисных векторов нет векторов, соответствующих искусственным переменным. В этом случае решение задачи (53) имеет вид $(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_d, 0, \ldots, 0)^T$, а точка $(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_d)^T$, в которой координаты, не соответствующие базисным, равны нулю, является крайней для задачи (52), так как столбцы, соответствующие базисным координатам будут линейно независимы (см. предложение 17).

Далее, взяв в качестве первоначальной крайней точки точку $(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_d)^T$, можно приступать ко второму этапу - решению задачи (52) с помощью симплекс-метода. Тем самым мы получаем двухэтапный метод решения задачи (52).

Пример 11.1. Методом искусственного базиса найти начальную крайнюю точку для задачи

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max, \quad x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,\\
x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 = 2,\\
x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные x_5 и x_6:

$$
\begin{aligned}
-x_5 - x_6 \to \max, \quad x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 6,\\
x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 + x_5 \qquad = 2,\\
x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 \qquad + x_6 = 24.
\end{aligned}
$$

Исходная крайняя точка $x = (0, 0, 0, 0, 2, 24)^T$. Базисные векторы

$$a^5 = (1, 0)^T, \quad a^6 = (0, 1)^T.$$

Составим первую симплексную таблицу для вспомогательной задачи (рис. 4).

	c^*		0	0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^5	-1	2	1	1	-1	1	1	0	2
a^6	-1	24	1	**14**	10	-10	0	1	$\frac{12}{7}$
z		-26	-2	-15	-9	9	-1	-1	
Δ			-2	-15	-9	9	0	0	

Рис. 4

Разрешающим столбцом является столбец a^2, разрешающая строка a^6. Заменяем в базисе вектор a^6 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу (рис. 5).

	c^*		0	0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^5	-1	$\frac{2}{7}$	$\frac{13}{14}$	0	$-\frac{12}{7}$	$\mathbf{\frac{12}{7}}$	1	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{6}$
a^2	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{1}{14}$	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{14}$	
z		$-\frac{2}{7}$	$-\frac{13}{14}$	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	-1	$\frac{1}{14}$	
Δ			$-\frac{13}{14}$	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	0	$\frac{15}{14}$	

Рис. 5

Теперь заменяем вектор a^5 на вектор a^4 и строим третью симплексную таблицу (рис. 6).

	c^*		0	0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^4	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{24}$	0	-1	1	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{24}$	
a^2	0	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{24}$	1	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{24}$	
z		0	0	0	0	0	0	0	
Δ			0	0	0	0	1	1	

Рис. 6

Так как $\Delta \geq 0$, то точка

$$\left(0, \frac{11}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, 0\right)^T$$

является решением вспомогательной задачи. При этом среди базисных векторов нет векторов, соответствующих искусственным переменным. Таким образом, в качестве начальной крайней точки в исходной задаче можно взять точку

$$x = \left(0, \frac{11}{6}, 0, \frac{1}{6},\right)^T.$$

12. Примеры задач линейного программирования

1. Задача оптимального планирования производства. Предприятие выпускает d видов продукции, потребляя при этом n видов сырья. Для выпуска единицы k-го вида продукции, $k = 1, \dots, d$, затрачивается a_{kj} единиц j-го сырья, $j = 1, \dots, n$. Суммарный объем j-го вида сырья, находящегося в распоряжении предприятия равен b_j. Прибыль с производства k-го вида продукции равна r_k рублей. Задача заключается в том, чтобы получить максимальную прибыль при условии, что расход сырья не превысит тот, который находится в распоряжении предприятия. Пусть x_k — произведенный объем k-го вида продукции. Тогда общая прибыль равна

$$r \cdot x = \sum_{k=1}^{d} r_k x_k, \quad r = (r_1, \dots, r_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^T.$$

Получаем следующую задачу

$$r \cdot x \to \max, \quad \sum_{k=1}^{d} a_{kj} x_k \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \geq 0.$$

Эта задача очевидным образом сводится к задаче линейного программирования в нормальной форме (29).

2. Транспортная задача. Имеется n карьеров с песком и m потребителей, которых надо обеспечить песком. С k-го карьера можно увезти a_k тонн песка в сутки, а j-му потребителю нужно b_j тонн песка в сутки. При этом перевозка одной тонны песка с k-го карьера j-му потребителю обходится в c_{kj} рублей. Требуется обеспечить всех потребителей, затратив при этом наименьшую возможную сумму денег. Обозначая через x_{kj} количество песка, взятого с k-го карьера для перевозки j-му потребителю, получаем следующую задачу:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{kj} x_{kj} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{m} x_{kj} = a_k,\ k = 1, \dots, n, \tag{54}$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_{kj} = b_j,\ j = 1, \dots, m, \quad x_{kj} \geq 0,\ k = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$$

Положим

$$\begin{aligned}
c^* &= (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, \dots, c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm}),\\
x &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})^T,\\
A &= \begin{pmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},\\
\bar{b} &= (a_1, a_2 \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)^T.
\end{aligned}$$

Тогда задача (54) запишется в канонической форме

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax = \bar{b}, \quad x \geq 0.$$

3. Задача на минимакс. Пусть $c_1^*, \dots, c_k^* \in (\mathbb{R}^d)^*$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$, A — матрица размера $n \times d$, $b \in \mathbb{R}^n$ и

$$f(x) = \max\{c_1^* \cdot x - \beta_1, \dots, c_k^* \cdot x - \beta_k\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Рассмотрим следующую задачу

$$f(x) \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{55}$$

Функция f не является линейной и поэтому задача (55) не является задачей линейного программирования, но ее легко свести к таковой, введя дополнительную переменную. Покажем, что задача (55) эквивалентна задаче

$$x_{d+1} \to \min, \quad c_j^* \cdot x - \beta_j \le x_{d+1},\ j = 1, \dots, k, \quad Ax = b, \quad x \ge 0. \tag{56}$$

Действительно, пусть $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)^T$ — решение задачи (55). Тогда $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d, f(\widehat{x}))^T$ — решение задачи (56), так как если предположить противное, то существовал бы вектор $\widetilde{x}$, допустимый в задаче (55), для которого $f(\widetilde{x}) < f(\widehat{x})$, что противоречит предположению о том, что $\widehat{x}$ — решение задачи (55).

