

Избранные главы теории приближений

К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомиров

Оглавление

Предисловие	6
Предисловие	7
Глава 1. Задачи аппроксимации	11
1.1. Приближение элементов подпространствами	11
1.2. Критерий в задаче о приближении элемента подпространством	12
1.3. Полиномы наименьшего уклонения	13
1.4. Критерии полиномов наилучшего приближения в $C([a, b])$	16
1.5. Полиномы Золотарёва	17
1.6. Начальный пример: неравенство Коши в трехмерном пространстве	18
1.7. Проблемы экстраполяции алгебраических полиномов	18
1.8. “Точечные” неравенства Марковых для производных алгебраических полиномов	19
1.9. Неравенство Бернштейна	22
Глава 2. Неравенства Ландау–Колмогорова	24
2.1. Начальный пример: шар и два соосных эллипсоида в \mathbb{E}^3	24
2.2. Общая задача	24
2.3. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 2, 2, 2))$ — неравенство Харди –Литтлвуда–Полиа на прямой	27
2.4. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 2, \infty, 2))$ — неравенство Тайкова на прямой	31
2.5. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(k, n, 2, \infty, 2))$ — неравенство Габушина–Калябина на полупрямой	32
2.6. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, \infty, \infty, \infty))$ — неравенство Колмогорова на прямой	35
2.7. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 1, 1, 1))$ — неравенство Стейна на прямой	39
2.8. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, \infty))$ — неравенство Ландау на полупрямой	42
2.9. Задача $(P_{\mathbb{R}}(1, 2, \infty, \infty, \infty))$ — неравенство Адамара на прямой	43
2.10. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, r))$ — обобщение неравенства Ландау	44
2.11. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, 2, 2, 2))$ — неравенство Харди–Литтлвуда–Пойя на полупрямой	45
2.12. Комментарии	46
Глава 3. Поперечники	47
3.1. Начальный пример: поперечники эллипсоида в \mathbb{E}^3	47
3.2. Теорема о поперечниках классов $W_2^r(\mathbb{T})$ в $L_2(\mathbb{T})$	48
3.3. Поперечники октаэдров $B_1^N(a)$ в l_2^N	49

3.4.	Поперечники $B_p^N(a)$ в l_q^N	53
3.5.	Поперечники соболевских классов. Начальный пример: липшицевы функции	56
3.6.	Поперечники классов $W_\infty^r([\mathcal{T}, \Gamma])$	60
3.7.	Поперечники классов H_p^r	66
3.8.	Поперечники $d_n(H_\infty, L_q(E))$	71
3.9.	Комментарии	75
Глава 4.	Оптимальное восстановление	76
4.1.	Задача интерполяции	76
4.2.	Минимизация функции	81
4.3.	Численное интегрирование	82
4.4.	Численное дифференцирование по неточным значениям в точках	84
4.5.	Постановка задачи оптимального восстановления	87
4.6.	Оптимальное восстановление линейных функционалов	89
4.7.	Построение оптимального метода с помощью параметризации экстремального элемента	98
4.8.	Оптимальная интерполяция на классе $W_\infty^r([-1, 1])$	100
4.9.	Оптимальная интерполяция на классе H_p	101
4.10.	Оптимальная интерполяция на классах Харди–Соболева H_∞^r	103
4.11.	Поперечники $d_n(H_\infty^r, C([a, b]))$	107
4.12.	Регуляризация по Тихонову	109
4.13.	Регуляризация по Колмогорову	113
4.14.	Восстановление функции и ее производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в метрике l_2^N	117
4.15.	Восстановление функции и ее производных по неточно заданному преобразованию Фурье	124
4.16.	Восстановление решения уравнения теплопроводности	130
4.17.	Комментарии	135
Глава 5.	Дополнение	138
5.1.	Теоремы отделимости	138
5.2.	Аффинная независимость. Симплексы	138
5.3.	Выпуклые функции	141
5.4.	Двойственность выпуклых функций	143
5.5.	Интегральное неравенство Йенсена	144
5.6.	Первая теорема отделимости в конечномерном случае	144
5.7.	Субдифференциал	145
5.8.	Теорема Ферма в субдифференциальной форме	146
5.9.	Существование элемента наилучшего приближения	147
5.10.	Двойственность в задачах о наилучшем приближении	149
5.11.	Теорема Моро–Рокафеллара	151
5.12.	Теоремы Радона и Хелли	153
5.13.	Теорема Каруша–Куна–Таккера	154
5.14.	Теорема Дубовицкого–Милютина	155
5.15.	Теорема об очистке	157
5.16.	Лемма о правом обратном и замкнутости образа	159
5.17.	Теорема Люстерника	159
5.18.	Леммы об аннуляторах	161
5.19.	Аффинные подпространства	162

5.20.	Теорема Каратеодори	163
5.21.	Правило множителей Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств	164
5.22.	Неравенства для последовательностей	165
5.23.	Неравенства для норм функций и их производных	167
5.24.	Функции Стеклова	173
5.25.	Теорема Хана–Банаха (для случая, когда однородно-выпуклый функционал может принимать бесконечные значения)	174
5.26.	Теорема Борсука	176
5.26.1.	Симплексы в \mathbb{R}^n и триангуляция S^n	176
5.26.2.	Комбинаторная лемма	177
5.26.3.	Теорема Люстерника–Шнирельмана–Борсука	178
5.26.4.	Теорема Борсука	180
5.26.5.	Теорема о поперечнике шара	180
5.27.	Совершенные сплайны. Интерполяция сплайнами	181
5.27.1.	Разделенные нули и существенные перемены знака функций	181
5.27.2.	Совершенные сплайны	182
5.27.3.	Интерполяция сплайнами	186
5.28.	Неравенство Юнга для сверток	187
5.29.	Формула Йенсена	188
5.30.	Произведения Бляшке–Золотарёва	190
	Список литературы	191

Предисловие

Теория приближений, или аппроксимации, — раздел математики, в котором исследуются замены одних математических объектов другими, близкими в определенном смысле к исходным, но более просто устроенными. Начало теории приближений возникло из задачи, которую стал рассматривать в 1953 году П. Л. Чебышёв, о замене произвольной непрерывной функции полиномом, наилучшим образом приближающим данную функцию. В современном мире с мощнейшими вычислительными средствами и огромными скоростями вычислений может показаться, что вопросы о выборе наилучшего способа аппроксимации не актуальны, но в случае когда даже с такими средствами на решение сложных задач приходится тратить многие часы вычислений, использование оптимальной аппроксимации для вычисления, например, какой-либо функции, которая многократно вычисляется в процессе решения задачи, позволяет сэкономить достаточно много времени. С математической точки зрения поиски оптимальных методов аппроксимации часто приводят к появлению новых методов, которые находят применение и в других задачах.

Данная книга состоит из нескольких тем, связанных с теорией приближений. Выбор этих тем обусловлен интересами авторов и участием их в научных исследованиях самих этих разделов. При этом авторы стремились показать, что большинство экстремальных задач, возникающих в каждом из рассматриваемых разделов, может быть решено единым образом на основе принципа Лагранжа. Авторы старались сделать текст книги замкнутым. Поэтому большинство используемых в книге результатов, не входящих в стандартные университетские курсы, вынесены в достаточно объемное дополнение. Это позволяет книге быть доступной для студентов и аспирантов, обучающихся по математическим специальностям, а также преподавателей и научных работников.

Следует отметить ряд книг, наиболее близких к рассматриваемой тематике: [26], [66], [35], [67], [43], [44].

Авторы считают своим приятным долгом высказать глубокую благодарность своим коллегам А. С. Кочурову и Г. Г. Магарил-Ильяеву за полезные обсуждения и ценные замечания, а также Е. О. Сивковой за большой труд по подготовке рукописи к печати.

Предисловие

Одной из особенностей российской науки (не только математики) является наличие научных школ.

Школа по теории аппроксимации является одной из наиболее значительных математических школ в бывшем Советском Союзе. Корни ее лежат в дореволюционной России. В XIX в. в России существовала единственная крупная математическая школа — петербургская, основанная Пафнутием Львовичем Чебышёвым. В ней доминировали три важнейших направления: анализ, теория чисел и теория вероятностей. В рамках классического анализа Чебышёв основал и развил новую ветвь — теорию приближений. Первый мемуар, посвященный аппроксимации функций, был представлен в Академию Наук в 1853 г. и опубликован в следующем, 1854 году. От этого года теория приближений и отсчитывает свое время.

Стимулами исследований П. Л. Чебышёва по теории аппроксимации были актуальные проблемы инженерии и численного анализа. Чебышёв увлек этой теорией нескольких своих учеников (А. А. и В. А. Марковых, Е. И. Золотарёва и других) и тем самым заложил основы российской школы по теории аппроксимации. Занимались близкими к теории приближений проблемами и другие представители петербургской школы (А. Н. Коркин, Ю. В. Сохоцкий).

На первом “чебышёвском” этапе развития теории изучались в основном *наилучшие приближения индивидуальных функций фиксированными аппаратами приближения* (как правило, алгебраическими полиномами или рациональными функциями) и связанные с этой проблематикой вопросы, касающиеся точных *неравенств для производных полиномов*. Чебышёв и его последователи стремились к точному решению поставленных задач, руководствуясь девизом, выраженным им самим: “Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, ... и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая ищет самого лучшего, самого выгодного”.

Начальный этап развития теории аппроксимации естественно озаглавить **“Экстремальные задачи теории полиномиальных приближений”**.

В 1885 году Вейерштрасс доказал свою знаменитую теорему об аппроксимации непрерывной функции многочленами. Размышляя над различными доказательствами этой теоремы, Лебег и Валле-Пуссен пришли к мысли связать скорость аппроксимации со свойствами гладкости приближаемой функции.

Воссоединение идей Чебышёва, начавшего изучение проблемы наилучшего приближения функций полиномами, Вейерштрасса, доказавшего теорему о приближении, и Валле-Пуссена, поставившего проблему взаимосвязи гладкости и скорости аппроксимации, выпало на долю Сергея Натановича Бернштейна. С его ранних работ начинается второй этап развития теории приближений.

С. Н. Бернштейн работал в области теории приближений свыше 40 лет, начиная с 1912 г. Вдохновленный идеями Валле-Пуссена, он предпринял попытку преобразовать всю теорию функций на базе теории аппроксимации. Он ввел даже специальный термин: *“конструктивная теория функций”*.

Второй этап в теории приближений был по преимуществу посвящен теме: “**Гладкость и аппроксимация**”. К прежним средствам аппроксимации — алгебраическим и тригонометрическим полиномам и рациональным функциям Бернштейн присоединил новый аппарат приближения — *целые функции экспоненциального типа*. Он установил важнейшие связи между структурными характеристиками функции и скоростью ее приближения.

Бернштейн основал несколько школ в теории приближений. Он начинал свою деятельность в Харькове, где под его влиянием сформировались такие математики, как Н. И. Ахиезер, Я. Л. Геронимус, Б. Я. Левин, Б. М. Левитан и др., а в тридцатые годы к кругу идей Бернштейна присоединился М. Г. Крейн. Затем Бернштейн переезжает в Ленинград, где создает еще одну школу теории аппроксимации. Среди его учеников и последователей здесь — В. С. Виденский, Е. В. Вороновская, Л. В. Канторович, С. М. Лозинский, И. П. Натансон, Ф. И. Харашиладзе и др. К ленинградской школе следует отнести и П. П. Коровкина — ученика В. И. Смирнова. Коровкин начал разработку теории *положительных операторов*.

После войны Бернштейн не возвращается в Ленинград, где в блокаду погиб его сын. Он переезжает в Москву. Сергей Натанович оказал значительное влияние и на формирование московской школы теории приближений (в частности, на творчество С. М. Никольского и С. Б. Стечкина).

Третий этап развития теории приближений связан с именем Андрея Николаевича Колмогорова. Андрей Николаевич опубликовал совсем немного — всего восемь работ, относящихся собственно к теории приближений, но его влияние на развитие этой ветви анализа оказалось весьма значительным. Первые работы Колмогорова относятся к середине 1930-х годов.

Среди направлений, намеченных Колмогоровым, выделим два важнейших: *приближения на классах* (иногда употребляют термин “*точные константы*”) и *оптимальные методы аппроксимации и восстановления* (здесь имеются в виду поперечники и ε -энтропия).

Чебышёв приближал индивидуальные функции, Бернштейн сделал шаг в направлении приближений целых совокупностей функций — функциональных пространств. Колмогоров поставил задачу о наилучшем приближении (тем или иным методом аппроксимации) *классов функций* (в основном шаров функциональных пространств) и затем — поиска *оптимального метода среди совокупности методов аппроксимации*. В первом случае (приближений классов фиксированным методом) Колмогоров стимулировал поиски *точных решений* (поэтому — “*точные константы*”), во втором — поиски наилучших методов и средств аппроксимации, что привело к понятиям *поперечников и энтропии*. А. Н. Колмогоров подчеркивал важность точного решения задач об оптимальных методах приближения и восстановления, и так вышло, что третий, “колмогоровский”, период в теории аппроксимации проходил в значительной части своей под девизом: “**Точные результаты**”.

Среди учеников А. Н. Колмогорова — С. М. Никольский, В. Д. Ерохин и автор этих строк. Но число математиков, работавших в теории приближений, на которых существенно повлияло творчество Колмогорова, очень велико. Назовем лишь А. Г. Витушкина, А. А. Гончара, В. К. Дзядыка, Н. П. Корнейчука, С. Б. Стечкина, А. Ф. Тимана.

Огромную роль в формировании теории аппроксимации как отдельного направления, причем не только в Советском Союзе, но и в странах Восточной Европы, оказали творческая и организационная деятельность Сергея Михайловича Никольского и Сергея Борисовича Стечкина.

В самостоятельную научную работу Сергей Михайлович был вовлечен А. Н. Колмогоровым. Под руководством Колмогорова он проходил аспирантуру, Колмогоров был руководителем Сергея Михайловича и в докторантуре.

Первый цикл работ Никольского был связан с проблематикой приближений классов. Этому была посвящена его докторская диссертация (защищенная в Казани в январе 1942 года). Итоги развития всего “бернштейновско-колмогоровского” направления от истоков до середины 1950-х годов были подведены Никольским в его обзорном докладе на Международном конгрессе математиков в Амстердаме (1954).

Руководствуясь идеями Колмогорова, Никольский заложил основы теории *оптимальных квадратур*. В 1950-е годы Сергей Михайлович начал новый цикл работ, связанный с *теоремами вложения*, что совершенно преобразовало эту ветвь анализа. Многие из учеников С. М. Никольского (О. В. Бесов, В. К. Дзядык, Н. П. Корнейчук, Л. Д. Кудрявцев, А. Ф. Тиман и другие) стали основателями плодотворно работающих научных школ. Учениками С. М. Никольского являются Т. И. Аманов, В. И. Буренков, Я. С. Бугров, В. П. Моторный, М. К. Потапов, С. В. Успенский и другие.

Начиная с 1950-х годов, в Советском Союзе и ряде других стран Восточной Европы (Болгария, Венгрия, Польша) во многом благодаря усилиям С. М. Никольского стали регулярно проходить представительные международные конференции по теории аппроксимации (Будапешт, Варна, Варшава, Гданьск, Дмитровград, Днепропетровск, Киев, Москва). В России и бывшем Советском Союзе возникло множество математических школ по теории аппроксимации (Алма-Ата, Баку, Воронеж, Днепропетровск, Донецк, Ереван, Киев, Новосибирск, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ярославль и др.). Роль С. М. Никольского во всем этом очень велика.

Сергей Борисович Стечкин учился в аспирантуре у Дмитрия Евгеньевича Меньшова, и первой его научной специальностью была теория функций. Но уже с конца 1940-х годов он начал заниматься теорией приближений, которая стала, пожалуй, его основной специальностью. В беседах со мной Сергей Борисович неизменно подчеркивал влияние на свое творчество в теории приближений С. Н. Бернштейна и особенно А. Н. Колмогорова. Сергей Борисович внес существенный вклад и в конструктивную теорию функций, и в приближение классов, и в теорию поперечников.

Он был одним из основателей *геометрической теории приближений* и заложил основы *теории приближений неограниченных операторов ограниченными*.

С. Б. Стечкин основал две значительные научные школы — в Москве (среди его московских учеников назовем А. Л. Гаркави, А. В. Ефимова, С. В. Корягина, С. А. Теляковского) и в Свердловске (В. В. Арестов, В. И. Бердышев, В. Н. Габушин, Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков, Н. И. Черных и др.).

Подводя определенные итоги, невозможно не задумываться о будущем. Здесь видятся два больших и связанных друг с другом направления: *построение оптимальных алгоритмов численного анализа* и *теория сложности вычислительных процедур*.

Андрей Николаевич Колмогоров неоднократно подчеркивал, что именно теория приближений должна стать базой численного анализа. Реализацию этой программы начал осуществлять Константин Иванович Бабенко. Одной из основных идей, которыми он руководствовался, была идея конструирования оптимальных (в смысле Колмогорова) *алгоритмов без насыщения*. С другой стороны, сам А. Н. Колмогоров в своей последней публикации, относящейся к

теории приближений, — докладе на Стокгольмском Международном математическом конгрессе 1962 г. — предложил искать пути оптимизации алгоритмов по их *сложности*.

В. М. Тихомиров

Задачи аппроксимации

Выделим компоненты, входящие в формулировку рассматриваемых далее задач. Это:

основное пространство X , в котором рассматривается задача (обычно это нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$);

аппарат приближения A — множество или семейство подмножеств X ;

объект приближения O — элемент или подмножество X или функция на X .

Задачу исследования объекта O аппаратом A в пространстве X будем обозначать $P(X, A, O)$. После названия задачи исследования мы записываем ее в виде $P(X, A, O)$ и затем формулируем эту задачу словесно.

По отношению ко всем задачам далее выделяется три пункта: формализация, исследование задачи и выписывание ответа. Формализованные экстремальные задачи, это либо задачи без ограничений, либо с одним, двумя или несколькими ограничениями в виде равенств и/или неравенств.

В большинстве задач применяется либо теорема Ферма (если нет ограничений), либо правило множителей Лагранжа (если ограничения имеются). Это приводит к некоторым уравнениям, которые иногда удается разрешить в некотором смысле “явно”. Тогда мы говорим, что получили явное решение.

Для иллюстрации естественности и простоты этих методов выделены так называемые “простейшие примеры”, формулировка и решение которых доступны первокурсникам (или даже продвинутым школьникам), которые освоили правила дифференцирования и правило множителей Лагранжа для дифференцируемого случая.

У нас в очень большом числе примеров задачи либо сами являются выпуклыми, либо модифицируются к выпуклым задачам. Теория выпуклости исследуется в специальном разделе математического анализа. Важнейшим для нас понятием выпуклого анализа является понятие субдифференциала (см. п. 5.7).

Далее используются следующие результаты классического и выпуклого анализа: теорема Ферма, правила множителей Лагранжа, субдифференциал суммы, субдифференциал максимума, теорема об очистке.

Эти сведения можно почерпнуть из раздела “Дополнение”, помещенного в конце этой брошюры.

Рассмотрим некоторые примеры.

1.1. Приближение элементов подпространствами

Здесь речь пойдет о решении задачи $P((X, \|\cdot\|_X), L, \xi)$, где L — подпространство X , а $\xi \in X$. Эта задача состоит в нахождении величины

$$d(\xi, L, X) = \inf_{x \in L} \|\xi - x\|_X.$$

Начальный пример: приближение точки плоскостью в трехмерном евклидовом пространстве. Здесь требуется решить задачу $P(\mathbb{E}^3, L_2, \xi)$ — о приближении элемента $\xi \in \mathbb{E}^3$ трехмерного евклидова пространства плоскостью L_2 .

Формализация. $f_1(x_1, x_2) = |\xi - x|^2 \rightarrow \min$, где $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, e_1, e_2 — ортонормированный базис на плоскости L_2 , а $|\cdot|$ — евклидова норма. Это гладкая и выпуклая задача без ограничений. Решение задачи (в предположении, что оно существует) обозначим $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Исследование задачи. Применяя к функции f_1 в точке \hat{x} теорему Ферма, согласно которой производная гладкой функции в точке экстремума равна нулю, получаем $\hat{x} = (\xi_1, e_1) + (\xi_2, e_2)$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение. Ввиду того, что теорема Ферма для выпуклой и гладкой функции является критерием, получаем

Ответ: $\hat{x} = (\xi_1, e_1) + (\xi_2, e_2)$ и $d(\xi, L_2, \mathbb{E}^3) = |\xi - \hat{x}|$.

Совершим скачок «от трех до бесконечности» и из XVII-го века в XX.

1.2. Критерий в задаче о приближении элемента подпространством

Здесь исследуется поставленная выше общая задача $P((X, \|\cdot\|_X), L, \xi)$, где L — подпространство X , а $\xi \in X$. Предположим, что решение задачи существует. Обозначим его \hat{x} . (Оно существует, если L конечномерно, см. теорему 5.16).

Формализация. $f_2(x) = \|\xi - x\|_X + \delta L(x)$, где

$$\delta L(x) = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ \infty, & x \notin L. \end{cases}$$

Это выпуклая задача без ограничений.

Исследование задачи. Применив к функции f_2 в точке \hat{x} теорему Ферма в выпуклом случае, согласно которой принадлежность нуля субдифференциалу в этой точке для выпуклой функции является критерием ее минимума (теорема 5.14), получаем, что \hat{x} есть решение задачи тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f_2(\hat{x})$.

Функция f_2 есть сумма двух слагаемых. По теореме о субдифференциале суммы (теорема 5.24)

$$0 \in \partial f_2(\hat{x}) = \partial \|\xi - \cdot\|_X(\hat{x}) + \partial \delta L(\hat{x}) = x_1^* + x_2^*,$$

где x_1^* принадлежит первому слагаемому, а x_2^* — второму. Применяя формулы субдифференциала нормы

$$\partial \|\xi - \cdot\|_X(\hat{x}) = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} = 1, \langle \xi - \hat{x}, x^* \rangle = -\|\xi - \hat{x}\|_X\}$$

(X^* — сопряженное пространство к X , см. пример 5.1) и формулу субдифференциала индикаторной функции подпространства

$$\partial \delta L(\hat{x}) = L^\perp$$

(см. пример 5.2), получаем

Ответ (критерий экстремального элемента). Элемент $\hat{x} \in L$ есть элемент наилучшего приближения для ξ тогда и только тогда, когда найдётся такой функционал $x^* \in X^*$, что $\|x^*\|_{X^*} = 1$, $\langle \xi - \hat{x}, x^* \rangle = \|\xi - \hat{x}\|_X$ и $x^* \in L^\perp$. Этот результат принадлежит С. М. Никольскому [47].

Сейчас мы решим точно три конкретные задачи, относящиеся к п. 1.2, т. е. явно решим соотношения, вытекающие из теоремы Ферма.

1.3. Полиномы наименьшего уклонения

Мы найдем полиномы наименьшего уклонения в трех метриках: а) $L_2([-1, 1])$, б) $C([-1, 1])$, в) $L_1([-1, 1])$.

В случае а) ищутся полиномы, наименее уклоняющиеся от 0 в $L_2([-1, 1])$. Здесь нам предстоит решить задачу $P(L_2([-1, 1]), \mathcal{P}_{n-1}, \xi_n(\cdot))$ — о приближении функции $\xi_n(t) = t^n$ алгебраическими полиномами степени $n - 1$ в метрике $L_2([-1, 1])$.

Формализация.

$$f_{3a}(x) = \int_{-1}^1 \left(t^n + \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt \rightarrow \min.$$

Это выпуклая и гладкая задача без ограничений. Решение задачи (в предположении, что оно существует) обозначим через $\hat{x}(\cdot) = T_{n2}(\cdot)$.

Исследование задачи.

Из теоремы Ферма о гладких функциях (как в примере 1) следует, что $f'_{3a}(\hat{x}) = 0$, значит,

$$(1.1) \quad \int_{-1}^1 T_{n2}(t) t^{k-1} dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Воспользуемся результатом интегрального исчисления — формулой Тейлора с остатком в интегральной форме [70, стр. 146]:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{(j)}(t_0)}{j!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-1} x^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Положим

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{n-1} T_{n2}(\tau) d\tau.$$

Тогда $y^{(n)}(\cdot) = T_{n2}(\cdot)$ и $y^{(k)}(-1) = 0, 0 \leq k \leq n - 1$. Из (1.1) вытекает, что $y^{(k)}(1) = 0, 0 \leq k \leq n - 1$. Следовательно,

$$(1.2) \quad T_{n2}(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = t^n + \dots$$

Значит,

$$c_n = \frac{n!}{(2n)!}.$$

Мы получили **ответ**:

$$T_{n2}(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Эта формула была получена Б. О. Родригом в 1816 г. Полиномы вида (1.2), где постоянным коэффициентам c_n придаются те или иные значения в зависимости от соображений удобства, называются *полиномами Лежандра* (см. [69, стр. 240]).

В случае б) ищутся полиномы, наименее уклоняющиеся от 0 в $C([-1, 1])$. Здесь нам предстоит решить задачу $P(C([-1, 1]), \mathcal{P}_{n-1}, \xi_n(\cdot))$ о приближении функции $\xi_n(t) = t^n$ алгебраическими полиномами степени $n - 1$ в метрике $C([-1, 1])$.

Формализация.

$$f_{3b}(x(\cdot)) = \|\xi(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([-1,1])} \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Это выпуклая задача без ограничений.

Решение задачи (в предположении, что оно существует) обозначим через $\hat{x}(\cdot) = T_{n\infty}(\cdot)$.

Исследование задачи. Рассматриваемый пример является частным случаем задачи, рассмотренной в п. 1.2, поэтому критерий наилучшего приближения здесь является частным случаем доказанного в п. 1.2 критерия. Надо только расшифровать его для нашего случая. Сопряженным пространством к C (обозначаемым $C^*([-1, 1])$) является пространство борелевских мер на отрезке $[-1, 1]$. В случае данной задачи мера x^* из критерия сосредоточена там, где

$$(1.3) \quad |\xi_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot)| = \|\xi_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Разность $\xi_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ — это алгебраический полином степени n . Из теоремы Ролля и основной теоремы алгебры следует, что число точек t_i , в которых справедливо равенство (1.3), не превосходит $n + 1$ (в интервале $(-1, 1)$ таких точек не больше $n - 1$ и две точки могут оказаться на краях). Мера x^* в нашем случае является линейной оболочкой “ δ -мер”, т. е. представима в виде

$$\langle \xi_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot), x^* \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i (\xi_n(t_i) - \hat{x}(t_i)),$$

$$|\xi_n(t_i) - \hat{x}(t_i)| = \|\xi_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([-1,1])}, \quad m \leq n + 1,$$

при этом ввиду того, что $\|x^*\|_{X^*} = 1$, $|\mu_1| + \dots + |\mu_m| = 1$. Из-за того, что $x^* \in \mathcal{P}_{n-1}^\perp$ получаем, что

$$\sum_{i=1}^m \mu_i t_i^k = 0, \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Эта система с определителем Вандермонда имеет ненулевое решение лишь в случае $m \geq n + 1$. Следовательно, $m = n + 1$.

Определим полином $y(t) = t^n - \hat{x}(t)$. Доказано, что найдется $n + 1$ точка, в которой этот полином принимает значения, по модулю равные $\gamma = \|y(\cdot)\|_{C([-1,1])}$. Из теоремы Ролля и основной теоремы алгебры следует, что корни производной полинома $y'(\cdot)$ расположены внутри отрезка $[-1, 1]$, а две оставшиеся экстремальные точки расположены по краям. Это позволяет (применяя рассуждение Чебышёва) выписать дифференциальное уравнение для y :

$$(1 - t^2)y'^2 = n^2(\gamma^2 - y^2),$$

ибо справа и слева стоят полиномы одинаковой степени, одинаковых корней и одинакового старшего коэффициента. Интегрируя уравнение, приходим к равенству $y = A \cos(n \arccos t)$.

Ответ:

$$t^n - \hat{x}(t) = T_{n\infty}(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t).$$

Полином $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ называется *полиномом Чебышёва*.

В случае с) надо найти полиномы, наименее уклоняющиеся от 0 в $L_1([-1, 1])$. Здесь нам предстоит решить задачу $P(L_1([-1, 1]), \mathcal{P}_{n-1}, \xi_n(\cdot))$ — о приближении функции $\xi_n(t) = t^n$ алгебраическими полиномами степени $n - 1$ в метрике $L_1([-1, 1])$.

Решение задачи $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (в предположении, что оно существует) обозначим $T_{n1}(\cdot)$.

Формализация.

$$f_{3c}(x) = \int_{-1}^1 \left| t^n + \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right| dt \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Это выпуклая задача без ограничений.

Из теоремы Ферма (см. п. 1.2) следует, что $f'_{3c}(\hat{x}) = 0$, значит,

$$\int_{-1}^1 \text{sign } T_{n1}(t) t^{k-1} dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Исследование задачи. Существуют способы решения выписанного соотношения, подобные тем, что приводили к вычислению $T_{n2}(\cdot)$ и $T_{n\infty}(\cdot)$. Но мы ограничимся тем, что выпишем ответ и проверим, что требуемые соотношения (являющиеся критерием решения поставленной задачи) удовлетворяются.

Решением нашей задачи является полином

$$T_{n1}(\cdot) = \frac{\dot{T}_{n+1\infty}(\cdot)}{n+1}.$$

Мы видим, что это полином степени n со старшим коэффициентом единица. Делая замену переменных $t = \cos \tau$ и используя нечетность функции $\tau \mapsto \text{sgn} \sin \tau$, получим при $0 \leq k \leq n-1$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \text{sign } T_{n1}(t) t^k dt &= \int_0^\pi \text{sign} \sin(n+1)\tau \cos^k \tau \sin \tau d\tau \\ &= 2 \int_{-\pi}^\pi \text{sign} \sin(n+1)\tau \cos^k \tau \sin \tau d\tau = 0, \end{aligned}$$

если $0 \leq k \leq n-1$, ибо разложение функции $\tau \mapsto \text{sign} \sin(n+1)\tau$ начинается с члена $\alpha \sin(n+1)\tau$, $\alpha \neq 0$, в то время, как $\tau \mapsto \cos^k \tau \sin \tau$ — тригонометрический полином степени $\leq n$. Так что мы получили

Ответ:

$$T_{n1}(t) = \frac{\dot{T}_{n+1\infty}(t)}{n+1}.$$

Полиномы $T_{n1}(\cdot)$ называют *полиномами Чебышёва второго рода*. Они были получены П. Л. Чебышёвым в 1759 г., а сам результат о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля в $L_1([-1, 1])$, принадлежит А. Н. Коркину и Е. И. Золотарёву (1878).

Замечание. Найти полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля при $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, “в элементарных функциях”, по-видимому, не удастся. В случае $n = 1$ это возможно и читатель без труда доведет выкладки до конца сам. Вот еще случай, где можно добраться до ответа “на руках”, вычисляя полином второго порядка, наименее уклоняющийся от нуля в $L_4([-1, 1])$. Имеет место формула:

$$\begin{aligned} T_{24}(t) &= t^2 - a, \\ a &= \frac{1}{3} \left(1 - 2 \left(\frac{7}{5(5+3\sqrt{30})} \right)^{1/3} + \frac{2((5+3\sqrt{30})/7)^{1/3}}{5^{2/3}} \right). \end{aligned}$$

Однако можно высказать некое сомнение в том, что когда-либо кому-либо удастся подобным образом решить что-либо еще для $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, при $n > 2$. В случае $p = 2$ в подобных задачах, где получающиеся после применения теоремы Ферма уравнения линейны, можно надеяться на успех, что не раз будет продемонстрировано.

1.4. Критерии полиномов наилучшего приближения в $C([a, b])$

Здесь будет рассмотрен еще один частный случай задачи, рассмотренной в п. 1.2, а именно критерий решения задачи $P(C([a, b]), \mathcal{P}_n, \xi(\cdot))$ о приближении непрерывной на $[a, b]$ функции $\xi(\cdot)$ алгебраическими полиномами степени n . Решение этой задачи обозначим $\hat{x}(\cdot)$.

Формализация.

$$f_4(x) = \max_{t \in [a, b]} \left| \xi(t) - \sum_{k=1}^{n+1} x_k t^{k-1} \right| \rightarrow \min$$

— это выпуклая задача без ограничений.

Исследование задачи. Применим здесь теорему об очистке (см. следствие 5.31), согласно которой найдутся точки $a \leq t_1, \leq \dots, \leq t_m \leq b$, $m \leq n+2$, для которых выполнено равенство

$$|\xi(t_i) - \hat{x}(t_i)| = \|\xi(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([a, b])},$$

и таких, что решение поставленной задачи редуцируется к минимизации функции:

$$\tilde{f}_4(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \xi(t_i) - \sum_{k=1}^{n+1} x_k t_i^{k-1} \right|.$$

Это тоже выпуклая задача без ограничений. Таким образом,

$$\hat{x}(\cdot) = \sum_{k=1}^{n+1} \hat{x}_k t^{k-1}, \quad \hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n+1}).$$

По теореме Ферма для выпуклой функции выполняется включение $0 \in \partial \tilde{f}_4(\hat{x})$. Из теоремы о субдифференциале максимума из выпуклых функций (теорема 5.29) вытекает следствие для функции \tilde{f}_4 , которая является дифференцируемой в точке \hat{x} . В итоге получаем, что

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i t_i^{k-1} \text{sign}(\xi(t_i) - \hat{x}(t_i)) = 0, \quad (\lambda_i > 0).$$

Получили $n+1$ уравнение с m неизвестными. Значит, для разрешимости системы необходимо, чтобы m равнялось $n+2$. При этом матрица системы имеет определитель Вандермонда. Из теории определителей следует, что знаки решения этой системы чередуются, следовательно величины $\xi(t_i) - \hat{x}(t_i)$, $1 \leq i \leq n+2$, имеют одинаковые модули и чередующиеся знаки. В этом случае говорят, что эта разность имеет $(n+2)$ -альтернанс.

Таким образом, доказан следующий результат: полином $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ наилучшим образом приближает функцию $\xi(\cdot) \in C([a, b])$ тогда и только тогда, когда разность $\xi(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ имеет $(n+2)$ -альтернанс.

Замечание. Полином наилучшего приближения единствен. Действительно, пусть существуют два полинома наилучшего приближения $\hat{x}_i(\cdot)$, $i = 1, 2$. Положим

$$\hat{x}(\cdot) = \frac{\hat{x}_1(\cdot) + \hat{x}_2(\cdot)}{2}.$$

Тогда $\hat{x}(\cdot)$ — также полином наилучшего приближения, и, значит, $\xi(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ имеет $(n+2)$ -альтернанс. Легко понять, что в точках альтернанса значение полиномов $\hat{x}_1(\cdot)$ и $\hat{x}_2(\cdot)$ совпадают, следовательно и сами полиномы совпадают.

1.5. Полиномы Золотарёва

Здесь нам предстоит решить серию задач, подобных той, что привела к полиномам Чебышёва (см. п. 1.3, случай b)). Речь пойдет о задачах

$$P(C([-1, 1]), \mathcal{P}_{n-2}, \xi_n(\cdot) - \sigma\xi_{n-1}(\cdot))$$

— о приближении функции $\xi_n(t) - \sigma\xi_{n-1}(t) = t^n - \sigma t^{n-1}$ алгебраическими полиномами степени $n - 2$ в метрике $C([-1, 1])$.

Формализация.

$$f_5(x(\cdot)) = \|\xi_n(\cdot) - \sigma\xi_{n-1}(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Это выпуклая задача без ограничений.

Решение задачи существует (теорема 5.16). Обозначим его $\hat{x}_\sigma(\cdot) = Z_{n\sigma}(\cdot)$. Этот полином называется *полиномом Золотарёва*.

Исследование задачи. Воспользуемся критерием Чебышёва (см. п. 1.4). Согласно этому критерию полином $Z_{n\sigma}(\cdot)$ имеет n -альтернанс. Этот полином единствен (в силу сделанного выше замечания).

Покажем, что *любой* полином $p_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, имеющий n -альтернанс, является одним из полиномов Золотарёва. Действительно, полином $a_n^{-1} p_n(t) = t^n - \sigma t^{n-1} + \dots$, где $\sigma = -a_n^{-1} a_{n-1}$, имеет вид полинома $Z_{n\sigma}(\cdot)$ и имеет n -альтернанс. В силу единственности полинома, наименее отклоняющегося от нуля, $a_n^{-1} p_n(\cdot) = Z_{n\sigma}(\cdot)$.

Сделаем попытку получить явные выражения $Z_{n\sigma}(\cdot)$. Можно ограничиться случаем, когда $\sigma \geq 0$, т. к. из решения $Z_{n\sigma}(t)$ решение для $-\sigma$ получается по формуле

$$Z_{n,-\sigma}(t) = (-1)^n Z_{n\sigma}(-t).$$

Полином

$$\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^n T_n\left(\frac{2t-\beta+1}{1+\beta}\right) = t^n - n\frac{\beta-1}{2}t^{n-1} + \dots$$

имеет n -альтернанс в точках t_k , $k = 1, \dots, n$, таких, что

$$\frac{2t_k - \beta + 1}{1 + \beta} = \cos \frac{\pi k}{n}.$$

При

$$1 \leq \beta \leq 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$$

эти точки лежат на отрезке $[-1, 1]$. Следовательно, этот полином является полиномом $Z_{n\sigma}(\cdot)$ при

$$0 \leq \sigma \leq \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}.$$

При $\sigma > \operatorname{tg}^2 \pi/(2n)$ для функций $y(\cdot) = Z_{n\sigma}(\cdot)$ (аналогично тому, как это было получено для полиномов Чебышёва) составляется дифференциальное уравнение:

$$\frac{y'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{n(t-b)}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 + pt + q)}},$$

интегрируемое в эллиптических функциях. Это интегрирование, основанное на *исчислении эллиптических функций*, было проведено Е. И. Золотарёвым (1868) (см. [26, стр. 314]).

1.6. Начальный пример: неравенство Коши в трехмерном пространстве

Здесь надо решить задачу $P(\mathbb{E}^3, B_{\mathbb{E}^3}, \langle \cdot, y \rangle)$, $y \in B_{\mathbb{E}^3}$, $B_{\mathbb{E}^3}$ — единичный шар в \mathbb{E}^3 , о максимуме скалярного произведения на единичном шаре в \mathbb{E}^3 . Положим

$$b(\mathbb{E}^3, B_{\mathbb{E}^3}, \langle \cdot, y \rangle) = \sup_{x \in B_{\mathbb{E}^3}} \langle x, y \rangle.$$

Решение задачи существует (из-за компактности $B_{\mathbb{E}^3}$). Обозначим его \hat{x} .

Формализация.

$$f_{6,1}(x) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \rightarrow \max, \quad f_{6,2}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Это гладкая задача с ограничением в виде равенства.

Исследование задачи. Применяем правило множителей Лагранжа. Составляем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = - \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

(множитель Лагранжа при функционале не может здесь равняться нулю, т. к. $f'_{6,2}(\hat{x}) = 2\hat{x} \neq 0$). $\mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \Rightarrow x_i = \lambda^{-1}y_i$, откуда следует, что $\hat{x} = \frac{y}{|y|}$, значит, $\langle \hat{x}, y \rangle = |y|$.

Ответ: $b(\mathbb{E}^3, B_{\mathbb{E}^3}, \langle \cdot, y \rangle) = |y|$. Откуда следует **неравенство Коши**. Если $x, y \in \mathbb{E}^3$, то $\langle x, y \rangle \leq |x||y|$.

И здесь совершим некоторый переход — от \mathbb{E}^3 к $C([-1, 1])$.

1.7. Проблемы экстраполяции алгебраических полиномов

Здесь требуется исследовать задачу $P(C([-1, 1]), \mathcal{P}_n \cap B_{C([-1, 1])}, x(\tau))$, где $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$, о максимуме и минимуме в точке $\tau \geq 1$ алгебраического полинома степени n , ограниченного единицей по норме $C([-1, 1])$. Положим

$$b(C([-1, 1]), \mathcal{P}_n \cap B_{C([-1, 1])}, x(\tau)) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{P}_n \cap B_{C([-1, 1])}} x(\tau).$$

Формализация.

$$f_{7,1}(x(\cdot)) = (x(\tau)) \rightarrow \max \vee \min, \quad f_{7,2}(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \leq 1, \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_n.$$

Это выпуклая задача с ограничением в виде неравенства. Далее, будем решать задачу на максимум. Решение задачи (ибо речь идет о максимуме линейной функции на компакте) существует. Обозначим его \hat{x} .

Исследование задачи. Применяем теорему Каруша–Куна–Таккера (теорема 5.28). Составляем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -x(\tau) + \lambda \|x(\cdot)\|_{C([-1, 1])}, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathcal{P}_n$$

(в силу того, что очевидным образом выполнено условие Слейтора, можно положить $\lambda_0 = 1$).

Так как \hat{x} есть решение задачи, то

$$\min_{x \in \mathcal{P}_n} \mathcal{L}(x, \lambda) = \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda).$$

Следовательно, по теореме Ферма (теорема 5.14) $0 \in \partial L(\hat{x}(\cdot), \lambda)$. По теореме о субдифференциале суммы (теорема 5.24) получаем, что

$$0 \in -x(\tau) + \lambda \partial \|\cdot\|_{C([-1, 1])}(\hat{x}(\cdot)).$$

И далее, произведем расшифровку, как в п. 1.3, случай б).

Из теоремы Роля и основной теоремы алгебры следует, что число точек t_i , где $|\hat{x}(t_i)| = \|\hat{x}(\cdot)\| = 1$, не превосходит $n + 1$ (в интервале $(-1, 1)$ таких точек не больше $n - 1$ и две точки могут оказаться на краях). Мерой x^* в нашем случае является линейная оболочка “ δ -мер”, т. е. представима в виде

$$\langle \hat{x}(\cdot), x^* \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i \hat{x}(t_i), \quad m \leq n + 1,$$

т. е. мы приходим к системе уравнений

$$x(\tau) = \lambda \sum_{i=1}^m \mu_i x(t_i), \quad x \in \mathcal{P}_n.$$

Эта система разрешима лишь при $m = n + 1$.

Ответ: $b(C([-1, 1]), \mathcal{P}_n \cap B_{C([-1, 1])}, x(\tau)) = T_n(\tau)$.

Этот результат принадлежит П. Л. Чебышёву [73].

1.8. “Точечные” неравенства Марковых для производных алгебраических полиномов

В 1889 году А. А. Марков дал ответ на вопрос, поставленный Д. И. Менделеевым, который возник у великого химика при расчетах, связанных с концентрацией спиртовых растворов: среди алгебраических полиномов данной степени, ограниченных по модулю единицей на отрезке $[-1, 1]$, найти тот, производная которого принимает наибольшее значение в некоторой фиксированной точке прямой. В. А. Марков в 1892 году рассмотрел подобную задачу и для старших производных.

Здесь нам предстоит исследовать задачу, сходную с предыдущей

$$P(C([-1, 1]), \mathcal{P}_n \cap B_{C([-1, 1])}, x^{(k)}(\tau)),$$

где $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$, $\tau \in \mathbb{R}$, — задача о неравенстве для k -й производной в некоторой точке алгебраического полинома, ограниченного единицей по C -норме.

Формализация.

$$(1.4) \quad f_{8,1}(x(\cdot)) = x^{(k)}(\tau) \rightarrow \max, \quad f_{8,2}(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \leq 1, \quad \tau \in \mathbb{R}, \\ x(\cdot) \in \mathcal{P}_n.$$

Это выпуклая задача с ограничением в виде неравенства. Решение задачи (ибо речь идет о максимуме линейной функции на компакте) существует.

Сформулированная задача укладывается в следующую общую постановку. Пусть L_{n+1} — $(n + 1)$ -мерное подпространство $C([a, b])$, а l — ненулевой линейный функционал на L_{n+1} . Рассмотрим экстремальную задачу

$$(1.5) \quad l(x(\cdot)) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([a, b])} \leq \delta, \quad x(\cdot) \in L_{n+1}.$$

По определению верхней грани найдется последовательность допустимых функций $x_k(\cdot)$ такая, что значения $l(x_k(\cdot))$ стремятся к значению задачи (1.5). В силу того, что $\|x_k(\cdot)\|_{C([a, b])} \leq \delta$, из этой последовательности можно выбрать сходящуюся. Тем самым решение задачи (1.5) существует.

ТЕОРЕМА 1.1. *Функция $\hat{x}(\cdot)$, допустимая в задаче (1.5), является решением этой задачи в том и только том случае, если найдутся натуральное число $r \leq n + 1$, точки $\tau_i \in [a, b]$ и числа $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, такие, что*

1) для всех $x(\cdot) \in L_{n+1}$

$$(1.6) \quad l(x(\cdot)) = \sum_{i=1}^r a_i x(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i),$$

2) $|\hat{x}(\tau_i)| = \delta, i = 1, \dots, r.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1.5). Применим теорему Каруша–Куна–Таккера (теорема 5.28). Заметим, что в рассматриваемой задаче условие Слейтора очевидным образом выполнено. Поэтому найдется $\lambda \geq 0$ такое, что

$$(1.7) \quad \min_{x(\cdot) \in L_{n+1}} \mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) = \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \lambda),$$

где

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) = -l(x(\cdot)) + \lambda (\|x(\cdot)\|_{C([a,b])} - \delta).$$

Нетрудно понять, что $\lambda > 0$ (в противном случае равенство (1.7) не выполнялось бы, т. к. минимум линейной функции равен $-\infty$). Тогда из условия дополняющей нежесткости имеем

$$(1.8) \quad \|\hat{x}(\cdot)\|_{C([a,b])} = \delta.$$

Рассмотрим функцию

$$F(t, x) = -l(x(\cdot)) + \lambda (|x(t)| - \delta).$$

Очевидно, что

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda) = \max_{t \in [a,b]} F(t, x).$$

Из следствия 5.31 получаем, что найдутся натуральное число $r \leq n + 2$, точки $\tau_i \in [a, b]$, векторы $y_i \in \partial_x F(\tau_i, \hat{x})$ и числа

$$\alpha_i > 0, i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1,$$

такие, что

$$(1.9) \quad \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \lambda) = F(\tau_i, \hat{x}), i = 1, \dots, r,$$

и

$$(1.10) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i = 0.$$

Из равенства (1.9) вытекает, что $|\hat{x}(\tau_i)| = \delta, i = 1, \dots, r.$ Нетрудно убедиться, что

$$\langle y_i, x(\cdot) \rangle = -l(x(\cdot)) + \lambda x(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i).$$

Тем самым из равенства (1.10) получаем

$$(1.11) \quad l(x(\cdot)) = \lambda \sum_{i=1}^r \alpha_i x(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i), \quad x \in L_{n+1}.$$

Покажем, что на самом деле $r \leq n + 1.$ Пусть $\xi_1(\cdot), \dots, \xi_{n+1}(\cdot)$ — какой-либо базис в $L_{n+1}.$ Подставляя элементы этого базиса в (1.11), получаем

$$l(\xi_k(\cdot)) = \lambda \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_k(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i), \quad k = 1, \dots, n + 1.$$

Тем самым вектор $(l(\xi_1(\cdot)), \dots, l(\xi_{n+1}(\cdot)))^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ принадлежит выпуклой оболочке векторов $\lambda(\xi_1(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i), \dots, \xi_{n+1}(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i))^T \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \dots, r.$ Если $r = n + 2,$ то по теореме Каратеодори (теорема 5.38) среди этих векторов можно выбрать не более $n + 1$ таких, чтобы вектор $(l(\xi_1(\cdot)), \dots, l(\xi_{n+1}(\cdot)))^T$ представлялся в виде их выпуклой комбинации. Поэтому можно считать, что

в равенстве (1.11) $r \leq n+1$. Положив $a_i = \lambda \alpha_i$, $i = 1, \dots, r$, получаем равенство (1.6).

Пусть теперь $\hat{x}(\cdot)$ — допустимый элемент в задаче (1.5) и выполнены условия 1), 2). Положим

$$\lambda = \frac{1}{a_1 + \dots + a_r}, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{\lambda}.$$

Тогда равенство (1.6) переписется в виде (1.11). Следовательно, справедливо равенство (1.10). Из допустимости функции $\hat{x}(\cdot)$ и условия 2) вытекает равенство (1.8). Следовательно, имеют место равенства (1.9). Теперь из следствия 5.31 получаем, что $\hat{x}(\cdot)$ — минимум $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda)$. Применяя теорему Каруша–Куна–Таккера, получаем, что $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1.5). \square

Из теоремы 1.1 для задачи (1.4) получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Функция $\hat{x}(\cdot)$, допустимая в задаче (1.4), является решением этой задачи в том и только том случае, если найдутся натуральное число $r \leq n+1$, точки $\tau_i \in [-1, 1]$ и числа $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, такие, что*

1) для всех $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$

$$(1.12) \quad x^{(k)}(\tau) = \sum_{i=1}^r a_i x(\tau_i) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i),$$

2) $|\hat{x}(\tau_i)| = \delta$, $i = 1, \dots, r$.

В случае, если $r = n+1$, решение сразу же получается в силу следующей леммы.

ЛЕММА 1.3. *Пусть для полинома $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ выполняются равенства $|x(\tau_i)| = \|x(\cdot)\|_{C([-1,1])}$, $i = 1, \dots, n+1$, где $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq 1$. Тогда $x(\cdot) = \pm \|x(\cdot)\|_{C([-1,1])} T_n(\cdot)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если хотя бы одно из неравенств $-1 < \tau_1$, $\tau_{n+1} < 1$ выполнялось, то полином $\dot{x}(\cdot)$ степени не выше $n-1$ имел бы n нулей, что невозможно. Поэтому $\tau_1 = -1$, а $\tau_{n+1} = 1$. Положим $a = \|x(\cdot)\|_{C([-1,1])}$. Полиномы $(1-t^2)\dot{x}^2(t)$ и $a^2 - x^2(t)$ имеют степень $2n$, двукратные нули в точках τ_i , $i = 2, \dots, n$, и однократные нули в точках ± 1 . Следовательно, эти полиномы пропорциональны. Из сравнения коэффициентов при старших степенях получаем, что

$$(1-t^2)\dot{x}^2(t) = n^2(a^2 - x^2(t)).$$

Решая это уравнение (с учетом того, что $x(1) = \pm a$), получаем, что $x(t) = \pm a \cos(n \arccos t)$. \square

ТЕОРЕМА 1.4. *Решением задачи (1.4) является функция*

$$\hat{x}(t) = \pm \delta T_n(t)$$

или функция

$$\hat{x}(t) = \pm \frac{\delta}{\|Z_{n\sigma}(\cdot)\|_{C([-1,1])}} Z_{n\sigma}(t)$$

при некотором $\sigma \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в равенстве (1.12) $r \geq n$. Допустим, что $r \leq n-1$. Рассмотрим полином

$$p_1(t) = \prod_{i=1}^{n-1} (t - \tau_i)$$

(добавив при необходимости точки $\tau_{r+1}, \dots, \tau_{n-1}$). Подставив этот полином в (1.12), получим, что $p_1^{(k)}(\tau) = 0$. При $k = n-1$ это невозможно. Пусть $k < n-1$.

Положим $p_2(t) = (t - \tau)p_1(t)$. Подставив теперь этот полином в (1.12), получим, что $p_2^{(k)}(\tau) = 0$. Но $p_2^{(k)}(\tau) = kp_1^{(k-1)}(\tau)$. Следовательно, $p_1^{(k)}(\tau) = p_1^{(k-1)}(\tau) = 0$. Тогда полином $x^{(k-1)}(\cdot)$ имеет степень $n - k$. По теореме Ролля у него не менее $n - k$ различных нулей. В точке τ у него кратный нуль. Тем самым общее число нулей у него не менее $n - k + 1$, что невозможно. Итак, $r = n$ или $r = n + 1$.

В случае когда $r = n + 1$, утверждение теоремы вытекает из леммы 1.3. Предположим, что $r = n$. Покажем, что точки τ_i , $i = 1, \dots, n$, образуют n -альтернанс для функции $\hat{x}(\cdot)$. Будем считать, что $\tau_1 < \dots < \tau_n$. Надо доказать, что $\hat{x}(\tau_i)\hat{x}(\tau_{i+1}) < 0$, $i = 1, \dots, n - 1$. Предположим, что $\hat{x}(\tau_j) = \hat{x}(\tau_{j+1})$ при некотором j , $1 \leq j \leq n - 1$. Нетрудно убедиться, что существует полином $p_3(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ такой, что $p_3(\tau_i) = 0$, $i = 1, \dots, j - 1, j + 2, \dots, n$ и $p_3^{(k-1)}(\tau) = p_3^{(k)}(\tau) = 0$. Если предположить, что хотя бы одно из значений $p_3(\tau_j)$, $p_3(\tau_{j+1})$ равно нулю, то, подставив $p_3(\cdot)$ в (1.12), получим, что оба должны равняться нулю, что невозможно в силу кратности нуля у $p_3^{(k-1)}(\cdot)$ в точке τ . Тем самым $p_3(\tau_j)p_3(\tau_{j+1}) \neq 0$. При $k = 1$ полином $p_3(\cdot)$ имеет вид

$$p_3(t) = (t - \tau_1) \dots (t - \tau_{j-1})(t - \tau_{j+2}) \dots (t - \tau_n)(t - \tau)^2$$

и очевидным образом не меняет знака на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Пусть $k > 1$. Если предположить, что $p_3(\tau_j)p_3(\tau_{j+1}) < 0$, то на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ полином $p_3(\cdot)$ будет иметь однократный нуль, а значит, $p_3(\cdot)$ будет иметь $n - 1$ различных нулей. В этом случае у $p_3^{(k-1)}(\cdot)$ будет $n - k + 1$ различных нулей и кратного нуля быть не может. Итак, доказано, что $p_3(\tau_j)p_3(\tau_{j+1}) > 0$. Подставляя $p_3(\cdot)$ в (1.12), получаем

$$a_j p_3(\tau_j) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) + a_{j+1} p_3(\tau_{j+1}) \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_{j+1}) = 0,$$

что противоречит равенству $\hat{x}(\tau_j) = \hat{x}(\tau_{j+1})$. Таким образом, у полинома $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ имеется n -альтернанс. Как было отмечено в п. 1.5, такой полином должен быть пропорционален полиному Золотарёва $Z_{n\sigma}(\cdot)$. Коэффициент пропорциональности находится из условия $\|x(\cdot)\|_{C([-1,1])} = \delta$. \square

1.9. Неравенство Бернштейна

Здесь речь пойдет собственно о неравенстве для производных тригонометрических полиномов степени n , т. е. о задаче $P(C(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n \cap B_{C(\mathbb{T})}, \|x^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})})$, где $x(\cdot) \in \mathcal{T}_n$, $k \geq 1$, — о максимальной норме k -й производной тригонометрического полинома степени n при условии, что сам полином по норме $C(\mathbb{T})$ не превосходит единицы. Как мы выясним, оказывается, достаточно решить задачу только при $k = 1$. В силу того, что задача инвариантна относительно сдвига (при $k = 1$), она редуцируется к следующей выпуклой задаче.

Формализация.

$$f_{9,1}(x(\cdot)) = \dot{x}(0) \rightarrow \max, \quad f_{9,2}(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq 1, \quad x(\cdot) \in \mathcal{T}_n.$$

Решение задачи (если оно существует) обозначим \hat{x} . Эта задача очень сходна с задачей из п. 1.3, случай б).

Исследование задачи. В силу того, что всякой функции $x(\cdot) \in \mathcal{T}_n$ можно сопоставить нечетную функцию $y(t) = (x(t) - x(-t))/2$, для которой $\dot{y}(0) = \dot{x}(0)$, задачу можно рассматривать на множестве нечетных тригонометрических полиномов степени n (это множество будем обозначать через \mathcal{T}_n^s) на отрезке $[0, \pi]$. Применяем теорему Каруша–Куна–Таккера (теорема 5.28). Составляем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\dot{x}(0) + \lambda \|x(\cdot)\|_{C([0, \pi])}, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathcal{T}_n^s$$

(в силу того, что очевидным образом выполнено условие Слейтора, можно положить $\lambda_0 = 1$).

Если \hat{x} есть решение задачи, то

$$\min_{x \in \mathcal{T}_n^s} \mathcal{L}(x, \lambda) = \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda).$$

Следовательно, по теореме Ферма (теорема 5.14) $0 \in \partial L(\hat{x}(\cdot), \lambda)$. По теореме о субдифференциале суммы (теорема 5.24) получаем, что

$$0 \in -\dot{x}(0) + \lambda \partial \|\cdot\|_{C([0, \pi])}(\hat{x}(\cdot)).$$

Далее, произведем расшифровку, как в п. 1.3 (случай b)) и в п. 1.7.

Число точек t_i , где $|\hat{x}(t_i)| = \|\hat{x}(\cdot)\|_{C([0, \pi])} \leq 1$, не превосходит n (в противном случае у полинома $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{T}_n$ число нулей было бы не меньше $2n + 2$, что невозможно). Мерой x^* в нашем случае является линейная оболочка « δ -мер», т. е. представима в виде

$$\langle \hat{x}(\cdot), x^* \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i \hat{x}(t_i), \quad m \leq n.$$

Тем самым мы приходим к системе уравнений

$$\dot{x}(0) = \lambda \sum_{i=1}^m \mu_i x(t_i), \quad x(\cdot) \in \mathcal{T}_n^s.$$

Эта система разрешима лишь при $m = n$. Это позволяет (применяя рассуждение Чебышёва) выписать дифференциальное уравнение для y : $y'' = n^2(1 - y^2)$, ибо справа и слева стоят полиномы одинаковой степени, одинаковых корней и одинакового старшего коэффициента. Интегрируя уравнение, приходим к равенству $y(t) = \sin(nt + C)$, а $\hat{x}(t) = \sin nt$.

Мы получили

Ответ:

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq n \|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Это точное неравенство (называемое неравенством С. Н. Бернштейна) превращается в равенство при $x(t) = a \cos nt + b \sin nt$. Интегрируя полученное неравенство, приходим к полному решению задачи, т. е. к точному неравенству

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq n^k \|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Неравенства Ландау–Колмогорова

Далее, у нас встретится несколько примеров, когда функция и производная задаются в пространстве L_2 .

2.1. Начальный пример: шар и два соосных эллипсоида в \mathbb{E}^3

Рассмотрим задачу

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \rightarrow \max, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \quad \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \leq 1 \quad (a \geq b \geq c)$$

— задача о максимизации функции $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$ при двух квадратичных ограничениях. Поставленная задача в некоторых случаях имеет простое решение без применения принципа Лагранжа. Действительно, пусть $1 \geq a \geq b \geq c$. Тогда

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq a^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \right) \leq a^2.$$

Полученное неравенство является точным, т. к. оно достигается на векторе $(a, 0, 0)$.

Для решения этой задачи в общем случае положим $x_i^2 = y_i$, $i = 1, 2, 3$. Это позволит сформулировать задачу следующим образом.

Формализация.

$$f_{10,1}(y) = \frac{y_1}{a^2} + \frac{y_2}{b^2} + \frac{y_3}{c^2} \rightarrow \max, \quad f_{10,2}(y) = y_1 + y_2 + y_3 \leq 1, \\ f_{10,3}(y) = \frac{y_1}{a^4} + \frac{y_2}{b^4} + \frac{y_3}{c^4} \leq 1, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Мы получили простейшую задачу линейного программирования с тремя аргументами и двумя ограничениями, исследование которой предоставим читателю, более сложный случай мы затем разберем подробнее.

2.2. Общая задача

Рассмотрим некоторые задачи, относящиеся к проблематике неравенств Ландау–Колмогорова на прямой и полупрямой. Вот постановка общей задачи.

Пусть T — это \mathbb{R} или \mathbb{R}_+ , $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\mathcal{W}_{pr}^n(T)$ — пространство функций $x(\cdot) \in L_p(T)$, у которых $(n-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна на T и такая, что $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(T)$, и пусть k — целое число, меньшее n .

Рассмотрим следующее семейство задач, определенных на пространстве $\mathcal{W}_{pr}^n(T)$:

$$g_0(x(\cdot)) = \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \rightarrow \max, \quad g_1(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq 1, \\ g_2(x(\cdot)) = \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq 1. \quad (P_T(k, n, p, q, r))$$

Так что здесь

$$X = L_q(T), \quad A = B_{L_p(T)} \cap W_r^n(T), \quad O = (x^{(k)}(\cdot)).$$

Задача $(P_T(k, n, p, q, r))$ может быть формализована по-другому как задача без ограничений:

$$f(x(\cdot)) = \frac{\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}}{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta} \rightarrow \max, \quad x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^n(T),$$

где

$$\alpha = \frac{n - k - \frac{1}{r} + \frac{1}{q}}{n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Значение задачи $(P_T(k, n, p, q, r))$ обозначим $K_T(k, n, p, q, r)$ и будем называть *колмогоровской константой задачи* $(P_T(k, n, p, q, r))$. Она является точной константой в неравенстве

$$(2.1) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

Первые точные неравенства типа (2.1) были получены в работах Ландау [10] ($T = \mathbb{R}_+$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$) и Адамара [8] ($T = \mathbb{R}$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$). В конце 1930-х годов в работе Колмогорова [32] были найдены точные константы в (2.1) при $T = \mathbb{R}$, $p = q = r = \infty$ в общем случае, т. е. при любых $n \geq 2$ и $0 < k < n$. Этот результат является наиболее ярким в данной проблематике, поэтому точные неравенства вида (2.1) часто называют неравенствами типа Колмогорова или (отдавая дань первому результату в этой области) *неравенствами Ландау–Колмогорова*.

Имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если K — точная константа в неравенстве (2.1), а S — значение задачи*

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq a, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq b, \quad a, b > 0,$$

то

$$S = K a^\alpha b^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $S \leq K a^\alpha b^\beta$. Докажем, что имеет место равенство. В силу определения точной константы для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $x_0(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^n(T)$, для которой

$$\|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} > (K - \varepsilon) \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = c x_0(\rho t)$, $c, \rho > 0$. Выберем c и ρ так, чтобы $\|y(\cdot)\|_{L_p(T)} = a$, а $\|y^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} = b$. Несложные вычисления показывают, что

$$\rho = \left(\frac{b \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}}{a \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1}{n-1/r+1/p}},$$

$$c = \frac{a}{\|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}} \left(\frac{b \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}}{a \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1/p}{n-1/r+1/p}}.$$

Тогда

$$S \geq \|y^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} = c \rho^{k-1/q} \|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}$$

$$= \|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \frac{a^\alpha b^\beta}{\|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta} > (K - \varepsilon) a^\alpha b^\beta.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $S \geq Ka^\alpha b^\beta$. \square

Докажем сначала несколько общих утверждений о неравенстве (2.1).

ТЕОРЕМА 2.2. *Если*

$$(2.2) \quad n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \neq 0,$$

то для того чтобы для функций из $\mathcal{W}_{pr}^n(T)$ имело место неравенство (2.1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} 1) \quad \alpha &= \frac{n - k - \frac{1}{r} + \frac{1}{q}}{n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}}, & \beta &= \frac{k - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}}{n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}}, \\ 2) \quad \frac{n - k}{p} + \frac{k}{r} &\geq \frac{n}{q}. \end{aligned}$$

Если условие (2.2) не выполнено, то для того чтобы для функций из $\mathcal{W}_{pr}^n(T)$ имело место неравенство (2.1), необходимо и достаточно, чтобы

$$q = \infty, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Достаточность. Пусть условие (2.2) выполнено. Положив в теореме 5.46

$$\delta = \left(\frac{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}}{\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1}{n-1/r+1/p}},$$

получим неравенство (2.1). Пусть условие (2.2) не выполнено. Это означает, что $n = 1$, $r = 1$ и $p = \infty$. Если при этом $q = \infty$, $\alpha = 1$, а $\beta = 0$, то неравенство (2.1) становится очевидным тождеством.

2. Необходимость. Пусть для функций из $\mathcal{W}_{pr}^n(T)$ справедливо неравенство (2.1). Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^n(1-t)^n, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1], \end{cases} \quad \psi(t) = \sum_{j=0}^n \varphi(t-j).$$

Рассмотрим функцию $y(t) = \gamma\psi(\rho t)$, где $\gamma, \rho > 0$. Нетрудно убедиться, что при всех $p \geq 1$ и $j \leq n$

$$\|y^{(j)}(\cdot)\|_{L_p(T)} = n^{1/p} \gamma \rho^{j-1/p} \|\varphi^{(j)}(\cdot)\|_{L_p(T)}.$$

Так как $y(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^n(T)$, то должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} n^{1/q} \gamma \rho^{k-1/q} \|\varphi^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \\ \leq K n^{\alpha/p+\beta/r} \gamma^{\alpha+\beta} \rho^{-\alpha/p+\beta(n-1/r)} \|\varphi(\cdot)\|_{L_q(T)}^\alpha \|\varphi^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}^\beta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{r} &\geq \frac{1}{q}, \\ b) \quad \alpha + \beta &= 1, \\ c) \quad k - \frac{1}{q} &= -\frac{\alpha}{p} + \beta \left(n - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Из b) и c) получаем

$$\alpha \left(n - \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \right) = n - k - \frac{1}{r} + \frac{1}{q}.$$

При выполнении условия (2.2) из этого равенства получаются равенства 1). А из 1) и а) вытекает неравенство 2).

Если условие (2.2) не выполнено, то, как было отмечено, $n = 1$, $r = 1$ и $p = \infty$. Тогда из с) вытекает, что $q = \infty$ и неравенство (2.1) имеет вид

$$\|x(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_\infty(T)}^\alpha \|x'(\cdot)\|_{L_1(T)}^\beta.$$

Очевидно, что это неравенство не может быть выполнено при $\beta \neq 0$ (достаточно подставить $x(t) \equiv 1$). Таким образом, в этом случае $\beta = 0$, а $\alpha = 1$. \square

С помощью приема, примененного в п. 2.1, решим следующую задачу.

2.3. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 2, 2, 2))$ — неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа на прямой

Будем обозначать через $Fx(\cdot)$ преобразование Фурье функции $x(\cdot)$. Для формализации воспользуемся формулой Планшереля:

$$\int_{\mathbb{R}} |x^{(m)}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2m} |Fx(\xi)|^2 d\xi, \quad m \geq 0.$$

Формализация.

$$f_{11,1}(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$f_{11,2}(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1,$$

$$f_{11,3}(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Читатель легко увидит сходство этой формализации с формализацией в п. 2.1.

Исследование задачи. Здесь (как и в п. 2.1) воспользуемся некоторым неравенством, а именно неравенством Гёльдера.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (|Fx(\xi)|^2)^{1-k/n} (\xi^{2n} |Fx(\xi)|^2)^{k/n} d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Fx(\xi)|^2 d\xi \right)^{1-k/n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \right)^{k/n} \\ &= \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{2(1-k/n)} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{2k/n}. \end{aligned}$$

Это неравенство является точным. Действительно, рассмотрим функцию $x_0(\cdot)$, для которой преобразование Фурье имеет вид

$$Fx_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}, & 1 \leq |\xi| \leq 1 + \varepsilon, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F_0 x(\xi)|^2 d\xi = 1, \\ \|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F x_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{(1+\varepsilon)^{2k+1} - 1}{\varepsilon(2k+1)}, \\ \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |F x_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{(1+\varepsilon)^{2n+1} - 1}{\varepsilon(2n+1)}.\end{aligned}$$

Из определения следует, что

$$\begin{aligned}K_{\mathbb{R}}(k, n, 2, 2, 2) &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|x_0^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\|x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/n}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1+\varepsilon)^{2k+1} - 1}{\varepsilon(2k+1)} \left(\frac{(1+\varepsilon)^{2n+1} - 1}{\varepsilon(2n+1)} \right)^{-k/n} = 1.\end{aligned}$$

Ответ: при всех натуральных $k < n$ имеет место точное неравенство

$$(2.3) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

В следующих двух случаях полезно применить некоторую лемму, позволяющую переформулировать задачу $(P_T(k, n, 2, \infty, 2))$, где $T = \mathbb{R}$ или \mathbb{R}_+ .

Положим

$$\psi(\xi) = A\xi^\gamma - B\xi + C, \quad \xi \geq 0, \quad \gamma > 1, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Функция $\psi(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \geq 0$ тогда и только тогда, когда*

$$(2.4) \quad C \geq (\gamma - 1) \left(\frac{B}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} A^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\psi'(\xi) = A\gamma\xi^{\gamma-1} - B.$$

Нетрудно убедиться, что в точке

$$\xi_0 = \left(\frac{B}{A\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

функция $\psi(\cdot)$ достигает минимума при $\xi \in [0, +\infty)$. Следовательно, $\psi(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\psi(\xi_0) \geq 0$. Последнее неравенство записывается в виде (2.4). \square

Обозначим через $A_T(k, n, p)$ — значение задачи

$$(2.5) \quad x^{(k)}(0) \rightarrow \max, \quad \int_T (|x(t)|^p + |x^{(n)}(t)|^p) dt \leq 1.$$

ЛЕММА 2.4. *Имеет место равенство*

$$K_T(k, n, p, \infty, p) = \frac{A_T(k, n, p)}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}},$$

где

$$\alpha = \frac{n - k - \frac{1}{p}}{n}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pp}^n(T)$ и $x(\cdot) \neq 0$. Положим

$$y(\cdot) = \frac{x(\cdot)}{\left(\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p\right)^{1/p}}.$$

Тогда

$$\|y(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \|y^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p = 1$$

и тем самым $|y^{(k)}(0)| \leq A_T(k, n, p)$. Следовательно, для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pp}^n(T)$ имеет место неравенство

$$|x^{(k)}(0)| \leq A_T(k, n, p) \left(\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p\right)^{1/p}.$$

Подставим в это неравенство функции $x(\rho t)$, $\rho > 0$. Получим неравенство

$$\rho^k |x^{(k)}(0)| \leq A_T(k, n, p) \left(\rho^{-1} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \rho^{pn-1} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p\right)^{1/p}.$$

Таким образом, для всех $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$(2.6) \quad \rho^{pn} A_T^p(k, n, p) \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p - \rho^{pk+1} |x^{(k)}(0)|^p + A_T^p(k, n, p) \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \geq 0.$$

Положим

$$\xi = \rho^{pk+1}, \quad A = A_T^p(k, n, p) \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p, \quad B = |x^{(k)}(0)|^p, \\ C = A_T^p(k, n, p) \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p.$$

Тогда из предложения 2.3 следует, что неравенство (2.6) эквивалентно неравенству

$$(2.7) \quad A_T^p(k, n, p) \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \\ \geq (\gamma - 1) \left(\frac{|x^{(k)}(0)|^p}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(A_T^p(k, n, p) \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}},$$

в котором

$$\gamma = \frac{n}{k + 1/p} = \frac{1}{\beta}.$$

Неравенство (2.7) можно переписать в виде

$$(2.8) \quad |x^{(k)}(0)| \leq \frac{A_T(k, n, p)}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta.$$

Отсюда следует, что

$$(2.9) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leq \frac{A_T(k, n, p)}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta.$$

Действительно, если бы для некоторой функции $x_0(\cdot) \in \mathcal{W}_{pp}^n(T)$ при некотором $\tau \in T$ выполнялось неравенство

$$|x_0^{(k)}(\tau)| > \frac{A_T(k, n, p)}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta,$$

то, положив $x(t) = x_0(t + \tau)$, получили бы, что

$$|x^{(k)}(0)| = |x_0^{(k)}(\tau)| > \frac{A_T(k, n, p)}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x_0(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta \\ \geq \frac{A_T(k, n, p)}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta,$$

что противоречит (2.8).

Если предположить, что существует постоянная $K < A_T(k, n, p)$, для которой при всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pp}^n(T)$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leq \frac{K}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta,$$

то было бы справедливо и неравенство

$$|x^{(k)}(0)| \leq \frac{K}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta,$$

которое можно переписать в виде

$$K^p \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \geq (\gamma - 1) \left(\frac{|x^{(k)}(0)|^p}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(K^p \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Из предложения 2.3 следует, что последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\rho^{pn} K \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p - \rho^{pk+1} |x^{(k)}(0)|^p + K \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \geq 0,$$

которое при $\rho = 1$ может быть записано в виде

$$|x^{(k)}(0)| \leq K \left(\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \right)^{1/p}.$$

Тогда значение задачи (2.5) не превосходит $K < A_T(k, n, p)$, что противоречит определению величины $A_T(k, n, p)$. \square

Рассмотрим задачу о нахождении точной константы в неравенстве

$$(2.10) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K_1 \left(\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \right)^{1/p}.$$

ЛЕММА 2.5. *Для того чтобы константа K была точной в неравенстве (2.1), необходимо и достаточно, чтобы константа*

$$K_1 = K \alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}$$

была точной в неравенстве (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pp}^n(T)$ имеет место неравенство (2.10). Подставим в (2.10) функции $x(\rho t)$, $\rho > 0$. Получим неравенство

$$\rho^{k-1/q} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K_1 \left(\rho^{-1} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p + \rho^{pn-1} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \right)^{1/p}.$$

Тем самым для всех $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$(2.11) \quad \rho^{pn} K_1^p \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p - \rho^{pk-p/q+1} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}^p + K_1^p \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \geq 0.$$

Положим

$$\xi = \rho^{pk-p/q+1}, \quad A = K_1^p \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p, \quad B = \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}^p, \\ C = K_1^p \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p.$$

Тогда из предложения 2.3 следует, что неравенство (2.11) эквивалентно неравенству

$$(2.12) \quad K_1^p \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \geq (\gamma - 1) \left(\frac{\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}^p}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(K_1^p \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^p \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}},$$

в котором

$$\gamma = \frac{n}{k - 1/q + 1/p} = 1/\beta.$$

Неравенство (2.12) можно переписать в виде

$$(2.13) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq \frac{K_1}{\alpha^{\alpha/p} \beta^{\beta/p}} \|x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\alpha \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_p(T)}^\beta.$$

Обратно, если имеет место неравенство (2.13), то оно эквивалентно неравенству (2.12). Тогда из предложения 2.3 следует неравенство (2.11), из которого вытекает (2.10). \square

2.4. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 2, \infty, 2))$ — неравенство Тайкова на прямой

Эту задачу будем решать с помощью правила множителей Лагранжа, но записывать ее будем через преобразование Фурье и при этом использовать лемму 2.4.

Формализация.

$$f_{12,1}(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi^k Fx(\xi)| d\xi \rightarrow \max,$$

$$f_{12,2}(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^{2n}) |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Исследование задачи.

Положим $y(\cdot) = |Fx(\cdot)|$. Применяем метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(y(\cdot), \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-|\xi^k| y(\xi) + \frac{\lambda}{2} (1 + |\xi|^{2n}) y^2(\xi)) d\xi.$$

Выписанная квадратичная функция достигает минимума при равенстве

$$|\xi|^k = \lambda(1 + |\xi|^{2n}) \widehat{y}(\xi),$$

откуда получаем, что

$$\frac{|\xi|^k}{(1 + |\xi|^{2n})^{1/2}} = \lambda(1 + |\xi|^{2n})^{1/2} \widehat{y}(\xi).$$

Возводя обе части равенства в квадрат и затем интегрируя, приходим к равенству

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2k}}{1 + |\xi|^{2n}} d\xi = I.$$

Сделав замену $t = \xi^{2n}$, получаем

$$I = \frac{1}{2\pi n} \int_0^\infty \frac{t^{k/n+1/(2n)-1}}{1+t} dt = \frac{1}{2\pi n} B(a, 1-a) = \frac{1}{2n \sin \pi a},$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — бета-функция, а $a = (2k+1)/(2n)$ (см. [70, стр. 752]).

Таким образом,

$$A_{\mathbb{R}}(k, n, 2) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2k}}{1 + |\xi|^{2n}} d\xi = I^{1/2} = \left(2n \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right)^{-1/2}.$$

Применив лемму 2.4, получаем

ответ: в задаче $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 2, \infty, 2))$ при всех целых $0 \leq k < n$ имеет место точное неравенство:

$$(2.14) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n}},$$

где

$$(2.15) \quad K = \left(\frac{2k+1}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}} \left((2k+1) \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right)^{-1/2}.$$

2.5. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(k, n, 2, \infty, 2))$ — неравенство Габушина–Калябина на полупрямой

Формализация.

$$(2.16) \quad f_{13,1}(x(\cdot)) = -x^{(k)}(0) \rightarrow \min,$$

$$f_{13,2}(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq 1.$$

Исследование задачи.

Это выпуклая задача. Функция Лагранжа для этой задачи (с $\lambda_0 = 1$) имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -x^{(k)}(0) + \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \left(x^2(t) + (x^{(n)}(t))^2 \right) dt.$$

Воспользуемся теоремой Каруша–Куна–Таккера (теорема 5.28). В силу следствия 5.15 для нахождения минимума функции Лагранжа надо приравнять нулю ее производную. Имеем уравнение для экстремальной функции $\hat{x}_0(\cdot)$

$$(2.17) \quad -x^{(k)}(0) + 2\lambda \int_{\mathbb{R}_+} \left(\hat{x}_0(t)x(t) + \hat{x}_0^{(n)}(t)x^{(n)}(t) \right) dt = 0.$$

Положим

$$\lambda_j = e^{(n+2j-1)\frac{i\pi}{2n}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-1} & \dots & \lambda_n^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Через A_{sj} обозначим алгебраическое дополнение к элементу λ_j^{n+s-1} , а через $|A|$ — определитель матрицы A . Рассмотрим функцию

$$\hat{x}(t) = \frac{(-1)^{n-k}}{|A|} \sum_{j=1}^n A_{n-k,j} e^{\lambda_j t}.$$

Поскольку $\lambda_j^{2n} = (-1)^{n-1}$, $j = 1, \dots, n$, имеет место равенство

$$\hat{x}(t) + (-1)^n \hat{x}^{(2n)}(t) = 0.$$

Так как $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то $\hat{x}^{(s)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, $s = 0, 1, \dots, 2n$. Тем самым для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{22}^n(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} x(t) \overline{\hat{x}(t)} dt + (-1)^n \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \overline{\hat{x}^{(2n)}(t)} dt = 0.$$

Так как $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{22}^n(\mathbb{R}_+)$, то из теоремы 2.2 вытекает, что $x^{(l)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ при всех $l = 1, \dots, n-1$. Из той же теоремы вытекает справедливость неравенства

$$\|x^{(l)}(\cdot)\|_{L_\infty([a, +\infty))} \leq A \|x(\cdot)\|_{L_2([a, +\infty))}^{\frac{2n-2l-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([a, +\infty))}^{\frac{2l+1}{2n}}$$

при всех $a > 0$. Поэтому $x^{(l)}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Принимая это во внимание и интегрируя по частям, получаем

$$(2.18) \quad \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \overline{\hat{x}(t)} dt + (-1)^n \sum_{l=1}^n (-1)^l x^{(l-1)}(0) \overline{\hat{x}^{(2n-l)}(0)} + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \overline{\hat{x}^{(n)}(t)} dt = 0.$$

Для всех $s, l = 1, \dots, n$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n A_{sj} \lambda_j^{n+l-1} = \delta_{ls} |A|,$$

где δ_{ls} — символ Кронекера. Следовательно,

$$(2.19) \quad \widehat{x}^{(2n-l)}(0) = \frac{(-1)^{n-k}}{|A|} \sum_{j=1}^n A_{n-k,j} \lambda_j^{2n-l} = (-1)^{n-k} \delta_{n-l+1, n-k}.$$

Подставив (2.19) в (2.18), получим равенство

$$(2.20) \quad x^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{x}(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt.$$

Найдем $\widehat{x}^{(k)}(0)$. Имеем

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{n-k}}{|A|} \sum_{j=1}^n A_{n-k,j} \lambda_j^k = (-1)^{n-k} \frac{|A_k|}{|A|},$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-k-2} & \dots & \lambda_n^{2n-k-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^k & \dots & \lambda_n^k \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-k} & \dots & \lambda_n^{2n-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-1} & \dots & \lambda_n^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что

$$\lambda_j^m = \sigma_m \mu_m^{j-1},$$

где

$$|\sigma_m| = 1, \quad \mu_m = e^{i \frac{\pi m}{n}},$$

матрицы A и A_k могут быть записаны в виде

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_n & \dots & \sigma_n \mu_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-1} & \dots & \sigma_{2n-1} \mu_{2n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \sigma_n & \dots & \sigma_n \mu_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-k-2} & \dots & \sigma_{2n-k-2} \mu_{2n-k-2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_k & \dots & \sigma_k \mu_k^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-k} & \dots & \sigma_{2n-k} \mu_{2n-k}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n-1} & \dots & \sigma_{2n-1} \mu_{2n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Так как очевидно, что $\operatorname{Re} \widehat{x}(\cdot), \operatorname{Im} \widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$, можно подставить $x(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$ в равенство (2.20). Тогда получим

$$(2.21) \quad \widehat{x}^{(k)}(0) = \|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Следовательно, $\widehat{x}^{(k)}(0) > 0$. Пользуясь этим и формулой для определителя Вандермонда, находим, что

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k}}^n \frac{|\mu_k - \mu_{n+j-1}|}{|\mu_{2n-k-1} - \mu_{n+j-1}|}.$$

Из равенства

$$|\mu_l - \mu_s| = 2 |\sin(l-s)\alpha|, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n},$$

получаем

$$\begin{aligned}
\widehat{x}^{(k)}(0) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k}}^n \frac{|\sin(n+j-k-1)\alpha|}{|\sin(n+j+k)\alpha|} \\
&= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \frac{\prod_{j=k+1}^{k+n} \sin j\alpha}{\prod_{j=1}^k \sin j\alpha \prod_{j=1}^{n-k-1} \sin j\alpha} \\
&= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \frac{\prod_{j=k+1}^{n-1} \sin j\alpha \prod_{j=n+1}^{n+k} \sin j\alpha}{\prod_{j=1}^k \sin j\alpha \prod_{j=1}^{n-k-1} \sin j\alpha} \\
&= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha \frac{\prod_{j=k+1}^{n-1} \sin j\alpha}{\prod_{j=1}^{n-k-1} \sin j\alpha} \\
&= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha \prod_{j=1}^{n-k-1} \operatorname{ctg} j\alpha.
\end{aligned}$$

Из того, что $\operatorname{ctg} j\alpha \operatorname{ctg}(n-j)\alpha = 1$, вытекает равенство

$$\prod_{j=1}^{n-k-1} \operatorname{ctg} j\alpha = \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} j\alpha.$$

Тем самым

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg}^2 j\alpha.$$

Положим $\widehat{y}(t) = \operatorname{Re} \widehat{x}(t)$. Так как функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^n(\mathbb{R}_+)$ вещественные, из (2.20) вытекает равенство

$$x^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} x(t) \widehat{y}(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} x^{(n)}(t) \widehat{y}^{(n)}(t) dt.$$

Положив в этом равенстве $x(\cdot) = \widehat{y}(\cdot)$, получим

$$\widehat{x}^{(k)}(0) = \widehat{y}^{(k)}(0) = \|\widehat{y}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{y}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Следовательно,

$$\|\widehat{y}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{y}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = \|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Тем самым $\widehat{x}(\cdot)$ — вещественная функция.

Положим

$$\widehat{x}_0(t) = \frac{\widehat{x}(t)}{\sqrt{\widehat{x}^{(k)}(0)}}.$$

Тогда для $\widehat{x}_0(\cdot)$ справедливо равенство (2.17) с $\lambda = \sqrt{\widehat{x}^{(k)}(0)}/2$. И, кроме того,

$$\|\widehat{x}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{x}_0^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 = 1.$$

По теореме Каруша–Куна–Таккера $\widehat{x}_0(\cdot)$ — экстремальная функция в задаче (2.16). Следовательно, значение экстремальной задачи

$$x^{(k)}(0) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq 1$$

равно $\sqrt{\widehat{x}^{(k)}(0)}$. Остается воспользоваться леммой 2.4.

Ответ: в задаче $(P_{\mathbb{R}_+}(k, n, 2, \infty, 2))$ при всех целых $0 \leq k < n$ имеет место точное неравенство:

$$(2.22) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq K\sqrt{2n} \prod_{j=1}^k \operatorname{ctg} \frac{j\pi}{2n} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)^{\frac{2n-2k-1}{2n}}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)^{\frac{2k+1}{2n}}},$$

где K — константа в неравенстве Тайкова (2.15).

2.6. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, \infty, \infty, \infty))$ — неравенство Колмогорова на прямой

Формализация. В силу предложения 2.1 будем рассматривать следующую задачу.

$$f_{14,1}(x(\cdot)) = \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \rightarrow \max, \quad f_{14,2}(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq a, \\ f_{14,3}(x(\cdot)) = \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq b.$$

Исследование задачи.

Положим

$$\varphi_0(t) = \operatorname{sign} \sin \pi t = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(2j+1)\pi t}{2j+1}, \\ (2.23) \quad \varphi_{2k-1}(t) = \int_{1/2}^t \varphi_{2k-2}(t) dt = \frac{(-1)^k 4}{\pi^{2k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(2j+1)\pi t}{(2j+1)^{2k}}, \\ \varphi_{2k}(t) = \int_0^t \varphi_{2k-1}(t) dt = \frac{(-1)^k 4}{\pi^{2k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(2j+1)\pi t}{(2j+1)^{2k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции $\varphi_m(\cdot)$ называются идеальными сплайнами Эйлера. Нетрудно убедиться, что они имеют период 2 и

$$\varphi_m^{(j)}(t) = \varphi_{m-j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Кроме того, при четном m функции $\varphi_m(\cdot)$ имеют простые нули в точках $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а при нечетных m — в точках $1/2, \pm 1 + 1/2, \pm 2 + 1/2, \dots$. Других нулей функция $\varphi_m(\cdot)$ не имеет, причем она при $m \geq 1$ строго монотонна между соседними точками экстремума.

С учетом отмеченных свойств получаем

$$\|\varphi_{2k}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = (-1)^{k+s} \varphi_{2k}(s+1/2) = \frac{4}{\pi^{2k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^{2k+1}}, \\ k = 0, 1, \dots, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \|\varphi_{2k-1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = (-1)^{k+s} \varphi_{2k-1}(s) = \frac{4}{\pi^{2k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^{2k}}, \\ k = 1, 2, \dots, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь удобно пользоваться величинами, называемыми константами Фавара

$$(2.24) \quad K_m = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j(m+1)}}{(2j+1)^{m+1}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\|\varphi_m(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \frac{K_m}{\pi^m}.$$

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и функция $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty\infty}^n(\mathbb{R})$ имеет период $2l$. Пусть, кроме того,

$$(2.25) \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_n}{\pi^n} \quad \text{и} \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Тогда для любого $1 \leq k \leq n-1$

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{n-k}}{\pi^{n-k}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Из теоремы 2.2 вытекает, что $x^{(k)}(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ при всех $1 \leq k \leq n-1$. В дальнейшем все функции рассматриваются на периоде $2l$. Пусть

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \alpha \frac{K_{n-k}}{\pi^{n-k}},$$

где $\alpha > 1$. Выберем t_0 и t_1 так, чтобы

$$|x^{(k)}(t_0)| = \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}, \quad \alpha \varphi_n^{(k)}(t_0 - t_1) = x^{(k)}(t_0).$$

Положим

$$h(t) = \varphi_n(t - t_1) - \frac{1}{\alpha} x(t).$$

В силу свойств функции $\varphi_n(\cdot)$, условия $\|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \|\varphi_n(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$ и того, что $\alpha > 1$, получаем, что функция $h(\cdot)$ имеет не менее $2l$ различных нулей. Из теоремы Ролля вытекает, что $h^{(k)}(\cdot)$ тоже имеет не менее $2l$ различных нулей. Рассмотрим сначала случай $k < n-1$. Точка t_0 является локальным экстремумом для функции $x^{(k)}(\cdot)$ и функции $\varphi_n^{(k)}(\cdot - t_1)$. Поэтому $h^{(k)}(t_0) = h^{(k+1)}(t_0) = 0$. Тем самым у функции $h^{(k+1)}(\cdot)$ оказывается не менее $2l+1$ различных нулей. Следовательно, у функции

$$h^{(n)}(t) = \varphi_n^{(n)}(t - t_1) - \frac{1}{\alpha} x^{(n)}(t)$$

должно быть не менее $2l+1$ перемен знака. Но почти всюду

$$\left| \frac{1}{\alpha} x^{(n)}(t) \right| < |\varphi_n^{(n)}(t - t_1)| = 1,$$

а у функции $\varphi_n^{(n)}(\cdot)$ ровно $2l$ перемен знака. Пришли к противоречию.