Если предположить, что $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d, \widehat{x}_{d+1})^T$ — решение задачи (56), то вектор $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)^T$ — допустимый в задаче (55). Если он не является решением этой задачи, то найдется допустимый в ней вектор $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_d)^T$, для которого $f(\widetilde{x}) < f(\widehat{x}) \le \widehat{x}_{d+1}$. Тогда вектор $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_d, \widetilde{x}_{d+1})^T$, где $\widetilde{x}_{d+1} = f(\widetilde{x})$, является допустимым в задаче (56), а для него $\widetilde{x}_{d+1} < \widehat{x}_{d+1}$, что противоречит предположению об экстремальности вектора $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d, \widehat{x}_{d+1})^T$.

13. Транспортная задача

Рассмотрим более подробно транспортную задачу (54). Напомним, что речь идет о перевозке однородного груза из n пунктов отправления $A_1, \dots, A_n$ в m пунктов назначения $B_1, \dots, B_m$. Из пункта отправления A_k можно увезти a_k единиц груза, а в пункт назначения B_j требуется доставить b_j единиц груза. При этом перевозка одной единицы груза из пункта A_k в пункт B_j обходится в c_{kj} рублей. Требуется обеспечить перевозку грузов, затратив при этом наименьшую возможную сумму денег. Обозначая через x_{kj} количество груза, перевозимого из пункта A_k в пункт B_j, получаем следующую задачу:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}x_{kj} \to \min, \quad x_{kj} \ge 0,\ k = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m, \tag{57}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{kj} = a_k,\ k = 1, \dots, n, \tag{58}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{kj} = b_j,\ j = 1, \dots, m. \tag{59}$$

Введя обозначения

$$c^* = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, \dots, c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm}),$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{13}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{13}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

$$\overline{b} = (a_1, a_2 \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)^T,$$

мы записывали задачу (57)–(59) в канонической форме

$$c^* \cdot x \to \min, \quad Ax = \bar{b}, \quad x \geq 0. \tag{61}$$

Всякий допустимый вектор в этой задаче мы называем *допустимым планом перевозок,* а решение транспортной задачи называется *оптимальным планом перевозок.*

Из условий (58), (59) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{m} b_j = M.$$

Иными словами, общий запас груза на всех пунктах отправления равен суммарной потребности всех пунктов назначения. В этом случае говорят, что имеется *замкнутая модель транспортной задачи.*

Можно рассматривать незамкнутые модели транспортной задачи. Покажем, что они могут быть сведены к замкнутой модели.

Пусть суммарные запасы отправителей больше суммарных потребностей пунктов назначения, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k > \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

В этом случае равенства (58) заменяются неравенствами

$$\sum_{j=1}^{m} x_{kj} \leq a_k, \; k = 1, \ldots, n.$$

Введем фиктивный пункт назначения B_{m+1} с величиной завоза

$$b_{m+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{j=1}^{m} b_j$$

и нулевыми стоимостями перевозок в этот пункт. Добавляя новые неотрицательные переменные $x_{k,m+1}$, $k = 1, \ldots, n$, получаем замкнутую модель транспортной задачи с ограничениями в виде равенств

$$\sum_{j=1}^{m+1} x_{kj} = a_k, \; k = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{kj} = b_j, \; j = 1, \ldots, m+1.$$

Пусть теперь суммарные запасы отправителей меньше суммарных потребностей пунктов назначения, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Тогда равенства (59) заменяются неравенствами

$$\sum_{k=1}^{n} x_{kj} \leq b_j, \; j = 1, \ldots, m.$$

В этом случае вводится фиктивный пункт отправления A_{n+1} с величиной вывоза

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

и нулевыми стоимостями перевозок из этого пункта. Добавляя новые неотрицательные переменные $x_{n+1,j},\ j=1,\dots,m$, получаем замкнутую модель транспортной задачи с ограничениями в виде равенств

$$\sum_{j=1}^{m} x_{kj} = a_k,\ k=1,\dots,n+1,$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} x_{kj} = b_j,\ j=1,\dots,m.$$

14. Свойства транспортной задачи

Транспортная задача является задачей линейного программирования и может решаться симплекс-методом. В силу простого строения ограничений (матрицы A) существует ряд упрощений при решении этой задачи. Этот упрощенный метод и будет описан ниже, но сначала нам потребуются некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2. *Для любой транспортной задачи существует допустимый план перевозок.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что рассматривается замкнутая модель транспортной задачи. Положим

$$x_{kj} = \frac{a_k b_j}{M}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} x_{kj} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_k b_j}{M} = \frac{a_k}{M}\sum_{j=1}^{m} b_j = \frac{a_k}{M}M = a_k,$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_j}{M} = \frac{b_j}{M}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{b_j}{M}M = b_j.$$

Тем самым x_{kj} — допустимый план перевозок. □

Лемма 3. *Для любой транспортной задачи существует оптимальный план перевозок.*

Доказательство. В силу леммы 2 и того, что значение транспортной задачи ограничено снизу нулем, это значение конечно. По теореме существования (теорема 19), учитывая, что различные формы задач линейного программирования эквивалентны, получаем существование оптимального плана в любой транспортной задаче. □

Лемма 4. $\operatorname{rg} A = n+m-1$.

Доказательство. Прибавим к n-ой строке матрицы A все предыдущие. Получим строку, состоящую из единиц. Прибавим в этой матрице к последней строке все строки, начиная с $n+1$-ой. Получим такую же строку. Следовательно, $\operatorname{rg} A \le n+m-1$.