Пусть теперь $k = n-1$. В силу того, что $1/\alpha < 1$, у функции $h(\cdot)$ имеется $2l$ нулей, в которых она меняет знак. Из теоремы Ролля вытекает, что у функции $h^{(n-1)}(\cdot)$ тоже имеется $2l$ нулей, в которых она меняет знак. Из определения $h(\cdot)$ следует, что $h^{(n-1)}(t_0) = 0$. Точка t_0 является локальным экстремумом функции $\varphi_n^{(n-1)}(\cdot - t_1)$. Поэтому $\varphi_n^{(n)}(\cdot - t_1)$ меняет знак в точке t_0 . Тем самым и $h^{(n)}(\cdot)$ меняет знак в этой же точке. Значит, t_0 — локальный экстремум функции $h^{(n-1)}(\cdot)$. Тогда у функции $h^{(n-1)}(\cdot)$ оказывается не менее $2l+1$ нулей. Следовательно, у функции $h^{(n)}(\cdot)$ не менее $2l+1$ перемен знака и, как и выше, приходим к противоречию. \square

ТЕОРЕМА 2.7. При всех натуральных $k < n$ имеет место точное неравенство

$$(2.26) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}} \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(2.27) \quad y(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1, \\ (-1)^n (t-2)^n \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j-1}^j (t-1)^j, & 1 < t < 2, \\ (t+2)^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n+j-1}^j (t+1)^j, & -2 < t < -1, \\ 0, & |t| \geq 2. \end{cases}$$

Докажем, что $y(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty}^n(\mathbb{R})$. Очевидно, что $y^{(k)}(\pm 2) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Кроме того, $y(\cdot)$ непрерывна на \mathbb{R} . В силу четности этой функции остается показать, что $y^{(k)}(1) = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$. Имеем

$$\begin{aligned} y^{(k)}(1) &= (-1)^n \sum_{s=0}^k C_k^s C_{n+s-1}^s s! n(n-1) \dots (n-k+s+1) (-1)^{n-k+s} \\ &= (-1)^k k! \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{(n+s-1) \dots n}{s!} \cdot \frac{n \dots (n-k+s+1)}{(k-s)!}. \end{aligned}$$

Докажем, что для всех $p = 0, 1, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^p (-1)^s \frac{(n+s-1) \dots n}{s!} \cdot \frac{n \dots (n-k+s+1)}{(k-s)!} \\ = (-1)^p \frac{(n+p) \dots (n+1)}{p!} \cdot \frac{n \dots (n-k+p+1)}{k(k-p-1)!}. \end{aligned}$$

Будем доказывать по индукции. Для $p = 0$ утверждение очевидно. Пусть для p утверждение верно, докажем его справедливость для $p+1$. Итак,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{p+1} (-1)^s \frac{(n+s-1) \dots n}{s!} \cdot \frac{n \dots (n-k+s+1)}{(k-s)!} \\ = (-1)^p \frac{(n+p) \dots (n+1)}{p!} \cdot \frac{n \dots (n-k+p+1)}{k(k-p-1)!} \\ + (-1)^{p+1} \frac{(n+p) \dots n}{(p+1)!} \cdot \frac{n \dots (n-k+p+2)}{(k-p-1)!} \\ = (-1)^{p+1} \frac{(n+p+1) \dots (n+1)}{(p+1)!} \cdot \frac{n \dots (n-k+p+2)}{k(k-p-2)!}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y^{(k)}(1) &= (-1)^k k! \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \frac{(n+s-1) \dots n}{s!} \cdot \frac{n \dots (n-k+s+1)}{(k-s)!} \\ &\quad + (-1)^k k! (-1)^k \frac{(n+k-1) \dots n}{k!} \\ &= (-1)^k k! \left((-1)^{k-1} \frac{(n+k-1) \dots (n+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{n}{k} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{(n+k-1) \dots n}{k!} \right) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty}^n(\mathbb{R})$ и выполнены неравенства (2.25). Положим

$$z_l(t) = x(t)y\left(\frac{t}{l}\right), \quad -2l \leq t \leq 2l,$$

и

$$z_l(t+4l) = z_l(t).$$

Тем самым $z_l(\cdot)$ имеет период $4l$ и $z_l(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty\infty}^n(\mathbb{R})$. Из теоремы 2.2 вытекает, что существует постоянная A такая, что

$$\|x^{(s)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Выберем постоянную A так, чтобы выполнялись еще следующие неравенства:

$$\|y^{(s)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Для всех $s = 0, 1, \dots, n$ имеем

$$z_l^{(s)}(t) = x^{(s)}(t)y\left(\frac{t}{l}\right) + \sum_{j=1}^s C_s^j x^{(s-j)}(t) \frac{d^j}{dt^j} y\left(\frac{t}{l}\right).$$

Из того, что

$$\left| \sum_{j=1}^s C_s^j x^{(s-j)}(t) \frac{d^j}{dt^j} y\left(\frac{t}{l}\right) \right| \leq \sum_{j=1}^s C_s^j A \frac{1}{l^j} \left| y^{(j)}\left(\frac{t}{l}\right) \right| \leq \frac{1}{l} 2^s A^2,$$

вытекают равенства

$$(2.28) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \|z_l^{(s)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| x^{(s)}(t)y\left(\frac{t}{l}\right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|x^{(s)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим функцию $\alpha x(\cdot)$. В силу неравенств (2.25)

$$\|\alpha x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \alpha \frac{K_n}{\pi^n} < \frac{K_n}{\pi^n}, \quad \|\alpha x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \alpha < 1.$$

Тогда, учитывая (2.28), получаем, что для достаточно больших l

$$\|\alpha z_l(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_n}{\pi^n}, \quad \|\alpha z_l^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Из теоремы 2.6 вытекает, что

$$\|\alpha z_l^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{n-k}}{\pi^{n-k}}.$$

Из (2.28) получаем

$$\|\alpha x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{n-k}}{\pi^{n-k}}.$$

Устремляя α к 1, приходим к неравенству

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{n-k}}{\pi^{n-k}}.$$

Таким образом, для значения S в экстремальной задаче

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{K_n}{\pi^n}, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1,$$

имеем оценку

$$S \leq \frac{K_{n-k}}{\pi^{n-k}}.$$

Нетрудно убедиться, что на функции $\varphi_n(\cdot)$ эта оценка достигается. Остается воспользоваться предложением 2.1. \square

Ответ:

$$K_{\mathbb{R}}(k, n, \infty, \infty, \infty) = \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}}.$$

2.7. Задача $(P_{\mathbb{R}}(k, n, 1, 1, 1))$ — неравенство Стейна на прямой

Формализация.

$$f_{15,1}(x(\cdot)) = \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad f_{15,2}(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq 1,$$

$$f_{15,3}(x(\cdot)) = \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Исследование задачи. Будем решать задачу без использования принципа Лагранжа, редуцируя ее к неравенству Колмогорова.

Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\Delta > 0$ и $y(\cdot) \in L_1([a - \Delta, b + \Delta])$. Имеет место равенство

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|y(\cdot + s) - y(\cdot)\|_{L_1([a, b])} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу того, что непрерывные функции всюду плотны в $L_1([a - \Delta, b + \Delta])$, найдется функция $\varphi_\varepsilon(\cdot) \in C([a - \Delta, b + \Delta])$ такая, что $\|y(\cdot) - \varphi_\varepsilon(\cdot)\|_{L_1([a - \Delta, b + \Delta])} < \varepsilon$. Непрерывная функция $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a - \Delta, b + \Delta]$. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что $|\varphi_\varepsilon(t_1) - \varphi_\varepsilon(t_2)| < \varepsilon$ для любых $t_1, t_2 \in [a - \Delta, b + \Delta]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$. Следовательно, для всех $|s| < \min\{\delta, \Delta\}$ имеем

$$\|\varphi_\varepsilon(\cdot + s) - \varphi_\varepsilon(\cdot)\|_{L_1([a, b])} \leq (b - a) \|\varphi_\varepsilon(\cdot + s) - \varphi_\varepsilon(\cdot)\|_{C([a, b])} < (b - a)\varepsilon.$$

Тем самым для всех $|s| < \min\{\delta, \Delta\}$

$$\|y(\cdot + s) - y(\cdot)\|_{L_1([a, b])} \leq \|y(\cdot + s) - \varphi_\varepsilon(\cdot)\|_{L_1([a, b])} + \|\varphi_\varepsilon(\cdot + s) - \varphi_\varepsilon(\cdot)\|_{L_1([a, b])} + \|\varphi_\varepsilon(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_1([a, b])} < \varepsilon + (b - a)\varepsilon + \varepsilon = (2 + b - a)\varepsilon.$$

Отсюда вытекает доказываемое равенство. \square

ЛЕММА 2.9. Пусть $x(\cdot)$ — локально абсолютно непрерывна на \mathbb{R} , а $x'(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для любого отрезка $[a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - x'(t) \right| dt = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - x'(t) \right| dt &= \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_0^h (x'(t+s) - x'(t)) ds \right| dt \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_0^h \int_a^b |x'(t+s) - x'(t)| dt ds \right| = \frac{1}{|h|} \int_0^h \|x'(\cdot + s) - x'(\cdot)\|_{L_1([a, b])} ds. \end{aligned}$$

Из леммы 2.8 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $|s| < \delta$ будет выполнено неравенство

$$\|x'(\cdot + s) - x'(\cdot)\|_{L_1([a, b])} < \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $|h| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\int_a^b \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - x'(t) \right| dt < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение леммы. \square

ТЕОРЕМА 2.10. При всех натуральных $k < n$ имеет место точное неравенство

$$(2.29) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}} \|x(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.2 вытекает, что $x^{(j)}(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $j = 1, \dots, n-1$. Пусть $\sigma > 0$. Положим $u(s) = \text{sign } x^{(k)}(s)$,

$$X(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} x(s+t)u(s) ds.$$

Из леммы 2.9 получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \int_{-\sigma}^{\sigma} x'(s+t)u(s) ds \right| \\ \leq \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \frac{x(s+t+h) - x(s+t)}{h} - x'(s+t) \right| ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тем самым

$$X'(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} x'(s+t)u(s) ds.$$

Последовательно применяя лемму 2.9, получаем

$$X^{(j)}(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} x^{(j)}(s+t)u(s) ds, \quad j = 1, \dots, n.$$

При этом

$$(2.30) \quad |X^{(j)}(t)| \leq \int_{-\sigma}^{\sigma} |x^{(j)}(s+t)| ds \leq \|x^{(j)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Применяя неравенство Колмогорова к функции $X(\cdot)$, получаем

$$|X^{(k)}(0)| \leq \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}} \|X(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|X^{(n)}(\cdot)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

Так как

$$X^{(k)}(0) = \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-\sigma, \sigma])},$$

то, учитывая неравенства (2.30), получаем

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-\sigma, \sigma])} \leq \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}} \|x(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

В силу того, что это неравенство выполнено для любого $\sigma > 0$, из этого неравенства вытекает (2.29).

Покажем, что это точное неравенство. Пусть $z(\cdot) \in L_1([-1, 1])$ — периодическая функция с периодом 2 такая, что $z^{(n-1)}(\cdot)$ — абсолютно непрерывная функция, а $z^{(n)}(\cdot) \in L_1([-1, 1])$ и $\|z^{(n)}(\cdot)\|_{L_1([-1, 1])} \neq 0$. Докажем, что если K — точная константа в неравенстве

$$(2.31) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{k/n},$$

то

$$(2.32) \quad K \geq \frac{\|z^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1, 1])}}{\|z(\cdot)\|_{L_1([-1, 1])}^{1-k/n} \|z^{(n)}(\cdot)\|_{L_1([-1, 1])}^{k/n}}.$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Положим

$$y_l(t) = \begin{cases} 1, & -l \leq t \leq l, \\ y(t-l+1), & l < t < l+1, \\ y(t+l-1), & -l-1 < t < -l, \\ 0, & |t| \geq l, \end{cases}$$

где функция $y(\cdot)$ определена равенством (2.27). Из доказанных в теореме 2.7 свойств $y(\cdot)$ вытекает, что $y_l(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty}^n(\mathbb{R})$. Положим

$$z_l(t) = z(t)y_l(t).$$

Имеем

$$\|z_l(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq l\|z(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} + 2\|z(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = (l+2)\|z(\cdot)\|_{L_1([-1,1])}.$$

Для всех $s = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$z_l^{(s)}(t) = z^{(s)}(t)y_l(t) + \omega(t),$$

где

$$\omega(t) = \sum_{j=1}^s C_s^j z^{(s-j)}(t)y_l^{(j)}(t).$$

Выберем A так, чтобы

$$\|z^{(s)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \leq A, \quad \|y_l^{(s)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\omega(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} &\leq \sum_{j=1}^s C_s^j \left(\int_{-l-1}^{-l} |z^{(s-j)}(t)y_l^{(j)}(t)| dt + \int_l^{l+1} |z^{(s-j)}(t)y_l^{(j)}(t)| dt \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^s C_s^j 2A \|z^{(s-j)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \leq 2^{s+1} A^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|z_l^{(s)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} - \|z^{(s)}(\cdot)y_l(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq 2^{s+1} A^2.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \|z^{(s)}(\cdot)y_l(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \int_{-l}^l |z^{(s)}(t)| dt + \int_{-l-1}^{-l} |z^{(s)}(t)y_l(t)| dt \\ &\quad + \int_l^{l+1} |z^{(s)}(t)y_l(t)| dt, \end{aligned}$$

получаем

$$\|z_l^{(s)}(\cdot)y_l(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} - l\|z^{(s)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \leq 2A.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|z_l^{(k)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} &\geq l\|z^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} - c, \\ \|z_l^{(n)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} &\leq l\|z^{(n)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} + c, \end{aligned}$$

где $c = 2^{s+1} A^2 + 2A$. Подставив функцию $z_l(\cdot)$ в неравенство (2.31), получим

$$\begin{aligned} K &\geq \frac{\|z_l^{(k)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\|z_l(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|z_l^{(n)}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{k/n}} \\ &\geq \frac{l\|z^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} - c}{((2+l)\|z(\cdot)\|_{L_1([-1,1])})^{1-k/n} (l\|z^{(n)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} + c)^{k/n}} \\ &= \frac{\|z^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} - c/l}{((2/l+1)\|z(\cdot)\|_{L_1([-1,1])})^{1-k/n} (\|z^{(n)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} + c/l)^{k/n}}. \end{aligned}$$

Устремляя l к бесконечности, получаем неравенство (2.32).

Подставим в неравенство (2.32) в качестве функции $z(\cdot)$ функцию Стеклова для идеального сплайна Эйлера $\varphi_{n-1}(\cdot)$. Используя равенства (5.71) и (5.72), получим

$$K \geq \frac{\|\varphi_{n-1,h}^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])}}{\left(\frac{4K_n}{\pi^n}\right)^{1-k/n} 4^{k/n}}.$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, с помощью равенства (5.73) получаем

$$K \geq \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}}.$$

□

Ответ: $K_{\mathbb{R}}(k, n, 1, 1, 1) = \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}}$.

2.8. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, \infty))$ — неравенство Ландау на полупрямой

Ввиду того, что, с одной стороны, решение задачи существует, а, с другой стороны, имеется возможность правого сдвига, нам следует решить задачу о максимизации в точке 0 первой производной функции $x(\cdot)$, у которой первая производная обладает условием Липшица с константой единица (так мы переформулировали условие, что $x(\cdot) \in W_{\infty}^2(\mathbb{R}_+)$). Это приводит к такой первой формализации:

$$x_2(0) \rightarrow \max, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u(t)| \leq 1, \quad |x_1(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Это задача оптимального управления с фазовым ограничением. Принцип Лагранжа для таких задач приводит к громоздким вычислениям, и потому мы приведем вспомогательную формализацию задачи, допустив, что экстремальная функция $\hat{x}(\cdot)$ существует и достигает максимума в точке нуль, а минимума — впервые в точке T . Это приводит при новых обозначениях к так называемой понтригинской задаче оптимального управления.

Формализация.

$$f_{16,1}(x(\cdot), y(\cdot)) = y(0) \rightarrow \min, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad x(0) = 1, \\ x(T) = -1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Исследование задачи. Условие экстремума здесь, как и всюду, — принцип Лагранжа. Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), \bar{\lambda}) = y(0) + \mu_1 x(T) + \mu_0 x(0) \\ + \int_0^T (q(t)(\dot{x}(t) - y(t)) + p(t)(\dot{y}(t) - u(t))) dt.$$

Равенство нулю производной функции Лагранжа по переменным $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ приводит (ввиду однородности задачи) к тождеству

$$\dot{x}(0) + \mu_1 x(T) + \mu_0 x(0) + \int_0^T (q(t)(\dot{x}(t) - y(t)) + p(t)\dot{y}(t)) dt = 0.$$

Уравнение Эйлера, условия трансверсальности и условие минимума дают

$$\begin{aligned} \dot{p} = -q, \quad \dot{q} = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(T) = 0, \quad q(0) = \mu_0, \quad q(T) = -\mu_1, \\ \widehat{u}(t) = \text{sign } p(t) \Rightarrow p(t) = 1 - \frac{t}{T}, \quad \mu_0 = -\mu_1 = \frac{t}{T}. \end{aligned}$$

Исследование выписанных соотношений. Из выписанных соотношений вытекает тождество:

$$\dot{x}(0) = \frac{x(T) - x(0)}{T} - \int_0^T p(t) \ddot{x}(t) dt,$$

которое легко проверяется непосредственно. Из этого тождества получаем оценку сверху:

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, \infty) &\leq \min_{T>0} \left(\frac{2}{T} + \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) dt \right) \\ &= \min_{T>0} \left(\frac{2}{T} + \frac{T}{2} \right) = 2 \quad (\widehat{T} = 2), \end{aligned}$$

которая достигается на функции, определяемой на отрезке $[0, 2]$ формулой

$$\widehat{x}(t) = 1 - \frac{(2-t)_+^2}{2}$$

и продолженной далее константой, равной единице.

Ответ: $K_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, \infty) = 2$ [Э. Ландау, 1913].

2.9. Задача $(P_{\mathbb{R}}(1, 2, \infty, \infty, \infty))$ — неравенство Адамара на прямой

Ее начальная формализация отличается от начальной формализации предыдущей задачи только тем, что надо \mathbb{R}_+ заменить на \mathbb{R} :

$$x_2(0) \rightarrow \max, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad |x_1| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Формализация.

$$\begin{aligned} f_{17,1}(x(\cdot), y(\cdot)) = y(0) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 1, \\ x(-T) = -1, \quad |u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [-T, T]. \end{aligned}$$

Исследование задачи. Условие экстремума — принцип Лагранжа. Рассуждение, подобное проведенному в п. 2.8, приводит к тождеству:

$$\dot{x}(0) = \frac{x(T) - x(-T)}{2T} - \frac{1}{2} \int_{-T}^T \left(\text{sign } t - \frac{t}{T} \right) \ddot{x}(t) dt,$$

которое легко проверяется непосредственно.

Исследование полученных соотношений. Из полученного тождества получаем оценку сверху:

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{R}}(1, 2, \infty, \infty, \infty) &\leq \min_{T>0} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{2} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T} \right) dt \right) = \min_{T>0} \left(\frac{1}{T} + \frac{T}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \quad (\widehat{T} = \sqrt{2}), \end{aligned}$$

которая достигается на функции, определяемой на отрезке $[0, \sqrt{2}]$ формулой

$$\hat{x}(t) = 1 - \frac{(t - \sqrt{2})^2}{2},$$

продолженной для $t \geq \sqrt{2}$ константой, равной единице, а для $t \leq 0$ “антисимметрично”.

Ответ: $K_{\mathbb{R}}(1, 2, \infty, \infty, \infty) = \sqrt{2}$ [Адамар, 1914].

2.10. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, r))$ — обобщение неравенства Ландау

Формализация.

$$f_{18,1}(x(\cdot)) = \dot{x}(0) \rightarrow \max, \quad f_{18,2}(x(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}_+} |\ddot{x}(t)|^r \leq 1, \\ f_{18,3}(x(\cdot)) = |x(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Исследование задачи. Пусть $1 < r < \infty$ (случаи $r = 1$ и $r = \infty$ разрешаются предельным переходом). Тогда задача относится к вариационному исчислению с фазовым ограничением.

Легко понять, что решение задачи в нуле принимает значение -1 . Пусть решение задачи впервые достигает уровня $+1$ в точке T . Решим задачу на отрезке $[0, T]$, фиксируя краевые условия:

$$-\dot{x}(0) \rightarrow \min, \quad \int_0^T |\ddot{x}(t)|^r dt \leq 1, \quad x(0) = -1, \quad x(T) = 1.$$

Это задача оптимального управления.

Применяем принцип Лагранжа. Для задачи $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, r,))$ функция Лагранжа такова:

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \bar{\lambda}) = -\dot{x}(0) + \mu_0 x(0) + \mu_1 x(T) + \lambda \int_0^T |\ddot{x}(t)|^r dt,$$

где $\bar{\lambda} = (\mu_0, \mu_1, \lambda)$.

Принцип Лагранжа для этой задачи состоит в условии стационарности функции Лагранжа. Дифференцируя функцию Лагранжа по $x(\cdot)$ в точке $\hat{x}(\cdot)$, где $\hat{x}(\cdot)$ — искомое решение, приходим к тождеству

$$\dot{x}(0) = \mu_0 x(0) + \mu_1 x(T) + \int_0^T p(t) \ddot{x}(t) dt, \quad (p(t) = \lambda r |\hat{x}(t)|^{r-1} \text{sign } \hat{x}(t)).$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\dot{x}(0) = p(T)\dot{x}(T) - p(0)\dot{x}(0) - \dot{p}(T)x(T) + \dot{p}(0)x(0) + \mu_0 x(0) + \mu_1 x(T) \\ + \int_0^T \ddot{p}(t)x(t) dt.$$

Откуда

$$\ddot{p} = 0, \quad p(0) = -1, \quad p(T) = 0,$$

т. е.

$$p(t) = -\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

и окончательно приходим к основному тождеству:

$$\dot{x}(0) = \frac{x(T) - x(0)}{T} - \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \ddot{x}(t) dt,$$

которое, разумеется, можно проверить непосредственно (и, более того, в точности это основное тождество появилось в примере 16). В итоге приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x}(t) = a \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{r'-1}$$

с граничными условиями

$$x(0) = -1, \quad x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad \int_0^T |\ddot{x}(t)|^r dt = 1.$$

Решая это уравнение, получаем, что

$$\hat{x}(t) = 1 - 2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{r'+1}, \quad T = (2r')^{\frac{r'}{r'+1}} (r' + 1)^{\frac{1}{r'+1}}.$$

Далее для оценки снизу надо вычислить $\hat{x}(0)$, для оценки сверху надо в основном тождестве применить неравенство Гельдера.

Ответ: $K_{\mathbb{R}_+}(1, 2, \infty, \infty, r) = 2^{\frac{1}{r'+1}} \left(\frac{r'+1}{r'}\right)^{\frac{r'}{r'+1}}$ [Арестов, 1972].

2.11. Задача $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, 2, 2, 2))$ — неравенство Харди–Литтлвуда–Пойя на полупрямой

Формализуем задачу $(P_{\mathbb{R}_+}(1, 2, 2, 2, 2))$, как в лемме 2.5.

Формализация.

$$f_{20,1}(x(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \max,$$

$$f_{19,2}(x(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}_+} (x^2(t) + (\ddot{x}(t))^2) dt \leq 1.$$

Исследование задачи. Мы видим, что получилась задача вариационного исчисления, значение ее в лемме было обозначено $A_{\mathbb{R}_+}(1, 2, 2)$. Теории задач вариационного исчисления на бесконечном интервале еще не достаточно разработаны, но тем не менее мы применяем теорию, разработанную для конечного интервала.

Условие экстремума — принцип Лагранжа (применённый для этой задачи формально) приводит: а) к уравнению Эйлера–Пуассона, б) условиям трансверсальности, с) условиям неотрицательности и д) условиям дополняющей нежесткости:

$$a) x^{(4)} + \mu \ddot{x} + x = 0, \quad b) x^{(3)}(0) + \mu \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 0, \quad c) \mu \geq 0,$$

$$d) \int_{\mathbb{R}_+} (x^2 + \ddot{x}^2) dt - 1 = 0.$$

Исследуем выписанные соотношения. Характеристический многочлен $z^4 + \mu z^2 + 1$ уравнения Эйлера–Пуассона разлагается на два множителя, один из которых $z^2 + \nu z + 1$ ($\nu = \sqrt{2 - \mu}$) имеет корень в левой полуплоскости. Следовательно, решение уравнения Эйлера–Пуассона удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + x = 0.$$

Продифференцировав это уравнение, подставив $t = 0$ и используя условие трансверсальности, получаем: $x^{(3)}(0) + \dot{x}(0) = 0$, следовательно, $\mu = 1$ и $\nu = 1$. Решив уравнение $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ с граничным условием $\dot{x}(0) + x(0) = 0$, приходим к семейству решений

$$(2.33) \quad x(t) = Ae^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Константа A определяется из изопериметрического условия.

Для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{22}^2(\mathbb{R}_+)$ имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} (\ddot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t) + x^2(t)) dt \\ = \int_{\mathbb{R}_+} (\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t))^2 dt + (x(0) + \dot{x}(0))^2. \end{aligned}$$

Оно без труда проверяется непосредственно, а по сути дела является формулой Вейерштрасса из достаточного условия в вариационном исчислении. Отсюда следует, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t) dt \leq \int_{\mathbb{R}_+} (\ddot{x}^2(t) + x^2(t)) dt.$$

На функции (2.33) это неравенство обращается в равенство. Тем самым значение рассматриваемой задачи равно единице. Пересчет констант (см. лемму 2.5) приводит к искомому результату.

Ответ: $K_{\mathbb{R}_+}(1, 2, 2, 2, 2) = \sqrt{2}$ [Харди–Литтлвуд–Полиа, 1934].

2.12. Комментарии

Теорема 2.2 доказана В. Н. Габушиным [28]. Неравенство (2.3) было опубликовано в книге [72]. Точная константа в неравенстве (2.14) была получена Л. Н. Тайковым в работе [62]. При $T = \mathbb{R}_+$, $p = r = 2$, $q = \infty$ точная константа была найдена В. Н. Габушиным [29], а ее явный вид (см. (2.22)) нашел Г. А. Калябин [31].

Существует несколько доказательств неравенства Колмогорова (2.26) (см., например, [27]). Мы приводим с незначительными изменениями доказательство, предложенное в работе [1]. Неравенство (2.29) доказано в работе [21].

Много точных неравенств было получено для случаев с так называемыми малыми гладкостями. Подробное описание их можно найти в работе [25]. Точная константа для случая $T = \mathbb{R}_+$, $p = q = r = \infty$, $n = 2$, $k = 1$ была найдена Э. Ландау [10]. Для аналогичного случая на прямой точная константа была вычислена Ж. Адамаром [8]. Обобщение неравенства Ландау на случай $r \geq 1$ было получено В. В. Арестовым [23]. Значение точной константы для случая $T = \mathbb{R}_+$, $p = q = r = 2$, $n = 2$, $k = 1$ было получено в книге [72].

Поперечники

В 1936 г. А. Н. Колмогоров [9] поставил вопрос о наилучших подпространствах с точки зрения аппроксимации классов функций. Величины, характеризующие наилучшие средства и методы приближения, получили название поперечников.

Пусть X — линейное нормированное пространство и $A \subset X$. *Колмогоровским n -поперечником множества A в пространстве X* называется величина

$$d_n(A, X) = \inf_{L_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_X,$$

где нижняя грань берется по всем подпространствам L_n пространства X размерности не выше n .

3.1. Начальный пример: поперечники эллипсоида в \mathbb{E}^3

Рассмотрим эллипсоид

$$E_{a(\mathbb{E}^3)} = \left\{ x \in \mathbb{E}^3 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1, \quad a_1 > a_2 > a_3 > 0 \right\}.$$

Нам надлежит решить задачу $P(\mathbb{E}^3, \text{Lin}^k(\mathbb{E}^3), E_{a(\mathbb{E}^3)})$ ($\text{Lin}^k(\mathbb{E}^3)$ — линейные подпространства \mathbb{E}^3 размерности k), $k = 0, 1, 2$, о наилучшем приближении эллипсоида $E_{a(\mathbb{E}^3)}$ точкой, прямой и плоскостью, т. е. о вычислении величин $d_k(E_{a(\mathbb{E}^3)}, \mathbb{E}^3)$, $k = 0, 1, 2$. Из определения поперечника следует, что экстремальной точкой для центрально-симметричного эллипсоида $E_{a(\mathbb{E}^3)}$ является начало координат, и, значит, $d_0(E_{a(\mathbb{E}^3)}, \mathbb{E}^3)$ есть решение задачи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \max, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1.$$

Легко понять, что решением этой задачи является число a_1 . Наиболее удаленными в эллипсоиде точками от прямой $x_2 = x_3 = 0$ являются точки $\pm(0, a_2, 0)$. Читателю предоставляется возможность доказать, что никакая прямая не может приблизить эллипсоид лучше и, значит, $d_1(E_{a(\mathbb{E}^3)}) = a_2$. Еще проще доказать, что $d_2(E_{a(\mathbb{E}^3)}) = a_3$.

Итак, получен ответ

$$d_k(E_{a(\mathbb{E}^3)}, \mathbb{E}^3) = a_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Замечание. Полученные числа: a_1, a_2, a_3 — это не что иное, как “спектральные числа” (т. е. множители Лагранжа) задачи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \max, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

3.2. Теорема о поперечниках классов $W_2^r(\mathbb{T})$ в $L_2(\mathbb{T})$

Классом $W_2^r(\mathbb{T})$, где $r \in \mathbb{N}$, назовем совокупность $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot)$, у которых $(r - 1)$ -я производная абсолютно непрерывна, а r -я производная ограничена единицей в пространстве $L_\infty(\mathbb{T})$.

ТЕОРЕМА 3.1. [Колмогоров, 1936]

$$(3.1) \quad d_{2n-1}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = d_{2n}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = n^{-r}, \quad n \geq 1 \quad (d_0 = \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху. Пусть

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— функция из $W_2^r(\mathbb{T})$, т. е. $x^{(r)}(\cdot) \in BL_2(\mathbb{T})$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \leq 1.$$

Осуществим приближение $(n - 1)$ -й суммой Фурье:

$$S_{n-1}x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Тогда

$$d(x(\cdot), \mathcal{T}_{n-1}, L_2(\mathbb{T})) \leq \|x(\cdot) - S_{n-1}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k \geq n} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу

$$f_{21,0}(a, b) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \rightarrow \max, \quad f_{21,1}(a, b) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) dt \leq 1.$$

Условие экстремума — принцип Лагранжа легко приводит к тому, что

$$\hat{a} = (1, 0, \dots, 0, \dots), \quad \hat{b} = 0,$$

но еще проще прямое применение равенства Парсеваля:

$$\sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k \geq n} k^{-2r} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \leq n^{-2r} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq n^{-2r}.$$

Откуда

$$d_{2n-1}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) \leq n^{-r},$$

т. е.

$$(3.2) \quad d_{2n}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) \leq d_{2n-1}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) \leq n^{-r}.$$

Оценка снизу. Докажем аналог неравенства Бернштейна в $L_2(\mathbb{T})$. Мы не выписываем экстремальную задачу, а приводим непосредственное доказательство этого неравенства. Имеем для $x(\cdot) \in \mathcal{T}_n$:

$$(3.3) \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k=1}^n k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \leq n^r \left(\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \leq n^r \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Пусть L_{2n} — произвольное подпространство $L_2(\mathbb{T})$ размерности $2n$ с ортонормированным базисом $e_1(\cdot), \dots, e_{2n}(\cdot)$. В силу того, что однородная система

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2}(1, e_j(t))_{L_2(\mathbb{T})} + \sum_{k=1}^n (a_k(\cos kt, e_j(t))_{L_2(\mathbb{T})} + b_k(\sin kt, e_j(t))_{L_2(\mathbb{T})}) \\ = 0, \quad j = 1, \dots, 2n, \end{aligned}$$

с $2n + 1$ неизвестными и $2n$ уравнениями имеет ненулевое решение, найдется ненулевой тригонометрический полином $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{T}_n$, ортогональный всем элементам базиса $e_1(\cdot), \dots, e_{2n}(\cdot)$. В силу теоремы 5.19 для

$$\xi(\cdot) = \frac{\widehat{x}(\cdot)}{n^r \|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}}$$

имеем

$$d(\xi(\cdot), L_{2n}, L_2(\mathbb{T})) = \|\xi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = n^{-r}.$$

Из (3.3) вытекает, что $\xi(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$\sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \inf_{y(\cdot) \in L_{2n}} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \geq \inf_{y(\cdot) \in L_{2n}} \|\xi(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = n^{-r}.$$

Таким образом,

$$d_{2n}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) \geq n^{-r}.$$

Учитывая (3.2), получаем (3.1). \square

3.3. Поперечники октаэдров $B_1^N(a)$ в l_2^N

Обозначим через l_q^N , $1 \leq q \leq \infty$, множество векторов $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ с нормой

$$\|x\|_{l_q^N} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^q \right)^{1/2}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|, & q = \infty. \end{cases}$$

Пусть $a_1 \geq \dots \geq a_N > 0$. Положим

$$B_q^N(a) = \begin{cases} \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{k=1}^N \frac{|x_k|^q}{a_k^q} \leq 1 \right\}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max_{1 \leq k \leq N} \frac{|x_k|}{a_k} \leq 1, & q = \infty. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Для всех $0 \leq n \leq N$

$$d_n(B_1^N(a), l_2^N) = \max_{n \leq m \leq N} \sqrt{\frac{m-n}{\sum_{k=1}^m a_k^{-2}}}.$$

Для доказательства этой теоремы потребуются некоторые предварительные утверждения.

ЛЕММА 3.3. Пусть $0 \leq A_k \leq 1$, $k = 1, \dots, N$, и $\sum_{k=1}^N A_k = n$. Тогда существует система ортонормированных векторов $f_j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, n$, для которых

$$\sum_{j=1}^n |(f_j)_k|^2 = A_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по N . Для $N = n$ достаточно взять стандартный базис

$$(f_j)_k = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что $N > n$ и утверждение имеет место для $N - 1$. Без ограничения общности можно считать, что $A_N = \min_{1 \leq k \leq N} A_k > 0$. Так как

$$\sum_{k=1}^{N-1} (1 - A_k) = N - 1 + A_N - n \geq A_N,$$

то, положив

$$B_k = A_k + \lambda(1 - A_k), \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad \lambda = \frac{A_N}{\sum_{k=1}^{N-1} (1 - A_k)},$$

будем иметь

$$A_k \leq B_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{N-1} B_k = \sum_{k=1}^N A_k = n.$$

Положим $B_N = 0$. По предположению индукции существует ортонормированная система векторов $g_j \in \mathbb{R}^N$, $(g_j)_N = 0$, $j = 1, \dots, n$, такая, что

$$\sum_{j=1}^n |(g_j)_k|^2 = B_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим преобразование \mathbb{R}^N , которое вектору $x \in \mathbb{R}^N$ ставит в соответствие вектор $U_s(t)x \in \mathbb{R}^N$, определенный равенством

$$(U_s(t)x)_k = \begin{cases} x_k, & k \neq s, N, \\ x_s \cos t + x_N \sin t, & k = s, \\ -x_s \sin t + x_N \cos t, & k = N. \end{cases}$$

Если x_j , $j = 1, \dots, n$, — ортонормированная система векторов, то $U_s(t)x_j$, $j = 1, \dots, n$, — также ортонормированная система при всех $t \in \mathbb{T}$. Положим

$$V_{ks}(t, \{x_j\}) = \sum_{j=1}^n |(U_s(t)x_j)_k|^2.$$

При всех $t \in \mathbb{T}$

$$V_{ss}(t, \{x_j\}) + V_{Ns}(t, \{x_j\}) = V_{ss}(0, \{x_j\}) + V_{Ns}(0, \{x_j\}).$$

Отсюда

$$(3.4) \quad \sum_{k=1}^N V_{ks}(t, \{x_j\}) = \sum_{k=1}^N V_{ks}(0, \{x_j\}).$$

Начнем с $s = 1$. Имеем $V_{11}(0, \{g_j\}) = B_1$, $V_{11}(\pi/2, \{g_j\}) = B_N = 0$. Так как $0 \leq A_1 \leq B_1$, то найдется $t_1 \in [0, \pi/2]$, для которого $V_{11}(t_1, \{g_j\}) = A_1$. Положим

$$g_j^{(1)} = U_1(t_1)g_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n |(g_j^{(1)})_k|^2 = \begin{cases} B_k, & k \neq 1, N, \\ A_1, & k = 1, \\ B_N^{(1)}, & k = N. \end{cases}$$

Из равенства (3.4) при $t = t_1$, $s = 1$ и $\{x_j\} = \{g_j\}$ получаем

$$A_1 + B_N^{(1)} = B_1.$$

Тем самым

$$B_N^{(1)} = B_1 - A_1 = \lambda(1 - A_1) \leq A_N.$$

При $s = 2$ $V_{22}(0, \{g_j^{(1)}\}) = B_2$, $V_{22}(\pi/2, \{g_j^{(1)}\}) = B_N^{(1)} \leq A_N$. Так как $A_N \leq A_2 \leq B_2$, то найдется $t_2 \in [0, \pi/2]$, для которого $V_{22}(t_2, \{g_j^{(1)}\}) = A_2$. Положим

$$g_j^{(2)} = U_2(t_2)g_j^{(1)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n |(g_j^{(2)})_k|^2 = \begin{cases} A_k, & k = 1, 2, \\ B_k, & k \neq 1, 2, N, \\ B_N^{(2)}, & k = N. \end{cases}$$

Из равенства (3.4) при $t = t_2$, $s = 2$ и $\{x_j\} = \{g_j^{(1)}\}$ получаем

$$A_1 + A_2 + B_N^{(2)} = B_1 + B_2.$$

Тем самым

$$B_N^{(2)} = B_1 - A_1 + B_2 - A_2 = \lambda((1 - A_1) + (1 - A_2)) \leq A_N.$$

Продолжая этот процесс на шаге $s = N - 1$, мы приходим к ортонормированной системе $\{g_j^{(N-1)}\}$, для которой

$$\sum_{j=1}^n |(g_j^{(N-1)})_k|^2 = \begin{cases} A_k, & k = 1, \dots, N - 1, \\ B_N^{(N-1)}, & k = N. \end{cases}$$

При этом из равенства (3.4) будет следовать, что

$$A_1 + \dots + A_{N-1} + B_N^{(N-1)} = B_1 + \dots + B_{N-1} = A_1 + \dots + A_{N-1} + A_N.$$

Тем самым $B_N^{(N-1)} = A_N$, и требуемая ортонормированная система построена. \square

ЛЕММА 3.4. Пусть r — наименьшее целое число такое, что $n+1 \leq r \leq N$ и

$$(3.5) \quad \frac{r-n}{\sum_{k=1}^r a_k^{-2}} \geq a_{r+1}^2 \quad (a_{N+1} = 0).$$

Тогда

$$\frac{r-n}{\sum_{k=1}^r a_k^{-2}} = \max_{n \leq m \leq N} \frac{m-n}{\sum_{k=1}^m a_k^{-2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.5) следует, что

$$(r-n)a_{r+1}^{-2} \geq \sum_{k=1}^r a_k^{-2}.$$

Пусть $m > r$. Так как

$$\sum_{k=r+1}^m a_k^{-2} \geq (m-r)a_{r+1}^{-2},$$

то

$$(r-n) \sum_{k=r+1}^m a_k^{-2} \geq (r-n)(m-r)a_{r+1}^{-2} \geq (m-r) \sum_{k=1}^r a_k^{-2}.$$

Отсюда

$$(r-n) \left(\sum_{k=1}^m a_k^{-2} - \sum_{k=1}^r a_k^{-2} \right) \geq (m-r) \sum_{k=1}^r a_k^{-2}.$$

Тем самым

$$(r-n) \sum_{k=1}^m a_k^{-2} \geq (m-n) \sum_{k=1}^r a_k^{-2}.$$

Следовательно, при всех $r < m \leq N$

$$\frac{r-n}{\sum_{k=1}^r a_k^{-2}} \geq \frac{m-n}{\sum_{k=1}^m a_k^{-2}}.$$

Пусть теперь $n < m < r$. Тогда из условия леммы вытекает, что

$$\frac{m-n}{\sum_{k=1}^m a_k^{-2}} < a_{m+1}^2.$$

Тем самым

$$(m-n)a_{m+1}^{-2} < \sum_{k=1}^m a_k^{-2}.$$

Отсюда

$$(m-n) \sum_{k=1}^m a_k^{-2} + (m-n)a_{m+1}^{-2} < (m-n) \sum_{k=1}^m a_k^{-2} + \sum_{k=1}^m a_k^{-2}.$$

Следовательно,

$$(m-n) \sum_{k=1}^{m+1} a_k^{-2} < (m+1-n) \sum_{k=1}^m a_k^{-2}.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\frac{m-n}{\sum_{k=1}^m a_k^{-2}} < \frac{m+1-n}{\sum_{k=1}^{m+1} a_k^{-2}}.$$

Записывая аналогичные неравенства для $m+1, \dots, r-1$, получаем

$$\frac{m-n}{\sum_{k=1}^m a_k^{-2}} < \frac{m+1-n}{\sum_{k=1}^{m+1} a_k^{-2}} < \dots < \frac{r-n}{\sum_{k=1}^r a_k^{-2}}.$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Пусть L_n — n -мерное подпространство \mathbb{R}^N и f_1, \dots, f_n — ортонормированный базис в L_n . Положим

$$\rho_k(L_n) = \min_{y \in L_n} \|a_k e_k - y\|_{l_2^N}, \quad k = 1, \dots, N,$$

где e_1, \dots, e_N — стандартный базис в \mathbb{R}^N . В силу того, что

$$B_1^N(a) = \text{co}\{\pm a_1 e_1, \dots, \pm a_N e_N\},$$

имеем

$$(3.6) \quad d_n(B_1^N(a), l_2^N) = \inf_{L_n} \max_{k=1, \dots, N} \min_{y \in L_n} \|a_k e_k - y\|_{l_2^N} = \inf_{L_n} \max_{k=1, \dots, N} \rho_k(L_n).$$

Так как f_1, \dots, f_n — ортонормированный базис, то

$$(3.7) \quad \rho_k(L_n) = \min_{c_1, \dots, c_n} \left\| a_k e_k - \sum_{j=1}^n c_j f_j \right\|_{l_2^N} = a_k \left(1 - \sum_{j=1}^n |(f_j)_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть r — наименьшее целое число такое, что $n+1 \leq r \leq N$ и выполняется неравенство (3.5). Положим

$$A_k = \begin{cases} 1 - \frac{(r-n)a_k^{-2}}{\sum_{j=1}^r a_j^{-2}}, & k = 1, \dots, r, \\ 0, & k = r+1, \dots, N. \end{cases}$$

Из леммы 3.4 следует, что $0 \leq A_k \leq 1$, $k = 1, \dots, N$. Учитывая, что $A_1 + \dots + A_N = n$, из леммы 3.3 получаем существование такой ортонормированной системы $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^N$, для которой

$$\sum_{j=1}^n |(f_j)_k|^2 = A_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Тогда из (3.6) и (3.7) вытекает, что

$$d_n(B_1^N(a), l_2^N) \leq \max_{k=1, \dots, N} a_k (1 - A_k)^{1/2} = \sqrt{\frac{r-n}{\sum_{j=1}^r a_j^{-2}}}.$$

Предположим, что

$$d_n(B_1^N(a), l_2^N) < \sqrt{\frac{r-n}{\sum_{j=1}^r a_j^{-2}}}.$$

Тогда существует подпространство L_n , для которого

$$(3.8) \quad \rho_k(L_n) < \sqrt{\frac{r-n}{\sum_{j=1}^r a_j^{-2}}}$$

для всех $k = 1, \dots, N$. Из (3.7) следует, что

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k^2(L_n)}{a_k^2} = N - n.$$

С другой стороны, из (3.8) имеем

$$\sum_{k=1}^N \frac{\rho_k^2(L_n)}{a_k^2} < r - n.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$d_n(B_1^N(a), l_2^N) = \sqrt{\frac{r-n}{\sum_{j=1}^r a_j^{-2}}}.$$

Остается применить лемму 3.4. \square

Обозначим через B_1^N октаэдр $B_1^N(a)$ при $a_1 = \dots = a_N = 1$. Тогда из теоремы 3.2 получаем

ТЕОРЕМА 3.5. *Для всех $0 \leq n \leq N$*

$$(3.9) \quad d_n(B_1^N, l_2^N) = \sqrt{\frac{N-n}{N}}.$$

3.4. Поперечники $B_p^N(a)$ в l_q^N

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть $1 \leq q < p \leq \infty$. Тогда для всех $0 \leq k \leq n$*

$$d_n(B_p^N(a), l_q^N) = \left(\sum_{k=n+1}^N a_k^r \right)^{1/r},$$

где

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуется два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 3.7. Пусть M_n — линейное подпространство \mathbb{R}^N размерности $n < N$. Тогда существует вектор $x \in \mathbb{R}^N$ такой, что $\|x\|_{l_\infty^N} = 1$, $x \in M_n^\perp$ и число координат этого вектора, по модулю меньших единицы, не превосходит n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$E = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_{l_\infty^N} = 1, x \in M_n^\perp\}.$$

Множество E — выпуклый компакт. Существует точка $\hat{x} \in E$, для которой

$$\|\hat{x}\|_{l_2^N} = \sup_{x \in E} \|x\|_{l_2^N}.$$

В силу строгой выпуклости евклидовой нормы точка \hat{x} является крайней в множестве E (т. е. не является внутренней точкой никакого отрезка из E). Предположим, что нашлись числа j_1, \dots, j_{n+1} из множества $\{1, \dots, N\}$ такие, что $|\hat{x}_{j_k}| < 1$, $k = 1, \dots, n+1$. Обозначим через F линейную оболочку векторов $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n+1}}$. Найдется ненулевой вектор $y \in F$ такой, что $y \in M_n^\perp$. Тогда $\hat{x} \pm \varepsilon y \in E$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Это противоречит тому, что точка \hat{x} является крайней в множестве E . \square

ЛЕММА 3.8. Пусть $1 \leq s < r \leq \infty$, $c_1, \dots, c_{k+1} > 0$ и $b_j \geq b_{k+1} > 0$, $j = 1, \dots, k$. Тогда

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{k+1} b_j^s c_j\right)^{1/s}}{\left(\sum_{j=1}^{k+1} b_j^r c_j\right)^{1/r}} \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^k b_j^s c_j\right)^{1/s}}{\left(\sum_{j=1}^k b_j^r c_j\right)^{1/r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r = \infty$ утверждение леммы очевидно. Пусть $r < \infty$. Положим

$$\alpha^r = \sum_{j=1}^k b_j^r c_j, \quad \beta^s = \sum_{j=1}^k b_j^s c_j.$$

Так как $b_j \geq b_{k+1} > 0$, $j = 1, \dots, k$, и $s < r$, имеем

$$\left(\frac{b_j}{b_{k+1}}\right)^s \leq \left(\frac{b_j}{b_{k+1}}\right)^r, \quad j = 1, \dots, k.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\beta}{b_{k+1}}\right)^s \leq \left(\frac{\alpha}{b_{k+1}}\right)^r.$$

Следовательно,

$$\left(1 + \frac{b_{k+1}^s c_{k+1}}{\beta^s}\right)^{r/s} \geq 1 + \frac{b_{k+1}^s c_{k+1}}{\beta^s} \geq 1 + \frac{b_{k+1}^r c_{k+1}}{\alpha^r}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\left(\sum_{j=1}^{k+1} b_j^s c_j\right)^{1/s}}{\left(\sum_{j=1}^{k+1} b_j^r c_j\right)^{1/r}} &= \frac{(\beta^s + b_{k+1}^s c_{k+1})^{1/s}}{(\alpha^r + b_{k+1}^r c_{k+1})^{1/r}} = \frac{\beta \left(1 + \frac{b_{k+1}^s c_{k+1}}{\beta^s}\right)^{1/s}}{\alpha \left(1 + \frac{b_{k+1}^r c_{k+1}}{\alpha^r}\right)^{1/r}} \\ &\geq \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left(\sum_{j=1}^k b_j^s c_j\right)^{1/s}}{\left(\sum_{j=1}^k b_j^r c_j\right)^{1/r}}. \end{aligned}$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.6. Всякий элемент $x = (x_1, \dots, x_N)$ принадлежит $B_p^N(a)$ в том и только в том случае, если $x = Ay$, где $y = (y_1, \dots, y_N)$ удовлетворяет условию $\|y\|_{l_p^N} \leq 1$, а $Ay = (a_1 y_1, \dots, a_N y_N)$. Рассмотрим в качестве n -мерного подпространства L_n линейную оболочку векторов e_1, \dots, e_n из стандартного базиса. Тогда

$$\begin{aligned} d_n(B_p^N(a), l_q^N) &\leq \sup_{\|y\|_{l_p^N} \leq 1} \inf_{\xi \in L_n} \|Ay - \xi\|_{l_q^N} \\ &\leq \sup_{\|y\|_{l_p^N} \leq 1} \|Ay - (a_1 y_1, \dots, a_n y_n, 0, \dots, 0)\|_{l_q^N} \\ &= \sup_{\|y\|_{l_p^N} \leq 1} \left(\sum_{k=n+1}^N |a_k y_k|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

По неравенству Гельдера

$$\sum_{k=n+1}^N |a_k y_k|^q \leq \left(\sum_{k=n+1}^N a_k^{\frac{q}{1-q/p}} \right)^{1-q/p} \left(\sum_{k=n+1}^N |y_k|^p \right)^{q/p}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{k=n+1}^N |a_k y_k|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=n+1}^N a_k^r \right)^{1/r} \|y\|_{l_p^N}.$$

Следовательно,

$$d_n(B_p^N(a), l_q^N) \leq \left(\sum_{k=n+1}^N a_k^r \right)^{1/r}.$$

Займемся теперь оценкой снизу. Из следствия 5.21 получаем

$$\begin{aligned} d_n(B_p^N(a), l_q^N) &= \inf_{L_n} \sup_{\|y\|_{l_p^N} \leq 1} \inf_{\xi \in L_n} \|Ay - \xi\|_{l_q^N} \\ &= \inf_{L_n} \sup_{\|y\|_{l_p^N} \leq 1} \sup_{\|x^*\|_{l_{q'}} \leq 1, x^* \in L_n^\perp} \langle x^*, Ay \rangle, \end{aligned}$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Далее,

$$\sup_{\|y\|_{l_p^N} \leq 1} \sup_{\|x^*\|_{l_{q'}} \leq 1, x^* \in L_n^\perp} \langle x^*, Ay \rangle = \sup_{\|x^*\|_{l_{q'}} \leq 1, x^* \in L^\perp} \|Ax^*\|_{l_{p'}},$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Таким образом,

$$d_n(B_p^N(a), l_q^N) = \inf_{L_n} \sup_{\substack{x^* \in L_n^\perp \\ x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*) \neq 0}} \frac{\left(\sum_{k=1}^N |a_k x_k^*|^{p'} \right)^{1/p'}}{\left(\sum_{k=1}^N |x_k^*|^{q'} \right)^{1/q'}}.$$

Пусть f_1, \dots, f_n — базис подпространства L_n . Рассмотрим линейное подпространство M_n с базисом g_1, \dots, g_n таким, что

$$(g_j)_k = (f_j)_k a_k^{\frac{p'}{q' - p'}}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда $x^* \in L_n^\perp$ в том и только в том случае, если $z^* = (z_1^*, \dots, z_N^*) \in M_n^\perp$, где

$$z_k^* = x_k^* a_k^{-\frac{p'}{q' - p'}}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Поэтому

$$\sup_{\substack{x^* \in L_n^\perp \\ x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*) \neq 0}} \frac{\left(\sum_{k=1}^N |a_k x_k^*|^{p'} \right)^{1/p'}}{\left(\sum_{k=1}^N |x_k^*|^{q'} \right)^{1/q'}} = \sup_{\substack{z^* \in M_n^\perp \\ z^* = (z_1^*, \dots, z_N^*) \neq 0}} \frac{\left(\sum_{k=1}^N |z_k^*|^{p'} a_k^r \right)^{1/p'}}{\left(\sum_{k=1}^N |z_k^*|^{q'} a_k^r \right)^{1/q'}}.$$

Следовательно,

$$d_n(B_p^N(a), l_q^N) = \inf_{M_n} \sup_{\substack{z^* \in M_n^\perp \\ z^* = (z_1^*, \dots, z_N^*) \neq 0}} \frac{\left(\sum_{k=1}^N |z_k^*|^{p'} a_k^r \right)^{1/p'}}{\left(\sum_{k=1}^N |z_k^*|^{q'} a_k^r \right)^{1/q'}}.$$

В силу леммы 3.7 для каждого M_n найдется вектор $z^* = (z_1^*, \dots, z_N^*) \in \mathbb{R}^N$ такой, что $\|z^*\|_{l_\infty^N} = 1$, $z^* \in M_n^\perp$ и число координат этого вектора, по модулю меньших единицы, не превосходит n . Будем считать, что $|z_{j_1}^*| = \dots = |z_{j_{N-n}}^*| = 1$. Тогда из леммы 3.8 получаем

$$d_n(B_p^N(a), l_q^N) \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{N-n} a_{j_k}^r \right)^{1/p'}}{\left(\sum_{k=1}^{N-n} a_{j_k}^r \right)^{1/q'}} = \left(\sum_{k=1}^{N-n} a_{j_k}^r \right)^{1/r}.$$

Так как $a_1 \geq \dots \geq a_N > 0$, то

$$d_n(B_p^N(a), l_q^N) \geq \left(\sum_{k=n+1}^N a_k^r \right)^{1/r}.$$

□

3.5. Поперечники соболевских классов. Начальный пример: липшицевы функции

Введем обозначение $W_\infty^r([\mathcal{T}, \Gamma])$, где $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathbb{T}$ или $[-1, 1]$, $\Gamma = \tilde{\Gamma}$, Γ_\emptyset или Γ_0 , — совокупность $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot)$, у которых $(r - 1)$ -я производная абсолютно непрерывна, а r -я производная ограничена единицей в пространстве $L_\infty(\mathcal{T})$ с периодическими граничными

условиями $\tilde{\Gamma}$, если $\mathcal{T} = \mathbb{T}$, или отсутствием граничных условий, если \mathcal{T} равно $[-1, 1]$ и $\Gamma = \Gamma_\emptyset$. Наконец, если \mathcal{T} равно $[-1, 1]$, $\Gamma = \Gamma_0$ с краевыми условиями $x^{(k)}(-1) = 0$, $0 \leq k \leq r - 1$.

ТЕОРЕМА 3.9. *Имеют место следующие формулы:*

(i)

$$d_n(W_\infty^1([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}]), C(\mathbb{T})) = \begin{cases} +\infty, & n = 0, \\ \frac{\pi}{2k}, & n = 2k - 1 \vee 2k, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

(ii)

$$d_n(W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_\emptyset), C([-1, 1])) = \begin{cases} +\infty, & n = 0, \\ \frac{1}{n}, & n \geq 1. \end{cases}$$

(iii)

$$d_n(W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_0), C([-1, 1])) = \frac{2}{2n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Соотношение $d_0(W_\infty^1([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}]), C(\mathbb{T})) = \infty$ вытекает из того, что класс $W_\infty^1([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$ содержит подпространство констант. Для функций из класса $W_\infty^1([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$ справедливо представление

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} B_1(t - \tau) \dot{x}(\tau) d\tau,$$

где

$$(3.10) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(\tau) d\tau,$$

а

$$B_1(t) = \begin{cases} \frac{-\pi - t}{2}, & t \in [-\pi, 0], \\ \frac{\pi - t}{2}, & t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Проинтерполируем функцию $B_1(\cdot)$ в нулях $\sin nt$ полиномом

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin kt.$$

Из теоремы Ролля легко выводится, что

$$\text{sign}(B_1(t) - p_n(t)) = \text{sign} \sin nt.$$

Пусть $x(\cdot) \in W_\infty^1([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$. Положим

$$P_n(t) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} p_n(\tau) \dot{x}(t - \tau) d\tau,$$

где a_0 определено равенством (3.10). Тогда

$$x(t) - P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (B_1(\tau) - p_n(\tau)) \dot{x}(t - \tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |B_1(\tau) - p_n(\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} (B_1(\tau) - p_n(\tau)) \text{sign} \sin n\tau d\tau \right|. \end{aligned}$$

В силу того, что $p_n(\tau) \perp \text{sign} \sin n\tau$,

$$B_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}, \quad \text{sign} \sin nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1},$$

имеем

$$\|x(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \frac{4}{\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{2n-1}(W_{\infty}^1([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}]), C(\mathbb{T})) \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$\tau_j^{\alpha} = j \frac{\pi}{n} + \alpha, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Для произвольного подпространства $F_{2n} \in C(\mathbb{T})$ размерности $2n$ положим

$$L_F(\alpha) = \{(x(\tau_1^{\alpha}), \dots, x(\tau_{2n}^{\alpha}))^T : x(\cdot) \in F_{2n}\}.$$

Ясно, что $L_F(\alpha) \subset \mathbb{R}^{2n}$ — линейное подпространство размерности не более чем $2n$. Докажем, что существует $\alpha_0 \in (0, \pi/n)$, для которого $\dim L_F(\alpha) \leq 2n - 1$.

Если $\dim L_F(0) \leq 2n - 1$, то все доказано. Предположим, что $\dim L_F(0) = 2n$. Тогда $L_F(0) = \mathbb{R}^{2n}$, и каждому вектору $e_j, j = 1, \dots, 2n$, из стандартного базиса \mathbb{R}^{2n} соответствует некоторая функция $g_j(\cdot) \in F_{2n}$, для которой

$$(g_j(\tau_1^0), \dots, g_j(\tau_{2n}^0))^T = e_j, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Из линейной независимости векторов $\{e_j\}$ вытекает линейная независимость функций $\{g_j(\cdot)\}$. Таким образом, функции $\{g_j(\cdot)\}$ образуют базис в F_{2n} . Следовательно, всякая функция $x(\cdot) \in F_{2n}$ представляется в виде

$$x(\cdot) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j g_j(\cdot).$$

Поэтому $L_F(\alpha)$ есть линейная оболочка векторов

$$(g_j(\tau_1^{\alpha}), \dots, g_j(\tau_{2n}^{\alpha}))^T, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Остается показать, что при некотором α эти векторы окажутся линейно зависимыми.

Рассмотрим определитель

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} g_1(\tau_1^{\alpha}) & g_1(\tau_2^{\alpha}) & \dots & g_1(\tau_{2n}^{\alpha}) \\ g_2(\tau_1^{\alpha}) & g_2(\tau_2^{\alpha}) & \dots & g_2(\tau_{2n}^{\alpha}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{2n}(\tau_1^{\alpha}) & g_{2n}(\tau_2^{\alpha}) & \dots & g_{2n}(\tau_{2n}^{\alpha}) \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

В силу периодичности функций $g_j(\cdot)$ и того, что $\tau_j^{\pi/n} = \tau_{j+1}^0, j = 1, \dots, 2n$, получаем

$$D(\pi/n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Функция $D(\cdot)$ непрерывна и принимает в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/n$ значения разных знаков. Поэтому существует точка $\alpha_0 \in (0, \pi/n)$, в которой $D(\alpha_0) = 0$.

Пусть $F_{2n} \in C(\mathbb{T})$ — произвольное подпространство размерности $2n$. Для оценки снизу во множество $W_\infty^1(\mathbb{T}, \tilde{\Gamma})$ вписывается изометричный образ куба $\frac{\pi}{2n} B_\infty^{2n}$ размерностью $2n$ со стороной $\frac{\pi}{n}$, состоящий из следов 2π -периодических непрерывных кусочно-линейных функций, по модулю не превосходящих $\frac{\pi}{2n}$, с изломами в точках $\tau_j^{\alpha_0}$, $j = 1, \dots, 2n$. Метрика, порождаемая на этом кубе нормой $C([-1, 1])$, совпадает с метрикой l_∞^{2n} .

Остается показать, что для подпространства F_{2n} след $\text{Tr}(F_{2n})$ (имеющий размерность, как было доказано, не превосходящую $2n - 1$) не может приблизить куб с точностью, меньшей чем $\frac{\pi}{2n}$. Иначе говоря, надо доказать что

$$d\left(\frac{\pi}{2n} B_\infty^{2n}, \text{Tr}(F_{2n}), l_\infty^{2n}\right) \geq \frac{\pi}{2n},$$

где

$$d(A, L, X) = \sup_{\xi \in A} d(\xi, L, X).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\dim \text{Tr}(F_{2n}) = 2n - 1$. Пусть подпространство $\text{Tr}(F_{2n})$ записывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} |a_k| = 1.$$

Положим

$$x^* = (a_1, \dots, a_{2n}), \quad \xi = \frac{\pi}{2n} (\text{sign } a_1, \dots, \text{sign } a_{2n}).$$

Тогда при $\hat{x} = 0$

$$\|x^*\|_{(l_\infty^{2n})^*} = 1, \quad \langle \xi - \hat{x}, x^* \rangle = \|\xi - \hat{x}\|_{l_\infty^{2n}} = \frac{\pi}{2n}$$

и $x^* \in \text{Tr}(F_{2n})^\perp$. Следовательно, по критерию расстояния от точки до подпространства

$$d(\xi, \text{Tr}(F_{2n}), l_\infty^{2n}) = \frac{\pi}{2n}.$$

Тем самым

$$d\left(\frac{\pi}{2n} B_\infty^{2n}, \text{Tr}(F_{2n}), l_\infty^{2n}\right) \geq d(\xi, \text{Tr}(F_{2n}), l_\infty^{2n}) = \frac{\pi}{2n},$$

что и требовалось (напомним, что $d(\xi, \text{Tr}(L_n), l_\infty^{n+1})$ — это расстояние от вершины куба ξ до подпространства $\text{Tr}(L_n)$ в метрике l_∞^{n+1} , а $d\left(\frac{\pi}{2n} B_\infty^{2n}, \text{Tr}(F_{2n}), l_\infty^{2n}\right)$ — расстояние от куба $\frac{\pi}{2n} B_\infty^{2n}$ до $\text{Tr}(F_{2n})$ в метрике l_∞^{2n}).

(ii). Соотношение $d_0(W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_\emptyset), C([-1, 1])) = \infty$ вытекает из того, что класс $W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_\emptyset)$ содержит подпространство констант. В качестве экстремального n -мерного приближающего подпространства \hat{L}_{1n} , $n \in \mathbb{N}$, можно выбрать кусочно-постоянные функции на n отрезках, делящих $[-1, 1]$ на n равных частей. Приближающие функции интерполируют приближаемую функцию в центральных точках этих отрезков.

Для оценки снизу во множество $W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_\emptyset)$ вписывается изометричный образ куба $\frac{1}{n} B_\infty^{n+1}$ размерностью $n+1$ со стороной $\frac{2}{n}$, состоящий из следов непрерывных кусочно-линейных функций, по модулю не превосходящих $\frac{1}{n}$, с изломами в точках $-1 + \frac{2i}{n}$, $i = 1, \dots, n-1$. Метрика, порождаемая на этом кубе нормой $C([-1, 1])$, совпадает с метрикой l_∞^{n+1} .

Остается показать, что для подпространства L_m пространства $C([-1, 1])$ размерности $m \leq n$ след $\text{Tr}(L_m)$ этого подпространства не может приблизить куб с точностью, меньшей чем $\frac{1}{n}$. Иначе говоря, надо доказать что

$$d\left(\frac{1}{n}B_\infty^{n+1}, \text{Tr}(L_m), l_\infty^{n+1}\right) \geq \frac{1}{n}.$$

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $m = n$. Пусть подпространство $\text{Tr}(L_n)$ записывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| = 1.$$

Положим

$$x^* = (a_1, \dots, a_{n+1}), \quad \xi = \frac{1}{n}(\text{sign } a_1, \dots, \text{sign } a_{n+1}).$$

Тогда при $\hat{x} = 0$

$$\|x^*\|_{(l_\infty^{n+1})^*} = 1, \quad \langle \xi - \hat{x}, x^* \rangle = \|\xi - \hat{x}\|_{l_\infty^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

и $x^* \in \text{Tr}(L_n)^\perp$.

Следовательно, по критерию расстояния от точки до подпространства

$$d(\xi, \text{Tr}(L_n), l_\infty^{n+1}) = \frac{1}{n}.$$

Тем самым

$$d\left(\frac{1}{n}B_\infty^{n+1}, \text{Tr}(L_m), l_\infty^{n+1}\right) \geq d(\xi, \text{Tr}(L_n), l_\infty^{n+1}) = \frac{1}{n},$$

что и требовалось.

(iii). В качестве экстремального n -мерного приближающего подпространства \hat{L}_n , $n \in \mathbb{N}$, можно выбрать пространство функций, тождественно равных нулю на отрезке $\delta_0 = \left[-1, -1 + \frac{2}{2n+1}\right]$ и кусочно-постоянных на n отрезках $\{\delta_k\}_{k=1}^n$, делящих $\left[-1 + \frac{2}{2n+1}, 1\right]$ на n равных частей. Приближающие функции интерполируют приближаемую функцию в центральных точках этих отрезков. Отсюда следует, что $d(W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_0), \hat{L}_n, C([-1, 1])) \leq \frac{2}{2n+1}$.

Для получения оценки снизу во множество $W_\infty^1([-1, 1], \Gamma_0)$ вписывается куб $\frac{2}{2n+1}B_\infty^{n+1}$ размерностью $n+1$ со стороны $\frac{2}{2n+1}$, состоящий из следов непрерывных кусочно-линейных функций, по модулю не превосходящих $\frac{2}{2n+1}$, с изломами в крайних точках отрезков $\{\delta_k\}_{k=1}^n$, а далее в точности применяется рассуждение из пункта (ii), что ведет к цели. \square

3.6. Поперечники классов $W_\infty^r(\mathcal{T}, \Gamma)$

При $n \geq r$ обозначим через $s_{nr}(\cdot)$ совершенный сплайн порядка r с $n-r$ узлами, для которого существуют точки $1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq 1$ такие, что

$$s_{nr}(\tau_j) = (-1)^j \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1, 1])}, \quad j = 1, \dots, n+1$$

(существование такого сплайна доказано в теореме 5.61). Через $s_{0nr}(\cdot)$ обозначим совершенный сплайн порядка r с n узлами, удовлетворяющий условию

$$s_{0nr}^{(\nu)}(-1) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, r-1,$$

для которого существуют точки $1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq 1$ такие, что

$$s_{0nr}(\tau_j) = (-1)^j \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}, \quad j = 1, \dots, n+1$$

(существование такого сплайна доказано в теореме 5.62).

ТЕОРЕМА 3.10. *Имеют место следующие формулы:*

(i)

$$d_n(W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}]), C(\mathbb{T})) = \begin{cases} +\infty, & n = 0, \\ \frac{K_r}{k^r}, & n = 2k - 1 \vee 2k, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

где K_r определены равенством (2.24).

(ii)

$$d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset), C([-1, 1])) = \begin{cases} +\infty, & n \leq r - 1, \\ \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}, & n \geq r. \end{cases}$$

(iii)

$$d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_0), C([-1, 1])) = \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Соотношение $d_0(W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}]), C(\mathbb{T})) = \infty$ вытекает из того, что класс $W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$ содержит подпространство констант. Для функций из класса $W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$ справедливо представление

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} B_r(t - \tau) x^{(r)}(\tau) d\tau,$$

где

$$(3.11) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(\tau) d\tau,$$

а

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Это представление получается из разложения функции $x(\cdot)$ в ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

учитывая тождества

$$\begin{aligned} a_k \cos kt + b_k \sin kt &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} x(\tau) \cos k(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi k^r} \int_{\mathbb{T}} x^{(r)}(\tau) \cos \left(k(t - \tau) - \frac{\pi r}{2} \right) d\tau \end{aligned}$$

(второе из них получается последовательным интегрированием по частям).

Если r — четное, то $B_r(\cdot)$ — четная функция. Проинтерполируем функцию $B_r(\cdot)$ в нулях $\cos nt$ полиномом

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cos kt.$$

Из теоремы Роля легко выводится, что

$$\text{sign}(B_r(t) - p_n(t)) = \text{sign} \cos nt.$$

Пусть $x(\cdot) \in W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$. Положим

$$P_n(t) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} p_n(\tau) x^{(r)}(t - \tau) d\tau,$$

где a_0 определено равенством (3.11). Тогда

$$x(t) - P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (B_r(\tau) - p_n(\tau)) x^{(r)}(t - \tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |B_r(\tau) - p_n(\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} (B_r(\tau) - p_n(\tau)) \operatorname{sign} \cos nt d\tau \right|. \end{aligned}$$

В силу того, что при $r = 2m$

$$B_{2m}(t) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^{2m}}, \quad \operatorname{sign} \cos nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1},$$

имеем

$$(3.12) \quad \|x(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \frac{4}{\pi n^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2m+1}} = \frac{K_{2m}}{n^{2m}}.$$

Если r — нечетное, то $B_r(\cdot)$ — нечетная функция. Проинтерполируем функцию $B_r(\cdot)$ в нулях $\sin nt$ полиномом

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin kt.$$

Из теоремы Ролля легко выводится, что

$$\operatorname{sign}(B_r(t) - p_n(t)) = \operatorname{sign} \sin nt.$$

Пусть $x(\cdot) \in W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$. Положим

$$P_n(t) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} p_n(\tau) x^{(r)}(t - \tau) d\tau,$$

где a_0 определено равенством (3.11). Тогда

$$x(t) - P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (B_r(\tau) - p_n(\tau)) x^{(r)}(t - \tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |B_r(\tau) - p_n(\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} (B_r(\tau) - p_n(\tau)) \operatorname{sign} \sin nt d\tau \right|. \end{aligned}$$

В силу того, что при $r = 2m + 1$

$$B_{2m+1}(t) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^{2m+1}}, \quad \operatorname{sign} \sin nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1},$$

имеем

$$(3.13) \quad \|x(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \frac{4}{\pi n^{2m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m+2}} = \frac{K_{2m+1}}{n^{2m+1}}.$$

Из (3.12) и (3.13) вытекает, что

$$d_{2n-1}(W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}]), C(\mathbb{T})) \leq \frac{K_r}{n^r}.$$

Положим

$$\varphi_{n,0}(t) = \text{sign} \sin nt, \quad \varphi_{n,m}(t) = \int_{\gamma_m}^t \varphi_{n,m-1}(\tau) d\tau,$$

где

$$\gamma_m = (1 - (-1)^m) \frac{\pi}{4n}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\varphi_{n,m}(t) = \frac{4}{\pi n^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)nt - \pi m/2)}{(2k+1)^{m+1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Функции $\varphi_{n,m}(\cdot)$ называются идеальными сплайнами Эйлера.

При четных $m = 2s$ функция $\varphi_{n,m}(\cdot)$ имеет простые нули в точках $k\pi/n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ При этом

$$\varphi_{n,2s} \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = (-1)^{s+k} \|\varphi_{n,2m}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

При нечетных $m = 2s - 1$ функция $\varphi_{n,m}(\cdot)$ имеет простые нули в точках $(2k+1)\pi/(2n)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ При этом

$$\varphi_{n,2s-1} \left(\frac{k\pi}{n} \right) = (-1)^{s+k} \|\varphi_{n,2s-1}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Тем самым

$$\|\varphi_{n,m}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = \frac{K_m}{n^m}.$$

Обозначим через $L_{2n,r}^\alpha$ пространство 2π -периодических сплайнов $s(\cdot)$, имеющих вид

$$s(t) = c + \sum_{j=1}^{2n} c_j B_{r+1}(t - \tau_j^\alpha),$$

где

$$c_1 + \dots + c_{2n} = 0.$$

Функция

$$s^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j B_1(t - \tau_j^\alpha)$$

на каждом интервале $(\tau_{j-1}^\alpha, \tau_j^\alpha)$ является константой. Действительно, функция $B_1(t - \tau_k^\alpha)$ на $(\tau_{j-1}^\alpha, \tau_j^\alpha)$ имеет вид $a_k - t/2$. Поэтому

$$s^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j (a_k - t/2) = \sum_{j=1}^{2n} c_j a_k.$$

Пусть $\xi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} + \alpha$, если r — четное, и $\xi_k = \frac{k\pi}{n} + \alpha$, если r — нечетное, $k = 1, \dots, 2n$. Докажем, что для любых y_1, \dots, y_{2n} существует функция $s_0(\cdot) \in L_{2n,r}^\alpha$, для которой $s_0(\xi_k) = y_k$, $k = 1, \dots, 2n$. Для доказательства этого факта рассмотрим линейный оператор $A: L_{2n,r}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определенный равенством

$$As(\cdot) = (s(\xi_1), \dots, s(\xi_{2n})).$$

Это линейный оператор, переводящий $2n$ -мерное пространство в $2n$ -мерное пространство. Покажем, что $\text{Ker } A = 0$. Предположим, что существует функция $s(t) \in L_{2n,r}^\alpha$, $s(t) \not\equiv 0$ такая, что $s(\xi_k) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$. Подберем β так, чтобы в некоторой точке $\tau \neq \xi_k$ выполнялось условие $\varphi_{n,r+1}(\tau - \alpha) = \beta s(\tau)$. Тогда число нулей у функции $\varphi_{n,r+1}(t - \alpha) - \beta s(t)$ не меньше $2n + 1$. Следовательно, у функции $\varphi_{n,r+1}^{(r-1)}(t - \alpha) - \beta s^{(r-1)}(t)$ тоже не менее $2n + 1$ нулей.

Тогда у функции $\varphi_{n,1}(t - \alpha) - \beta s^{(r)}(\cdot)$ не менее $2n + 1$ перемен знака, что невозможно, т. к. это кусочно-линейная функция на каждом интервале $(\tau_{j-1}^\alpha, \tau_j^\alpha)$ с чередующимися коэффициентами ± 1 при переменной t .

Пусть теперь $s_0(\cdot) \in L_{2n,r}^\alpha$, $s_0(\xi_k) = y_k$ и $|y_k| \leq \frac{K_r}{n^r}$, $k = 1, \dots, 2n$. Докажем, что $s_0(\cdot) \in W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$. Предположим, что $s_0(\cdot) \notin W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$. Это означает, что существует интервал $(\tau_{j-1}^\alpha, \tau_j^\alpha)$, на котором $s_0^{(r)}(t) \equiv c > 1$. Рассмотрим функцию $s_0(t) - c\varphi_{n,r}(t - \alpha)$. Она имеет $2n$ перемен знака в точках ξ_k , $k = 1, \dots, 2n$. Значит, функция $s_0^{(r)}(t) - c\varphi_{n,r}^{(r)}(t - \alpha)$ должна иметь не менее $2n$ перемен знака, но этого нет, т. к. это кусочно-постоянная функция, равная нулю на интервале $(\tau_{j-1}^\alpha, \tau_j^\alpha)$.

Пусть $F_{2n} \in C(\mathbb{T})$ — произвольное подпространство размерности $2n$. Для оценки снизу во множество $W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$ вписывается изометричный образ куба $\frac{K_r}{n^r} B_\infty^{2n}$ размерностью $2n$ со стороной $\frac{2K_r}{n^r}$, состоящий из следов 2π -периодических функций из класса $W_\infty^r([\mathbb{T}, \tilde{\Gamma}])$, по модулю не превосходящих $\frac{K_r}{n^r}$ в точках τ_j^α , $j = 1, \dots, 2n$, где α выбрано так, чтобы $\dim L_F(\alpha) \leq 2n - 1$ ($L_F(\alpha) = \{(x(\tau_1^\alpha), \dots, x(\tau_{2n}^\alpha))^T : x(\cdot) \in F_{2n}\}$). Метрика, порождаемая на этом кубе нормой $C([-1, 1])$, совпадает с метрикой l_∞^{2n} . Далее, рассуждения повторяют те, которые применялись при доказательстве пункта (i) в теореме 3.9.

(ii). Соотношение $d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset), C([-1, 1])) = \infty$ при $n < r$ вытекает из того, что класс $W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset)$ содержит r -мерное пространство полиномов, степень которых не превосходит $r - 1$ и, значит, не может быть приближено ни с какой конечной точностью подпространствами размерностью $n \leq r - 1$.

Пусть $n \geq r$. Рассмотрим совершенный сплайн $s_{nr}(\cdot)$ (см. п. 5.27.2) с узлами $s_1 < \dots < s_{n-r}$. Пусть $t_1 < \dots < t_n$ — его нули. Проинтерполируем функцию $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset)$ в точках t_j , $j = 1, \dots, n$, полиномиальным сплайном $S(\cdot)$ степени $r - 1$ с узлами в точках s_1, \dots, s_{n-r} (см. теорему 5.63). Докажем, что

$$(3.14) \quad \|x(\cdot) - S(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Предположим, что в некоторой точке $t \in [-1, 1]$

$$|x(t) - S(t)| > |s_{nr}(t)|.$$

Тогда найдется число α , $|\alpha| > 1$ такое, что функция $z(\cdot) = x(\cdot) - S(\cdot) - \alpha s_{nr}(\cdot)$ будет иметь $n + 1$ нулей. По теореме Ролля функция $z^{(r-2)}(\cdot)$ будет иметь не менее $n - r + 3$ нуля. Значит, функция $z^{(r-1)}(\cdot)$ имеет не менее $n - r + 2$ перемен знака. На каждом из интервалов $(-\infty, s_1)$, (s_1, s_2) , \dots , $(s_{n-r}, +\infty)$ функция $z^{(r-1)}(\cdot)$ монотонна, причем если на каком-то интервале она монотонно возрастает, то на соседнем с ним она монотонно убывает. Поэтому число перемен знака у этой функции не может быть больше $n - r + 1$.

Из неравенства (3.14) вытекает оценка

$$d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset), C([-1, 1])) \leq \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное пространство M_{n+1} , состоящее из полиномиальных сплайнов порядка r с узлами совершенного сплайна $s_{nr}(\cdot)$ $s_1 < \dots < s_{n-r}$. Докажем, что если $S(\cdot) \in M_{n+1}$ и

$$\|S(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])},$$

то $S(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset)$. Предположим, что это не так. Тогда найдется интервал (s_j, s_{j+1}) , $0 \leq j \leq n - r$ ($s_0 = -1$, $s_{n-r+1} = 1$), на котором $S^{(r)}(t) \equiv c$,

$|c| > 1$. Выберем γ так, чтобы $|\gamma| = 1/|c|$ и

$$s_{nr}^{(r)}(t) \equiv \gamma S^{(r)}(t), \quad t \in (s_j, s_{j+1}).$$

Тогда у функции

$$z(\cdot) = s_{nr}(\cdot) - \gamma S(\cdot)$$

будет не менее n нулей — не менее одного нуля между точками $\tau_1 < \dots < \tau_{n+1}$, в которых s_{nr} достигает максимальных и минимальных значений (см. (5.84)). По теореме Ролля у функции $z^{(r-1)}(\cdot)$ должно быть тогда не менее $n - r + 1$ разделенных нулей. Но функция $z^{(r-1)}(\cdot)$ является кусочно-линейной с изломами в точках $s_1 < \dots < s_{n-r}$, причем на интервале (s_j, s_{j+1}) она постоянна. Поэтому число разделенных нулей у нее не превосходит $n - r$.

Тем самым доказано, что

$$\{S(\cdot) \in M_{n+1} : \|S(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}\} \subset W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset).$$

Тогда из следствия 5.57 вытекает, что

$$d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_\emptyset), C([-1, 1])) \geq \|s_{nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

(iii) Пусть $s_1 < \dots < s_n$ — узлы совершенного сплайна $s_{0nr}(\cdot)$ (см. п. 5.27.2), а $-1 < t_1 < \dots < t_n < 1$ — его нули. Проинтерполируем функцию $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_0)$ в точках $t_j, j = 1, \dots, n$, полиномиальным сплайном $S(\cdot)$ степени $r - 1$ с узлами в точках s_1, \dots, s_n , удовлетворяющим условию

$$(3.15) \quad S^{(\nu)}(-1) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 1$$

(см. теорему 5.64). Докажем, что

$$(3.16) \quad \|x(\cdot) - S(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Предположим, что в некоторой точке $t \in (-1, 1]$

$$|x(t) - S(t)| > |s_{0nr}(t)|.$$

Тогда найдется число $\alpha, |\alpha| > 1$ такое, что функция $z(\cdot) = x(\cdot) - S(\cdot) - \alpha s_{0nr}(\cdot)$ будет иметь не менее $n + 1$ нулей на полуинтервале $t \in (-1, 1]$ и еще нуль кратности r в точке $t = -1$. Следовательно, у $z'(\cdot)$ тоже не менее $n + 1$ нулей на интервале $(-1, 1)$ и еще имеется нуль при $t = -1$. Продолжая эти рассуждения, приходим к тому, что у $z^{(r-2)}(\cdot)$ не менее $n + 1$ нулей на интервале $(-1, 1)$ и еще имеется нуль при $t = -1$. Тем самым $z^{(r-1)}(\cdot)$ имеет не менее $n + 1$ перемен знака. На каждом из интервалов $(-1, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_n, 1)$ функция $z^{(r-1)}(\cdot)$ монотонна, причем если на каком-то интервале она монотонно возрастает, то на соседнем с ним она монотонно убывает. Кроме того, $z^{(r-1)}(-1) = 0$. Поэтому на интервале $(-1, s_1)$ перемены знака нет. Число перемен знака у этой функции не может быть больше n .

Из неравенства (3.16) вытекает оценка

$$d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_0), C([-1, 1])) \leq \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное пространство M_{n+1} , состоящее из полиномиальных сплайнов порядка r с узлами совершенного сплайна $s_{0nr}(\cdot)$ $s_1 < \dots < s_n$ и удовлетворяющих условию (3.15). Докажем, что если $S(\cdot) \in M_{n+1}$ и

$$\|S(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])},$$

то $S(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_0)$. Предположим, что это не так. Тогда найдется интервал $(s_j, s_{j+1}), 0 \leq j \leq n$ ($s_0 = -1, s_{n+1} = 1$), на котором $S^{(r)}(t) \equiv c, |c| > 1$. Выберем γ так, чтобы $|\gamma| = 1/|c|$ и

$$s_{0nr}^{(r)}(t) \equiv \gamma S^{(r)}(t), \quad t \in (s_j, s_{j+1}).$$

Тогда у функции

$$z(\cdot) = s_{nr}(\cdot) - \gamma S(\cdot)$$

будет не менее n нулей на интервале $(-1, 1)$ — не менее одного нуля между точками $\tau_1 < \dots < \tau_{n+1}$, в которых s_{0nr} достигает максимальных и минимальных значений (см. (5.88)) и, кроме того, нуль в точке $t = -1$ кратности r . По той же схеме рассуждений, которая применялась выше, получаем, что у функции $z^{(r-1)}(\cdot)$ должно быть тогда не менее n разделенных нулей на интервале $(-1, 1)$ и еще один нуль в точке $t = -1$. Но функция $z^{(r-1)}(\cdot)$ является кусочно-линейной с изломами в точках $s_1 < \dots < s_n$, причем на интервале (s_j, s_{j+1}) она постоянна. Поэтому число разделенных нулей у нее не превосходит n .

Тем самым доказано, что

$$\{S(\cdot) \in M_{n+1} : \|S(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}\} \subset W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_0).$$

Тогда из следствия 5.57 вытекает, что

$$d_n(W_\infty^r([-1, 1], \Gamma_0), C([-1, 1])) \geq \|s_{0nr}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

□

3.7. Поперечники классов H_p^r

Пространством Харди \mathcal{H}_p называется множество функций, аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} = \begin{cases} \sup_{0 < \sigma < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\sigma e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$H_p := \{f(\cdot) \in \mathcal{H}_p : \|f \cdot\|_{\mathcal{H}_p} \leq 1\}.$$

Пространством Харди–Соболева \mathcal{H}_p^r будем называть множество функций, аналитических в единичном круге D , удовлетворяющих условию

$$\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} < \infty.$$

Через H_p^r обозначим класс функций из \mathcal{H}_p^r , для которых

$$\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} \leq 1.$$

Пусть

$$T_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Обозначим через $L_q(T_\rho)$ множество функций $f(\cdot)$, определенных на T_ρ , для которых

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(T_\rho)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q} < \infty, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{vraisup}_{t \in [0, 2\pi]} |f(\rho e^{it})| < \infty, & q = \infty. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.11. *При всех $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \rho \leq 1$ имеет место равенство*

$$d_n(H_q^r, L_q(T_\rho)) = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)}, & n \geq r, \\ \infty, & n < r. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $d_n(H_q^r, L_q(T_\rho)) = \infty$ при $n < r$ вытекает из того, что класс H_q^r содержит r -мерное пространство полиномов, степень которых не превосходит $r - 1$ и, значит, не может быть приближено ни с какой конечной точностью подпространствами размерностью $n \leq r - 1$.

Пусть $n \geq r$. Положим

$$K_\rho(t) = \rho^n e^{int} \left(c_{n-r} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k c_{n-r+k} \cos kt \right),$$

где $c_k = k!/(k+r)!$. Пусть

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(e^{i\theta}) e^{ir\theta} K_\rho(t - \theta) d\theta.$$

Из того, что

$$f^{(r)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} a_j c_{j-r}^{-1} z^{j-r},$$

получаем

$$\begin{aligned} (3.17) \quad I &= \frac{\rho^n e^{int}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=r}^{\infty} a_j c_{j-r}^{-1} e^{i(j-n)\theta} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^{|k|} c_{n-r+|k|} e^{ik(t-\theta)} \right) d\theta \\ &= \rho^n e^{int} \sum_{j=r}^{\infty} a_j c_{j-r}^{-1} \rho^{|j-n|} c_{n-r+|j-n|} e^{i(j-n)t} = \\ &\quad \sum_{j=r}^{n-1} a_j c_{j-r}^{-1} \rho^{2n-j} c_{2n-r-j} e^{ijt} + \sum_{j=n}^{\infty} a_j \rho^j e^{ijt} = f(\rho e^{it}) - p_n(f)(\rho e^{it}), \end{aligned}$$

где

$$p_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + \sum_{j=r}^{n-1} a_j z^j (1 - c_{j-r}^{-1} c_{2n-r-j} |z|^{2n-2j}).$$

Применяя неравенство Юнга для сверток (см. теорему 5.65)

$$(3.18) \quad \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})} \leq \|f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})} \|g(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})},$$

получаем

$$\begin{aligned} (3.19) \quad d_n(H_q^r, L_q(T_\rho)) &\leq \sup_{f(\cdot) \in H_q^r} \|f(\cdot) - p_n(f)(\cdot)\|_{L_q(T_\rho)} \\ &= \sup_{f(\cdot) \in H_q^r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(e^{i\theta}) e^{ir\theta} K_\rho(t - \theta) d\theta \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \sup_{f(\cdot) \in H_\infty^r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(e^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_\rho(\theta)| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_\rho(\theta)| d\theta. \end{aligned}$$

Докажем, что

$$(3.20) \quad c_{n-r} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k c_{n-r+k} \cos kt \geq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$K(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Предположим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Положим

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos kt, \quad \tilde{D}_k(t) = D_0(t) + \dots + D_k(t),$$

$$\Delta_k = a_k - a_{k+1}, \quad \Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}.$$

Тогда

$$(3.21) \quad a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos kt = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k (D_k(t) - D_{k-1}(t))$$

$$= 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k D_k(t) + a_n D_n(t) \right) = 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k (\tilde{D}_k(t) - \tilde{D}_{k-1}(t)) + a_n D_n(t) \right)$$

$$= 2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} \Delta_k^2 \tilde{D}_k(t) + \Delta_{n-1} \tilde{D}_{n-1}(t) + a_n D_n(t) \right).$$

Хорошо известно, что

$$D_k(t) = \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{D}_k(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3t}{2} + \dots + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) = \frac{1 - \cos(k+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Для любого $t \in (0, 2\pi)$ при $n \rightarrow \infty$ последние два слагаемых в правой части равенства (3.21) стремятся к нулю. Поэтому

$$K(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^2 \tilde{D}_k(t), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Таким образом, если $\Delta_k^2 \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, то $K(t) \geq 0$ при всех $t \in [0, 2\pi]$.