Переставим строки, начиная со второй по n-ую, после последней строки матрицы A. Тогда, если в новой матрице взять строки со второй по последнюю и столбцы $1,\dots,m,m+1,2m+1,\dots,(n-1)m+1$, то получится минор порядка $n+m-1$, являющийся треугольной матрицей с единицами на главной диагонали. Тем самым $\operatorname{rg} A = n+m-1$. □

Из доказанной леммы и предложения 17 вытекает, что крайняя точка в рассматриваемой транспортной задаче может иметь не более $n+m-1$ положительных координат.

Лемма 5. *Любые $n+m-1$ строк матрицы A линейно независимы.*

Доказательство. Как было отмечено, сумма первых n строк совпадает с суммой оставшихся строк. Это означает, что любая строка есть линейная комбинация оставшихся $n+m-1$ строк. В силу того, что $\operatorname{rg} A = n+m-1$, эти оставшиеся строки линейно независимы. □

15. Методы нахождения начальной крайней точки в транспортной задаче

Будем рассматривать замкнутую модель транспортной задачи. Как было показано, незамкнутая модель легко сводится к замкнутой введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя.

Исходную транспортную задачу будем задавать в виде *платежной матрицы* (рис. 7).

	b_1	b_2	$\dots$	b_m
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1m}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	c_{n1}	c_{n2}	$\dots$	c_{nm}

Рис. 7

Для составления *матрицы плана перевозок* удобно использовать следующую таблицу (рис. 8).

	b_1	b_2	$\dots$	b_m
a_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1m}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	x_{nm}

Рис. 8

1. Метод “северо-западного угла”

Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1. То есть заполняем верхний левый элемент (x_{11}) матрицы $X = \{x_{kj}\}$ плана перевозок так, чтобы пункт отправления A_1, либо пункт назначения B_1, либо оба эти пункта окажутся полностью обслуженными.

Если пункт отправления A_1 оказался полностью обслуженным, то в дальнейшем при нахождении первоначального плана перевозок выводим первую строку матрицы X из рассмотрения и рассматриваем только оставшуюся часть матрицы X. Если пункт назначения B_1 оказался полностью обслуженным, то аналогично выводим первый столбец из дальнейшего рассмотрения. Если же и пункт отправления, и пункт назначения оказались полностью обслуженными (так может случиться только в вырожденной задаче), то вывести из рассмотрения следует или первую строку, или первый столбец матрицы X. Для определенности будем выводить первый столбец матрицы X. В этом случае в число базисных элементов на следующем этапе введем элемент с нулевым значением перевозки, стоящий в северо-западном углу оставшейся части матрицы X ($x_{12} = 0$).

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока все пункты отправления и пункты назначения не будут обслужены. Последней перевозкой будет перевозка из пункта отправления A_n в пункт назначения B_m.

На каждом шаге обслуживается один из пунктов отправления или назначения, а на последнем шаге обслуживаются оба пункта A_n и B_m. Поэтому число базисных элементов будет ровно $n+m-1$. Найденный план будет допустимым планом перевозок, содержащим не более $n+m-1$ положительных координат и являющийся (как будет показано ниже) крайней точкой множества допустимых элементов.

Пример 15.1. Зададим транспортную задачу в виде платежной матрицы (рис. 9).

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	2	1	5	11
$a_2 = 80$	4	3	4	2
$a_3 = 20$	6	2	7	8

Рис. 9

Построим по методу "северо-западного угла" первоначальный план перевозок. Назначим максимально возможную перевозку, равную 10, из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1. То есть в матрице первоначального плана перевозок X положим $x_{11} = 10$. При этом из пункта отправления A_1 весь груз окажется вывезенным, поэтому $x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0$. Выводим из рассмотрения первую строку матрицы X и рассматриваем только оставшуюся матрицу размера 2×4.

В пункт назначения B_1 остается привезти 30 единиц груза. Назначим максимально возможную перевозку, равную 30, из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_1. Тем самым $x_{21} = 30$. При этом пункт назначения B_1 окажется полностью обслуженным, поэтому $x_{31} = 0$. Выводим из рассмотрения первый столбец матрицы и рассматриваем только оставшуюся матрицу размера 2×3.

Далее, назначаем максимально возможную перевозку, равную 15, из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_2. Тем самым $x_{22} = 15$, а $x_{32} = 0$, так как пункт назначения B_2 оказывается полностью обслуженным. Продолжая этот процесс, приходим к матрице первоначального плана перевозок, в которой для наглядности не будем писать нулевые значения (рис. 10).

Общая стоимость перевозок по такому начальному плану равна

$$c^* \cdot x = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 13 = 478.$$

Отметим, что описанный метод нахождения первоначального плана перевозок не учитывает стоимости перевозок. Поэтому он может оказаться далеко не оптимальным. Приведем другие методы нахождения начальной крайней точки, учитывающие стоимости перевозок.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30	15	35	
$a_3 = 20$			7	13

Рис. 10

2. Минимум по матрице

Выберем в платежной матрице C минимальный элемент. Пусть

$$\min_{k,j} c_{kj} = c_{k_0 j_0}.$$

Если минимальная стоимость перевозки достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_{k_0} в пункт назначения B_{j_0}. Тем самым пункт отправления A_{k_0} или пункт назначения B_{j_0} (или оба пункта одновременно) будет обслужен. В платежной матрице соответствующая строка или столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения. Если и пункт отправления, и пункт назначения одновременно обслужились, то для определенности будем выводить из рассмотрения столбец матрицы X.

В оставшейся части платежной матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор, пока первоначальный план перевозок не будет получен.

Пример 15.2. Зададим транспортную задачу в виде той же платежной матрицы, которая была на рис. 9. Выберем в платежной матрице C минимальный элемент. Им является стоимость $c_{12} = 1$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 10, из из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_2. При этом из пункта отправления A_1 весь груз окажется вывезенным. В платежной матрице первая строка выводится из дальнейшего рассмотрения.