Рассмотрим теперь функцию

$$L(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k a_k \cos kt, \quad \rho \in [0, 1].$$

Предположим, что

$$(3.22) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty, \quad a_k \geq 0, \quad \Delta_k \geq 0, \quad \Delta_k^2 \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\rho^k a_k - 2\rho^{k+1} a_{k+1} + \rho^{k+2} a_{k+2} = \rho^k \Delta_k^2 + 2\rho^k (1 - \rho) \Delta_{k+1} + \rho^k (1 - \rho)^2 a_{k+2} \geq 0.$$

Следовательно, $L(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, 2\pi]$. Для доказательства неравенства (3.20) осталось проверить условия (3.22) для

$$a_k = c_{n-r+k} = \frac{(n+k-r)!}{(n+k)!}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \frac{(n+k-r)!}{(n+k)!} - \frac{(n+k-r+1)!}{(n+k+1)!} \\ &= \frac{(n+k-r)!}{(n+k)!} \left(1 - \frac{n+k-r+1}{n+k+1}\right) = \frac{r(n+k-r)!}{(n+k+1)!} \geq 0, \\ \Delta_k^2 &= \frac{r(n+k-r)!}{(n+k+1)!} - \frac{r(n+k-r+1)!}{(n+k+2)!} \\ &= \frac{r(n+k-r)!}{(n+k+1)!} \left(1 - \frac{n+k-r+1}{n+k+2}\right) = \frac{r(r+1)(n+k-r)!}{(n+k+2)!} \geq 0.\end{aligned}$$

Из неравенства (3.20) вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_\rho(\theta)| d\theta &= \frac{\rho^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(c_{n-r} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k c_{n-r+k} \cos k(t-\theta) \right) d\theta \\ &= c_{n-r} \rho^n = \frac{\rho^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)}.\end{aligned}$$

Тем самым, используя оценку (3.19), получаем

$$d_n(H_q^r, L_q(T_\rho)) \leq \frac{\rho^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)}.$$

Займемся теперь оценкой снизу. Пусть \mathcal{P}_n — множество полиномов степени не выше n . Положим

$$M_n(t) = e^{int} \left(n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos kt \right).$$

Легко проверить, что для каждого $p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ справедливо равенство

$$p_n'(e^{it}) = \frac{e^{-it}}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) M_n(t-\theta) d\theta.$$

Применяя неравенство Юнга (3.18), получаем

$$\|p_n'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_n(e^{i\theta})|^q \right)^{1/q} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M_n(t)| d\theta.$$

В силу того, что

$$|M_n(t)| = \left| n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos kt \right|,$$

а

$$n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos kt = 2\tilde{D}_{n-1}(t) \geq 0,$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M_n(t)| d\theta = n.$$

Следовательно,

$$\|p_n'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q} \leq n \|p_n(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q}.$$

Применяя это неравенство к последующим производным, приходим к неравенству

$$(3.23) \quad \|p_n^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q} \leq n(n-1)\dots(n-r+1) \|p_n(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = z^n p_n(\rho/z)$. Эта функция аналитична в \mathbb{C} . В силу монотонного возрастания функции

$$M_q(\sigma) = \int_0^{2\pi} |f(\sigma e^{it})|^q dt$$

имеем

$$(3.24) \quad \frac{\rho^n}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |p_n(e^{-it})|^q dt \right)^{1/q} \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |p_n(\rho e^{-it})|^q dt \right)^{1/q}.$$

Отсюда

$$\|p_n(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q} \leq \frac{1}{\rho^n} \|p_n(\cdot)\|_{L_q(T_\rho)}.$$

Подставляя это неравенство в (3.23), получаем

$$(3.25) \quad \|p_n^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q} \leq \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\rho^n} \|p_n(\cdot)\|_{L_q(T_\rho)}.$$

Рассмотрим множество

$$B_{n+1} = \{p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n : \|p_n(\cdot)\|_{L_q(T_\rho)} \leq 1\}.$$

Из неравенства (3.25) следует, что

$$\frac{\rho^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)} B_{n+1} \subset H_q^r.$$

Из следствия 5.57 получаем

$$d_n(H_q^r, L_q(T_\rho)) \leq \frac{\rho^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)}.$$

□

Рассмотрим теперь поперечники тех же классов в норме пространств $L_q(D_\rho)$, где

$$D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}, \quad 0 < \rho \leq 1,$$

а

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{D_\rho} |f(z)|^q dx dy \right)^{1/q} < \infty, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{vraisup}_{z \in D_\rho} |f(z)| < \infty, & q = \infty. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.12. При всех $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \rho \leq 1$ имеет место равенство

$$d_n(H_q^r, L_q(D_\rho)) = \begin{cases} \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{n(n-1)\dots(n-r+1)(nq+2)^{1/q}}, & n \geq r, \\ \infty, & n < r. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $d_n(H_q^r, L_q(D_\rho)) = \infty$ при $n < r$ вытекает из того, что класс H_q^r содержит r -мерное пространство полиномов, степень которых не превосходит $r-1$ и, значит, не может быть приближено ни с какой конечной точностью подпространствами размерностью $n \leq r-1$.

Пусть $n \geq r$. С учетом равенства (3.17) имеем

$$\begin{aligned} d_n(H_q^r, L_q(D_\rho)) &\leq \sup_{f(\cdot) \in H_q^r} \|f(\cdot) - p_n(f)(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)} \\ &= \sup_{f(\cdot) \in H_q^r} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(e^{i\theta}) e^{ir\theta} K_\sigma(t-\theta) d\theta \right|^q \sigma d\sigma dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Из неравенства Юнга получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(e^{i\theta}) e^{ir\theta} K_\sigma(t-\theta) d\theta \right|^q dt \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(e^{i\theta})|^q d\theta \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_\sigma(\theta)| d\theta \right)^q \leq (c_{n-r}\sigma^n)^q. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d_n(H_q^r, L_q(D_\rho)) & \leq c_{n-r} \left(2 \int_0^\rho \sigma^{nq+1} d\sigma \right)^{1/q} \\ & = \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{n(n-1) \dots (n-r+1)(nq+2)^{1/q}}. \end{aligned}$$

Пусть $p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n$. Из (3.24) следует, что для любого $0 < \sigma \leq 1$

$$\int_0^{2\pi} \sigma^{qn} |p_n(e^{-it})|^q dt \leq \int_0^{2\pi} |p_n(\sigma e^{-it})|^q dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^\rho \sigma^{qn+1} d\sigma \int_0^{2\pi} |p_n(e^{-it})|^q dt \leq \int_0^\rho \int_0^{2\pi} |p_n(\sigma e^{-it})|^q \sigma dt d\sigma.$$

Тем самым

$$\frac{2\rho^{qn+2}}{qn+2} \|p_n(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q}^q \leq \|p_n(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)}^q.$$

Учитывая неравенство (3.23), получаем

$$(3.26) \quad \|p_n^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_q} \leq \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)(nq+2)^{1/q}}{2^{1/q} \rho^{n+2/q}} \|p_n(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)}.$$

Рассмотрим множество

$$B_{n+1} = \{p_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n : \|p_n(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)} \leq 1\}.$$

Из неравенства (3.26) следует, что

$$\frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{n(n-1) \dots (n-r+1)(nq+2)^{1/q}} B_{n+1} \subset H_q^r.$$

Из следствия 5.57 получаем

$$d_n(H_q^r, L_q(D_\rho)) \leq \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{n(n-1) \dots (n-r+1)(nq+2)^{1/q}}.$$

□

3.8. Поперечники $d_n(H_\infty, L_q(E))$

Пусть $E \subset D$ — компакт и ν — положительная мера на E . Вычислим поперечник $d_n(H_\infty, L_q(E))$, $1 \leq q \leq \infty$ (при $q = \infty$ пространство $L_q(E)$ заменяется на $C(E)$).

Произведением Бляшке порядка n называется функция

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z},$$

где $|\alpha_j| < 1$, $j = 1, \dots, n$, а $|\lambda| = 1$. Нетрудно убедиться, что $|B(z)| \equiv 1$ при $|z| = 1$, и, следовательно, $\overline{B(z)} = B^{-1}(z)$ при всех $|z| = 1$. Множество произведений Бляшке порядка не выше n будем обозначать через \mathcal{B}_n .

ТЕОРЕМА 3.13. *Имеет место равенство*

$$d_n(H_\infty, L_q(E)) = \inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(E)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_1, \dots, z_m — различные точки из D . Положим

$$W(z) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{\nu_j}, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \left(\frac{z - z_s}{1 - \bar{z}_s z} \right)^{\nu_s}.$$

Из теоремы Коши о вычетах получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{W(\xi)(1 - |\xi|^2)f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)} = f(\xi) - \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi) f^{(\nu)}(z_j),$$

где

$$c_{j\nu}(\xi) = \frac{W(\xi)(1 - |\xi|^2)}{\nu!(\nu_j - \nu - 1)!} \left(\frac{(1 - \bar{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(\xi - z)(1 - \bar{\xi}z)} \right) \Big|_{z=z_j}^{(\nu_j - \nu - 1)}.$$

Отсюда

$$\left| f(\xi) - \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi) f^{(\nu)}(z_j) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|W(\xi)|(1 - |\xi|^2) d\theta}{|1 - \bar{\xi}z|^2} = |W(\xi)|.$$

Тем самым

$$d_n(H_\infty, L_q(E)) \leq \inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(E)}.$$

Для оценки сверху будем предполагать, что $1 < q < \infty$. Случай, когда $q = 1, \infty$ получаются предельным переходом. Пусть $X_n \subset L_q(E)$ — произвольное n -мерное подпространство с базисом $g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)$. Для каждой функции $f(\cdot) \in H_\infty$ обозначим через $c_1(f), \dots, c_n(f)$ координаты единственного элемента наилучшего приближения $f(\cdot)$ подпространством X_n в базисе $g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)$.

Положим

$$S^n = \{ (w_1, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |w_1| + \dots + |w_{n+1}| = 1 \}.$$

Зафиксируем различные точки $z_1, \dots, z_{n+1} \in D$. Из классической задачи Неванлинны–Пика следует, что для каждого вектора $w = (w_1, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ существует единственное произведение Бляшке $B_n^w(\cdot) \in \mathcal{B}_n$ и $\rho > 0$ такие, что

$$\rho B_n^w(z_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Отображение $\gamma: S^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, определенное равенством

$$\gamma(w) = (c_1(B_n^w(\cdot)), \dots, c_n(B_n^w(\cdot))),$$

является непрерывным нечетным отображением из S^n в \mathbb{C}^n . По теореме Борсука (теорема 5.55) существует точка $w_0 \in S^n$, для которой $\gamma(w_0) = 0$. Тем самым

$$\begin{aligned} \sup_{f(\cdot) \in H_\infty} \inf_{g(\cdot) \in X_n} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(E)} &\geq \sup_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \inf_{g(\cdot) \in X_n} \|B_n(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(E)} \\ &\geq \inf_{g(\cdot) \in X_n} \|B_n^w(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(E)} = \|B_n^w(\cdot)\|_{L_q(E)} \geq \inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(E)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d_n(H_\infty, L_q(E)) \geq \inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(E)}.$$

□

ЛЕММА 3.14. Для всех $B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n$ и $0 < r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(re^{i\theta})|^q d\theta \geq r^{qn}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq m \leq n$,

$$B(z) = z^m \prod_{j=1}^{n-m} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

$|z_j| < r$, $j = 1, \dots, s$, $|z_j| \geq r$, $j = s + 1, \dots, n - m$. По неравенству Йенсена (теорема 5.10)

$$(3.27) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(re^{i\theta})|^q d\theta \geq \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q \ln |B(re^{i\theta})| d\theta\right).$$

Из формулы Йенсена (5.95) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta &= m \ln r + \sum_{j=1}^{n-m} \ln |z_j| + \sum_{j=1}^s \ln \frac{r}{|z_j|} \\ &= (m + s) \ln r + \sum_{j=s+1}^{n-m} \ln |z_j| \geq n \ln r. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (3.27), получаем доказываемое неравенство. \square

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Тогда для всех $0 < \rho < 1$

$$d_n(H_p, L_q(T_\rho)) = \rho^n, \quad d_n(H_p, L_q(D_\rho)) = \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq + 2)^{1/q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\|z^n\|_{L_q(T_\rho)} = \rho^n.$$

Из леммы 3.14 следует, что

$$\inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(T_\rho)} = \rho^n.$$

Поэтому

$$d_n(H_\infty, L_q(T_\rho)) = \rho^n.$$

При $r = 0$ из теоремы 3.11 получаем

$$d_n(H_q, L_q(T_\rho)) = \rho^n.$$

В силу того, что $H_p \subset H_q$ при $1 \leq q < p \leq \infty$, имеют место соотношения

$$(3.28) \quad \rho^n = d_n(H_\infty, L_q(T_\rho)) \leq d_n(H_p, L_q(T_\rho)) \leq d_n(H_q, L_q(T_\rho)) = \rho^n.$$

Для пространства $L_q(D_\rho)$

$$\|z^n\|_{L_q(D_\rho)} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} r^{qn+1} d\theta dr\right)^{1/q} = \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq + 2)^{1/q}}.$$

Из леммы 3.14 получаем

$$\begin{aligned} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)} &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} |B_n(re^{i\theta})|^q d\theta r dr\right)^{1/q} \\ &\geq \left(2 \int_0^\rho r^{nq+1} dr\right)^{1/q} = \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq + 2)^{1/q}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d_n(H_\infty, L_q(T_\rho)) = \inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{L_q(D_\rho)} = \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq+2)^{1/q}}.$$

При $r = 0$ из теоремы 3.12 следует, что

$$d_n(H_q, L_q(D_\rho)) = \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq+2)^{1/q}}.$$

Аналогично (3.28) имеем

$$\begin{aligned} \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq+2)^{1/q}} = d_n(H_\infty, L_q(D_\rho)) &\leq d_n(H_p, L_q(D_\rho)) \leq d_n(H_q, L_q(D_\rho)) \\ &= \frac{2^{1/q} \rho^{n+2/q}}{(nq+2)^{1/q}}. \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 3.16. Пусть $0 < k < 1$. Имеет место равенство

$$d_n(H_\infty, C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])) = \sqrt{\lambda},$$

где λ определено равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K};$$

здесь K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k и $k' = \sqrt{1-k^2}$, а Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ и $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.13 вытекает, что

$$d_n(H_\infty, C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])) = \inf_{B_n(\cdot) \in \mathcal{B}_n} \|B_n(\cdot)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])}.$$

Покажем, что нижнюю грань достаточно искать среди произведений Бляшке с вещественными нулями, находящимися на отрезке $[- \sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Пусть один из множителей имеет вид

$$\frac{x-w}{1-wx}, \quad w = \alpha + i\beta.$$

Тогда

$$\left| \frac{x-w}{1-wx} \right|^2 - \left| \frac{x-\alpha}{1-\alpha x} \right|^2 = \frac{\beta^2(1-x^2)((1-\alpha x)^2 + 1 - \alpha^2)}{(1-\alpha x)^2((1-\alpha x)^2 + \beta^2 x^2)} \geq 0.$$

Тем самым

$$\left| \frac{x-w}{1-wx} \right| \geq \left| \frac{x-\alpha}{1-\alpha x} \right|.$$

Если $x \in [- \sqrt{k}, \sqrt{k}]$, а $|\alpha| \geq \sqrt{k}$, то несложно убедиться, что

$$\left| \frac{x-\alpha}{1-\alpha x} \right| \geq \left| \frac{x-\sqrt{k} \operatorname{sign} \alpha}{1-x\sqrt{k} \operatorname{sign} \alpha} \right|.$$

Пусть $B_n(\cdot)$ — произведение Бляшке с вещественными нулями из отрезка $[- \sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Докажем, что

$$(3.29) \quad \|B_n(\cdot)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} \geq \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])},$$

где $Z_n(\cdot, k)$ — произведение Бляшке–Золотарёва (см. п. 5.30). Предположим противное. Тогда существуют $\alpha_j \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, $j = 1, \dots, n$, такие, что для произведения Бляшке

$$B_n(x) = \prod_{j=1}^n \frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j x}$$

выполняется неравенство

$$\|B_n(\cdot)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} < \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])}.$$

В силу (5.96) имеем

$$(-1)^j (Z_n(\xi_j, k) - B_n(\xi_j)) > 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Тем самым разность $Z_n(\cdot, k) - B_n(\cdot)$ имеет не менее n нулей на отрезке $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Сама эта разность имеет вид

$$(3.30) \quad Z_n(x, k) - B_n(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - \xi_j)(1 - \alpha_j x) - \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)(1 - \xi_j x)}{\prod_{j=1}^n (1 - \xi_j x)(1 - \alpha_j x)}.$$

Легко видеть, что если она обращается в нуль в точке $w \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ и $w \neq 0$, то она обращается в нуль и в точке $1/w$. Обозначим через $P_{2n}(\cdot)$ многочлен степени $2n$, стоящий в числителе в правой части (3.30). Предположим, что все n нулей разности $Z_n(\cdot, k) - B_n(\cdot)$ отличны от нуля. Тогда у $P_{2n}(\cdot)$ будет не менее $2n$ нулей и кроме того этот многочлен еще имеет нуль при $x = 1$. Приходим к противоречию. Пусть теперь среди n нулей разности есть один нулевой. Он может быть только на одном отрезке, поэтому имеется не менее $n - 1$, отличных от нуля. И еще $n - 1$, обратных к ним. Кроме того, по-прежнему нуль $x = 1$. Итого не менее $2n$. Но из условия $P_{2n}(0) = 0$ следует, что коэффициент при старшей степени равен нулю и поэтому степень многочлена равна $2n - 1$. Снова приходим к противоречию. \square

3.9. Комментарии

Теорема 3.1, доказанная А. Н. Колмогоровым [9], является первоначальным результатом в рассматриваемой тематике.

Равенство (3.9) было получено в работах А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова [33] и А. И. Мальцева [45]. Авторы этих работ не формулировали полученный результат в терминах поперечников. Это было сделано в работе С. Б. Стечкина [60]. Обобщение теоремы 3.5 (теорема 3.2) было получено в работе Л. Б. Софмана [58].

Теорема 3.6 была доказана независимо А. Pietsch [18] и М. И. Стесиним [59].

Совершенные сплайны $s_{nr}(\cdot)$ были введены В. М. Тихомировым [64] (см. также [66]). Теорема 3.6 ((i) и (ii)) была доказана В. М. Тихомировым [64], [65].

Теорема 3.11 при $q = \infty$ доказана В. М. Тихомировым [63]. Обобщение этого результата на все $1 \leq p \leq \infty$ принадлежит Л. В. Тайкову [61]. Теорема 3.12 доказана в книге А. Pinkus [19].

Теорема 3.13 была доказана в работе S. D. Fisher, C. A. Micchelli [4]. Этот результат был обобщен в работе S. D. Fisher, M. I. Stessin [5] (некорректное доказательство оценки сверху в этой работе было исправлено в [6]).

Доказательство теоремы 3.15 в несколько более общем случае было дано в работе Ю. А. Фаркова [2]. Теорема 3.16 есть следствие теоремы 3.13 и экстремальной задачи о минимизации равномерной нормы произведения Бляшке на отрезке $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, решенной К. Ю. Осипенко [49].

Оптимальное восстановление

Мы начнем с простейших примеров задач оптимального восстановления. Затем будут сформулированы общая постановка и основные результаты, касающиеся задач восстановления линейных функционалов и линейных операторов. Далее будут рассмотрены задачи восстановления функций и их производных, а также задачи восстановления сигналов и решений уравнений математической физики.

4.1. Задача интерполяции

Одной из наиболее распространенных задач восстановления является задача интерполяции, состоящая в приближенном вычислении функции $x(\cdot)$ в некоторой точке τ по значениям этой функции в других точках $x(t_1), \dots, x(t_n)$. Очевидно, что для корректной постановки этой задачи надо знать дополнительную информацию о том, какие функции могут нам встретиться. Один из подходов к этой задаче таков: будем искать функцию $\hat{x}(\cdot)$, наиболее просто устроенную (например, просто вычисляющуюся) и принимающую в точках t_1, \dots, t_n те же значения $x(t_1), \dots, x(t_n)$. За приближенное значение $x(\tau)$ берется в этом случае $\hat{x}(\tau)$. В качестве таких просто устроенных функций рассматривают, например, алгебраические полиномы (или тригонометрические полиномы).

Для алгебраических полиномов задача интерполяции ставится так: найти полином минимальной степени, принимающий в точках t_1, \dots, t_n значения $x(t_1), \dots, x(t_n)$. Нетрудно убедиться, что полином степени $n - 1$

$$(4.1) \quad L_{n-1}(t) = \sum_{j=1}^n l_j(t)x(t_j),$$

где

$$l_j(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k},$$

называемый *интерполяционным полиномом Лагранжа*, удовлетворяет условиям

$$L_{n-1}(t_j) = x(t_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Если предположить, что найдется полином меньшей степени $P(\cdot)$, который удовлетворяет тем же условиям, то полином $P(\cdot) - L_{n-1}(\cdot)$ степени $n - 1$ будет обращаться в ноль в n точках t_1, \dots, t_n . Следовательно, по основной теореме алгебры $P(t) \equiv L_{n-1}(t)$. Таким образом, интерполяционный полином Лагранжа решает поставленную задачу и в такой постановке $x(\tau) \approx L_{n-1}(\tau)$.

Другой подход, берущий свое начало от идей А. Н. Колмогорова, связанных с задачами приближения на классах функций, заключается в том, чтобы не фиксировать заранее вид приближающей функции, а искать ее на основе априорной информации о свойствах функций, которые могут встретиться. При

этом множество функций, для которых рассматривается соответствующая задача, называется *классом*. Обычно рассматриваются классы функций, задаваемые некоторыми свойствами, связанными с гладкостью или аналитичностью. При таком подходе появляется возможность получения новых методов приближения, которые хорошо приспособлены именно для аппроксимации функций из рассматриваемого класса. Надо отметить, что рассматриваемая постановка включает в себя и первую постановку. Для этого в качестве класса рассматриваемых функций надо взять полиномы степени $n - 1$.

Перейдем к более точной постановке задачи интерполяции для *соболевского класса* функций $W_\infty^r([-1, 1])$, определенных на отрезке $[-1, 1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r - 1$ и удовлетворяющих почти всюду на $[-1, 1]$ условию $|x^{(r)}(t)| \leq 1$. Будем рассматривать задачу оптимального восстановления значения $x(\tau)$, $\tau \in [-1, 1]$, по значениям функции $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$ в системе различных точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ из отрезка $[-1, 1]$. Таким образом, информация о функции, имеющаяся в нашем распоряжении, такова: $F_{\bar{t}}x(\cdot) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Для данного метода $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ полагаем

$$x(\tau) \approx m(F_{\bar{t}}x(\cdot)).$$

Погрешностью метода m назовем величину

$$e(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])} |x(\tau) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|,$$

а *погрешностью оптимального восстановления* — величину

$$(4.2) \quad E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} e(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Если $r \geq n + 1$, то существует интерполяционный полином Лагранжа $L_n(t)$, который принимает в точках t_1, \dots, t_n значения $x(t_1), \dots, x(t_n)$, а в точке τ — любое наперед заданное значение. Поскольку $L_n(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$, то отсюда сразу же следует, что $e(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \infty$, если $r \geq n + 1$. Тем самым задачу имеет смысл рассматривать лишь при $1 \leq r \leq n$.

Рассмотрим случай $r = n$. Начнем с оценки снизу погрешности оптимального восстановления. Положим

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{n!}(t - t_1) \dots (t - t_n).$$

Очевидно, что $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$. Поскольку $F_{\bar{t}}\hat{x}(\cdot) = 0$, то для любого метода m имеем

$$2|\hat{x}(\tau)| \leq |\hat{x}(\tau) - m(0)| + |-\hat{x}(\tau) - m(0)| \leq 2e(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Откуда

$$(4.3) \quad E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq |\hat{x}(\tau)|.$$

Докажем теперь, что интерполяционный полином Лагранжа является оптимальным методом восстановления на классе $W_\infty^n([-1, 1])$. Пусть $x(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$ и $\tau \notin \{t_1, \dots, t_n\}$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = x(t) - L_{n-1}(t) - K\hat{x}(t),$$

где

$$K = \frac{x(\tau) - L_{n-1}(\tau)}{\hat{x}(\tau)}.$$

Функция $y(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$ и обращается в ноль в точках t_1, \dots, t_n, τ . Следовательно, по теореме Ролля $y^{(n-1)}(\cdot)$ обращается в ноль не менее, чем в двух различных точках τ_1 и τ_2 из интервала $(-1, 1)$. Тогда

$$0 = y^{(n-1)}(\tau_2) - y^{(n-1)}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} y^{(n)}(t) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (x^{(n)}(t) - K) dt.$$

Тем самым

$$K(\tau_2 - \tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} x^{(n)}(t) dt.$$

Отсюда следует, что $|K| \leq 1$, т. е.

$$|x(\tau) - L_{n-1}(\tau)| \leq |\hat{x}(\tau)|.$$

Очевидно, что это неравенство справедливо и для $\tau \in \{t_1, \dots, t_n\}$ (в этом случае оно просто обращается в равенство). Следовательно, доказано, что

$$E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \leq |\hat{x}(\tau)|,$$

что вместе с неравенством (4.3) дает

$$(4.4) \quad E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n!} |(\tau - t_1) \dots (\tau - t_n)|$$

и доказывает оптимальность метода

$$x(\tau) \approx L_{n-1}(\tau).$$

Теперь естественно поставить вопрос о том, как выбрать точки $t_1, \dots, t_n \in [-1, 1]$, в которых будут измеряться значения функции $x(\cdot) \in W_\infty^n([-1, 1])$, чтобы максимальное значение погрешности восстановления, когда $\tau \in [-1, 1]$, было минимальным. Иначе говоря, речь идет о нахождении величины

$$(4.5) \quad E_n(W_\infty^n([-1, 1]), C([-1, 1])) = \inf_{\bar{t}} \max_{\tau \in [-1, 1]} E(x(\tau), W_\infty^n([-1, 1]), F_{\bar{t}})$$

и точек, на которых эта нижняя грань достигается. В силу равенства (4.4) из пункта б) раздела 1.3 сразу же следует, что узлы, на которых достигается нижняя грань в (4.5), являются нулями многочлена Чебышёва

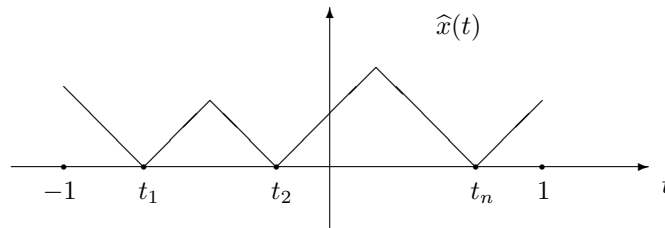
$$\hat{t}_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = 1, \dots, n.$$

При этом

$$E_n(W_\infty^n([-1, 1]), C([-1, 1])) = \frac{1}{n! 2^{n-1}}.$$

Рассмотрим еще случай $r = 1$ (промежуточные случаи $1 < r < n$ будут рассмотрены позже). Обозначим через $\alpha(t)$ ближайшую к t точку из множества $\{t_1, \dots, t_n\}$ (в случае если t лежит посередине между t_k и t_{k+1} , будем считать для определенности $\alpha(t) = t_k$). Положим теперь (см. рис. 4.1)

$$(4.6) \quad \hat{x}(t) = |t - \alpha(t)|.$$



;

Рис. 4.1

Очевидно, что $\widehat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$, $-\widehat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ и $F_{\bar{t}}\widehat{x}(\cdot) = F_{\bar{t}}(-\widehat{x}(\cdot)) = 0$. Для любого метода m имеем

$$2\widehat{x}(\tau) \leq |\widehat{x}(\tau) - m(0)| + |-\widehat{x}(\tau) - m(0)| \leq 2\epsilon(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Откуда

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq \widehat{x}(\tau).$$

Пусть $\alpha(\tau) = t_k$, $1 \leq k \leq n$. Определим метод \widehat{m} равенством $\widehat{m}(y) = y_k$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ имеем

$$|x(\tau) - \widehat{m}(F_{\bar{t}}x(\cdot))| = |x(\tau) - x(t_k)| \leq |\tau - t_k| = \widehat{x}(\tau).$$

Следовательно,

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \widehat{x}(\tau),$$

а метод (см. рис. 4.2)

$$x(\tau) \approx x(\alpha(\tau))$$

является оптимальным методом восстановления.

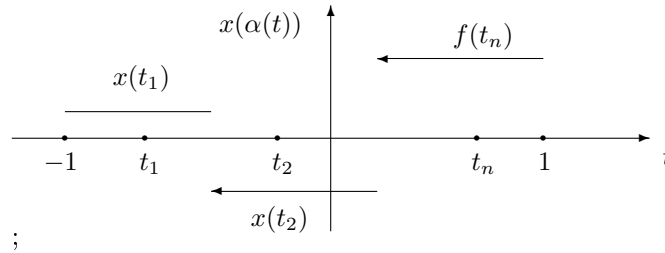


Рис. 4.2

Оптимальных методов может быть много. Среди них можно выделить те, которые имеют наименьшую погрешность при любом фиксированном значении информационного оператора $F_{\bar{t}}$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и существует функция $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$, для которой $F_{\bar{t}}x(\cdot) = y$. Положим

$$W_y = \{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1]) : F_{\bar{t}}x(\cdot) = y\}.$$

Рассмотрим множество

$$A_y = \{x(\tau) : x(\cdot) \in W_y\}.$$

Множество A_y является отрезком числовой оси, а число

$$c_y = \frac{\sup_{x(\cdot) \in W_y} x(\tau) + \inf_{x(\cdot) \in W_y} x(\tau)}{2}$$

— его середина. Поэтому для любого фиксированного y , для которого множество W_y непусто, и для всех $x(\cdot) \in W_y$ имеет место равенство

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - c| = \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - c_y|.$$

Положим

$$\widehat{m}_c(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = c_{F_{\bar{t}}x(\cdot)}.$$

Тогда для любого метода m

$$\begin{aligned} e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) &= \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ W_y \neq \emptyset}} \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - m(y)| \\ &\geq \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ W_y \neq \emptyset}} \sup_{x(\cdot) \in W_y} |x(\tau) - c_y| = e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, \hat{m}_c). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что метод \hat{m}_c является оптимальным. Но он и наилучший при любом фиксированном значении информационного оператора $F_{\bar{t}}$. Такие методы называются *центральными*.

Найдем явный вид метода \hat{m}_c . Положим

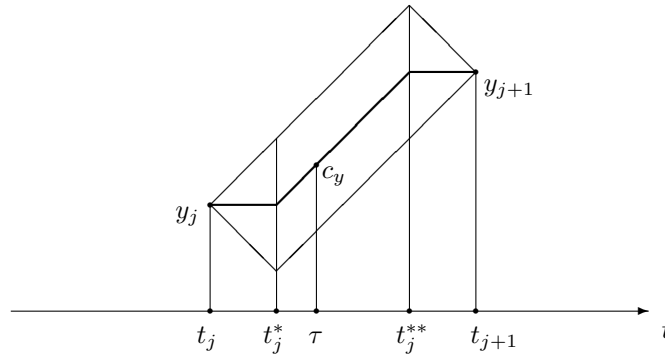
$$t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} - \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}, \quad t_j^{**} = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} + \frac{|y_{j+1} - y_j|}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что (см. рис. 4.3)

$$\hat{m}_c(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \begin{cases} y_1, & -1 \leq \tau \leq t_1, \\ y_j, & t_j \leq \tau \leq t_j^*, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \omega(\tau), & t_j^* \leq \tau \leq t_j^{**}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ y_{j+1}, & t_j^{**} \leq \tau < t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ y_n, & t_n \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\omega(\tau) = \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + \text{sign}(y_{j+1} - y_j) \left(\tau - \frac{t_j + t_{j+1}}{2} \right).$$



;

Рис. 4.3

Здесь тоже можно рассмотреть задачу о минимизации максимального значения погрешности для $\tau \in [-1, 1]$ за счет выбора узлов $-1 \leq t_1 < \dots < t_n < 1$. Легко получить, что

$$E_n(W_\infty^1([-1, 1]), C([-1, 1])) = \inf_{\bar{t}} \max_{\tau \in [-1, 1]} E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n},$$

а точки, на которых достигается нижняя грань, являются равномерно распределенными на отрезке $[-1, 1]$

$$(4.7) \quad \hat{t}_j = -1 + \frac{2j-1}{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

4.2. Минимизация функции

Для класса $W_\infty^1([-1, 1])$ и того же информационного оператора $F_{\bar{t}}$ рассмотрим задачу оптимального восстановления минимума функции $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$. Иными словами, речь идет об оптимальном восстановлении нелинейного функционала

$$Lx(\cdot) = \min_{t \in [-1, 1]} x(t).$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} |Lx(\cdot) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|,$$

а задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} |Lx(\cdot) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|$$

и оптимального метода восстановления \widehat{m}_L , на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

Построим центральный метод в этой задаче. При фиксированном $y \in \mathbb{R}^n$ таким, что

$$W_y = \{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1]) : F_{\bar{t}}x(\cdot) = y\} \neq \emptyset,$$

все функции из множества W_y лежат между верхней ломаной $Z_y(t)$ и нижней ломаной $z_y(t)$, графики которых при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ изображены на рис. 4.3. Следовательно, для любой функции из W_y

$$\min_{t \in [-1, 1]} Z_y(t) \leq \min_{t \in [-1, 1]} x(t) \leq \min_{t \in [-1, 1]} z_y(t).$$

Очевидно, что

$$\min_{t \in [-1, 1]} Z_y(t) = \min_{1 \leq j \leq n} y_j.$$

Минимум функции $z_y(t)$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ достигается в точке t_j^* (если $y_j \leq y_{j+1}$) или t_j^{**} (если $y_j \geq y_{j+1}$) (см. рис. 4.3). Несложные вычисления показывают, что

$$\min_{t \in [t_j, t_{j+1}]} z_y(t) = \frac{y_{j+1} + y_j}{2} - \frac{t_{j+1} - t_j}{2}.$$

Учитывая отрезки $[-1, t_1]$ и $[t_n, 1]$, имеем

$$\begin{aligned} & \min_{t \in [-1, 1]} z_y(t) \\ &= \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - h_1/2, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - h_{n-1}/2, y_n - h_n \right\}, \end{aligned}$$

где $h_0 = t_1 + 1$, $h_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $h_n = 1 - t_n$. Таким образом, метод

$$\begin{aligned} \widehat{m}_L(F_{\bar{t}}x(\cdot)) &= \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} y_j \\ &+ \frac{1}{2} \min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - h_1/2, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - h_{n-1}/2, y_n - h_n \right\} \end{aligned}$$

является оптимальным и центральным методом восстановления.

Найдем погрешность оптимального восстановления. Пусть

$$\min_{1 \leq j \leq n} y_j = c.$$

Тогда

$$\min \left\{ y_1 - h_0, \frac{y_2 + y_1}{2} - h_1/2, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2} - h_{n-1}/2, y_n - h_n \right\} \\ \geq \min \{c - h_0, c - h_1/2, \dots, c - h_{n-1}/2, c - h_n\}.$$

Следовательно,

$$e(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, \widehat{m}_L) \leq \frac{1}{2} \min \{h_0, h_1/2, \dots, h_{n-1}/2, h_n\}.$$

Очевидно, что величина, стоящая справа, достигается на функции $x(t) \equiv 0$. Тем самым

$$E(L, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{2} \min \{h_0, h_1/2, \dots, h_{n-1}/2, h_n\}.$$

Можно рассмотреть задачу о минимизации этой величины за счет выбора узлов. Здесь так же, как и в задаче интерполяции на этом классе, минимум будет достигаться на равномерной системе узлов (4.7). При этом центральный метод будет иметь вид

$$\widehat{m}_L(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} y_j + \frac{1}{2} \min \left\{ y_1, \frac{y_2 + y_1}{2}, \dots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2}, y_n \right\} - \frac{1}{2n}.$$

4.3. Численное интегрирование

Для того же класса $W_\infty^1([-1, 1])$ и того же информационного оператора $F_{\bar{t}}$ рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения интеграла

$$Ix(\cdot) = \int_{-1}^1 x(t) dt.$$

В качестве методов восстановления будем по-прежнему рассматривать всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - m(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right|$$

и оптимального метода восстановления \widehat{m}_0 , на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

Для функции $\widehat{x}(\cdot)$, определенной равенством (4.6), и любого метода m имеем

$$2 \int_{-1}^1 \widehat{x}(t) dt \leq \left| \int_{-1}^1 \widehat{x}(t) dt - m(0) \right| + \left| \int_{-1}^1 (-\widehat{x}(t)) dt - m(0) \right| \\ \leq 2 \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - m(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right|.$$

Тем самым

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq \int_{-1}^1 \widehat{x}(t) dt.$$

С другой стороны, положив

$$\widehat{m}_0(y) = \int_{-1}^1 y(t) dt,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} y_1, & -1 \leq t \leq \frac{t_1 + t_2}{2}, \\ y_j, & \frac{t_{j-1} + t_j}{2} < t \leq \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \quad 2 \leq j \leq n-1, \\ y_n, & \frac{t_{n-1} + t_n}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

при всех $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - \widehat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right| &= \left| \int_{-1}^1 (x(t) - x(\alpha(t))) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |t - \alpha(t)| dt = \int_{-1}^1 \widehat{x}(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) &= \int_{-1}^1 \widehat{x}(t) dt \\ &= \frac{(t_1 + 1)^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^2}{4} + \frac{(1 - t_n)^2}{2}, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x(t) dt &\approx \widehat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \\ &= \left(\frac{t_1 + t_2}{2} + 1 \right) x(t_1) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2} x(t_j) + \left(1 - \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right) x(t_n) \end{aligned}$$

— оптимальный метод восстановления.

Здесь также можно рассмотреть задачу о построении центрального метода. В силу того, что все функции из множества W_y лежат между верхней ломаной $Z_y(t)$ и нижней ломаной $z_y(t)$, графики которых при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ изображены на рис. 4.3, для любой функции из W_y имеет место неравенство

$$\int_{-1}^1 Z_y(t) dt \leq \int_{-1}^1 x(t) dt \leq \int_{-1}^1 z_y(t) dt.$$

Поэтому центральный метод будет иметь вид

$$\widehat{m}_c(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (Z_y(t) + z_y(t)) dt.$$

Несложные вычисления показывают, что этот метод совпадает с методом \widehat{m}_0 .

Если в наших возможностях выбирать систему точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, в которых будут измеряться значения функций $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ (иначе говоря, есть возможность выбора исходной информации), то естественно выбрать эти точки так, чтобы величина $E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}})$ была по возможности меньше. Нетрудно убедиться, что

$$\inf_{\bar{t}} E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n},$$

а оптимальные точки (т. е. точки, на которых достигается нижняя грань) определяются равенствами (4.7). При этом метод \widehat{m}_0 будет иметь вид

$$\widehat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n x(\bar{t}_j).$$

Оказывается, что этот метод, хорошо известный и называемый *формулой прямой моугольников*, является центральным методом.

4.4. Численное дифференцирование по неточным значениям в точках

В рассмотренных выше задачах информация о функции хотя и была неполной, но задавалась точно. Реально, любая исходная информация содержит ту или иную погрешность. Одним из примеров задачи оптимального восстановления по неточной информации является задача оптимального восстановления значения $x'(0)$ функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ по ее приближенным значениям в точках $\pm h$, $0 < h \leq 1$. Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ нам известны значения \tilde{x}_{-1} и \tilde{x}_1 такие, что

$$(4.8) \quad |x(jh) - \tilde{x}_j| \leq \delta, \quad j = -1, 1,$$

где $\delta > 0$ — погрешность исходной информации. Здесь информационный оператор — уже многозначное отображение $F_{h,\delta}$, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ множество $F_{h,\delta}x(\cdot) = \{(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1)\}$, где \tilde{x}_{-1} и \tilde{x}_1 удовлетворяют условию (4.8). Рассмотрим в качестве методов восстановления произвольные функции $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешностью данного метода m назовем величину

$$\begin{aligned} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m) \\ = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])} \sup_{\substack{\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1 \in \mathbb{R} \\ |x(jh) - \tilde{x}_j| \leq \delta, j = -1, 1}} |x'(0) - m(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1)|. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \inf_{m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m)$$

и оптимальный метод восстановления, т. е. метод, на котором эта нижняя грань достигается.

Положим

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}\right)t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{t^2}{2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}\right)t, & -1 \leq t < 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\pm \hat{x}(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ и $\hat{x}(-h) = -\delta$, $\hat{x}(h) = \delta$. Для любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2\hat{x}'(0) &\leq |\hat{x}'(0) - m(0, 0)| + |-\hat{x}'(0) - m(0, 0)| \\ &\leq 2e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(4.9) \quad E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) \geq \hat{x}'(0) = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}.$$

Рассмотрим метод

$$(4.10) \quad \hat{m}(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1) = \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1}}{2h}.$$

Учитывая, что $\tilde{x}_j = x(jh) + \delta_j$, где $|\delta_j| \leq \delta$, $j = -1, 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, \hat{m}) &= \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2} \sup_{|\delta_j| \leq \delta, j=-1,1} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} - \frac{\delta_1 - \delta_{-1}}{2h} \right| \\ &\leq \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1,1])} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} \right| + \frac{\delta}{h}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int_0^t (t - \tau)x''(\tau) d\tau,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} \right| &= \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^0 (h + \tau)x''(\tau) d\tau + \int_0^h (h - \tau)x''(\tau) d\tau \right| \leq \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, \hat{m}) \leq \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}.$$

Учитывая (4.9), находим, что

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h},$$

а метод (4.10) является оптимальным.

Можно поставить вопрос об оптимизации исходной информации за счет выбора шага h . Несложные вычисления показывают, что

$$\min_{0 < h \leq 1} E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ \delta + 1/2, & \delta \geq 1/2, \end{cases}$$

при этом значение шага, на котором достигается минимум, таково:

$$(4.11) \quad \hat{h} = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ 1, & \delta \geq 1/2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь аналогичную задачу, несколько изменив исходную информацию. Обозначим через $C([-1, 1])$ линейное пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([-1,1])} = \max_{t \in [-1,1]} |x(t)|.$$

Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ нам известна функция $\tilde{y}(\cdot) \in C([-1, 1])$ такая, что

$$(4.12) \quad \|x(\cdot) - \tilde{y}(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leq \delta.$$

Иначе говоря, задается информационный оператор $F_\delta([-1, 1])$, ставящий каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ множество функций $\tilde{y}(\cdot) \in C([-1, 1])$, удовлетворяющих условию (4.12).

В этом случае погрешностью произвольного метода $m: C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем величину

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1]), \tilde{y}(\cdot) \in C([-1, 1]) \\ \|x(\cdot) - \tilde{y}(\cdot)\|_{C([-1, 1])} \leq \delta}} |x'(0) - m(\tilde{y}(\cdot))|.$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления

$$(4.13) \quad E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1])) = \inf_{m: C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), m),$$

и метод, на котором эта нижняя грань достигается, называемый оптимальным.

Положим

$$\hat{x}_0(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}\right)t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{t^2}{2} + \left(\frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}\right)t, & -1 \leq t < 0, \end{cases}$$

где \hat{h} определено равенством (4.11). Тогда $\pm \hat{x}_0(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ и

$$\|\hat{x}_0(\cdot)\|_{C([-1, 1])} = \delta.$$

Для любого метода m имеем

$$2\hat{x}'_0(0) \leq |\hat{x}'_0(0) - m(0)| + |-\hat{x}'_0(0) - m(0)| \leq 2e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), m).$$

Следовательно,

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1])) \geq \hat{x}'_0(0) = \frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}.$$

Рассмотрим метод

$$(4.14) \quad \hat{m}(\tilde{y}) = \frac{\tilde{y}(\hat{h}) - \tilde{y}(-\hat{h})}{2\hat{h}}.$$

В силу оценки, проведенной для метода (4.10), получаем

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1]), \hat{m}) \leq \frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}}.$$

Отсюда

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_\delta([-1, 1])) = \frac{\hat{h}}{2} + \frac{\delta}{\hat{h}} = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ \delta + \frac{1}{2}, & \delta \geq 1/2. \end{cases},$$

а метод (4.14) является оптимальным.

Отметим, что оптимальный метод использует лишь два значения функции $\tilde{y}(\cdot)$. Вся остальная информация о функции $\tilde{y}(\cdot)$ не используется. В дальнейшем мы увидим, что это довольно характерная ситуация для восстановления по неточной информации. Поэтому возникает вопрос: какова та “полезная” информация, достаточная для оптимального восстановления?

4.5. Постановка задачи оптимального восстановления

Общая задача оптимального восстановления операторов по неточно заданной информации может быть поставлена следующим образом. Пусть X и Y — линейные пространства, Z — линейное нормированное пространство и $L: X \rightarrow Z$ — линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора L на некотором множестве $W \subset X$ по значениям *многозначного отображения* (м. о.) $F: W \rightarrow Y$, под которым понимается отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in W$ непустое множество $F(x) \subset Y$. Множество

$$\text{gr } F := \{ (x, y) : x \in W, y \in F(x) \}$$

называется *графом м. о. F* .

Многозначность отображения F моделирует неточно заданную информацию об элементах W . Если F — однозначное отображение, то говорят о задаче восстановления по точным данным. Часто в задачах восстановления рассматривают отображения вида

$$(4.15) \quad F(x) = Ix + U,$$

где $I: X \rightarrow Y$ — линейный оператор, называемый *информационным*, а U — некоторое фиксированное множество из Y . Например, если Y — нормированное пространство, то в качестве U рассматривают шар радиуса δ . При этом говорят, что значения информационного оператора I заданы с погрешностью δ .

Под *методами восстановления* оператора L будем понимать всевозможные отображения $\varphi: F(W) \rightarrow Z$ (при этом никаких дополнительных свойств от этих отображений, вообще говоря, мы не требуем). Таким образом, имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X \supset W & \xrightarrow{L} & Z \\ & \searrow F & \nearrow \varphi \\ & & F(W) \end{array}$$

Погрешностью метода восстановления φ назовем величину

$$e(L, F, \varphi) = \sup_{(x, y) \in \text{gr } F} \|Lx - \varphi(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$(4.16) \quad E(L, F) = \inf_{\varphi: F(W) \rightarrow Z} e(L, F, \varphi).$$

Метод $\hat{\varphi}$ называется *оптимальным*, если

$$e(L, F, \hat{\varphi}) = E(L, F).$$

Задачу нахождения величины погрешности оптимального восстановления и оптимальных методов будем называть *задачей оптимального восстановления* (значений оператора L на классе W по информации F), или, кратко, *(L, F) -задачей*.