В оставшейся части платежной матрицы 2×4 вновь ищется минимальный элемент. Минимальная стоимость перевозки достигается на двух элементах $c_{32} = c_{24} = 2$. Выбираем любой из них. Для определенности c_{32}. Назначим максимально возможную перевозку, равную 5, из пункта отправления A_3 в пункт назначения B_2. При этом пункт назначения B_2 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице 2×4 второй столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

В оставшейся части платежной матрицы 2×3 вновь ищется минимальный элемент. Им является стоимость $c_{24} = 2$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 13, из из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_4. При этом пункт назначения B_4 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице последний столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

Продолжая этот процесс, придем к начальному плану перевозок, отображенному на рис. 11.

Общая стоимость перевозок по такому начальному плану равна

$$c^* \cdot x = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 13 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 27 + 7 \cdot 15 = 419.$$

Метод “минимума по матрице”, учитывающий стоимости перевозок в данном примере оказался более эффективным по сравнению с методом “северо-западного угла”.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$		10		
$a_2 = 80$	40		27	13
$a_3 = 20$		5	15	

Рис. 11

3. Минимум по строке

Выберем в первой строке платежной матрицы C минимальный элемент. Пусть

$$\min_j c_{1j} = c_{1j_0}.$$

Если минимум достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_{j_0}. Тем самым пункт отправления A_1 или пункт назначения B_{j_0} (или оба пункта одновременно) будет обслужен. В платежной матрице соответствующая строка или столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения. Если и пункт отправления, и пункт назначения одновременно обслужились, то для определенности будем выводить из рассмотрения столбец матрицы X.

В первой строке оставшейся части платежной матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор, пока пока первоначальный план перевозок не будет получен.

Пример 15.3. Зададим транспортную задачу в виде той же платежной матрицы, которая была на рис. 9. Выберем в в первой строке платежной матрицы C минимальный элемент. Им является стоимость $c_{12} = 1$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 10, из из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_2. При этом из пункта отправления A_1 весь груз окажется вывезенным. В платежной матрице первая строка выводится из дальнейшего рассмотрения.

В первой строке оставшейся части платежной матрицы 2×4 вновь ищется минимальный элемент. Минимальная стоимость перевозки достигается на $c_{24} = 2$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 13, из из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_4. При этом пункт назначения B_4 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице 2×4 последний столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

В первой строке оставшейся части платежной матрицы 2×3 вновь ищется минимальный элемент. Им является стоимость $c_{22} = 3$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 5, из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_2. При этом пункт назначения B_2 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице второй столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

Продолжая этот процесс, придем к начальному плану перевозок, отображенному на рис. 12.

Общая стоимость перевозок по такому начальному плану равна

$$c^* \cdot x = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 22 + 7 \cdot 20 = 439.$$

4. Минимум по столбцу

Метод аналогичен предыдущему, но вместо строк рассматриваются столбцы.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$		10		
$a_2 = 80$	40	5	22	13
$a_3 = 20$			20	

Рис. 12

Пример 15.4. Зададим транспортную задачу в виде той же платежной матрицы, которая была на рис. 9. Выберем в в первом столбце платежной матрицы C минимальный элемент. Им является стоимость $c_{11} = 2$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 10, из из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1. При этом из пункта отправления A_1 весь груз окажется вывезенным. В платежной матрице первая строка выводится из дальнейшего рассмотрения.

В первом столбце оставшейся части платежной матрицы 2×4 вновь ищется минимальный элемент. Минимальная стоимость перевозки достигается на $c_{21} = 4$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 30, из из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_1. При этом пункт назначения B_1 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице 2×4 первый столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

В первом столбце оставшейся части платежной матрицы 2×3 вновь ищется минимальный элемент. Им является стоимость $c_{32} = 2$. Назначим максимально возможную перевозку, равную 15, из пункта отправления A_3 в пункт назначения B_2. При этом пункт назначения B_2 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице второй столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

Продолжая этот процесс, придем к начальному плану перевозок, отображенному на рис. 13.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30		42	8
$a_3 = 20$		15		5

Рис. 13

Общая стоимость перевозок по такому начальному плану равна

$$c^* \cdot x = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 15 + 4 \cdot 42 + 2 \cdot 8 + 8 \cdot 5 = 394.$$

Метод “минимума по столбцу” в данном примере оказался наиболее эффективным по сравнению с другими методами.

Предложение 21. *Описанные выше методы нахождения первоначального плана перевозок приводят к первоначальной крайней точке множества допустимых элементов.*

Доказательство. Из предложения 17 следует, что достаточно доказать, что столбцы матрицы A, соответствующие базисным элементам, линейно независимы.

Отметим, что во всех описанных методах на каждом этапе мы выводим из рассмотрения либо столбец, либо строку матрицы X.

Доказательство проведем индукцией по $n+m=k$. При $n+m=2$ матрица A состоит из одного столбца и утверждение предложения очевидно. Предположим, что для $n+m=k$ столбцы, получаемые этими методами линейно независимы. Докажем соответствующее утверждение для $n+m=k+1$. Не ограничивая общности можно считать, что на первом этапе из рассмотрения выводится первая строка или первый столбец (в противном случае мы можем строки или столбцы переобозначить).

Если мы выводим из рассмотрения первую строку матрицы, то это означает, что первый пункт отправления A_1 обслужен полностью, x_{11} — базисный элемент, а $x_{1j}=0$, $j=2,\dots,m$. Первое ограничение уравнений (58) выполнено. Поэтому в матрице ограничений A можно убрать первую строку и первые m столбцов. Для новой матрицы по предположению индукции полученные любым из рассмотренных методов базисные элементы стоят в $n+m-2$ линейно независимых столбцах. Добавление столбца с единицей на первом месте (и еще на одном) к $n+m-2$ линейно независимым столбцам с расширением и добавлением нуля на первое место к каждому из этих столбцов приводит к системе из $n+m-1$ линейно независимых столбцов.