Отметим, что задача оптимального восстановления с многозначным отображением вида (4.15) может быть сведена к задаче оптимального восстановления с однозначным отображением. Для того чтобы убедиться в этом, надо вместо X рассмотреть линейное пространство $\tilde{X} = X \times Y$, вместо множества W — множество $\tilde{W} = W \times U$, вместо оператора L — оператор $\tilde{L}(x, y) = Lx$, а однозначное отображение \tilde{F} определить равенством $\tilde{F}(x, y) = Ix + y$.

Тогда для любого метода φ

$$e(\tilde{L}, \tilde{F}, \varphi) = \sup_{x \in W, y \in U} \|Lx - \varphi(Ix + y)\|_Z = \sup_{(x,v) \in \text{gr } F} \|Lx - \varphi(v)\|_Z = e(L, F, \varphi).$$

Отсюда

$$E(\tilde{L}, \tilde{F}) = E(L, F).$$

Тем самым задача восстановления с неточными данными может быть сведена к задаче восстановления с точными данными.

ЛЕММА 4.1. Пусть в задаче (4.16) множество $\text{gr } F$ центрально-симметрично, а множество

$$F^{-1}(0) = \{x \in W : 0 \in F(x)\}$$

не пусто. Тогда

$$E(L, F) \geq \sup_{x \in F^{-1}(0)} \|Lx\|_Z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого метода φ при всех $x \in W$ таких, что $x \in F^{-1}(0)$, имеем

$$2\|Lx\|_Z \leq \|Lx - \varphi(0)\|_Z + \|L(-x) - \varphi(0)\|_Z \leq 2e(L, F, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(L, F, \varphi) \geq \sup_{x \in F^{-1}(0)} \|Lx\|_Z,$$

откуда сразу же вытекает доказываемая оценка. \square

Введем величину, которая в некотором смысле характеризует “разброс” значений оператора L на множестве элементов из W с одной и той же информацией. Пусть $y \in F(W)$. Число

$$r(L, F, y) = \inf_{z \in Z} \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - z\|_Z$$

называется *чебышёвским радиусом* множества $L(F^{-1}(y))$. Это радиус минимального шара, содержащего данное множество. Если существует такое $z(y) \in Z$, что

$$r(L, F, y) = \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - z(y)\|_Z,$$

то $z(y)$ называется *чебышёвским центром* множества $L(F^{-1}(y))$.

Величина

$$(4.17) \quad R(L, F) = \sup_{y \in F(W)} r(L, F, y)$$

называется *радиусом информации* в задаче оптимального восстановления.

Следующая лемма дает геометрическую характеристику величины погрешности оптимального восстановления.

ЛЕММА 4.2. Имеет место равенство

$$E(L, F) = R(L, F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ — произвольный метод восстановления. Тогда для любого $y \in F(W)$

$$r(L, F, y) \leq \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - \varphi(y)\|_Z \leq e(L, F, \varphi).$$

Перейдя к верхней грани в левой части по всем $y \in F(W)$, а затем к нижней грани по всевозможным методам, получим

$$R(L, F) \leq E(L, F).$$

Докажем противоположное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $y \in F(W)$ найдется элемент $z_\varepsilon(y) \in Z$ такой, что

$$\sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - z_\varepsilon(y)\|_Z \leq r(L, F, y) + \varepsilon.$$

Определим метод $\varphi_\varepsilon: F(W) \rightarrow Z$ по правилу $\varphi_\varepsilon(y) = z_\varepsilon(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} e(L, F, \varphi_\varepsilon) &= \sup_{(x,y) \in \text{gr } F} \|Lx - \varphi_\varepsilon(y)\|_Z = \sup_{y \in F(W)} \sup_{x \in F^{-1}(y)} \|Lx - \varphi_\varepsilon(y)\|_Z \\ &\leq \sup_{y \in F(W)} (r(L, F, y) + \varepsilon) = R(L, F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(L, F) \leq R(L, F) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$E(L, F) \leq R(L, F).$$

Что вместе с противоположным неравенством доказывает утверждение леммы. \square

Отметим, что из доказательства леммы сразу следует, что если для каждого $y \in F(W)$ существует чебышёвский центр $z(y)$ множества $L(F^{-1}(y))$, то метод $\varphi(y) = z(y)$ является оптимальным. Такой оптимальный метод называют *центральным методом*. В пп. 4.1–4.3 приводились примеры центральных алгоритмов.

4.6. Оптимальное восстановление линейных функционалов

Пусть X' — линейное пространство, алгебраически сопряженное к X , т. е. пространство линейных функционалов на X . Рассмотрим задачу (4.16), когда $L = x' \in X'$. Значение линейного функционала x' на элементе x мы будем обозначать через $\langle x', x \rangle$. В этом случае $Z = K$, где $K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} (в зависимости от того, вещественное или комплексное пространство X).

Напомним, что подмножество линейного пространства X называется *выпуклым*, если с любыми двумя своими точками $x_1, x_2 \in X$ оно содержит отрезок $[x_1, x_2] = \{z \in X \mid z = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, 0 \leq \alpha \leq 1\}$, соединяющий эти точки. Наименьшее выпуклое множество, содержащее множество $A \subset X$ называется *выпуклой оболочкой* множества A и обозначается $\text{co}A$. Она состоит из всех выпуклых комбинаций элементов из A , т. е. элементов вида $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$, где $x_j \in A$, $\lambda_j \geq 0$, и $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$.

Многозначное отображение $F: W \rightarrow Y$ называется *выпуклым*, если его график — выпуклое множество. Каждому многозначному отображению $F: W \rightarrow Y$ можно сопоставить выпуклое многозначное отображение $\text{co}F: \text{co}W \rightarrow Y$ по правилу

$$\text{co}F(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \text{co gr } F\}.$$

Легко видеть, что $\text{gr co}F = \text{co gr } F$.

Функция $f: X \rightarrow K$ называется *аффинной*, если $f(x) = \langle x', x \rangle + a$, где $x' \in X'$ и $a \in K$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть X и Y — вещественные линейные пространства, $W \subset X$, $F: W \rightarrow Y$ и $x' \in X'$. Тогда для существования аффинного оптимального метода в задаче восстановления функционала x' необходимо и достаточно, чтобы

$$(4.18) \quad R(x', F) = R(x', \text{co}F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Докажем, что из существования аффинного оптимального метода вытекает равенство (4.18). Сначала покажем, что для произвольного аффинного метода $\varphi: F(W) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \langle y', y \rangle + a$, справедливо соотношение

$$(4.19) \quad e(x', F, \varphi) = e(x', \text{co}F, \varphi).$$

Действительно, ясно, что $e(x', F, \varphi) \leq e(x', \text{co}F, \varphi)$. Докажем противоположное неравенство. Пусть $(x, y) \in \text{gr co}F$. Тогда найдутся такие $(x_j, y_j) \in \text{gr } F$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, что

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j, y_j),$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} |\langle x', x \rangle - \varphi(y)| &= |\langle x', x \rangle - \langle y', y \rangle - a| = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j (\langle x', x_j \rangle - \langle y', y_j \rangle - a) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |\langle x', x_j \rangle - \langle y', y_j \rangle - a| \leq e(x', F, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $e(x', \text{co}F, \varphi) \leq e(x', F, \varphi)$, и тем самым соотношение (4.19) доказано.

Пусть теперь $\widehat{\varphi}$ — аффинный оптимальный метод в (x', F) -задаче. Тогда, пользуясь леммой 4.2 и (4.19), получаем

$$\begin{aligned} R(x', \text{co}F) &= E(x', \text{co}F) \leq e(x', \text{co}F, \widehat{\varphi}) = e(x', F, \widehat{\varphi}) = E(x', F) \\ &= R(x', F). \end{aligned}$$

Противоположное неравенство $R(x', \text{co}F) \geq R(x', F)$ очевидно, и поэтому равенство (4.18) доказано.

Достаточность. Если $R(x', F) = +\infty$, то равенство (4.18) выполняется очевидным образом ($(R(x', F) \leq R(x', \text{co}F))$). Тогда $E(x', F) = +\infty$ по лемме (4.2) и, следовательно, любой метод оптимален, в частности любой аффинный. Итак, пусть выполнено соотношение (4.18) и $R(x', F) < +\infty$.

Покажем сначала, что в $(x', \text{co}F)$ -задаче существует аффинный оптимальный метод. Далее, для краткости пишем R вместо $R(x', \text{co}F)$.

Положим

$$\Omega = \{ (y, \langle x', x \rangle) \in Y \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in \text{gr co}F \} \quad \text{и} \quad \Omega_0 = \Omega - \Omega.$$

Нетрудно убедиться, что Ω — выпуклое множество, а Ω_0 — выпукло и центрально-симметрично.

Пусть $\mu(\cdot)$ — функционал Минковского множества Ω_0 , т. е.

$$\mu(\omega) = \inf \{ t > 0 \mid \omega \in t\Omega_0 \},$$

где $\mu(\omega) = +\infty$, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто (см. 5.25).

Положим

$$p(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \mu(\omega) = +\infty, \\ 2R\mu(\omega), & \mu(\omega) < +\infty. \end{cases}$$

Рассмотрим линейный функционал ω'_0 , определенный на подпространстве $\{0\} \times \mathbb{R} \subset Y \times \mathbb{R}$ равенством $\langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$. Покажем, что для всех $\omega \in \{0\} \times \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$(4.20) \quad |\langle \omega'_0, \omega \rangle| \leq p(\omega).$$

Если $p(\omega) = +\infty$, то неравенство (4.20) очевидно. Пусть $p(\omega) < +\infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon = \frac{\omega}{\mu(\omega) + \varepsilon}.$$

Так как функционал Минковского положительно однороден (см. 5.25), то $\mu(\omega_\varepsilon) < 1$. Отсюда, поскольку Ω_0 выпукло и содержит ноль, следует, что $\omega_\varepsilon \in \Omega_0$ и, значит, $\omega_\varepsilon = (y_1, \langle x', x_1 \rangle) - (y_2, \langle x', x_2 \rangle)$ для некоторых $x_j \in F^{-1}(y_j)$, $j = 1, 2$. Но $\omega_\varepsilon \in \{0\} \times \mathbb{R}$ и поэтому $y_1 = y_2 = y$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| &= |\langle x', x_1 \rangle - \langle x', x_2 \rangle| \leq |\langle x', x_1 \rangle - c| + |\langle x', x_2 \rangle - c| \\ &\leq 2 \sup_{x \in F^{-1}(y)} |\langle x', x \rangle - c| \end{aligned}$$

для любого $c \in \mathbb{R}$, откуда (переходя справа к нижней грани по всем $c \in \mathbb{R}$) вытекает, что

$$|\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq 2r(x', F, y) \leq 2R.$$

Тогда

$$|\langle \omega'_0, \omega \rangle| = (\mu(\omega) + \varepsilon) |\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq (\mu(\omega) + \varepsilon) 2R = p(\omega) + 2R\varepsilon,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ неравенство (4.20) доказано.

По теореме Хана–Банаха (см. 5.25) существует функционал ω' , являющийся продолжением ω'_0 на $Y \times \mathbb{R}$, и при этом справедливо неравенство

$$(4.21) \quad |\langle \omega', \omega \rangle| \leq p(\omega), \quad \forall \omega \in Y \times \mathbb{R}.$$

Так как $\omega' \in (Y \times \mathbb{R})'$, то $\omega' = (\tilde{y}', \tilde{\alpha})$, где $\tilde{y}' \in Y'$ и $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, т. е. $\langle \omega', (y, r) \rangle = \langle \tilde{y}', y \rangle + \tilde{\alpha}r$ для всех $y \in Y$ и $r \in \mathbb{R}$. На $\{0\} \times \mathbb{R}$ имеем $\tilde{\alpha}r = \langle \omega', (0, r) \rangle = \langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$, и поэтому $\tilde{\alpha} = 1$. Полагая $y' = -\tilde{y}'$, получаем, что

$$(4.22) \quad \langle \omega', (y, r) \rangle = -\langle y', y \rangle + r, \quad \forall (y, r) \in Y \times \mathbb{R}.$$

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{gr co}F$. Тогда $\omega = (y_1, \langle x', x_1 \rangle) - (y_2, \langle x', x_2 \rangle) \in \Omega_0$ и тем самым $\mu(\omega) \leq 1$. Учитывая это обстоятельство, из (4.22) и (4.21) следует, что

$$\langle \omega', \omega \rangle = -\langle y', y_1 - y_2 \rangle + \langle x', x_1 - x_2 \rangle \leq p(\omega) = 2R\mu(\omega) \leq 2R,$$

или

$$\langle x', x_1 \rangle - \langle y', y_1 \rangle - R \leq \langle x', x_2 \rangle - \langle y', y_2 \rangle + R.$$

Найдется $a \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{gr co}F$

$$\langle x', x_1 \rangle - \langle y', y_1 \rangle - R \leq a \leq \langle x', x_2 \rangle - \langle y', y_2 \rangle + R.$$

Отсюда вытекает, что для всех $(x, y) \in \text{gr co}F$

$$|\langle x', x \rangle - \langle y', y \rangle - a| \leq R,$$

т. е. для аффинного метода $\hat{\varphi}(y) = \langle y', y \rangle + a$ справедлива оценка

$$e(x', \text{co}F, \hat{\varphi}) \leq R.$$

Величина справа согласно лемме 4.2 равна $E(x', \text{co}F)$, и поэтому метод $\hat{\varphi}$ оптимален в $(x', \text{co}F)$ -задаче, т. е.

$$(4.23) \quad e(x', \text{co}F, \hat{\varphi}) = E(x', \text{co}F).$$

Этот же метод является оптимальным в (x', F) -задаче. Действительно, из (4.19), (4.23), леммы 4.2, равенства (4.18) и снова леммы 4.2 имеем

$$\begin{aligned} e(x', F, \widehat{\varphi}) &= e(x', \text{co}F, \widehat{\varphi}) = E(x', \text{co}F) = R(x', \text{co}F) = R(x', F) \\ &= E(x', F). \end{aligned}$$

Таким образом, $\widehat{\varphi}$ — аффинный оптимальный метод в (x', F) -задаче. \square

Если X — комплексное пространство, то аффинного оптимального метода в (x', F) -задаче, вообще говоря, может и не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример 4.1. Пусть $X = Y = \mathbb{C}$, $W = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re } z| + 2|\text{Im } z| \leq 1\}$, $\langle z', z \rangle = z$, $F(z) = \text{Re } z + [-\delta, \delta]$, где $0 < \delta < 2/15$. Положим

$$\varphi_0(y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq 2\delta, \\ y, & |y| > 2\delta. \end{cases}$$

Тогда, если $|y| \leq 2\delta$, то

$$\sup_{\substack{(z,y) \in \text{gr } F \\ |y| \leq 2\delta}} |z - \varphi_0(y)| = \sup_{\substack{z \in W, y \in [-2\delta, 2\delta] \\ |\text{Re } z - y| \leq \delta}} |z|.$$

В силу того, что

$$|\text{Re } z| = |\text{Re } z - y + y| \leq |\text{Re } z - y| + |y| \leq 3\delta \leq \frac{2}{5},$$

имеем

$$\sup_{\substack{(z,y) \in \text{gr } F \\ |y| \leq 2\delta}} |z - \varphi_0(y)| \leq \sup_{\substack{z \in W \\ |\text{Re } z| \leq \frac{2}{5}}} |z| = \frac{1}{2}.$$

Если $|y| > 2\delta$, то $|\text{Re } z| \geq |y| - |\text{Re } z - y| > \delta$. Следовательно, $|\text{Im } z| < (1 - \delta)/2$. Поэтому

$$\sup_{\substack{(z,y) \in \text{gr } F \\ |y| > 2\delta}} |z - \varphi_0(y)| \leq \sup_{\substack{z \in W \\ |\text{Re } z - y| \leq \delta \\ |\text{Im } z| < (1-\delta)/2}} |z - y| < \sqrt{\delta^2 + (1 - \delta)^2/4} < \frac{1}{2}.$$

Тем самым

$$E(z', F) \leq e(z', F, \varphi_0) \leq \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, для любого аффинного метода $\varphi(y) = c_1 y + ic_2 y + \alpha$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, имеем

$$\sup_{(z,y) \in \text{gr } F} |z - \varphi(y)| \geq \sup_{\substack{z \in W \\ |\text{Re } z| \leq \delta}} |z - \varphi(0)| = \sup_{\substack{z \in W \\ |\text{Re } z| \leq \delta}} |z - \alpha| \geq \frac{1}{2}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то последнее неравенство строгое и, следовательно,

$$e(z', F, \varphi) > \frac{1}{2}.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$e(z', F, \varphi) = \sup_{(z,y) \in \text{gr } F} \sqrt{(\text{Re } z - c_1 y)^2 + (\text{Im } z - c_2 y)^2}.$$

При $c_1 \leq 0$, рассмотрев точку $(1, 1) \in \text{gr } F$, будем иметь

$$e(z', F, \varphi) \geq \sqrt{(1 - c_1)^2 + c_2^2} \geq 1.$$

При $c_1 > 0$, рассмотрев точку $(i/2, \delta \operatorname{sign} c_2) \in \operatorname{gr} F$, получим

$$e(z', F, \varphi) \geq \sqrt{c_1^2 \delta^2 + \left(\frac{1}{2} + |c_2| \delta\right)^2} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого аффинного метода φ

$$e(z', F, \varphi) > \frac{1}{2} \geq E(z', F).$$

Множество A в линейном пространстве X называется *уравновешенным*, если из того, что $x \in A$ и $|\lambda| = 1$, следует, что $\lambda x \in A$. Если X — вещественное пространство, то это равносильно центральной симметричности множества A .

Если $A \subset X$, то через $\operatorname{bco} A$ обозначим наименьшее выпуклое уравновешенное множество, содержащее A . Оно состоит из всех элементов вида $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$, где $x_j \in A$, $\lambda_j \in K$, $j = 1, \dots, m$, и $\sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq 1$.

Пусть X и Y — линейные пространства и $W \subset X$. Сопоставим многозначному отображению $F: W \rightarrow Y$ выпуклое уравновешенное многозначное отображение $\operatorname{bco} F: \operatorname{bco} W \rightarrow Y$ по правилу

$$(4.24) \quad \operatorname{bco} F(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \operatorname{bco} \operatorname{gr} F\}.$$

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть X и Y — линейные пространства над полем K вещественных или комплексных чисел, $W \subset X$, $F: W \rightarrow Y$ и $x' \in X'$. Тогда для существования линейного оптимального метода в (x', F) -задаче необходимо и достаточно, чтобы

$$(4.25) \quad R(x', F) = R(x', \operatorname{bco} F).$$

При этом

$$(4.26) \quad E(x', F) = \sup_{x \in \operatorname{bco} F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость равенства (4.25) доказывается точно так же, как в предыдущей теореме. Докажем его достаточность. Заметим, что если $R(x', F) = +\infty$, то равенство (4.25) выполняется автоматически и $E(x', F) = +\infty$ согласно лемме 4.2. Следовательно, в этом случае любой метод оптимален и, в частности, любой линейный.

Пусть выполнено соотношение (4.25) и $R(x', F) < +\infty$. Покажем, что тогда величина в правой части (4.26) также конечна. Для этого докажем неравенство

$$(4.27) \quad \sup_{x \in \operatorname{bco} F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle| \leq R(x', \operatorname{bco} F).$$

Действительно, если $(x_0, 0) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco} F$, то и $(-x_0, 0) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco} F$ в силу уравновешенности множества $\operatorname{gr} \operatorname{bco} F$, и мы имеем для любого $c \in K$

$$2|\langle x', x_0 \rangle| \leq |\langle x', x_0 \rangle - c| + |\langle x', -x_0 \rangle - c| \leq 2 \sup_{x \in \operatorname{bco} F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle - c|.$$

Переходя слева к верхней грани по всем $x \in \operatorname{bco} F^{-1}(0)$, справа — к нижней грани по всем $c \in K$ и затем оценивая полученное выражение справа величиной $R(x', \operatorname{bco} F)$, приходим к (4.27). Итак, если $R(x', F) < +\infty$ и выполнено (4.25), то $R(x', \operatorname{bco} F) < +\infty$, и из (4.27) получаем, что величина справа в (4.26) конечна.

Покажем теперь, что в $(x', \operatorname{bco} F)$ -задаче существует линейный оптимальный метод. Здесь рассуждения аналогичны тем, которые были в теореме 4.3. Положим

$$\Omega = \{(y, \langle x', x \rangle) \in Y \times K \mid (x, y) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco} F\}.$$

Легко видеть, что это выпуклое уравновешенное множество. Функционал Минковского $\mu(\cdot)$ множества Ω имеет вид

$$\mu(\omega) = \inf\{t > 0 \mid \omega \in t\Omega\},$$

причем $\mu(\omega) = +\infty$, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто. Положим

$$p(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \mu(\omega) = +\infty, \\ \rho\mu(\omega), & \mu(\omega) < +\infty, \end{cases}$$

где через ρ обозначена величина в правой части равенства (4.26). Рассмотрим линейный функционал ω'_0 , определенный на подпространстве $\{0\} \times K \subset Y \times K$ равенством $\langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$. Покажем, что для всех $\omega \in \{0\} \times K$ выполнено соотношение

$$(4.28) \quad |\langle \omega'_0, \omega \rangle| \leq p(\omega).$$

Если $p(\omega) = +\infty$, то неравенство (4.28) очевидно. Пусть $p(\omega) < +\infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon = \frac{\omega}{\mu(\omega) + \varepsilon}.$$

Тогда $\mu(\omega_\varepsilon) < 1$ и $\omega_\varepsilon \in \Omega$ (в силу выпуклости и уравновешенности Ω). Далее, очевидно, $\omega_\varepsilon \in \{0\} \times K$ и тем самым $\omega_\varepsilon = (0, \langle x', x_\varepsilon \rangle)$ для некоторого $x_\varepsilon \in \text{bco } F^{-1}(0)$. Следовательно,

$$|\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| = |\langle x', x_\varepsilon \rangle| \leq \sup_{x \in \text{bco } F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle| = \rho,$$

откуда

$$|\langle \omega'_0, \omega \rangle| = (\mu(\omega) + \varepsilon)|\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq (\mu(\omega) + \varepsilon)\rho = p(\omega) + \rho\varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает неравенство (4.28).

По теореме Хана–Банаха существует функционал ω' , являющийся продолжением ω'_0 на $Y \times K$, и при этом справедливо неравенство

$$(4.29) \quad |\langle \omega', \omega \rangle| \leq p(\omega), \quad \forall \omega \in Y \times K.$$

Пусть $\omega' = (-y', \tilde{\alpha})$, $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$. Тогда в силу того, что $\langle \omega', (0, r) \rangle = \langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$, $\tilde{\alpha} = 1$. Тем самым

$$(4.30) \quad \langle \omega', (y, r) \rangle = -\langle y', y \rangle + r, \quad \forall (y, r) \in Y \times K.$$

Пусть $(x, y) \in \text{gr bco } F$. Тогда $\omega = (y, \langle x', x \rangle) \in \Omega$ и, значит, $\mu(\omega) \leq 1$. Отсюда, из (4.30) и (4.29) получаем

$$|\langle \omega', \omega \rangle| = |\langle x', x \rangle - \langle y', y \rangle| \leq p(\omega) = \rho\mu(\omega) \leq \rho,$$

т. е. для линейного метода $\hat{\varphi}(y) = \langle y', y \rangle$ выполняется оценка

$$(4.31) \quad e(x', \text{bco } F, \hat{\varphi}) \leq \rho.$$

Из (4.31), (4.27) и леммы 4.2 следует, что

$$(4.32) \quad e(x', \text{bco } F, \hat{\varphi}) \leq \rho \leq R(x', \text{bco } F) = E(x', \text{bco } F),$$

и, значит, линейный метод $\hat{\varphi}(y) = \langle y', y \rangle$ оптимален в $(x', \text{bco } F)$ -задаче. Этот же метод является оптимальным и в (x', F) -задаче. Действительно, так же, как и при доказательстве теоремы 4.3, проверяется, что для любого линейного метода φ справедливо соотношение (см. (4.19))

$$(4.33) \quad e(x', F, \varphi) = e(x', \text{bco } F, \varphi).$$

Тогда из (4.33), (4.32), равенства (4.25) и леммы 4.2 имеем

$$E(x', F) \leq e(x', F, \hat{\varphi}) = e(x', \text{bco } F, \hat{\varphi}) \leq \rho \leq R(x', \text{bco } F) = R(x', F) = E(x', F),$$

т. е. $\widehat{\varphi}$ — линейный оптимальный метод в (x', F) -задаче и справедливо равенство (4.26). \square

Пусть многозначное отображение F имеет вид

$$F(x) = Ix + U,$$

где $I: W \rightarrow Y$ — линейный оператор, а $U \subset Y$ — некоторое выпуклое уравновешенное множество. Положим в этом случае

$$E(x', W, I, U) = E(x', F).$$

Из теоремы 4.4 вытекает, что

$$(4.34) \quad E(x', W, I, U) = \sup_{x \in F^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|.$$

Элемент $\widehat{x} \in W$, для которого $I\widehat{x} \in U$ и

$$\langle x', \widehat{x} \rangle = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|,$$

будем называть *экстремальным*.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $x' \in X'$, а W и U — выпуклые уравновешенные множества. Тогда $\widehat{x} \in W$ — экстремальный элемент, а $\lambda \in Y'$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если

- (i) $\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \langle x', \widehat{x} \rangle - \langle \lambda, I\widehat{x} \rangle$,
- (ii) $\sup_{y \in U} |\langle \lambda, y \rangle| = \langle \lambda, I\widehat{x} \rangle$,
- (iii) $I\widehat{x} \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \widehat{x} — экстремальный элемент и $\lambda \in Y'$ — оптимальный метод восстановления. Тогда, учитывая уравновешенность множеств W и U , а также равенство (4.34), будем иметь

$$(4.35) \quad \begin{aligned} \langle x', \widehat{x} \rangle &\leq |\langle x', \widehat{x} \rangle - \langle \lambda, I\widehat{x} \rangle| + |\langle \lambda, I\widehat{x} \rangle| \leq \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| + \sup_{y \in U} |\langle \lambda, y \rangle| \\ &= \sup_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix + y \rangle| = E(x', W, I, U) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|. \end{aligned}$$

В силу того, что \widehat{x} — экстремальный элемент, всюду в (4.35) — равенства. Следовательно, имеют место условия (i) и (ii). Условие (iii) вытекает из определения экстремальности \widehat{x} .

Предположим, что выполнены условия (i)–(iii). Тогда

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle| &\leq \sup_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix + y \rangle| \\ &\leq \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| + \sup_{y \in U} |\langle \lambda, y \rangle| = \langle x', \widehat{x} \rangle - \langle \lambda, I\widehat{x} \rangle + \langle \lambda, I\widehat{x} \rangle = \langle x', \widehat{x} \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что \widehat{x} — экстремальный элемент. Следовательно, в (4.36) — всюду равенства, а это означает, что

$$\sup_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix + y \rangle| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle| = E(x', W, I, U),$$

т. е. λ — оптимальный метод восстановления. \square

Наиболее распространенный случай в задачах оптимального восстановления по неточным данным, когда Y — линейное нормированное пространство, а

$$U = U_\delta = \{y \in Y : \|y\|_Y \leq \delta\}, \quad \delta \geq 0.$$

Положим в этом случае

$$(4.37) \quad E(x', W, I, \delta) = E(x', W, I, U_\delta).$$

Обозначим через Y^* множество всех линейных непрерывных функционалов на Y . Тогда из теоремы 4.5 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть W — выпуклое уравновешенное множество и $U = U_\delta$. Тогда $\hat{x} \in W$ — экстремальный элемент, а $\lambda \in Y^*$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если

- (i) $\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x} \rangle - \langle \lambda, I\hat{x} \rangle$,
- (ii) $\langle \lambda, I\hat{x} \rangle = \delta \|\lambda\|_{Y^*}$,
- (iii) $\|I\hat{x}\|_Y \leq \delta$.

Пусть S — некоторое непустое множество, Σ — σ -алгебра подмножеств множества S и μ — неотрицательная σ -аддитивная мера на Σ . Через $L_p(S, \Sigma, \mu)$ (или, короче, $L_p(S)$) обозначается совокупность всех σ -измеримых функций $g(\cdot)$ со значениями в $K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , для которых

$$\|g(\cdot)\|_{L_p(S)} = \left(\int_S |g(s)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|g(\cdot)\|_{L_\infty(S)} = \operatorname{vraisup}_{s \in S} |g(s)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Положим

$$(f(\cdot), g(\cdot))_S = \int_S f(s) \overline{g(s)} d\mu$$

и для $a \in K$, $1 \leq p < \infty$,

$$a_{(p)} = \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Пусть задан некоторый линейный оператор $T: X \rightarrow L_p(S)$. Положим

$$W_p^T = \{x \in X : \|Tx(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq 1\}$$

и рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $\langle x', x \rangle$ на множестве W_p^T по значениям линейного оператора $I: X \rightarrow Y$, заданного с погрешностью δ , т. е. по значениям многозначного отображения $F(x) = Ix + U_\delta$. Тем самым рассматривается задача о нахождении величины

$$(4.38) \quad E(x', W_p^T, I, \delta) = \inf_{\varphi: Y \rightarrow K} \sup_{\substack{x \in W_p^T, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} |\langle x', x \rangle - \varphi(y)|$$

и оптимального метода восстановления (метода, на котором достигается нижняя грань в (4.38)).

В силу соотношений двойственности, полученных в теореме 4.4, эта задача тесно связана с экстремальной задачей о нахождении величины

$$(4.39) \quad \sup_{\substack{x \in W_p^T \\ \|Ix\|_Y \leq \delta}} |\langle x', x \rangle|.$$

Во многих случаях экстремальные элементы в задаче (4.39) хорошо известны (или, во всяком случае, известен их вид). Однако нас будет интересовать

не только погрешность оптимального восстановления, но и сам оптимальный метод. Многие методы удается построить с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $\hat{x} \in W_p^T$, $T\hat{x}(\cdot) \neq 0$ и для $\hat{x}_0 = \hat{x}/\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}$ выполнены условия $\|I\hat{x}_0\|_Y \leq \delta$, $\langle \lambda, I\hat{x}_0 \rangle = \delta\|\lambda\|_{Y^*}$, где $\lambda \in Y^*$ — некоторый линейный непрерывный функционал. Предположим также, что при всех $x \in X$ имеет место равенство

$$(4.40) \quad \langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle = \begin{cases} \alpha(Tx(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ (Tx(\cdot), \varphi(\cdot)T\hat{x}(\cdot))_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha \geq 0$, $\varphi(\cdot) \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|T\hat{x}(s)| = 1$ почти всюду. Тогда λ — оптимальный метод восстановления, \hat{x}_0 — экстремальный элемент и

$$E(x', W_p^T, I, \delta) = \begin{cases} \alpha\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1} + \delta\|\lambda\|_{Y^*}, & 1 \leq p < \infty, \\ \|\varphi(\cdot)\|_{L_1(S)} + \delta\|\lambda\|_{Y^*}, & p = \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда из (4.40) и неравенства Гельдера имеем

$$\sup_{x \in W_p^T} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \alpha \sup_{x \in W_p^T} |(Tx(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S| \leq \alpha\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}.$$

С другой стороны, поскольку $\hat{x}_0 \in W_p^T$, то

$$\sup_{x \in W_p^T} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| \geq \alpha|(T\hat{x}_0(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S| = \alpha\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}.$$

Учитывая (4.40), получаем

$$\langle x', \hat{x}_0 \rangle = \langle \lambda, I\hat{x}_0 \rangle + \alpha(T\hat{x}_0(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S = \delta\|\lambda\|_{Y^*} + \alpha\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}.$$

Следовательно,

$$(4.41) \quad \sup_{x \in W_p^T} |\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle| = \langle x', \hat{x}_0 \rangle - \langle \lambda, I\hat{x}_0 \rangle.$$

Аналогично доказывается равенство (4.41) для $p = \infty$. Из следствия 4.6 вытекает теперь, что λ — оптимальный метод, а \hat{x}_0 — экстремальный элемент. \square

При $\delta = 0$ удобнее (чтобы не следить за положительностью множителя α) пользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть $\hat{x} \in W_p^T$, $T\hat{x}(\cdot) \neq 0$, $I\hat{x} = 0$, $\lambda \in Y^*$ и при всех $x \in X$ имеет место равенство

$$(4.42) \quad \langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle = \begin{cases} \alpha(Tx(\cdot), T\hat{x}(\cdot)_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ \alpha(Tx(\cdot), \varphi(\cdot)T\hat{x}(\cdot))_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi(\cdot) \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|T\hat{x}(s)| = 1$ почти всюду. Тогда λ — оптимальный метод восстановления, $\hat{x}_0 = \hat{x}/\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}$ — экстремальный элемент и

$$E(x', W_p^T, I, \delta) = \begin{cases} |\alpha|\|T\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p-1}, & 1 \leq p < \infty, \\ |\alpha|\|\varphi(\cdot)\|_{L_1(S)}, & p = \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = 0$, то утверждение теоремы сразу же вытекает из теоремы 4.7. Пусть $\alpha \neq 0$. Положим

$$\tilde{x} = e^{-i \arg \alpha} \hat{x}.$$

Тогда равенство (4.42) можно записать в виде

$$\langle x', x \rangle - \langle \lambda, Ix \rangle = \begin{cases} |\alpha|(Tx(\cdot), T\tilde{x}(\cdot)_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ (Tx(\cdot), \widehat{\varphi}(\cdot)T\widehat{x}(\cdot))_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\widehat{\varphi}(\cdot) = |\alpha|\varphi(\cdot)$. Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 4.7. \square

4.7. Построение оптимального метода с помощью параметризации экстремального элемента

Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X . Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $x' \in X'$ на множестве W по точным значениям информационного оператора

$$Ix = (\langle x'_1, x \rangle, \dots, \langle x'_n, x \rangle),$$

где x'_j , $j = 1, \dots, n$, — некоторые фиксированные линейные функционалы на X . Тогда в соответствии с общей постановкой задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(x', W, I) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - m(Ix)|$$

и соответствующего оптимального метода (т. е. метода, на котором достигается нижняя грань).

Из теоремы 4.4 следует, что

$$(4.43) \quad E(x', W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ \langle x'_j, x \rangle = 0, \quad j=1, \dots, n}} |\langle x', x \rangle|.$$

Задача (4.43) часто оказывается проще, чем задача нахождения оптимального метода восстановления. При наличии некоторой параметризации экстремального элемента в (4.43) существует способ построения оптимального метода восстановления, основанный на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X и \widehat{x} — экстремальный элемент в задаче (4.43). Предположим, что при всех $M = (t_1, \dots, t_{s+n}) \in \mathbb{R}^{n+s}$ из некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^{n+s}$ существуют $x(M) \in X$ такие, что $x(M_0) = \widehat{x}$ и для заданных функций $\psi_1(M), \dots, \psi_s(M)$ таких, что $\psi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, s$, при всех M из окрестности M_0 , удовлетворяющих условию $\psi_j(M) = 0$, $j = 1, \dots, s$, $x(M) \in W$ (в случае $s = 0$ будем считать, что при всех M из окрестности M_0 $x(M) \in W$). Пусть, кроме того, функции $\varphi(M) = \langle x', x(M) \rangle$, $\varphi_j(M) = \langle x'_j, x(M) \rangle$, $j = 1, \dots, n$, и $\psi_j(M)$, $j = 1, \dots, s$, имеют в окрестности M_0 непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы

$$J(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n+s}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n+s}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_{n+s}} & \cdots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_{n+s}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0 , а $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n+s})^T$ — решение системы

$$J(M_0)\mathbf{C} = \left(\text{grad } \varphi|_{M_0} \right)^T.$$

Тогда единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$(4.44) \quad \langle x', x \rangle \approx \sum_{j=1}^n C_j \langle x'_j, x \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\langle x', x \rangle \approx \sum_{j=1}^n C_j \langle x'_j, x \rangle$$

— оптимальный метод восстановления (существование его вытекает из теоремы 4.4). Тогда в силу того, что \hat{x} — экстремальный элемент, имеем при всех $x \in W$

$$\left| \langle x', x \rangle - \sum_{j=1}^n C_j \langle x'_j, x \rangle \right| \leq \langle x', \hat{x} \rangle.$$

Следовательно, при всех M из некоторой окрестности M_0 таких, что $\psi_j(M) = 0$, $j = 1, \dots, s$, выполнено неравенство

$$\left| \varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M) \right| \leq \varphi(M_0).$$

Поскольку $\varphi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, то отсюда вытекает, что функция

$$\varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M)$$

имеет относительный экстремум в точке M_0 . Метод Лагранжа приводит к необходимым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^s C_{n+j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_m} = 0, \quad m = 1, \dots, n+s,$$

из которых однозначно определяются C_1, \dots, C_n . \square

Иногда удобно пользоваться несколько иным видом записи оптимального метода (4.44).

ТЕОРЕМА 4.10. В условиях теоремы 4.9 единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$\langle x', x \rangle \approx \sum_{k=1}^{n+s} y_k \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \Big|_{M_0},$$

где y_1, \dots, y_{n+s} являются решением системы

$$(4.45) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+s} y_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{M_0} &= \langle x'_j, x \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^{n+s} y_k \frac{\partial \psi_j}{\partial t_k} \Big|_{M_0} &= 0, \quad j = n+1, \dots, n+s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.9 вытекает, что единственным линейным оптимальным методом является метод

$$\langle x', x \rangle \approx \left(J^{-1}(M_0) \left(\text{grad } \varphi \Big|_{M_0} \right)^T, z \right) = \left(\left(\text{grad } \varphi \Big|_{M_0} \right)^T, (J^*(M_0))^{-1} z \right),$$

где $z = (\langle x'_1, x \rangle, \dots, \langle x'_n, x \rangle, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+s}$, а (\cdot, \cdot) — обычное скалярное произведение в \mathbb{R}^{n+s} . Положив $y = (J^*(M_0))^{-1}z$, получаем для координат вектора y систему 4.45. \square

4.8. Оптимальная интерполяция на классе $W_\infty^r([-1, 1])$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $x(\tau)$, $\tau \in [-1, 1]$, по значениям функции $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$ и ее производных в системе различных точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ из отрезка $[-1, 1]$. Случаи $r \geq n$ и $r = 1$ были разобраны в разделе 4.1. Будем считать, что информация о функции $x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$, имеющаяся в нашем распоряжении, такова:

$$(4.46) \quad F_{\bar{t}}x(\cdot) = (x(t_1), \dots, x^{(\nu_1-1)}(t_1), \dots, x(t_n), \dots, x^{(\nu_n-1)}(t_n)).$$

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu_j \leq r$, $j = 1, \dots, n$, $m = \nu_1 + \dots + \nu_n \geq r$ и $s_1 < \dots < s_{m-r}$ — узлы совершенного сплайна $s(\cdot)$, удовлетворяющего условиям

$$s^{(\nu)}(t_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для всех $\tau \in [-1, 1]$

$$(4.47) \quad E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = |s(\tau)|,$$

а единственным линейным оптимальным методом восстановления является полиномиальный сплайн $S(\cdot)$ степени $r - 1$ с узлами в точках s_1, \dots, s_{m-r} , удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$(4.48) \quad S^{(\nu)}(t_j) = x^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что существование сплайнов $s(\cdot)$ и $S(\cdot)$ доказано в 5.27.2 и 5.27.3. Докажем равенство (4.47). Из теоремы 4.4 вытекает, что

$$E(x(\tau), W_\infty^r([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1]) \\ F_{\bar{t}}x(\cdot) = 0}} |x(\tau)|.$$

Предположим, что найдется функция $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$, для которой $F_{\bar{t}}\hat{x}(\cdot) = 0$, а $|\hat{x}(\tau)| > |s(\tau)|$. Положим

$$y(\cdot) = s(\cdot) - \rho \hat{x}(\cdot), \quad \rho = \frac{s(\tau)}{\hat{x}(\tau)}.$$

Тогда функция $y(\cdot)$ имеет $m + 1$ нулей с учетом кратности и, следовательно, $y^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее $m - r + 1$ перемен знака. С другой стороны, в силу того, что $|\rho| < 1$, на каждом из интервалов $(-1, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{m-r}, 1)$ функция $y^{(r)}(\cdot)$ имеет тот же знак, что и $s^{(r)}(\cdot)$, а значит, у нее ровно $m - r$ перемен знака. Полученное противоречие доказывает равенство (4.47).

Для построения оптимального метода воспользуемся теоремой 4.10. Пусть совершенный сплайн $s(\cdot)$ имеет вид

$$s(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j t^j + \frac{\alpha}{r!} \left(t^r + 2 \sum_{j=1}^{m-r} (-1)^j (t - s_j)_+^r \right).$$

Для точек $M = (b_0, \dots, b_{r-1}, u_1, \dots, u_{m-r}) \in \mathbb{R}^m$, достаточно близких к точке $M_0 = (a_0, \dots, a_{r-1}, s_1, \dots, s_{m-r}) \in \mathbb{R}^m$, рассмотрим функции

$$s_M(t) = \sum_{j=0}^{r-1} b_j t^j + \frac{\alpha}{r!} \left(t^r + 2 \sum_{j=1}^{m-r} (-1)^j (t - u_j)_+^r \right).$$

Очевидно, что $s_M(\cdot) \in W_\infty^r([-1, 1])$ для всех M из достаточно малой окрестности M_0 и, кроме того, $s_{M_0}(\cdot) = s(\cdot)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_M(t)}{\partial b_j} \Big|_{M_0} &= t^j, \quad j = 0, \dots, r-1, \\ \frac{\partial s_M(t)}{\partial u_j} \Big|_{M_0} &= \frac{2\alpha(-1)^{j+1}}{(r-1)!} (t-s_j)_+^{r-1}, \quad j = 1, \dots, m-r. \end{aligned}$$

Положив

$$S(t) = \sum_{j=0}^{r-1} y_j t^j + \sum_{j=1}^{m-r} y_j (t-s_j)_+^{r-1},$$

получаем, что система (4.45) принимает вид (4.48). Поэтому оптимальным методом восстановления является значение интерполяционного сплайна $S(\cdot)$ в точке τ . \square

4.9. Оптимальная интерполяция на классе H_p

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции $f(\cdot) \in H_p$ в некоторой точке $\xi \in D$ по точным значениям информационного оператора

$$(4.49) \quad I_\tau f = (f(z_1), \dots, f(\nu_1^{-1})(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f(\nu_n^{-1})(z_n)),$$

где

$$\tau = \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix},$$

а z_1, \dots, z_n — различные точки из D . Иными словами, нас интересует величина

$$(4.50) \quad E(f(\xi), H_p, I_\tau) = \inf_{\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}} \sup_{f(\cdot) \in H_p} |f(\xi) - \varphi(I_\tau f)|,$$

где $N = \sum_{j=1}^n \nu_j$. Кроме того, мы ищем оптимальный метод восстановления, т. е. метод, на котором достигается нижняя грань в (4.50).

Положим

$$W(z) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z} \right)^{\nu_j}, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n \left(\frac{z-z_s}{1-\bar{z}_s z} \right)^{\nu_s}.$$

В дальнейшем под выражениями с p при $p = \infty$ понимаются пределы этих выражений при $p \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4.12. *При всех $1 \leq p \leq \infty$ метод*

$$(4.51) \quad f(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j),$$

где

$$c_{j\nu}(\xi, p) = \frac{W(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{\nu!(\nu_j-\nu-1)!} \left(\frac{(1-\bar{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(\xi-z)(1-\bar{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \right) \Big|_{z=z_j}^{(\nu_j-\nu-1)},$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p . Для погрешности оптимального метода восстановления значений функций $f(\cdot) \in H_p$ в точке ξ по информации $I_\tau f$ справедливо равенство

$$E(f(\xi), H_p, I_\tau) = \frac{|W(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(z) = \frac{W(z)}{(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}}, \quad \alpha := W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}$$

(здесь и далее под выражениями типа $(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}$ понимаются значения той ветви соответствующей многозначной функции, которая при $z = 0$ принимает значение 1). Очевидно, что $g(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ для любого $\xi \in D$. Пусть $1 \leq p < \infty$.

Положим $d\mu(e^{i\theta}) = \frac{d\theta}{2\pi}$. Тогда, пользуясь теоремой Коши о вычетах, для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_p$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha \int_{|z|=1} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) d\mu(z) &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \\ &= f(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j). \end{aligned}$$

Подставив в эти равенства $f(\cdot) = g(\cdot)$, находим

$$\|g(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p} = (1 - |\xi|^2)^{-1/p}.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.8.

При $p = \infty$, положив $\varphi(z) = (1 - \bar{\xi}z)^{-2}$, будем иметь

$$\begin{aligned} (4.52) \quad \alpha \int_{|z|=1} \overline{g(z)} |\varphi(z)| f(z) d\mu(z) &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)} \\ &= f(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi, \infty) f^{(\nu)}(z_j). \end{aligned}$$

Остается применить теорему 4.8. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.13. Пусть $\nu_1 = \dots = \nu_n = 1$. Тогда при всех $1 \leq p \leq \infty$ метод

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1 - |z_j|^2}{1 - \bar{z}_j \xi} \left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - z_j \bar{\xi}} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p .