Если мы выводим из рассмотрения первый столбец матрицы, то это означает, что первый пункт назначения B_1 обслужен полностью, x_{11} — базисный элемент, а $x_{k1}=0$, $k=2,\dots,n$. Первое ограничение уравнений (59) выполнено. Поэтому в матрице ограничений A можно убрать $n+1$ строку и еще n столбцов. Для новой матрицы по предположению индукции полученные любым из рассмотренных методов базисные элементы стоят в $n+m-2$ линейно независимых столбцах. Добавление столбца с единицей на $n+1$ месте (и еще на одном) к $n+m-2$ линейно независимым столбцам с расширением и добавлением нуля на $n+1$ место к каждому из этих столбцов приводит к системе из $n+m-1$ линейно независимых столбцов. $\square$

16. Задача, двойственная к транспортной задаче. Метод потенциалов

Пользуясь записью транспортной задачи в канонической форме (61) и видом двойственной ей задачи (см. (38)), получаем задачу, двойственную к транспортной:

$$y^* \cdot \bar{b} \to \max, \quad y^* A \le c^*.$$

Если положить

$$y^* = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m),$$

то двойственная задача может быть переписана в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k a_k + \sum_{j=1}^{m} v_j b_j \to \max, \qquad u_k + v_j \le c_{kj}, \quad k=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m. \tag{62}$$

Двойственные переменные $u=(u_1,\dots,u_n)$ и $v=(v_1,\dots,v_m)$ называются *потенциалами.*

Одновременное рассмотрение исходной и двойственной задачи приводит к методу решения, называемому *методом потенциалов.*

Пусть для исходной транспортной задачи найден первоначальный план перевозок x, являющийся крайней точкой множества допустимых значений. Он содержит $n+m-1$ неотрицательных компонент, которые мы называем базисными (при его нахождении можно использовать любой из описанных выше методов). Индексы (k, j) соответствующие базисным компонентам будем называть *базисными индексами.* Множество базисных индексов (k, j) обозначим через B.

Рассмотрим систему из $n+m-1$ уравнений для определения $n+m$ потенциалов u_k, v_j:

$$u_k + v_j = c_{kj}, \quad (k, j) \in B. \tag{63}$$

Строки матрицы этой системы (если расположить неизвестные в порядке $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m$) совпадают с базисными столбцами и поэтому линейно независимы. Из доказательства леммы 5 следует, что любой столбец системы (63) есть линейная комбинация остальных. Отсюда вытекает, что любую неизвестную в системе (63) можно принять за свободную неизвестную, а остальные тогда однозначно выразятся через нее. Положим, например, $u_1 = 0$. Тогда остальные $n+m-1$ потенциалов определятся однозначно.

Положим $\overline{C} = \{\overline{c}_{kj}\}$, где $\overline{c}_{kj} = u_k + v_j$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, а матрицу Δ определим следующим образом: $\Delta = C - \overline{C}$.

Теорема 26. *Если x — крайняя точка в транспортной задаче и $\Delta \geq 0$, то x является решением транспортной задачи.*

Доказательство. Условие $\Delta \geq 0$ означает, что найдены потенциалы u_k и v_j такие, что

$$u_k + v_j \leq c_{kj}, \quad k = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m,$$

причем $u_k + v_j = c_{kj}$ при $(k, j) \in B$. Таким образом, вектор $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$ является допустимым в двойственной задаче (62).

С другой стороны, поскольку $x_{kj} = 0$ при $(k, j) \notin B$, то

$$c^* \cdot x = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}x_{kj} = \sum_{(k,j)\in B} c_{kj}x_{kj} = \sum_{(k,j)\in B}(u_k + v_j)x_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(u_k + v_j)x_{kj}.$$

Разбивая последнюю сумму на две и учитывая условия (58) и (59), получаем

$$c^* \cdot x = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_k x_{kj} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_j x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{j=1}^{m} x_{kj} + \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{k=1}^{n} x_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} u_k a_k + \sum_{j=1}^{m} v_j b_j.$$

Отсюда из следствия 7 вытекает, что x — решение исходной задачи, а (u, v) — решение в двойственной задаче. □

Условие $\Delta \geq 0$ является не только достаточным, но и необходимым для невырожденных транспортных задач. Для доказательства этого факта нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Любой минор матрицы A (60) равен либо 0, либо ± 1.*

Доказательство. Доказательство проведем с помощью индукции по порядку миноров. Для миноров порядка 1 утверждение леммы очевидно. Предположим, что утверждение доказано для всех миноров A порядка $k-1$. Докажем справедливость утверждения леммы для миноров порядка k. Разделим строки матрицы A на две группы: первые n строк отнесем к первой группе, а последующие m строк — ко второй. Пусть Δ_k — произвольный минор порядка k.

Каждый столбец Δ_k может содержать либо две единицы, либо одну единицу, либо сплошь состоять из нулей. В последнем случае очевидно, что $\Delta_k = 0$. Пусть каждый столбец Δ_k содержит хотя бы одну единицу. Тогда возможны два случая:

а) хотя бы в одном столбце Δ_k содержится одна единица,

б) во всех столбцах Δ_k содержится ровно две единицы.

В случае а) выберем столбец, содержащий одну единицу и разложим по нему исследуемый минор. Получим, что $\Delta_k = \pm\Delta'_{k-1}$, где Δ'_{k-1} — некоторый минор A порядка $k-1$. Из предположения индукции вытекает, что Δ_k равен либо 0, либо ± 1.

В случае б) среди строк Δ_k имеются представители как первой, так и второй групп строк. Возьмем любую строку Δ_k, принадлежащую первой группе, и прибавим к ней все остальные строки из этой же группы. Получим строку, содержащую все единицы. Аналогично, прибавляя к любой строке второй группы все остальные строки из этой же группы, снова получим строку, состоящую из всех единиц. Поэтому в рассматриваемом случае $\Delta_k = 0$. □

Лемма 7. *Для любых $(k_0, j_0) \notin B$ существует вектор $\bar{t} = \{t_{kj}\}$ такой, что $A\bar{t} = 0$ и*

$$t_{kj} = \begin{cases} \pm 1 \text{ или } 0, & (k,j) \in B, \\ 1, & (k,j) = (k_0, j_0), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Вектор $\bar{t}$ должен удовлетворять системе

$$\sum_{(k,j)\in B} A_{kj} t_{kj} = -A_{k_0 j_0},$$

где A_{kj} — соответствующий столбец матрицы A. Выбрав $n+m-1$ линейно независимых строк в этой системе (что возможно сделать, так как $\operatorname{rg} A = n + m - 1$), получим систему с невырожденной матрицей $\tilde{A}$

$$\tilde{A}\tilde{t} = -b,$$

где $\tilde{t} = \{t_{kj}\}$, $(k,j) \in B$, а столбец b — получен из столбца $A_{k_0 j_0}$ выбором соответствующих строк. Решая эту систему по правилу Крамера, будем иметь

$$t_{kj} = \frac{|\tilde{A}_{kj}|}{|\tilde{A}|},$$

где матрица $\tilde{A}_{kj}$ получена из матрицы $\tilde{A}$ заменой столбца (k,j) на столбец b. Из леммы 6 следует, что $|\tilde{A}| = \pm 1$. Матрица $\tilde{A}_{kj}$ с точностью до знака и перестановки столбцов также является некоторым минором A. Поэтому определитель этой матрицы равен 0 или ± 1. □

Теорема 27. *Если x — крайняя точка в транспортной задаче с $n+m-1$ положительными компонентами и*

$$\min_{k,j} \Delta_{kj} < 0,$$

то существует план $\widehat{x}$ такой, что $c^* \cdot \widehat{x} < c^* \cdot x$.

Доказательство. Пусть

$$\min_{k,j} \Delta_{kj} = \Delta_{k_0 j_0}.$$

Положим $\widehat{x} = x + t\tilde{t}$, где $\tilde{t}$ из леммы 7. Выберем $t > 0$ достаточно малым, чтобы $x + t\tilde{t} \geq 0$ (в качестве t можно выбрать минимальное x_{jk} из тех, для которых соответствующие $t_{kj} = -1$). Тогда $x + t\tilde{t}$ — допустимый элемент в задаче и в силу того, что

$$c_{kj} = \Delta_{kj} + \overline{c}_{jk} = \Delta_{kj} + u_k + v_j,$$

имеют место равенства

$$c^* \cdot \widehat{x} - c^* x = t \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\Delta_{kj} + u_k + v_j) t_{kj} = t \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta_{kj} t_{kj}$$
$$+ t \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{j=1}^{m} t_{kj} + t \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{k=1}^{n} t_{kj} = t\Delta_{k_0 j_0} < 0.$$

Последние два слагаемые в этой сумме равны нулю в силу того, что $A\tilde{t} = 0$. Слагаемые $\Delta_{kj} t_{kj} = 0$ при $(k, j) \neq (k_0, j_0)$, так как $\Delta_{kj} = 0$ при $(k, j) \in B$, а $t_{kj} = 0$ при $(k, j) \notin B$ и $(k, j) \neq (k_0, j_0)$. □

Из теорем 26 и 27 непосредственно вытекает

Следствие 8. *Крайняя точка x является решением в невырожденной транспортной задаче тогда и только тогда, когда $\Delta \geq 0$.*

17. Алгоритм решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов

Сформулируем правило решения транспортной задачи методом потенциалов. Для решения транспортной задачи следует:

1. Привести задачу к замкнутой модели.
2. Найти первоначальный план перевозок x, являющийся крайней точкой множества допустимых точек (при нахождении можно использовать любой из описанных выше методов).
3. Найти потенциалы u_k, v_j из системы (63) и построить матрицу $\overline{C} = \{\overline{c}_{kj}\}$, где $\overline{c}_{kj} = u_k + v_j$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.
4. Провести исследование матрицы $\Delta = C - \overline{C}$. Если $\Delta \geq 0$, то исследуемый план x является решением.
5. Если
$$\min_{k,j} \Delta_{kj} = \Delta_{k_0 j_0} < 0,$$
то строить новый план перевозок следующим образом: положим $x'_{k_0 j_0} = t$, $x'_{kj} = x_{kj} \pm t$ или x_{kj} для базисных индексов j, k так, чтобы x'_{kj} по-прежнему были неотрицательны, но одна из базисных компонент обратилась бы в ноль. Вектор матрицы A, соответствующий этой компоненте, выводится из числа базисных, а вектор матрицы A, соответствующий индексам k_0, j_0 вводится в число базисных векторов. Затем вновь начинается исследование полученной крайней точки x', т.е. переходим к п. 3.

   В невырожденной задаче в ноль может обратиться только одна из компонент вектора x'. В вырожденной задаче таковых может быть несколько. В этом случае из числа базисных элементов исключается любая компонента с нулевым значением, как правило исключается компонента с наибольшей стоимостью перевозок.

Пример 17.1. Рассмотрим транспортную задачу из примера 15.1.

Выберем в качестве начального плана тот, который получался по методу "северо-западного угла".

Найдем потенциалы и построим матрицу $\overline{C}$.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	2	1	5	11
$a_2 = 80$	4	3	4	2
$a_3 = 20$	6	2	7	8

Рис. 14

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30	15	35	
$a_3 = 20$			7	13

Рис. 15

	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$
$u_1 = 0$	**2**	1	2	3
$u_2 = 2$	**4**	**3**	**4**	5
$u_3 = 5$	7	6	**7**	**8**

Рис. 16

Имеем

$$\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальный элемент $\Delta_{32} = -4 < 0$. Добавляя в первоначальный план на место нулевого небазисного элемента x_{32} величину t, получим

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30	$15 - t$	$35 + t$	
$a_3 = 20$		t	$7 - t$	13

Рис. 17

Положив $t = 7$, получим второй план перевозок (рис. 18).

Значение минимизируемого функционала для этого плана 450 (на первоначальном плане оно было 479).

Найдем вновь потенциалы и построим матрицу $\overline{C}$.