Рассмотрим еще один частный случай, когда $n = 1$, $z_1 = 0$ и $\nu_1 = \nu$ ($I_\tau f = (f(0), \dots, f^{(\nu-1)}(0))$) — восстановление по тейлоровской информации. В этом случае оптимальный метод (4.51) будет иметь следующий вид:

при $p = \infty$

$$(4.53) \quad f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\xi^j}{j!} (1 - |\xi|^{2(\nu-j)}) f^{(j)}(0);$$

при $p = 2$

$$f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0);$$

при $p = 1$

$$f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{\nu-2} \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{\xi^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{1}{1 - |\xi|^2} f^{(\nu-1)}(0).$$

Кроме того, при всех $1 \leq p \leq \infty$

$$e(f(\xi), H_p, I_\tau) = \frac{|\xi|^\nu}{(1 - |\xi|^2)^{1/p}}.$$

4.10. Оптимальная интерполяция на классах Харди–Соболева H_∞^r

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(x)$, $x \in (-1, 1)$, на классе H_∞^r по значениям информационного оператора

$$I_\tau f = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+r})),$$

где $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$. В случае $r = 0$ решение рассматриваемой задачи было получено в п. 4.9, поэтому будем считать, что $r \geq 1$. Для функций $f(\cdot)$, аналитических в единичном круге, положим

$$(T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z - \zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta) d\zeta.$$

Очевидно, что $(T_r f)^{(r)}(\cdot) = f(\cdot)$, и, следовательно, $T_r f(\cdot) \in H_\infty^r$ при всех $f(\cdot) \in H_\infty^r$.

ТЕОРЕМА 4.14. *При всех $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$ найдутся такие $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$ и единственная функция $f_0(\cdot) \in H_\infty^r$, имеющая вид*

$$(4.54) \quad f_0(\cdot) = P_{r-1}(\cdot) + (T_r B_0)(\cdot),$$

где $P_{r-1}(\cdot)$ — полином степени $r-1$, вещественный на вещественной оси, а $B_0(\cdot)$ — произведение Бляшке порядка n

$$B_0(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

что выполнены равенства

$$(4.55) \quad f_0(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n+r.$$

Кроме того, при всех $x \in (-1, 1)$

$$(4.56) \quad \sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r \\ f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{n+r}) = 0}} |f(x)| = |f_0(x)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathbb{S}^n = \{ \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi_0| + |\xi_1| + \dots + |\xi_n| = 1 \}.$$

Из классической задачи Неванлинны–Пика следует, что для каждого вектора $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{S}^n$ существует единственное произведение Бляшке $B_\xi(\cdot) \in \mathcal{B}_n$ и $\rho > 0$ такие, что

$$\rho B_\xi(x_j) = \xi_j, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

где x_1, \dots, x_{n+1} — различные точки из $(-1, 1)$. В силу того, что функция $B_1(z) = \overline{B_\xi(\bar{z})}$ удовлетворяет тем же условиям, произведение Бляшке $B_\xi(\cdot)$ — вещественно на вещественной оси. Таким образом, построено нечетное отображение $\eta(\cdot)$, которое каждой точке из \mathbb{S}^n ставит в соответствие произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси и непрерывное в $C(E)$ для любого компакта $E \subset D$.

Пусть $B_\xi(\cdot) = \eta(\xi)$. Найдем полином $P_\xi(\cdot)$ из условий

$$P_\xi(\tau_j) = -(T_r B_\xi)(\tau_j), \quad j = 1, \dots, r.$$

Положим

$$g_\xi(\cdot) = P_\xi(\cdot) + (T_r B_\xi)(\cdot).$$

Определим отображение $\omega: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством

$$\omega(\xi) = (g_\xi(\tau_{r+1}), \dots, g_\xi(\tau_{n+r})).$$

Отображение $\omega(\cdot)$ нечетное и непрерывное. Следовательно, по теореме Борсука существует $\widehat{\xi} \in \mathbb{S}^n$, для которого $\omega(\widehat{\xi}) = 0$. Положим $f_0(\cdot) = g_{\widehat{\xi}}(\cdot)$. Для функции $f_0(\cdot)$ выполнены равенства (4.55). Введя обозначения $P_{r-1}(\cdot) = P_{\widehat{\xi}}(\cdot)$, $B_0(\cdot) = B_{\widehat{\xi}}(\cdot)$, приходим к виду (4.54). Произведение Бляшке $B_0(\cdot)$ вещественно на вещественной оси. По теореме Ролля функция $f_0^{(r)}(\cdot)$ в интервале (τ_1, τ_{n+r}) имеет не менее n нулей. Но $f_0^{(r)}(\cdot) = B_0(\cdot)$. Поэтому имеет место равенство

$$B_0(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - z_j z},$$

где $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = -1$, то, умножив $f_0(\cdot)$ на -1 , получим функцию, удовлетворяющую тем же условиям (4.55) и имеющую вид (4.54).

Предположим, что нашлась функция $f_1(\cdot)$ вида (4.54), удовлетворяющая условиям (4.55), отличная от $f_0(\cdot)$. Тогда найдется точка $x \in (-1, 1)$, для которой либо $|f_1(x)| > |f_0(x)|$, либо $|f_1(x)| < |f_0(x)|$. Пусть для определенности $|f_1(x)| > |f_0(x)|$. Рассмотрим функцию

$$F(\cdot) = f_0(\cdot) - \rho f_1(\cdot), \quad \rho = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}.$$

Тогда у функции $F(\cdot)$ не менее $n+r+1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. По теореме Ролля функция $F^{(r)}(\cdot) = B_0(\cdot) - \rho B_1(\cdot)$ имеет не менее $n+1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. На границе единичного круга имеем

$$|F^{(r)}(e^{i\theta}) - B_0(e^{i\theta})| = |\rho B_1(e^{i\theta})| = |\rho| < 1 = |B_0(e^{i\theta})|.$$

По теореме Руше у функций $B_0(\cdot)$ и $F^{(r)}(\cdot)$ должно быть одинаковое число нулей в единичном круге D . Так как у $B_0(\cdot)$ ровно n нулей, приходим к противоречию.

Докажем равенство (4.56). Предположим, что для некоторого $x \in (-1, 1)$ нашлась функция $f(\cdot) \in H_\infty^r$, удовлетворяющая условию (4.55), такая, что $|f(x)| > |f_0(x)|$. Без ограничения общности можно считать, что $f(x) > 0$. Через $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ обозначим класс функций из H_∞^r , вещественных в интервале $(-1, 1)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z) + \overline{f(\bar{z})}}{2}.$$

Функция $f_1(\cdot) \in H_\infty^{r, \mathbb{R}}$, удовлетворяет условию (4.55) и для нее $f_1(x) > |f_0(x)|$. Положим

$$F(\cdot) = f_0(\cdot) - \rho f_1(\cdot), \quad \rho = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}.$$

Тогда у функции $F(\cdot)$ не менее $n+r+1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. По теореме Ролля функция $F^{(r)}(\cdot) = B_0(\cdot) - \rho f_1^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее $n+1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. На границе единичного круга имеем

$$|F^{(r)}(e^{i\theta}) - B_0(e^{i\theta})| = |\rho f_1^{(r)}(e^{i\theta})| \leq |\rho| < 1 = |B_0(e^{i\theta})|.$$

По теореме Руше у функций $B_0(\cdot)$ и $F^{(r)}(\cdot)$ должно быть одинаковое число нулей в единичном круге D . Так как у $B_0(\cdot)$ ровно n нулей, приходим к противоречию. \square

Из равенства (4.43) сразу следует, что для погрешности оптимального восстановления значения $f(x)$ на классе H_∞^r и $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ справедливы равенства

$$E(f(x), H_\infty^r, I_\tau) = E(f(x), H_\infty^{r, \mathbb{R}}, I_\tau) = |f_0(x)|.$$

Оптимальный метод восстановления может быть получен с помощью теоремы 4.9.

ТЕОРЕМА 4.15. При всех $x \in (-1, 1)$ метод

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{n+r} C_j(x) f(\tau_j),$$

в котором $C_1(x), \dots, C_{n+r}(x)$ являются решениями системы

$$(4.57) \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_{n+r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{r-1} & \dots & \tau_{n+r}^{r-1} \\ (T_r g_1)(\tau_1) & \dots & (T_r g_1)(\tau_{n+r}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (T_r g_n)(\tau_1) & \dots & (T_r g_n)(\tau_{n+r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \vdots \\ C_{n+r}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{r-1} \\ (T_r g_1)(x) \\ \vdots \\ (T_r g_n)(x) \end{pmatrix},$$

где

$$g_m(z) = B_0(z) \frac{1 - z^2}{(z - z_m)(1 - z_m z)}, \quad m = 1, \dots, n,$$

а функция $B_0(\cdot)$ с нулями z_1, \dots, z_n определена в теореме 4.14, является оптимальным на классе H_∞^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $P = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+r}$ положим

$$f_P(z) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + (T_r B_P)(z),$$

где

$$B_P(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - t_j}{1 - t_j z}.$$

Пусть полином $P_{r-1}(\cdot)$ из теоремы 4.14 имеет вид

$$P_{r-1}(z) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^0 z^j.$$

При $P = P_0 = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_{r-1}^0, z_1, \dots, z_n)$ функция $f_{P_0}(\cdot)$ является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения $f(x)$ на классах H_∞^r и $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$. Положим $\tau_0 = x$,

$$\varphi_j(P) = f_P(\tau_j), \quad j = 0, \dots, n+r.$$

Имеем при всех $j = 0, \dots, n+r$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial a_m} = \tau_j^m, \quad m = 0, \dots, r-1,$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} = (T_r g_m)(\tau_j), \quad m = 1, \dots, n+r.$$

Для получения оптимального метода на классе $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ остается применить теорему 4.9, предварительно проверив, что определитель системы (4.57) отличен от нуля. Если предположить, что этот определитель равен нулю, то найдутся C_1, \dots, C_{n+r} , не все равные нулю, такие, что функция

$$F(z) = \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} z^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (T_r g_j)(z)$$

обращается в нуль в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$. Тогда по теореме Ролля найдутся точки $\tau_1 < x_1 < \dots < x_n < \tau_{n+r}$, в которых $F^{(r)}(\cdot)$ обращается в нуль. Тем самым

$$F^{(r)}(x_m) = \sum_{j=1}^n C_{j+r} g_j(x_m) = 0, \quad m = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_{j+r} g_j(z) &= (1-z^2) B_0(z) \sum_{j=1}^n \frac{C_{j+r}}{(z-z_j)(1-z_j z)} \\ &= (1-z^2) B_0(z) \frac{Q_{2n-2}(z)}{\prod_{j=1}^n (z-z_j)(1-z_j z)} = (1-z^2) \frac{Q_{2n-2}(z)}{\prod_{j=1}^n (1-z_j z)^2}. \end{aligned}$$

Тем самым $Q_{2n-2}(x_m) = 0$, $m = 1, \dots, n$. В силу равенства

$$\sum_{j=1}^n \frac{C_{j+r}}{\left(\frac{1}{z} - z_j\right) \left(1 - z_j \frac{1}{z}\right)} = \frac{Q_{2n-2}\left(\frac{1}{z}\right)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{z} - z_j\right) \left(1 - z_j \frac{1}{z}\right)}$$

получаем

$$Q_{2n-2}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{Q_{2n-2}(z)}{z^{2n-2}}.$$

Таким образом, если $x_m \neq 0$, то $Q_{2n-2}(1/x_m) = 0$. Так как все точки x_1, \dots, x_n различные, то найдутся по крайней мере еще $n-1$ нулей полинома $Q_{2n-2}(\cdot)$. Отсюда следует, что $Q_{2n-2}(z) \equiv 0$, т. е. $C_{r+1} = \dots = C_{n+r} = 0$. Отсюда вытекает, что и $C_1 = \dots = C_r = 0$.

Докажем, что построенный метод (обозначим его через φ) является оптимальным на классе H_∞^r . Предположим, что найдется функция $f_0(\cdot) \in H_\infty^r$ и $x \in (-1, 1)$, для которых

$$(4.58) \quad |f_0(x) - \varphi(I_\tau f_0)| > E(f(x), H_\infty^r, I_\tau).$$

Тогда для функции $\overline{f_0(\bar{z})} \in H_\infty^r$ также выполнено неравенство (4.58). Без ограничения общности можно считать, что $f_0(x) - \varphi(I_\tau f_0) > 0$. Следовательно, для функции

$$g(z) := \frac{f_0(z) + \overline{f_0(\bar{z})}}{2} \in H_\infty^{\mathbb{R}}$$

имеем

$$g(x) - \varphi(I_\tau g) > E(f(x), H_\infty^r, I_\tau) = E(f(x), H_\infty^{\mathbb{R}}, I_\tau),$$

что невозможно в силу оптимальности метода φ на классе $H_\infty^{\mathbb{R}}$. \square

Обозначим матрицу системы (4.57) через A . Тогда оптимальный метод, построенный в теореме 4.15, будет иметь вид

$$f(x) \approx (A^{-1} \mathbf{G}(x), I_\tau f) = (\mathbf{G}(x), (A^*)^{-1} I_\tau f),$$

где

$$\mathbf{G}(x) = (1, x, \dots, x^{r-1}, (T_r g_1)(x), \dots, (T_r g_n)(x)),$$

а A^* — матрица, сопряженная к A (здесь (\cdot, \cdot) — стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^{n+r}). Тем самым оптимальный метод может быть записан в виде

$$(4.59) \quad f(x) \approx \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} x^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (T_r g_j)(x),$$

где C_1, \dots, C_{n+r} — решения системы

$$\sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} \tau_m^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (Tg_j)(\tau_m) = f(\tau_m), \quad m = 1, \dots, n+r.$$

Для фиксированных $-1 < z_1 < \dots < z_n < 1$ положим

$$X_{n+r}^z := \text{span}\{1, z, \dots, z^{r-1}, (T_r g_1)(z), \dots, (T_r g_n)(z)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.16. Пусть $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$, а $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$ — определены в теореме 4.14. Тогда функция $g(x) \in X_{n+r}^z$, интерполирующая $f(\cdot)$ в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$, является оптимальным методом восстановления значения $f(x)$, $x \in (-1, 1)$, на классе H_∞^r по значениям в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$.

4.11. Поперечники $d_n(H_\infty^r, C([a, b]))$

Обозначим через \mathcal{A}_n^r множество функций вида

$$(4.60) \quad f(\cdot) = P_{r-1}(\cdot) + (T_r B)(\cdot),$$

где $P_{r-1}(\cdot)$ — полином степени не выше $r-1$, вещественный на вещественной оси, а $B(\cdot)$ — произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси. Функции вида (4.60) являются аналогами совершенных сплайнов в задаче оптимальной интерполяции функций из класса $W_\infty^r([-1, 1])$.

ТЕОРЕМА 4.17. Пусть $[a, b] \subset (-1, 1)$. При всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ существует функция $\hat{f}(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$ и точки $a \leq t_1 < \dots < t_{n+r+1} \leq b$ такие, что

$$(4.61) \quad \hat{f}(t_j) = (-1)^j \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])} \quad j = 1, \dots, n+r+1.$$

При этом

$$(4.62) \quad \inf_{f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r} \|f(\cdot)\|_{C([a, b])} = \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы 4.14 было построено нечетное отображение $\eta(\cdot)$, которое каждой точке из \mathbb{C}^n ставит в соответствие произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси и непрерывное в $C(E)$ для любого компакта $E \subset D$. Пусть $B_\xi(\cdot) = \eta(\xi)$. Положим

$$g_\xi(\cdot) = (T_r B_\xi)(\cdot).$$

Пусть

$$\hat{p}_\xi(t) = \sum_{j=0}^{n+r-1} a_j(\xi) t^j$$

— многочлен наилучшего равномерного приближения функции $g_\xi(\cdot)$ на отрезке $[a, b]$. Положим

$$A(\xi) = (a_r(\xi), \dots, a_{n+r-1}(\xi)).$$

Отображение $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является нечетным и непрерывным (непрерывность следует из непрерывной зависимости $g_\xi(\cdot)$ от $\xi \in \mathbb{S}^n$ и теоремы 5.18). По теореме Борсука существует $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^n$, для которого $A(\hat{\xi}) = 0$. Положим

$$(4.63) \quad \hat{f}(t) = - \sum_{j=0}^{r-1} a_j(\hat{\xi}) t^j + g_{\hat{\xi}}(t).$$

Очевидно, что $\hat{f}(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$. По теореме Чебышёва найдутся $n+r+1$ точек $a \leq t_1 < \dots < t_{n+r+1} \leq b$, для которых

$$(4.64) \quad \hat{f}(t_j) = \sigma(-1)^j \|\hat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])}, \quad j = 1, \dots, n+r+1,$$

где $\sigma = 1$ или -1 (если $\sigma = -1$, то в качестве $\widehat{f}(\cdot)$ можно взять выражение в правой части (4.63) с противоположным знаком). Из (4.64) вытекает, что у $\widehat{f}(\cdot)$ не менее $n + r$ нулей в интервале (a, b) . По теореме Ролля у $\widehat{f}^{(r)}(\cdot)$ тогда не менее n нулей в интервале (a, b) . Но $\widehat{f}^{(r)}(\cdot) = \widehat{B}(\cdot)$, а $\widehat{B}(\cdot)$ — произведение Бляшке порядка не выше n . Следовательно,

$$\widehat{f}^{(r)}(z) = \widehat{B}(z) = \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z},$$

где $\lambda = \pm 1$.

Предположим, что нашлась функция $f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r$, для которой

$$\|f(\cdot)\|_{C([a, b])} < \|\widehat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

Рассмотрим функцию $R(\cdot) = \widehat{f}(\cdot) - f(\cdot)$. Имеем

$$\text{sign } R(t_j) = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, n + r + 1.$$

Тогда по теореме Ролля функция $R^{(r)}(\cdot) = \widehat{B}(\cdot) - B(\cdot)$, где

$$B(z) = \mu \prod_{j=1}^k \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad k \leq n, \quad \mu = \pm 1,$$

и, кроме того, вещественна на вещественной оси, имеет не менее n различных нулей в интервале (a, b) . Можно считать, что $\mu = \lambda$ (иначе можно рассмотреть вместо $f(\cdot)$ функцию $-f(\cdot)$). Тогда $\widehat{B}(\pm 1) - B(\pm 1) = 0$. Следовательно, разность $\widehat{B}(\cdot) - B(\cdot)$ может быть представлена в виде

$$\widehat{B}(z) - B(z) = (1 - z^2) \frac{Q(z)}{\prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j z) \prod_{j=1}^k (1 - \beta_j z)},$$

где $Q(\cdot)$ — полином степени не выше $2n - 2$. В силу того, что для любого вещественного $z \neq 0$ справедливы равенства

$$\widehat{B}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\widehat{B}(z)}, \quad B\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{B(z)},$$

кроме n нулей в интервале (a, b) у разности $\widehat{B}(\cdot) - B(\cdot)$ найдется еще не менее $n - 1$ вещественных нулей вне отрезка $[-1, 1]$. Тем самым у многочлена $Q(\cdot)$, степень которого не выше $2n - 2$, нашлось не менее $2n - 1$ нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость (4.62). \square

ТЕОРЕМА 4.18. *При всех $n, r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$d_{n+r}(H_\infty^r, C([a, b])) = \|\widehat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])},$$

где $\widehat{f}(\cdot)$ — из теоремы 4.17.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (4.61) вытекает, что существуют точки $t_1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < t_{n+r+1}$ такие, что

$$\widehat{f}(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n + r.$$

Из теоремы 4.14 следует, что

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in H_\infty^r \\ f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{n+r}) = 0}} |f(x)| = |\widehat{f}(x)|.$$

Тогда существуют C_1, \dots, C_{n+r} (см. (4.59)) такие, что для всех $x \in (-1, 1)$

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} x^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (Tg_j)(x) \right| \leq |\widehat{f}(x)|.$$

Отсюда

$$d_{n+r}(H_\infty^r, C([a, b])) \leq \|\widehat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

Отметим, что если линейное подпространство функций размерности $n + r$ имеет конечное расстояние до множества H_∞^r , то оно должно содержать подпространство \mathcal{P}_{r-1} полиномов степени не выше $r - 1$. Пусть L_{n+r} — произвольное подпространство $L_q([a, b])$, $1 < q < \infty$, содержащее \mathcal{P}_{r-1} , с базисом $1, x, \dots, x^{r-1}, g_1(x), \dots, g_n(x)$. Для каждой функции $f(\cdot) \in H_\infty^r$ обозначим через $c_1(f), \dots, c_{n+r}(f)$ координаты единственного элемента наилучшего приближения $f(\cdot)$ подпространством L_{n+r} . При доказательстве теоремы 4.14 было построено нечетное отображение $\eta(\cdot)$, которое каждой точке из \mathbb{C}^n ставит в соответствие произведение Бляшке порядка не выше n , вещественное на вещественной оси и непрерывное в $C(E)$ для любого компакта $E \subset D$.

Пусть $B_\xi(\cdot) = \eta(\xi)$. Положим

$$g_\xi(\cdot) = (T_r B_\xi)(\cdot), \quad A(\xi) = (c_{r+1}(g_\xi), \dots, c_{n+r}(g_\xi)).$$

Отображение $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непрерывным и нечетным отображением. По теореме Борсука существует точка $\widehat{\xi} \in \mathbb{S}^n$, для которой $A(\widehat{\xi}) = 0$. Это означает, что

$$\inf_{g(\cdot) \in L_{n+r}} \|g_{\widehat{\xi}}(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q([a, b])} = \|g_{\widehat{\xi}}(\cdot) - P_{r-1}(\cdot)\|_{L_q([a, b])},$$

где

$$P_{r-1}(x) = \sum_{j=1}^r c_j(g_{\widehat{\xi}}) x^{j-1}.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} \sup_{f(\cdot) \in H_\infty^r} \inf_{g(\cdot) \in L_{n+r}} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q([a, b])} &\geq \inf_{g(\cdot) \in L_{n+r}} \|g_{\widehat{\xi}}(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q([a, b])} \\ &= \|g_{\widehat{\xi}}(\cdot) - P_{r-1}(\cdot)\|_{L_q([a, b])} \geq \inf_{f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r} \|f(\cdot)\|_{L_q([a, b])}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d_{n+r}(H_\infty^r, L_q([a, b])) \geq \inf_{f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r} \|f(\cdot)\|_{L_q([a, b])}.$$

Предельный переход при $q \rightarrow \infty$ дает

$$d_{n+r}(H_\infty^r, C([a, b])) \geq \inf_{f(\cdot) \in \mathcal{A}_n^r} \|f(\cdot)\|_{C([a, b])} = \|\widehat{f}(\cdot)\|_{C([a, b])}.$$

□

4.12. Регуляризация по Тихонову

Пусть функция $x(\cdot)$ такова, что ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

равномерно сходится на \mathbb{T} . Предположим, что вместо точных значений коэффициентов Фурье этой функции a_k , $k = 0, 1, \dots$, и b_k , $k = 1, 2, \dots$, нам известны их приближенные значения \widetilde{a}_k и \widetilde{b}_k такие, что

$$(4.65) \quad \frac{(a_0 - \widetilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - \widetilde{a}_k)^2 + (b_k - \widetilde{b}_k)^2 \right) \leq \delta^2,$$

где $\delta > 0$ характеризует погрешность задания коэффициентов Фурье. Задача состоит в восстановлении значения функции $x(\cdot)$ в данной точке t .

Покажем, что при замене точных значений коэффициентов Фурье приближенными невозможно восстановить значение функции, какой бы малой ни была погрешность задания исходных данных. Действительно, пусть

$$\tilde{a}_0 - a_0 = 0, \quad \tilde{a}_k - a_k = \tilde{b}_k - b_k = \frac{\delta}{C\sqrt{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Тогда неравенство (4.65) выполнено, а разность между значением исходной функции в точке t и рядом

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$$

равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - \tilde{a}_k) \cos kt + (b_k - \tilde{b}_k) \sin kt).$$

При $t = 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Тем не менее можно предложить метод восстановления, погрешность которого будет стремиться к нулю при стремлении к нулю погрешности, с которой задаются приближенные коэффициенты Фурье.

ТЕОРЕМА 4.19 (А. Н. Тихонова). Пусть $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и непрерывна в фиксированной точке $t \in \mathbb{T}$. Тогда сумма ряда

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\alpha} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt),$$

где \tilde{a}_k и \tilde{b}_k — приближенные значения коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$, удовлетворяющие условию (4.65), а $\alpha = \delta C(\delta)$, $0 < C_1 \leq C(\delta) \leq C_2$, совпадает со значением $x(t)$ с погрешностью, стремящейся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha(\delta) = \delta$ (общий случай рассматривается совершенно аналогично). Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \delta < \delta_0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\delta} (\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt) - x(t) \right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем сначала, что найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех положительных $\delta < \delta_1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\delta} \left((\tilde{a}_k - a_k) \cos kt + (\tilde{b}_k - b_k) \sin kt \right) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Для этого достаточно убедиться, что сумма, стоящая в левой части, стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Разобьем эту сумму на две части. В первую часть отнесем

слагаемые с номерами k , для которых $k < 1/\delta$, а во вторую — все остальные. Применяя к каждой части неравенство Коши–Буняковского, получим

$$(4.66) \quad \left| \frac{a_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2 \delta} \left((\tilde{a}_k - a_k) \cos kt + (\tilde{b}_k - b_k) \sin kt \right) \right| \\ \leq \sqrt{\left(\frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k < 1/\delta} \left((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \right) \right) O\left(\frac{1}{\delta}\right)} \\ + \sqrt{\sum_{k \geq 1/\delta} \left((a_k - \tilde{a}_k)^2 + (b_k - \tilde{b}_k)^2 \right) \sum_{k \geq 1/\delta} \frac{1}{k^4 \delta^2}}.$$

Оценивая сумму несобственным интегралом, получаем, что

$$\sum_{k \geq 1/\delta} \frac{1}{k^4} = O(\delta^3).$$

Тем самым в правой части (4.66) стоит величина $O(\sqrt{\delta}) + O(\delta^{3/2})$, стремящаяся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Остается доказать, что найдется число $\delta_2 > 0$ такое, что для всех положительных $\delta < \delta_2$ будет справедливо неравенство

$$(4.67) \quad \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2 \delta} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) - x(t) \right| < \frac{3}{4} \varepsilon.$$

Так как функция $x(\cdot)$ непрерывна в точке t , то для заданного ε найдется $\eta > 0$ такое, что для всех s , удовлетворяющих условию $|s - t| < \eta$, будет справедливо неравенство

$$(4.68) \quad |x(s) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим $\gamma = \delta^{-1/2}$ и рассмотрим функцию

$$v_t(s) = \begin{cases} \frac{\gamma \pi}{2} e^{-\gamma|t-s|}, & t - \eta < s < t + \eta, \\ 0, & t + \eta \leq s \leq t - \eta + 2\pi \end{cases}$$

(не ограничивая общности, можно считать, что $\eta < \pi$). Продолжим эту функцию периодически с периодом 2π на всю прямую $-\infty < s < +\infty$. Вычислим коэффициенты Фурье функции $v_t(\cdot)$. Имеем

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{t-\eta}^{t+\eta} v_t(s) \cos ks \, ds = \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} \cos ks \, ds \\ = \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} \cos k(t+u) \, du = \frac{\gamma}{2} \cos kt \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} \cos ku \, du \\ - \frac{\gamma}{2} \sin kt \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} \sin ku \, du = \gamma \cos kt \int_0^{\eta} e^{-\gamma u} \cos ku \, du \\ = \gamma \cos kt \left(\frac{e^{-\gamma u}}{k^2 + \gamma^2} (k \sin ku - \gamma \cos ku) \right) \Big|_0^{\eta} \\ = \frac{\gamma^2}{k^2 + \gamma^2} \cos kt + e^{-\gamma \eta} \sigma_k \gamma \cos kt,$$

где

$$\sigma_k = \frac{k \sin k\eta - \gamma \cos k\eta}{k^2 + \gamma^2}.$$

Учитывая, что $\gamma = \delta^{-1/2}$, получаем

$$A_k = \frac{\cos kt}{1 + k^2\delta} + e^{-\gamma\eta}\sigma_k\gamma \cos kt.$$

Аналогичные вычисления дают:

$$B_k = \frac{\sin kt}{1 + k^2\delta} + e^{-\gamma\eta}\sigma_k\gamma \sin kt.$$

Так как $x(\cdot), v_t(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds = \frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k + B_k b_k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2\delta} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) - x(t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds - x(t) - \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta}\sigma_0\gamma \right. \\ & \quad \left. - \gamma e^{-\gamma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right|. \end{aligned}$$

Теперь для доказательства (4.67) достаточно доказать, что для всех достаточно малых положительных δ будут выполнены неравенства

$$(4.69) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds - x(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(4.70) \quad \left| \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta}\sigma_0\gamma + \gamma e^{-\gamma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Докажем неравенство (4.69). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds &= \frac{1}{\pi} \int_{t-\eta}^{t-\eta+2\pi} v_t(s)x(s) ds = \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} x(s) ds \\ &= x(t) \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} ds + \frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} (x(s) - x(t)) ds. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\frac{\gamma}{2} \int_{t-\eta}^{t+\eta} e^{-\gamma|t-s|} ds = \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|u|} du = \gamma \int_0^{\eta} e^{-\gamma u} du = 1 - e^{-\gamma\eta},$$

а также того, что при $s \in (t - \eta, t + \eta)$ выполнено неравенство (4.68), получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_t(s)x(s) ds - x(t) \right| \leq e^{-\gamma\eta} |x(t)| + \frac{\varepsilon}{4} (1 - e^{-\gamma\eta}) \leq e^{-\gamma\eta} |x(t)| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как при всех достаточно малых δ справедливо неравенство

$$e^{-\gamma\eta} |x(t)| = e^{-\eta/\sqrt{\delta}} |x(t)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

то неравенство (4.69) доказано.

Остается доказать неравенство (4.70). Нетрудно убедиться, что

$$|\sigma_k| \leq \frac{2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для σ_0 при достаточно малых δ выполняется неравенство $|\sigma_0| \leq 1$. Применяя к левой части (4.70) неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$(4.71) \quad \left| \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta} \sigma_0 \gamma + \gamma e^{-\gamma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| \\ \leq \gamma e^{-\gamma\eta} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \right)^{1/2} \\ \leq \gamma e^{-\gamma\eta} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}.$$

Поскольку

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma e^{-\gamma\eta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\eta/\sqrt{\delta}}}{\sqrt{\delta}} = 0,$$

то правая часть (4.71) для достаточно малых δ может быть сделана меньше $\varepsilon/4$. \square

4.13. Регуляризация по Колмогорову

Подход, который мы называем регуляризацией по Колмогорову, предполагает наличие некоторой априорной информации о функции $x(\cdot)$. Но тогда появляется возможность учитывать имеющуюся фиксированную точность измерения и ставить вопрос о нахождении наилучшего метода среди всех возможных. Этот подход соответствует общему подходу, развиваемому в рамках теории оптимального восстановления.

Перейдем к точной постановке задачи. Обозначим через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ пространство абсолютно непрерывных 2π -периодических функций $x(\cdot)$, у которых производная $x'(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{T})$. Если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то в каждой точке $t \in \mathbb{T}$ функция $x(\cdot)$ разлагается в ряд Фурье, который сходится к ней равномерно.

В пространстве $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$W_2^1(\mathbb{T}) = \{ x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) : \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1 \}.$$

Обозначим через l_2 пространство суммируемых с квадратом вещественных последовательностей со скалярным произведением

$$\langle y, y' \rangle = \frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k y'_k,$$

где $y = (y_0, y_1, \dots)$, $y' = (y'_0, y'_1, \dots)$, и с соответствующей нормой

$$\|y\|_{l_2} = \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Если функция $x(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то ее коэффициенты Фурье принадлежат l_2 . Пусть $F: \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow l_2$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$, т. е. $Fx(\cdot) = (a_0(x(\cdot)), a_1(x(\cdot)), b_1(x(\cdot)), \dots)$ — набор коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$.

Предположим, что о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны приближенно ее коэффициенты Фурье, а именно, известен вектор

$$y = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots) \in l_2$$

такой, что

$$\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta,$$

где $\delta > 0$.

Любой метод восстановления $x(\tau)$ должен сопоставлять вектору (наблюдению) y число, которое, согласно данному методу, есть некоторое приближение к $x(\tau)$. Таким образом, любой метод — это некоторая функция $\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешностью данного метода назовем величину

$$(4.72) \quad e(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), y \in l_2 \\ \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leq \delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Нас интересует величина

$$(4.73) \quad E(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = \inf_{\varphi: l_2 \rightarrow \mathbb{R}} e(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi),$$

называемая погрешностью оптимального восстановления, и метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным методом восстановления.

ТЕОРЕМА 4.20. Для любого $\delta > 0$

$$E(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = (\widehat{a} + \delta^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \widehat{a}k^2)^2} \right)^{1/2},$$

где $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения

$$\frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} = \delta^2.$$

Метод

$$(4.74) \quad \widehat{\varphi}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \widehat{a}k^2} (\widetilde{a}_k \cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем применять теорему 4.7. Покажем, что существует функция $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ такая, что $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{l_2} = \delta$, $\|\widehat{x}'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$, и для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ справедливо равенство

$$(4.75) \quad x(\tau) = \lambda_1 \langle F\widehat{x}(\cdot), Fx(\cdot) \rangle + \lambda_2 \langle Fx'(\cdot), Fx(\cdot) \rangle,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Пусть $Fx(\cdot) = (a_0, a_1, b_1, \dots)$, $F\widehat{x}(\cdot) = (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \widehat{b}_1, \dots)$. Тогда равенство (4.75) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) &= \lambda_1 \left(\frac{\widehat{a}_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k a_k + \widehat{b}_k b_k) \right) \\ &\quad + \lambda_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\widehat{a}_k a_k + \widehat{b}_k b_k). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\widehat{a}_0 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \widehat{a}_k = \frac{\cos k\tau}{\lambda_1 + \lambda_2 k^2}, \quad \widehat{b}_k = \frac{\sin k\tau}{\lambda_1 + \lambda_2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выберем λ_1 и λ_2 так, чтобы

$$\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{l_2}^2 = \frac{\widehat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = \delta^2,$$

$$\|\widehat{x}'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \|F\widehat{x}'(\cdot)\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\widehat{a}_k^2 + \widehat{b}_k^2) = 1.$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda_1^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 k^2)^2} &= \delta^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 k^2)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Обозначая $a = \lambda_2/\lambda_1$ и деля первое уравнение на второе, получаем уравнение для нахождения a

$$(4.76) \quad \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} = \delta^2.$$

Выражение в левой части (4.76) определяет функцию $f(a)$, $a \in (0, \infty)$. Покажем, что для любого $\delta > 0$ существует единственное $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta) > 0$ такое, что $f(\widehat{a}) = \delta^2$. Для этого сначала докажем, что $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $n \geq 6$ таково, что $1/n < \varepsilon$. Так как, очевидно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + ak^2)^2} \right) = \frac{1}{2} + n < 2n + 1$$

и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} > n(2n+1),$$

то существует такое $\widetilde{a} > 0$, что для всех $0 < a < \widetilde{a}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + ak^2)^2} < 2n + 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} > n(2n + 1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + ak^2)^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}.$$

Далее, ясно, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}.$$

Складывая полученные неравенства и затем деля одно на другое, получаем, что для всех $0 < a < \widetilde{a}$

$$f(a) = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2}} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$.

С другой стороны, для любого $a > 0$

$$f(a) = \frac{\frac{a^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^{-1} + k^2)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^{-1} + k^2)^2}} > \frac{a^2}{2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}},$$

откуда сразу следует, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$.

Для доказательства единственности покажем, что $f(\cdot)$ строго монотонно возрастает на $(0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что она строго монотонно возрастает на любом отрезке $[\tilde{a}_0, \tilde{a}_1]$, где $0 < \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \infty$. На каждом таком отрезке выполнены стандартные условия о почленном дифференцировании рядов, входящих в определение $f(\cdot)$, и мы имеем для $a \in [\tilde{a}_0, \tilde{a}_1]$

$$f'(a) = \frac{2g(a)}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} \right)^2},$$

где

$$\begin{aligned} g(a) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(1 + ak^2)^3} \\ &> - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + ak^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ak^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(1 + ak^2)^3} \\ &= - \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} + \sum_{j,k=1}^{\infty} \beta_{jk}, \end{aligned}$$

а

$$\alpha_{jk} = \frac{j^2 k^2}{(1 + aj^2)^3 (1 + ak^2)^2}, \quad \beta_{jk} = \frac{k^4}{(1 + aj^2)^2 (1 + ak^2)^3}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -\alpha_{jk} + \beta_{kj} &= \frac{j^2(j^2 - k^2)}{(1 + aj^2)^3 (1 + ak^2)^2}, \\ -\alpha_{kj} + \beta_{jk} &= \frac{k^2(k^2 - j^2)}{(1 + ak^2)^3 (1 + aj^2)^2} \end{aligned}$$

и тогда получаем, что

$$\begin{aligned} -\alpha_{jk} + \beta_{kj} - \alpha_{kj} + \beta_{jk} &= \frac{j^2 - k^2}{(1 + aj^2)^2 (1 + ak^2)^2} \left(\frac{j^2}{1 + aj^2} - \frac{k^2}{1 + ak^2} \right) \\ &= \frac{(j^2 - k^2)^2}{(1 + aj^2)^3 (1 + ak^2)^3} \geq 0. \end{aligned}$$

Тем самым $g(a) > 0$ и, значит, $f'(a) > 0$ для любого $a \in (0, \infty)$. Единственность доказана.

Пусть $\delta > 0$ и $\hat{a} = \hat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения $f(a) = \delta^2$. Полагаем

$$\lambda_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \hat{a}k^2)^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = \hat{a} \lambda_1.$$

Из теоремы 4.7 вытекает, что

$$\begin{aligned} E(x(\tau), W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) &= \lambda_2 \|F\hat{x}'(\cdot)\|_{l_2} + \delta \lambda_1 \|F\hat{x}(\cdot)\|_{l_2} = \lambda_2 + \lambda_1 \delta^2 \\ &= (\hat{a} + \delta^2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \hat{a}k^2)^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а метод (4.74) является оптимальным. \square

4.14. Восстановление функции и ее производных по неточно заданным коэффициентам Фурье в метрике l_2^N

Обозначим через $W_2^r(\mathbb{T})$, $r \geq 1$, множество 2π -периодических функций с абсолютно непрерывными производными $x^{(r)}(\cdot)$, удовлетворяющих условию $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. В пространстве $W_2^r(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x^{(k)}(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ по информации о неточно заданных коэффициентах Фурье a_j , $j \in A$, и b_j , $j \in B$, где A и B — некоторые конечные подмножества $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ и \mathbb{N} соответственно. Положим $N = \text{card } A + \text{card } B$ и

$$F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_j\}_{j \in A}, \{b_j\}_{j \in B}).$$

Обозначим через l_2^N множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$ с нормой

$$\|y\|_{l_2^N} = (|y_1|^2 + \dots + |y_N|^2)^{1/2}.$$

В случае если $0 \notin A$, будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ нам известен вектор

$$y = (\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B})$$

такой, что

$$\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_2^N} \leq \delta.$$

Если $0 \in A$, то под нормой в l_2^N будем понимать величину

$$\|y\|_{l_2^N} = (|y_1|^2/2 + |y_2|^2 + \dots + |y_N|^2)^{1/2}.$$

Введем величину, называемую *погрешностью метода восстановления* $\varphi: l_2^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})$:

$$e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}), y \in l_2^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

и величину, которая называется *погрешность оптимального восстановления*:

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi: l_2^N \rightarrow L_2(\mathbb{T})} e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем *оптимальным*.

Из леммы 4.1 следует, что

$$(4.77) \quad E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T}) \\ \|F_{A,B}x(\cdot)\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$, т. е. восстановление самой функции по неточно заданным коэффициентам Фурье. Положим

$$(4.78) \quad n_0 = \min\left\{\min_{n \in \mathbb{N} \setminus A} n, \min_{n \in \mathbb{N} \setminus B} n\right\}.$$

ТЕОРЕМА 4.21. Если $0 \notin A$, то

$$E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty.$$

Если $0 \in A$, то

$$(4.79) \quad E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}}$$

и для любых наборов чисел $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ таких, что

$$(4.80) \quad \frac{n_0^{2r} - j^{2r}}{n_0^{2r} + j^{2r}} \leq \alpha_j \leq 1, \quad j \in A \setminus \{0\}, \quad \frac{n_0^{2r} - j^{2r}}{n_0^{2r} + j^{2r}} \leq \beta_j \leq 1, \quad j \in B,$$

методы

$$(4.81) \quad \varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} \alpha_j \tilde{a}_j \cos jt + \sum_{j \in B} \beta_j \tilde{b}_j \sin jt$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу в правой части (4.77) (для удобства мы переходим к квадратам). Используя равенство Парсеваля, имеем

$$(4.82) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2) \rightarrow \max, \quad \|F_{A,B}x(\cdot)\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Отсюда видно, что если $0 \notin A$, то погрешность оптимального восстановления равна бесконечности (достаточно рассмотреть лишь константы из класса $W_2^r(\mathbb{T})$).

Пусть $0 \in A$. Предположим для определенности, что $n_0 \notin A$ (случай, когда $n_0 \notin B$, рассматривается аналогично). Положим

$$\frac{a_0^2}{2} = \delta^2, \quad a_{n_0} = \frac{1}{n_0^r}, \quad a_j = 0, \quad j \neq 0, n_0, \quad b_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (4.82), получаем

$$E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}}.$$

Будем искать оптимальные методы восстановления в виде

$$\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} \alpha_j \tilde{a}_j \cos jt + \sum_{j \in B} \beta_j \tilde{b}_j \sin jt,$$

где $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ — некоторые последовательности. Для оценки погрешности метода $\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (\cdot)$ надо оценить значение

следующей экстремальной задачи:

$$(4.83) \quad \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} (a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in B} (b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2 \\ + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} b_j^2 \rightarrow \max, \\ \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} (a_j - \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} (b_j - \tilde{b}_j)^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Положим

$$u_j = a_j - \tilde{a}_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad v_j = b_j - \tilde{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда задача (4.83) переписется в виде

$$\frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} ((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} ((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} a_j^2 \\ + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} b_j^2 \rightarrow \max, \quad \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 = \left(\frac{n_0^r (1 - \alpha_j) j^r a_j}{j^r} + \alpha_j u_j \right)^2 \\ \leq \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \alpha_j)^2}{j^{2r}} + \alpha_j^2 \right) \left(\frac{j^{2r} a_j^2}{n_0^{2r}} + u_j^2 \right).$$

Аналогично получаются неравенства

$$((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 \leq \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \beta_j)^2}{j^{2r}} + \beta_j^2 \right) \left(\frac{j^{2r} b_j^2}{n_0^{2r}} + v_j^2 \right).$$

Положим

$$S_\alpha = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus A} \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \alpha_j)^2}{j^{2r}} + \alpha_j^2 \right), \quad S_\beta = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus B} \left(\frac{n_0^{2r} (1 - \beta_j)^2}{j^{2r}} + \beta_j^2 \right), \\ S = \max\{S_\alpha, S_\beta\}.$$

Если α и β выбрать из условий (4.80), то $S \leq 1$. Поэтому для квадратов погрешностей методов (4.81) получаем оценку

$$\frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} \left(\frac{j^{2r} a_j^2}{n_0^{2r}} + u_j^2 \right) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} \left(\frac{j^{2r} b_j^2}{n_0^{2r}} + v_j^2 \right) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} b_j^2 \\ \leq \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in A \setminus \{0\}} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 + \frac{1}{n_0^{2r}} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq \delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}.$$

Тем самым

$$e_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) \leq \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{n_0^{2r}}} \leq E_2(x(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta).$$

Отсюда следует равенство (4.79) и оптимальность методов (4.81). \square

Отметим, что среди оптимальных методов (4.81) есть методы вида

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{j=1}^{n_0-1} (\alpha_j \tilde{a}_j \cos jt + \beta_j \tilde{b}_j \sin jt).$$

Эти методы не используют информацию о приближенных значениях коэффициентов Фурье из множеств $A \setminus \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, $B \setminus \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Тем самым эта информация является “лишней” в том смысле, что наличие ее не уменьшает погрешность оптимального восстановления.