Имеем

$$\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальный элемент $\Delta_{24} = -7 < 0$. Добавляя в первоначальный план на место нулевого небазисного элемента x_{24} величину t, получим

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30	8	42	
$a_3 = 20$		7		13

Рис. 18

	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 7$
$u_1 = 0$	**2**	1	2	7
$u_2 = 2$	**4**	**3**	**4**	9
$u_3 = 1$	3	**2**	3	**8**

Рис. 19

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30	$8 - t$	42	t
$a_3 = 20$		$7 + t$		$13 - t$

Рис. 20

Положив $t = 8$, получим третий план перевозок (рис. 21).

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	30		42	8
$a_3 = 20$		15		5

Рис. 21

Значение минимизируемого функционала для этого плана 394. Найдем вновь потенциалы и построим матрицу $\overline{C}$.

Имеем

$$\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальный элемент $\Delta_{31} = -4 < 0$. Добавляя в первоначальный план на место нулевого небазисного элемента x_{31} величину t, получим

Положив $t = 5$, получим четвертый план перевозок (рис. 24).

Значение минимизируемого функционала для этого плана 374. Найдем потенциалы и построим матрицу $\overline{C}$ (рис. 25).

Имеем

$$\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

	$v_1 = 2$	$v_2 = -6$	$v_3 = 2$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	**2**	-6	2	0
$u_2 = 2$	**4**	-4	**4**	**2**
$u_3 = 8$	10	**2**	10	**8**

Рис. 22

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	$30 - t$		42	$8 + t$
$a_3 = 20$	t	15		$5 - t$

Рис. 23

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	10			
$a_2 = 80$	25		42	13
$a_3 = 20$	5	15		

Рис. 24

	$v_1 = 2$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	**2**	-2	2	0
$u_2 = 2$	**4**	0	**4**	**2**
$u_3 = 4$	**6**	**2**	6	4

Рис. 25

В силу того, что $\Delta \geq 0$, построенный четвертый план перевозок является оптимальным и суммарная стоимость перевозок равна 374.

Глава 3

Дополнение

1. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве

Пусть X — линейное нормированное пространство и Y — некоторое множество из X. Для фиксированного элемента $x \in X$ рассмотрим задачу о нахождении величины

$$E(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X,$$

называемой *наилучшим приближением элемента x множеством Y*. Если существует $\widehat{y} \in Y$, для которого

$$\|x - \widehat{y}\|_X = E(x, Y),$$

то $\widehat{y}$ называется *элементом наилучшего приближения.*

Теорема 28. *Пусть X — линейное нормированное пространство, а Y — конечномерное линейное подпространство X. Тогда для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из X. По определению нижней грани найдется последовательность $\{y_n\}$, для которой

$$\|x - y_n\|_X < E(x, Y) + \frac{1}{n}.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|y_n\|_X \le \|y_n - x\|_X + \|x\|_X \le E(x, Y) + 1 + \|x\|_X.$$

Тем самым последовательность $\{y_n\}$ ограничена, а, значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_k} \to \widehat{y} \in Y$. Имеем

$$E(x, Y) \le \|x - \widehat{y}\|_X \le \|x - y_{n_k}\|_X + \|y_{n_k} - \widehat{y}\|_X \\ \le E(x, Y) + \frac{1}{n_k} + \|y_{n_k} - \widehat{y}\|_X.$$

Устремляя k к бесконечности, получаем

$$\|x - \widehat{y}\|_X = E(x, Y).$$

□

2. Наилучшее равномерное приближение многочленами. Теорема Чебышева

Обозначим через $C([a, b])$ линейное пространство функций $x(\cdot)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([a,b])} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Через $\mathcal{P}_n$ будем обозначать множество алгебраических многочленов степени не выше n. Рассмотрим задачу наилучшего приближения функции $x(\cdot) \in C([a,b])$ алгебраическими многочленами из $\mathcal{P}_n$, т. е. задачу о нахождении величины

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) = \inf_{p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n} \|x(\cdot) - p_n(\cdot)\|_{C([a,b])}.$$

В силу теоремы 28 существует многочлен $\widehat{p}(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ такой, что

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) = \|x(\cdot) - \widehat{p}_n(\cdot)\|_{C([a,b])}.$$

Многочлен $\widehat{p}(\cdot)$ называется *многочленом наилучшего равномерного приближения* для $x(\cdot)$.

Теорема 29 (Валле-Пуссен). *Предположим, что существуют $n+2$ точки $a \le t_1 < \ldots < t_{n+2} \le b$, в которых для некоторого $p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ выполняются равенства*

$$\operatorname{sign}(x(t_j) - p_n(t_j)) = \sigma(-1)^j, \quad j = 1, \ldots, n+2,$$

где $\sigma = 1$ или -1. Тогда

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) \ge \min_{1 \le j \le n+2} |x(t_j) - p_n(t_j)|.$$

Доказательство. Предположим, что для многочлена наилучшего приближения $\widehat{p}_n(\cdot)$

$$\|x(\cdot) - \widehat{p}_n(\cdot)\|_{C([a,b])} < \min_{1 \le j \le n+2} |x(t_j) - p_n(t_j)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(\widehat{p}_n(t_j) - p_n(t_j)) &= \operatorname{sign}(\widehat{p}_n(t_j) - x(t_j) + x(t_j) - p_n(t_j)) \\ &= \operatorname{sign}(x(t_j) - p_n(t_j)) = \sigma(-1)^j, \quad j = 1, \ldots, n+2.\end{aligned}$$

Тем самым многочлен $\widehat{p}_n(\cdot) - p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ меняет знак не менее $(n+1)$-го раза, что невозможно, т. к. многочлены из $\mathcal{P}_n$, отличные от тождественного нуля, не могут иметь более n нулей. □

Теорема 30 (Чебышев). *Многочлен $\widehat{p}_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего равномерного приближения для функции $x(\cdot) \in C([a,b])$ в том и только в том случае, когда существуют $n+2$ точки $a \le t_1 < \ldots < t_{n+2} \le b$ такие, что*

$$x(t_j) - \widehat{p}_n(t_j) = \sigma(-1)^j \|x(\cdot) - \widehat{p}_n(\cdot)\|_{C([a,b])}, \quad j = 1, \ldots, n+2,$$

где $\sigma = 1$ или -1.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\widehat{p}_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ — многочлен наилучшего равномерного приближения для функции $x(\cdot) \in C([a,b])$. Обозначим через t_1 минимальную из точек отрезка $[a,b]$, в которых

$$|x(t) - \widehat{p}_n(t)| = E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Пусть для определенности $x(t_1) - \widehat{p}_n(t_1) = E(x(\cdot), \mathcal{P}_n)$. Через t_2 обозначим минимальную из точек отрезка $[t_1, b]$, в которых

$$x(t) - \widehat{p}_n(t) = -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Продолжая этот процесс, получим точки $a \le t_1 < \ldots < t_m \le b$, в которых

$$x(t_j) - \widehat{p}_n(t_j) = (-1)^{j+1} E(x(\cdot), \mathcal{P}_n), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что $m < n+2$. В силу непрерывности функции $x(\cdot) - \widehat{p}_n(\cdot)$ на каждом из интервалов (t_j, t_{j+1}), $j = 1, \ldots, m-1$, найдется точка s_j, в которой $x(s_j) - \widehat{p}_n(s_j) = 0$. Положим $s_0 = a$ и $s_m = b$. Тогда из построения точек t_j

вытекает, что на каждом из отрезков $[s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, выполняются неравенства

$$-E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) < (x(t) - \widehat{p}_n(t))(-1)^j \le E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $t \in [s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$

$$-E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) + \varepsilon < (x(t) - \widehat{p}_n(t))(-1)^j \le E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Положим

$$q(t) = \lambda \prod_{j=1}^{m-1} (s_j - t) \in \mathcal{P}_n,$$

где $\lambda > 0$ выберем так, чтобы

$$\|q(\cdot)\|_{C([a,b])} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $t \in (s_j, s_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, имеем

$$(x(t) - \widehat{p}_n(t) - q(t))(-1)^j \le E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) - q(t)(-1)^j < E(x(\cdot), \mathcal{P}_n)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}(x(t) - \widehat{p}_n(t) - q(t))(-1)^j &\ge -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) + \varepsilon - q(t)(-1)^j \\ &\ge -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) + \frac{\varepsilon}{2} > -E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).\end{aligned}$$

Тем самым для многочлена $r_n(\cdot) = \widehat{p}_n(\cdot) + q(\cdot) \in \mathcal{P}_n$

$$\|x(\cdot) - r_n(\cdot)\|_{C([a,b])} < E(x(\cdot), \mathcal{P}_n).$$

Полученное противоречие доказывает, что $m \ge n+2$.

Достаточность. Из теоремы 29 вытекает, что

$$E(x(\cdot), \mathcal{P}_n) \ge \|x(\cdot) - \widehat{p}_n(\cdot)\|_{C([a,b])}.$$

Следовательно, $\widehat{p}_n(\cdot)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения. □

Если у непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции существует n точек $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b$, в которых она принимает, чередуя знаки, значения, равные по модулю ее норме в метрике $C([a, b])$, то говорят, что у этой функции имеется *n-альтернанс.*

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что многочлен $\widehat{p}_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего равномерного приближения для функции $x(\cdot) \in C([a, b])$ в том и только в том случае, когда у функции $x(\cdot) - \widehat{p}_n(\cdot)$ имеется $(n+2)$-альтернанс.

3. Многочлены Чебышева

Многочлен Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ определяется равенством

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

Из тождества

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi \cos n\varphi,$$

полагая $\varphi = \arccos t$, получаем

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{64}$$

Так как $T_0(t) \equiv 1$, а $T_1(t) = \cos \arccos t = t$, то из равенства (64) вытекает, что $T_n(\cdot)$ — действительно многочлен степени n, при этом нетрудно убедиться, что у него коэффициент при старшей степени равен 2^{n-1}.

Отметим ряд важных свойств многочленов Чебышева. У $T_n(\cdot)$ имеется n различных вещественных корней

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Из определения $T_n(\cdot)$ следует, что

$$|T_n(t)| \leq 1, \quad t \in [-1, 1].$$

На отрезке $[-1, 1]$ имеется $n+1$ точка

$$s_j = \cos \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

в которых $|T_n(\cdot)|$ принимает максимальные значения

$$T_n(s_j) = (-1)^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{65}$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Среди всех алгебраических многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, найти тот, для которого максимальное значение его модуля на отрезке $[-1, 1]$ было бы наименьшим. Эту задачу можно сформулировать как задачу наилучшего равномерного приближения функции t^n многочленами степени не выше $n-1$, т. е. задачу о нахождении величины $E(t^n, \mathcal{P}_{n-1})$. Из теоремы 30 и равенств (65) получаем, что решением поставленной задачи является многочлен

$$\overline{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t).$$

А именно, имеет место

Теорема 31. *При всех* $n \in \mathbb{N}$

$$E(t^n, \mathcal{P}_{n-1}) = \|\overline{T}_n(\cdot)\|_{C([-1,1])} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Литература

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[2] Галеев Э. М. Оптимизация: Теория, примеры, задачи: Учебное пособие. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.

[3] Жадан В. Г. Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации: учебное пособие. М.: МФТИ, 2014.

[4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и фукционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2003.

[6] Осипенко К. Ю. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Курс лекций, 2015.
http://opu.math.msu.su/sites/default/files/main_courses/OsLect2015_0_0.pdf

[7] Осипенко К. Ю. Выпуклый анализ. Курс лекций, 2016.
http://opu.math.msu.su/sites/default/files/main_courses/CA_0.pdf

[8] Протасов В. Ю. Выпуклый анализ. Курс лекций, 2009.
http://opu.math.msu.su/sites/default/files/main_courses/convex-anal-new.pdf

[9] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[10] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.