Рассмотрим теперь задачу восстановления k -й производной, $k > 0$, по той же информации. При $n_0 > 1$ положим

$$n_1 = \min \left\{ j : \frac{(j+1)^{2k} - j^{2k}}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} \leq \frac{1}{n_0^{2(r-k)}}, 1 \leq j \leq n_0 - 1 \right\}.$$

Определим λ_1 и λ_2 при $n_0 > 1$ и $\delta < 1$ равенствами

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{(j+1)^{2r} j^{2k} - (j+1)^{2k} j^{2r}}{(j+1)^{2r} - j^{2r}}, & 1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r, \\ n_1^{2k} \left(1 - \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{2(r-k)} \right), & \delta < 1/n_1^r, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n_1 - 1,$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{(j+1)^{2k} - j^{2k}}{(j+1)^{2r} - j^{2r}}, & 1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r, j = 1, \dots, n_1 - 1, \\ \frac{1}{n_0^{2(r-k)}}, & \delta < 1/n_1^r. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4.22. Если $n_0 = 1$ или $\delta \geq 1$, то

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = 1,$$

а метод $\varphi_0 \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) \equiv 0$ является оптимальным. Если $n_0 > 1$ и $\delta < 1$, то

$$(4.84) \quad E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2},$$

и для любых наборов чисел $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ таких, что

$$(4.85) \quad j^{2k} \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \quad j \in A \setminus \{0\},$$

$$j^{2k} \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \quad j \in B,$$

методы

$$(4.86) \quad \varphi_{\alpha, \beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^k \alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) + \sum_{j \in B} j^k \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right)$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Экстремальная задача в правой части (4.77) (для удобства мы снова переходим к квадратам), используя равенство Парсеваля, запишется в виде

$$(4.87) \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) \rightarrow \max, \quad \|F_{A,B}x(\cdot)\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Предположим, что $n_0 = 1$. Будем считать, что $1 \notin A$ (случай $1 \notin B$ рассматривается аналогично). Положим

$$a_1 = 1, \quad a_j = 0, \quad j \neq 1, \quad b_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (4.87), получаем

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq 1.$$

Если $\delta \geq 1$, то, положив $a_1 = 1, a_j = 0, j \neq 1, b_j = 0, j \in \mathbb{N}$, убеждаемся, что

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq 1.$$

Найдем погрешность метода $\varphi_0(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B})(t) \equiv 0$. Имеем

$$\begin{aligned} e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_0) &= \sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \\ &= \sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{2k} (a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2} \leq \sup_{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

В силу полученных оценок снизу при $n_0 = 1$ или при $\delta \geq 1$ метод φ_0 является оптимальным, а

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = 1.$$

Пусть $n_0 > 1$ и $\delta \leq 1$. При $\delta < 1/n_1^r$ рассмотрим последовательность

$$a_{n_1} = \delta, \quad a_{n_0} = \frac{\sqrt{1 - n_1^{2r} \delta^2}}{n_0^r}, \quad a_j = 0, \quad j \neq n_1, n_0, \quad b_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу того, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (4.87), получаем

$$E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geq \sqrt{n_1^{2k} \delta^2 + \frac{1 - n_1^{2r} \delta^2}{n_0^{2(r-k)}}} = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}.$$

Пусть теперь $1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r$ при некотором $j = 1, \dots, n_1 - 1$. Положим

$$a_j = \left(\frac{(j+1)^{2r} \delta^2 - 1}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} \right)^{1/2}, \quad a_{j+1} = \left(\frac{1 - j^{2r} \delta^2}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} \right)^{1/2},$$

$a_m = 0, m \neq j, j+1, b_m = 0, m \in \mathbb{N}$. Нетрудно убедиться, что это допустимая последовательность в экстремальной задаче (4.87), поэтому

$$\begin{aligned} E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \\ \geq \sqrt{j^{2k} \frac{(j+1)^{2r} \delta^2 - 1}{(j+1)^{2r} - j^{2r}} + (j+1)^{2k} \frac{1 - j^{2r} \delta^2}{(j+1)^{2r} - j^{2r}}} = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Будем искать оптимальные методы восстановления в виде

$$\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^k \alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) + \sum_{j \in B} j^k \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right),$$

где $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$ — некоторые последовательности. Для оценки погрешности метода $\varphi_{\alpha,\beta}$ надо оценить значение следующей экстремальной задачи:

$$(4.88) \quad \sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^{2k} (a_j - \alpha_j \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in B} j^{2k} (b_j - \beta_j \tilde{b}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} b_j^2 \rightarrow \max, \\ \frac{(a_0 - \tilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} (a_j - \tilde{a}_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} (b_j - \tilde{b}_j)^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Положим

$$u_j = a_j - \tilde{a}_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad v_j = b_j - \tilde{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда задача (4.83) переписывается в виде

$$\sum_{j \in A \setminus \{0\}} j^{2k} ((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} ((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} a_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} b_j^2 \rightarrow \max, \\ \frac{u_0^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq 1.$$

Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$((1 - \alpha_j) a_j + \alpha_j u_j)^2 = \left(\frac{(1 - \alpha_j)}{\sqrt{\lambda_2 j^r}} \sqrt{\lambda_2 j^r} a_j + \frac{\alpha_j}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\lambda_1} u_j \right)^2 \leq \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right) (\lambda_2 j^{2r} a_j^2 + \lambda_1 u_j^2).$$

Аналогично получаются неравенства

$$((1 - \beta_j) b_j + \beta_j v_j)^2 \leq \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right) (\lambda_2 j^{2r} b_j^2 + \lambda_1 v_j^2).$$

Положим

$$S_\alpha = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right), \quad S_\beta = \max_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right), \\ S = \max\{S_\alpha, S_\beta\}.$$

Если α и β выбрать из условий (4.85), то $S \leq 1$. Поэтому для квадратов погрешностей методов (4.86) с учетом того, что $j^{2k} \leq \lambda_2 j^{2r}$ при $j \geq n_0$, получаем

оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in A \setminus \{0\}} (\lambda_2 j^{2r} a_j^2 + \lambda_1 u_j^2) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} (\lambda_2 j^{2r} b_j^2 + \lambda_1 v_j^2) + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus A} j^{2k} a_j^2 \\ & + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} j^{2k} b_j^2 \leq \lambda_1 \left(\sum_{j \in A \setminus \{0\}} u_j^2 + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus B} v_j^2 \right) + \lambda_2 \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} (a_j^2 + b_j^2) \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\begin{aligned} e_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) & \leq \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2} \\ & \leq E_2(x^{(k)}(\cdot), W_2^r(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (4.84) и оптимальность методов (4.86).

Осталось показать, что существуют $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \in A \setminus \{0\}}$ и $\beta = \{\beta_j\}_{j \in B}$, удовлетворяющие условиям (4.85). Рассмотрим на плоскости множество точек

$$\begin{cases} x_j = j^{2r}, \\ y_j = j^{2k}, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

Соединяя соседние точки отрезками прямой, получим вогнутую ломаную. Не сложно убедиться, что при $1/(j+1)^r \leq \delta < 1/j^r$, $j = 1, \dots, n_1 - 1$, прямая $y = \lambda_2 x + \lambda_1$ проходит через точки (x_j, y_j) , (x_{j+1}, y_{j+1}) . В силу вогнутости ломаной будем иметь

$$(4.89) \quad y_s \leq \lambda_2 x_s + \lambda_1, \quad s = 1, 2, \dots$$

При $\delta < 1/n_1^r$ прямая $y = \lambda_2 x + \lambda_1$ проходит через точку (n_1^{2k}, n_1^{2r}) , и в силу определения n_1 для нее снова справедливы неравенства (4.89).

Положим

$$\alpha_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}}, \quad j \in A \setminus \{0\}.$$

Тогда из (4.89) получаем

$$j^{2k} \left(\frac{(1 - \alpha_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\alpha_j^2}{\lambda_1} \right) = \frac{j^{2k}}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}} \leq 1.$$

Положив

$$\beta_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}}, \quad j \in B,$$

аналогичным образом получаем

$$j^{2k} \left(\frac{(1 - \beta_j)^2}{\lambda_2 j^{2r}} + \frac{\beta_j^2}{\lambda_1} \right) = \frac{j^{2k}}{\lambda_1 + \lambda_2 j^{2r}} \leq 1.$$

□

Пусть $n_0 > 1$ и $\delta \leq 1$. Положим

$$j_0 = \max \left\{ j : \frac{1}{j^{2(r-k)}} > \lambda_2 \right\}.$$

Так как $\lambda_2 \geq 1/n_0^2(r-k)$, то $j_0 < n_0$. Если $j \leq j_0$ и $j \in A$, то можно взять $\alpha_j = 0$, а если $j \leq j_0$ и $j \in B$, то $\beta_j = 0$ тоже удовлетворяет условиям (4.85).

Следовательно, среди оптимальных методов есть метод вида

$$\varphi_{\alpha,\beta} \left(\{\tilde{a}_j\}_{j \in A}, \{\tilde{b}_j\}_{j \in B} \right) (t) = \sum_{j=1}^{j_0} j^k \left(\alpha_j \tilde{a}_j \cos \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) + \beta_j \tilde{b}_j \sin \left(jt + \frac{\pi k}{2} \right) \right).$$

Тем самым при заданном $\delta < 1$ информация о приближенных коэффициентах Фурье с номерами, большими, чем j_0 , является “лишней” в том смысле, что наличие ее не уменьшает погрешность оптимального восстановления.

4.15. Восстановление функции и ее производных по неточно заданному преобразованию Фурье

Рассмотрим аналоги задач, рассмотренных выше, для функций, определенных на всей прямой. Здесь в качестве используемой информации выступает неточно заданное преобразование Фурье. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{W}_{2,2}^r(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $x^{(r-1)}(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$W_{2,2}^r(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,2}^r(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1\}.$$

Предположим, что известно преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ функции $x(\cdot) \in W_{2,2}^r(\mathbb{R})$, заданное на $\Delta_\sigma = [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Требуется по этой информации восстановить функцию $x^{(k)}(\cdot)$, $0 \leq k < r$, в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Всякий метод восстановления представляет собой отображение $\varphi: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

Погрешностью метода восстановления $\varphi: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ назовем величину

$$e(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{2,2}^r(\mathbb{R}), y \in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

а величину

$$(4.90) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \varphi)$$

будем называть *погрешностью оптимального восстановления*. Метод, на котором достигается нижняя грань, будем, как обычно, называть *оптимальным методом восстановления*.

Из леммы 4.1 получаем оценку снизу

$$(4.91) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{2,2}^r(\mathbb{R}) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

В образах Фурье экстремальная задача в правой части (4.91) записывается в виде (как обычно, переходим к квадратам)

$$(4.92) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Пусть сначала $k = 0$.

ТЕОРЕМА 4.23. При всех $\sigma > 0$ и $\delta > 0$

$$(4.93) \quad E(x(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}}.$$

Для всех функций $a(\cdot)$ таких, что

$$(4.94) \quad \left| a(\xi) - \frac{\sigma^{2r}}{\sigma^{2r} + \xi^{2r}} \right| \leq \frac{\xi^{2r}}{\sigma^{2r} + \xi^{2r}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\widehat{x}_n(\cdot)$ обозначим функцию, для которой

$$F\widehat{x}_n(\xi) = \begin{cases} \delta\sqrt{n}, & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{n}, \\ \sigma^{-r} \sqrt{2\pi(n - \sqrt{n})}, & \sigma < \xi < \sigma + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для $n > \sigma^{-1}$ имеем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2 n}{2\pi} \int_0^{1/n} \xi^{2r} d\xi + \frac{n - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \int_{\sigma}^{\sigma+1/n} \xi^{2r} d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi n^{2r}(2r+1)} + (n - \sqrt{n}) \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{\sigma^{2r}(2r+1)}. \end{aligned}$$

Используя представление

$$(4.95) \quad \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{\sigma^{2r}(2r+1)} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \right),$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{2\pi n^{2r}(2r+1)} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_n, \end{aligned}$$

где

$$\beta_n = 1 - \alpha_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{\delta^2}{2\pi n^{2r-1/2}(2r+1)}.$$

В силу того, что $\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, при достаточно больших n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} < 1.$$

Следовательно, для достаточно больших n функции $F\widehat{x}_n(\cdot)$ допустимы в экстремальной задаче (4.92) для $k = 0$. Тем самым

$$E^2(x(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F\widehat{x}_n(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{2\pi} + \sigma^{-2r} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$E(x(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}}.$$

Будем искать оптимальные методы среди таких, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F\widehat{\varphi}(y)(\xi) = \begin{cases} a(\xi)y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

где $a(\cdot)$ — некоторая ограниченная функция. В образах Фурье для оценки квадрата погрешности таких методов получаем следующую задачу:

$$(4.96) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши–Буняковского

$$|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 = |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ \leq \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\sigma^{-2r}\xi^{2r}} + |a(\xi)|^2 \right) (\sigma^{-2r}\xi^{2r}|Fx(\xi)|^2 + |Fx(\xi) - y(\xi)|^2).$$

Предположим, что функция $a(\cdot)$ выбрана так, что

$$(4.97) \quad \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\sigma^{-2r}\xi^{2r}} + |a(\xi)|^2 \leq 1.$$

Тогда

$$|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 \leq \sigma^{-2r}\xi^{2r}|Fx(\xi)|^2 + |Fx(\xi) - y(\xi)|^2.$$

Поэтому для максимизируемого функционала в (4.96) имеем оценку

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ \leq \sigma^{-2r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \sigma^{-2r} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\delta^2}{2\pi} \leq \sigma^{-2r} + \frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Отсюда следует, что

$$e(x(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}} \leq E(x(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta).$$

Тем самым $\widehat{\varphi}$ — оптимальный метод восстановления, а для его погрешности справедливо равенство (4.93).

Остается убедиться, что условие (4.97) эквивалентно условию (4.94), что легко сделать, выделив полный квадрат в неравенстве (4.97). \square

Рассмотрим теперь случай, когда $k \geq 1$. Положим

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k} \right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Введем также следующие обозначения: $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$,

$$\widehat{\lambda}_1 = \left(\frac{k}{r} \right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{r} \sigma_0^{2k}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \sigma_0^{-2(r-k)}.$$

ТЕОРЕМА 4.24. Пусть $1 \leq k \leq r-1$, $\sigma > 0$ и $\delta > 0$. Тогда

$$(4.98) \quad E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^T(\mathbb{R}), \sigma, \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\frac{r-k}{2\pi r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \hat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{r-k}{2r}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}. \end{cases}$$

Для всех измеримых на $[-\sigma, \sigma]$ функций $\theta(\cdot)$ таких, что $|\theta(\xi)| \leq 1$ при $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, и всех

$$(4.99) \quad a(\xi) = \frac{\hat{\lambda}_1 + \theta(\xi)|\xi|^{r-k} \sqrt{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k})}}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}}$$

методы

$$(4.100) \quad \hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (i\xi)^k a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

являются оптимальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\hat{\xi} = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \sigma_0.$$

Предположим сначала, что $\sigma < \hat{\sigma}$ (в этом случае $\sigma_0 = \sigma$). Рассмотрим для достаточно больших n последовательность функций $\hat{x}_n(\cdot)$ такую, что

$$F\hat{x}_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{n} \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \hat{\xi} \leq |\xi| \leq \hat{\xi} + 1/n, \\ \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{n - \sqrt{n}}}{\sigma^r} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \xi^{2r}\right)^{1/2}, & \sigma \leq |\xi| \leq \sigma + 1/n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{n\delta^2}{2\pi} \frac{(\hat{\xi} + 1/n)^{2r+1} - \hat{\xi}^{2r+1}}{2r+1} \\ &\quad + \frac{n - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \xi^{2r}\right) \frac{(\sigma + 1/n)^{2r+1} - \sigma^{2r+1}}{2r+1}. \end{aligned}$$

Используя представление (4.95) и аналогичное ему

$$\frac{(\hat{\xi} + 1/n)^{2r+1} - \hat{\xi}^{2r+1}}{2r+1} = \frac{1}{n} \hat{\xi}^{2r} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r} + \varepsilon_n\right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым для достаточно больших n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) < 1.$$

Следовательно, для достаточно больших n функции $F\hat{x}_n(\cdot)$ допустимы в экстремальной задаче (4.92). Тем самым

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{n\delta^2 (\hat{\xi} + 1/n)^{2k+1} - \hat{\xi}^{2k+1}}{2\pi (2k+1)} \\ &\quad + \frac{n - \sqrt{n}}{\sigma^{2r}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) \frac{(\sigma + 1/n)^{2k+1} - \sigma^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2k} + \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{\xi}^{2r}\right) \frac{\sigma^{2k}}{\sigma^{2r}}} \\ &= \sigma^k \sqrt{\frac{r-k}{2\pi r} \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma^{2r}}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\sigma \geq \hat{\sigma}$. В этом случае рассмотрим для достаточно больших n последовательность функций $\hat{x}_n(\cdot)$ такую, что

$$F\hat{x}_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{n - \sqrt{n}} \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \hat{\xi} \leq |\xi| \leq \hat{\xi} + 1/n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \delta^2 < \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi &= \frac{(n - \sqrt{n})\delta^2 (\hat{\xi} + 1/n)^{2r+1} - \hat{\xi}^{2r+1}}{2\pi (2r+1)} \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \hat{\xi}^{2r} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \gamma_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при достаточно больших n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} < 1.$$

Следовательно, для достаточно больших n функции $F\hat{x}_n(\cdot)$ допустимы в экстремальной задаче (4.92). Тем самым

$$\begin{aligned} E^2(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |F\hat{x}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{(n - \sqrt{n})\delta^2 (\hat{\xi} + 1/n)^{2k+1} - \hat{\xi}^{2k+1}}{2\pi (2k+1)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta) \geq \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \hat{\xi}^k = \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{r-k}{2r}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \hat{\lambda}_2}.$$

Будем искать оптимальные методы среди таких, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F\widehat{\varphi}(y)(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k a(\xi)y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

где $a(\cdot)$ — некоторая ограниченная функция. В образах Фурье для оценки квадрата погрешности таких методов получаем следующую задачу:

$$(4.101) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши–Буняковского

$$(4.102) \quad \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 = \xi^{2k} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ \leq \xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1} \right) (\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \widehat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2).$$

Предположим, что функция

$$(4.103) \quad S(\xi) = \xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1} \right)$$

такова, что $S(\xi) \leq 1$. Тогда

$$\xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 \leq \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 + \widehat{\lambda}_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2.$$

Поэтому для максимизируемого функционала в (4.101) имеем оценку

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ \leq \widehat{\lambda}_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>\sigma} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \widehat{\lambda}_2 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 \leq \frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \widehat{\lambda}_2.$$

Отсюда следует, что

$$e(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \delta^2 + \widehat{\lambda}_2} \leq E(x^{(k)}(\cdot), W_{2,2}^r(\mathbb{R}), \sigma, \delta).$$

Тем самым $\widehat{\varphi}$ — оптимальный метод восстановления, а для его погрешности справедливо равенство (4.98).

Остается исследовать условия на функции $a(\cdot)$, при которых $S(\xi) \leq 1$. Выделяя полный квадрат, нетрудно показать, что неравенство

$$\xi^{2k} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1} \right) \leq 1$$

эквивалентно неравенству

$$(4.104) \quad \left| a(\xi) - \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} \right|^2 \leq \frac{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \xi^{2(r-k)}}{(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r})^2} (\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k}).$$

Покажем, что при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} - \xi^{2k} \geq 0.$$

Действительно, минимальные значения этой функции принимаются в точках

$$|\xi| = \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{1}{2(r-k)}}.$$

Они равны величине

$$\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{r}{r-k}} - \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{k}{r-k}} = \widehat{\lambda}_1 - \left(\frac{k}{\widehat{\lambda}_2 r} \right)^{\frac{k}{r-k}} \frac{r-k}{k} = 0.$$

Таким образом, множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (4.104), имеет вид (4.99). \square

4.16. Восстановление решения уравнения теплопроводности

Распространение тепла в \mathbb{R}^d описывается уравнением

$$(4.105) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(где Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^d и $u(\cdot, \cdot)$ — функция на $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$) с заданным начальным распределением температуры

$$(4.106) \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot).$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (4.105)–(4.106) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$(4.107) \quad u(x, t) = u(x, t; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi,$$

где $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$,

$$|x - \xi|^2 = \sum_{j=1}^d (x_j - \xi_j)^2.$$

Пусть в моменты времени $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(\cdot, t_1), \dots, u(\cdot, t_n)$. Иными словами, известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. По этой информации требуется восстановить распределение температуры в \mathbb{R}^d в фиксированный момент времени τ , $t_1 \leq \tau \leq t_n$.

Определим операторы $I_j: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 0, 1, \dots, n$, равенствами

$$I_0 u_0(\cdot) = u(\cdot, \tau), \quad I_j u_0(\cdot) = u(\cdot, t_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Задача состоит в нахождении величины

$$E(I, \delta) = \inf_{\varphi: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(I, \delta, \varphi),$$

где

$$e(I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), y(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n \\ \|I_j u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$I = (I_0, I_1, \dots, I_n)$, $y(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$, а также метода $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемого оптимальным.

На двумерной плоскости (t, v) построим множество

$$M = \text{co}\{(t_j, \ln(1/\delta_j)), 1 \leq j \leq n\} + \{(t, 0) : t \geq 0\}.$$

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[t_1, +\infty)$ равенством

$$\theta(t) = \max\{v : (t, v) \in M\}.$$

Ясно, что на $[t_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим через $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т. е. $t_{s_1} = t_1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1, \dots, t_n\}$ (см. рис. 4.4, на котором изображенные точки имеют координаты $(t_j, \ln(1/\delta_j))$, жирная кривая — график функции $\theta(\cdot)$).

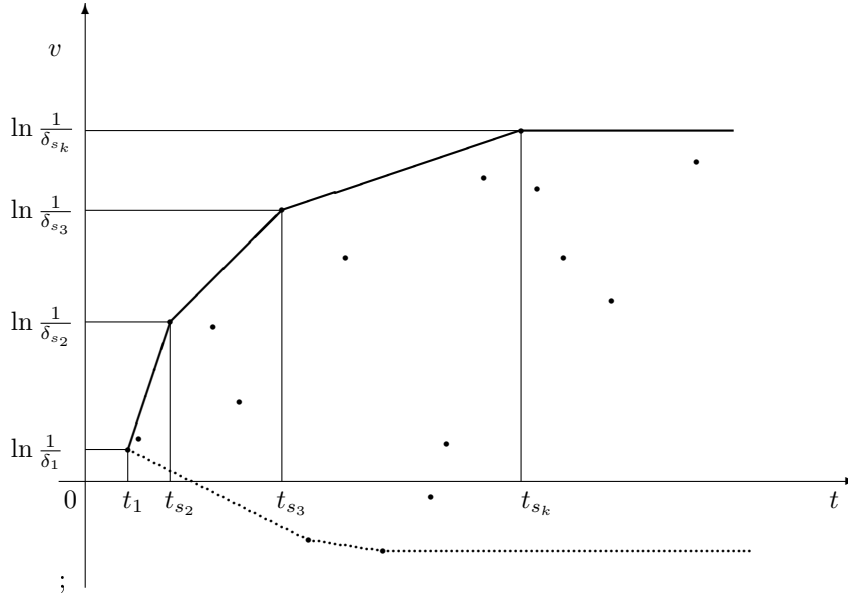


Рис. 4.4

ТЕОРЕМА 4.25. Для любого $\tau \geq t_1$ имеет место равенство

$$(4.108) \quad E(I, \delta) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Если $\tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$ при некотором m , $1 \leq m \leq k - 1$, то для всех $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$(4.109) \quad e^{-2|\xi|^2\tau} \left(e^{2|\xi|^2 t_{s_m}} \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1^{(m)}} + e^{2|\xi|^2 t_{s_{m+1}}} \frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_2^{(m)}} \right) \leq 1,$$

где

$$\lambda_1^{(m)} = \frac{t_{s_{m+1}} - \tau}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} \left(\frac{\delta_{s_{m+1}}}{\delta_{s_m}} \right)^{\frac{2(\tau - t_{s_m})}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}},$$

$$\lambda_2^{(m)} = \frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} \left(\frac{\delta_{s_m}}{\delta_{s_{m+1}}} \right)^{\frac{2(t_{s_{m+1}} - \tau)}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}},$$

методы

$$(4.110) \quad \widehat{\varphi}(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1} \left(e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_m})} \alpha(\xi) F y_{s_m}(\xi) + e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) F y_{s_{m+1}}(\xi) \right) (\cdot)$$

являются оптимальными. Если $\tau = t_{s_m}$ при некотором m , $1 \leq m \leq k$, то метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot))(\cdot) = y_{s_m}(\cdot)$$

является оптимальным. При $\tau > t_{s_k}$ метод

$$(4.111) \quad \widehat{\varphi}(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1} \left(e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_k})} F y_{s_k}(\xi) \right) (\cdot)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1 получаем оценку снизу

$$E(I, \delta) \geq \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|I_j u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(4.112) \quad \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|I_j u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Хорошо известно (при $d = 1$ см., например, [34, стр. 452]), что

$$F(I_0 u_0)(\xi) = e^{-|\xi|^2 \tau} F u_0(\xi), \quad F(I_j u_0)(\xi) = e^{-|\xi|^2 t_j} F u_0(\xi), \\ j = 1, \dots, n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

По теореме Планшереля экстремальная задача (4.112) может быть записана в виде

$$(4.113) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F u_0(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F u_0(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Пусть $\tau \in [t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$ при некотором m , $1 \leq m \leq k-1$. Прямая $x = at + b$, где

$$a = \frac{\ln 1/\delta_{s_{m+1}} - \ln 1/\delta_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}, \quad b = \frac{t_{s_{m+1}} \ln 1/\delta_{s_m} - t_{s_m} \ln 1/\delta_{s_{m+1}}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}},$$

проходит через точки $(t_{s_m}, \ln 1/\delta_{s_m})$ и $(t_{s_{m+1}}, \ln 1/\delta_{s_{m+1}})$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим шар

$$B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \xi_\varepsilon| < \varepsilon\}, \quad \xi_\varepsilon = (\sqrt{a} + \varepsilon, 0, \dots, 0).$$

Пусть функция $\widehat{u}_0(\cdot)$ такова, что

$$F\widehat{u}_0(\xi) = \begin{cases} A, & \xi \in B_\varepsilon \cup (-B_\varepsilon), \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon \cup (-B_\varepsilon), \end{cases}$$

где

$$A = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{2|B_\varepsilon|}} \frac{\delta_{s_m}^{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}}{\delta_{s_{m+1}}^{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}},$$

а $|B_\varepsilon|$ — объем шара B_ε . Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{2A^2}{(2\pi)^d} \int_{B_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 t} d\xi \\ \leq \frac{2A^2|B_\varepsilon|}{(2\pi)^d} e^{-2at} = e^{-2(at+b)}.$$

В силу того, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная, $at_j + b \geq \ln 1/\delta_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq e^{-2(at_j+b)} \leq \delta_j^2.$$

Тем самым функция $\widehat{u}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (4.113) и

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi &= \frac{2A^2}{(2\pi)^d} \int_{B_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2\tau} d\xi \\ &\geq \frac{2A^2|B_\varepsilon|}{(2\pi)^d} e^{-2(\sqrt{a}+2\varepsilon)^2\tau} = e^{-2(a\tau+b)} e^{-2\varepsilon(4\sqrt{a}+\varepsilon)\tau}. \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|I_j u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_j^2, j=1, \dots, n}} \|I_0 u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\geq e^{-2(a\tau+b)} = e^{-2\theta(\tau)} \\ &= \delta_{s_m}^{\frac{2(t_{s_{m+1}}-\tau)}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}} \delta_{s_{m+1}}^{\frac{2(\tau-t_{s_m})}{t_{s_{m+1}}-t_{s_m}}} = \begin{cases} \lambda_1^{(m)} \delta_{s_m}^2 + \lambda_2^{(m)} \delta_{s_{m+1}}^2, & \tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}}), \\ \delta_{s_m}^2, & \tau = t_{s_m} \end{cases}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\tau \geq t_{s_k}$. Положим

$$\widehat{B}_\varepsilon = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| < \varepsilon \}.$$

Определим функцию $\widehat{u}_0(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{u}_0(\xi) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{|\widehat{B}_\varepsilon|}} \delta_{s_k}, & \xi \in \widehat{B}_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \widehat{B}_\varepsilon, \end{cases}$$

где $|\widehat{B}_\varepsilon|$ — объем шара \widehat{B}_ε . Тогда для всех $t \geq 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{A^2}{(2\pi)^d} \int_{\widehat{B}_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 t} d\xi \leq \frac{A^2 |\widehat{B}_\varepsilon|}{(2\pi)^d} = \delta_{s_k}^2.$$

В силу определения множества M для всех $j = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_{s_k}^2 \leq \delta_j^2.$$

Следовательно, функция $\widehat{u}_0(\cdot)$ является допустимой в задаче (4.113), а

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta_{s_k}^2}{|\widehat{B}_\varepsilon|} \int_{\widehat{B}_\varepsilon} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\xi \geq \delta_{s_k}^2 e^{-2\varepsilon^2 \tau}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$\sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|I_j u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_j^2, j=1, \dots, n}} \|I_0 u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \geq \delta_{s_k}^2 = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Займемся теперь оценкой сверху. Пусть $\tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$ при некотором m , $1 \leq m \leq k-1$. Для оценки погрешности методов (4.110) рассмотрим экстремальную задачу

$$(4.114) \quad \|u(\cdot, \tau) - \widehat{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \\ \|I_j u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Переходя к образам Фурье, эта задача принимает вид

$$(4.115) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|\xi|^2 \tau} F u_0(\xi) - e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_m})} \alpha(\xi) F y_{s_m}(\xi) - e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) F y_{s_{m+1}}(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|\xi|^2 t_j} F u_0(\xi) - F y_j(\xi) \right|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Положим

$$(4.116) \quad z_j(\xi) = e^{-|\xi|^2 t_j} F u_0(\xi) - F y_j(\xi), \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда задача (4.115) преобразуется к виду

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_m})} \alpha(\xi) z_{s_m}(\xi) + e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) z_{s_{m+1}}(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\left| e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_m})} \alpha(\xi) z_{s_m}(\xi) + e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_{m+1}})} (1 - \alpha(\xi)) z_{s_{m+1}}(\xi) \right|^2 \\ \leq \left(e^{-2|\xi|^2 (\tau - t_{s_m})} \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1^{(m)}} + e^{-2|\xi|^2 (\tau - t_{s_{m+1}})} \frac{|1 - \alpha(\xi)|^2}{\lambda_2^{(m)}} \right) \\ \times \left(\lambda_1^{(m)} |z_{s_m}(\xi)|^2 + \lambda_2^{(m)} |z_{s_{m+1}}(\xi)|^2 \right).$$

Если $\alpha(\cdot)$ удовлетворяют условию (4.109), то

$$e(I, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sqrt{\lambda_1^{(m)} \delta_{s_m}^2 + \lambda_2^{(m)} \delta_{s_{m+1}}^2} \leq E(I, \delta).$$

Отсюда следует оптимальность метода $\widehat{\varphi}$ и равенство (4.108) в рассматриваемом случае. Надо лишь доказать, что множество функций $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условию (4.109), не пусто. Пусть $\tau \in (t_{s_m}, t_{s_{m+1}})$. Рассмотрим вогнутую функцию

$$(4.117) \quad y = x^{\frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}}, \quad x \geq 0.$$

Проведем касательную к графику этой функции в точке $x_0 > 0$. Нетрудно убедиться, что касательная будет иметь вид $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$, где

$$\lambda_1 = \frac{t_{s_{m+1}} - \tau}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} x_0^{\frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}} x_0^{\frac{\tau - t_{s_m} + 1}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}}.$$

В силу вогнутости кривой (4.117) для всех $x \geq 0$ будет выполняться неравенство

$$x^{\frac{\tau - t_{s_m}}{t_{s_{m+1}} - t_{s_m}}} \leq \lambda_1 + \lambda_2 x.$$

Положим

$$x = e^{-|\xi|^2 (t_{s_{m+1}} - t_{s_m})}, \quad x_0 = \left(\frac{\delta_{s_{m+1}}}{\delta_{s_m}} \right)^2.$$

Тогда $\lambda_j = \lambda_j^{(m)}$, $j = 1, 2$, и для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$e^{-|\xi|^2 (\tau - t_{s_m})} \leq \lambda_1^{(m)} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 (t_{s_{m+1}} - t_{s_m})}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{e^{-|\xi|^2\tau}}{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_{m+1}}}} \leq 1.$$

Положив

$$\alpha(\xi) = \frac{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}}}{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_{m+1}}}},$$

получаем

$$\begin{aligned} e^{-2|\xi|^2\tau} \left(e^{2|\xi|^2 t_{s_m}} \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1^{(m)}} + e^{2|\xi|^2 t_{s_{m+1}}} \frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2^{(m)}} \right) \\ = \frac{e^{-|\xi|^2\tau}}{\lambda_1^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_m}} + \lambda_2^{(m)} e^{-|\xi|^2 t_{s_{m+1}}}} \leq 1. \end{aligned}$$

Пусть $\tau = t_{s_m}$ при некотором m , $1 \leq m \leq k$. Тогда, переходя к образам Фурье в задаче (4.114), получаем

$$(4.118) \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|\xi|^2\tau} F u_0(\xi) - e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_m})} F y_{s_m}(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|\xi|^2 t_j} F u_0(\xi) - F y_j(\xi) \right|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Используя обозначения (4.116), приходим к задаче

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_{s_m}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n,$$

решение которой очевидно.

Пусть теперь $\tau > t_{s_k}$. Используя те же шаги, что и в предыдущих случаях, мы приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2(\tau-t_{s_k})} |z_{s_k}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $e(I, \delta, \hat{\varphi}) \leq \delta_{s_k} \leq E(I, \delta)$, что доказывает утверждение теоремы для рассматриваемого случая. \square

4.17. Комментарии

В пп. 4.1–4.4 рассмотрены примеры характерных задач оптимального восстановления разных типов. Для каждой из них давалось полное решение с указанием точного выражения для погрешности оптимального восстановления и соответствующего оптимального метода восстановления. Большинство примеров взято из статьи Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомирова [42].

Наиболее близкой к общей задаче оптимального восстановления и в определенном смысле истоковой для нее является задача о наилучшей квадратурной формуле. С. М. Никольский [48] пишет, что задача эта была поставлена А. Н. Колмогоровым. В 1965 году С. А. Смоляк [57], заменяя определенный интеграл на значение произвольного линейного функционала, а значения подынтегральной функции в точках — на значения других линейных функционалов и допуская к рассмотрению не только линейные, но и другие всевозможные методы, получает постановку задачи об оптимальном восстановлении

линейного функционала. Им было доказано, что для выпуклого и центрально-симметричного множества среди оптимальных методов существует линейный. Этот результат с заменой центральной симметрии на уравновешенность был распространен на комплексный случай К. Ю. Осипенко [50]. Задача об оптимальном восстановлении в случае, когда информация о функционалах задана с погрешностью, была поставлена Н. С. Бахваловым, а существование линейного оптимального метода было доказано в работе А. Г. Марчука, К. Ю. Осипенко [46].

Дальнейшие обобщения рассматривались в работах С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin [13], В. В. Арестова [24], Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [36] (см. также обзорную статью С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin [14] и монографии Дж. Трауба, Х. Вожьянковского [68], Н. П. Корнейчука [35], J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski [22], L. Plaskota [20], К. Ю. Осипенко [52]).

Отметим, что существуют и другие постановки задач оптимального восстановления, связанные с усреднением погрешности восстановления, введением случайной ошибки и т. д. Ряд таких постановок можно найти в книгах J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski [22] и L. Plaskota [20]).

Критерии существования линейных и аффинных оптимальных методов восстановления (теоремы 4.3 и 4.4) впервые стали изучаться в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [36]. Утверждения, близкие к теореме 4.5, можно найти в работе С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin [13]. Однако еще у С. Я. Хавинсона [71] в связи с решением ряда экстремальных задач появился критерий, сформулированный в теореме 4.5, для топологического случая (хотя в явном виде задача об оптимальном восстановлении не обсуждалась). Теорема 4.7 в различной степени общности доказывалась К. Ю. Осипенко [51], К. Ю. Осипенко, М. И. Стесиним [56], [16].

Теоремы 4.9 и 4.10 доказаны К. Ю. Осипенко [53].

Теорема 4.11 была доказана в работах С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin, S. Winograd [15] и P. W. Gaffney, M. J. D. Powell [7]. Приводимое доказательство, основанное на методе параметризации (теорема 4.9) и позволяющее доказать единственность оптимального метода, было предложено в работе К. Ю. Осипенко [17].

Оптимальный метод восстановления на классе H_∞ был построен К. Ю. Осипенко [49], [50]. Общий случай $1 \leq p \leq \infty$ был рассмотрен в работе S. D. Fisher, С. А. Micchelli [4].

Теорема 4.14 вытекает из результатов, доказанных в работе S. D. Fisher [3]. Теорема 4.15 доказана в работе К. Ю. Осипенко [53].

Значение поперечника $d_{n+r}(H_\infty^r, C([a, b]))$ (теорема 4.18) найдено в работе S. D. Fisher [3] (приводимое здесь доказательство упрощено за счет результата из теоремы 4.15).

Формулировка теоремы 4.19 и ее доказательство взяты из учебника В. А. Ильина, Э. Г. Позняка [30]. Метод регуляризации Тихонова широко применяется в различных прикладных задачах. Тем не менее, на наш взгляд, у этого метода есть ряд недостатков. Авторы учебника [30] пишут: “... *должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом процессе*”. (Выделено жирным шрифтом нами.) Но метод регуляризации утверждает о сходимости предложенного алгоритма при $\delta \rightarrow 0$ и не дает информации о погрешности алгоритма при данном

фиксированном δ . Кроме того, мы не можем утверждать, что мы “извлекли максимальную информацию об изучаемом процессе”, т. к. нет гарантии, что не существует алгоритма, который дал бы лучший результат (в данной постановке нет возможности сравнивать разные алгоритмы).

Подход к задачам восстановления функции по ее неточно заданным коэффициентам Фурье, основанный на общей теории оптимального восстановления, свободен от тех недостатков, которые указывались выше. А именно, здесь удается получить оценку погрешности восстановления при любой фиксированной погрешности задания коэффициентов Фурье, а также найти наилучший метод восстановления. Мы называем этот метод регуляризацией по Колмогорову в силу того, что сама идея построения теории оптимального восстановления берет свое начало от идей А. Н. Колмогорова, связанных с построением оптимальных квадратурных формул и введением понятия n -поперечника. Ради объективности стоит сказать, что и этот подход может быть подвергнут некоторой критике, связанной с тем, что исследователь не знает, какому классу функций принадлежат функции, значения которых он хочет восстанавливать. Тем не менее, строя оптимальные методы для различных классов, мы получаем семейство методов, каждый из которых обладает хорошими свойствами (оптимальность на соответствующем классе). Среди этих методов исследователь может выбирать те, применение которых наиболее адекватно отображает изучаемые процессы. Материал этого раздела взят из работы Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [41].

Восстановление функций и их производных по неточно заданным коэффициентам Фурье (в комплексной форме) рассматривалось в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [37]. Более общие результаты в этом направлении можно найти в работе К. Ю. Осипенко [55, теорема 10].

В задаче (4.90) при $p = 2$ и $\sigma = \infty$ информация равносильна (в силу теоремы Планшереля) тому, что известна сама функция с точностью до δ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. В такой постановке задача решена в работе А. А. Melkman, С. А. Micchelli [12]. Теоремы 4.23 и 4.24 (без нахождения семейства оптимальных методов) доказаны в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [38]. Существование семейств оптимальных методов восстановления было обнаружено в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [40]. В более общей ситуации семейства оптимальных методов восстановления описаны в работе К. Ю. Осипенко [55].

Применение теории оптимального восстановления линейных операторов по неточно заданной информации к решению уравнений математической физики началось с работ Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомирова [11] и К. Ю. Осипенко [54]. Теорема 4.25 (без нахождения семейства оптимальных методов) была доказана в работе Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [39].

Дополнение

5.1. Теоремы отделимости

Пусть A и B — непустые подмножества нормированного пространства X . Говорят, что ненулевой функционал $x^* \in X^*$ отделяет множества A и B , если

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle.$$

Если неравенство строгое, то говорят, что x^* строго отделяет A и B .

Пусть число $\gamma \in \mathbb{R}$ таково, что

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \gamma \leq \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle.$$

Тогда, геометрически, отделимость множеств A и B означает, что они расположены по разные стороны от гиперплоскости

$$\{x \in X : \langle x^*, x \rangle = \gamma\}.$$

Напомним формулировку первой теоремы отделимости (см. [34, стр. 243]).

ТЕОРЕМА 5.1 (первая теорема отделимости). Пусть A и B — непустые выпуклые подмножества нормированного пространства X , причем $\text{int } A \neq \emptyset$ и $B \cap \text{int } A = \emptyset$. Тогда множества A и B отделимы.

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 5.2 (вторая теорема отделимости). Пусть A — непустое замкнутое выпуклое подмножество нормированного пространства X и $\hat{x} \notin A$. Тогда множества A и \hat{x} строго отделимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A замкнуто, то дополнение к A открыто и поэтому существует такое $r > 0$, что открытый шар $B_X(\hat{x}, r)$ не пересекается с A . Тогда по первой теореме отделимости существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$ такой, что

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in B_X(\hat{x}, r)} \langle x^*, x \rangle.$$

Но

$$\inf_{x \in B_X(\hat{x}, r)} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle,$$

т. е. ненулевой линейный непрерывный функционал не может достигать точной нижней грани во внутренней точке. Следовательно, множества A и \hat{x} строго отделимы. \square

5.2. Аффинная независимость. Симплексы

Пусть X — линейное пространство. Векторы $x_1, \dots, x_{k+1} \in X$ называются аффинно независимыми, если из того, что

$$(5.1) \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 0,$$

следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Векторы x_1, \dots, x_{k+1} аффинно независимы в том и только в том случае, если векторы $x_j - x_1$, $2 \leq j \leq k+1$, линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_1, \dots, x_{k+1} аффинно независимы и

$$(5.2) \quad \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j (x_j - x_1) = 0.$$

Тогда

$$(5.3) \quad \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j x_j - \left(\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j \right) x_1 = 0.$$

Из аффинной независимости x_1, \dots, x_{k+1} вытекает, что $\lambda_2 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$.

Пусть теперь векторы $x_j - x_1$, $2 \leq j \leq k+1$, линейно независимы и выполняются условия (5.1). Тогда имеет место равенство (5.3), которое эквивалентно равенству (5.2). Из линейной независимости векторов $x_j - x_1$, $2 \leq j \leq k+1$, получаем, что $\lambda_2 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$. Кроме того,

$$\lambda_1 = - \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j = 0.$$

□

Выпуклая оболочка аффинно независимых векторов x_1, \dots, x_{k+1} называется k -мерным симплексом, а векторы x_1, \dots, x_{k+1} — вершинами симплекса. Любой вектор из этого симплекса единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k+1.$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ называются барицентрическими координатами вектора x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть $A \subset X$ и $0 < \dim A < \infty$. Тогда максимальное число аффинно независимых векторов в множестве A равно $\dim A + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x_1, \dots, x_{k+1} \in A$, являются аффинно независимыми и максимальное число аффинно независимых векторов в A равно $k+1$. Если предположить, что существует вектор $x_0 \in A$ такой, что $x_0 \notin \text{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$, то векторы x_0, x_1, \dots, x_{k+1} будут аффинно независимыми, что противоречит максимальнойности числа аффинно независимых векторов в A . Таким образом,

$$A \subset \text{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}.$$

Следовательно,

$$\text{aff } A = \text{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}.$$

Поэтому

$$k = \dim \text{aff}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = \dim \text{aff } A = \dim A.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Если A — выпуклое множество, $\dim A = d$, $0 < d < \infty$, то A содержит d -мерный симплекс.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ — непустое выпуклое множество и $\dim A = d$. Тогда $\text{int } A \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 5.5 вытекает, что A содержит d -мерный симплекс. Пусть a_1, \dots, a_{d+1} — его вершины. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 = 0$. Покажем, что любая точка этого симплекса с положительными барицентрическими координатами является внутренней точкой симплекса, а следовательно, и множества A . Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k a_k, \quad \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, \dots, d+1.$$

Пусть e_1, \dots, e_d — стандартный базис в \mathbb{R}^d . Так как a_2, \dots, a_{d+1} линейно независимы, векторы стандартного базиса можно представить в виде

$$e_j = \sum_{k=2}^{d+1} \alpha_{jk} a_k, \quad j = 1, \dots, d.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, чтобы

$$\lambda_k - \varepsilon \sum_{j=1}^d |\alpha_{jk}| > 0, \quad k = 2, \dots, d+1,$$

и

$$\sum_{k=2}^{d+1} \left(\lambda_k + \varepsilon \sum_{j=1}^d |\alpha_{jk}| \right) < 1.$$

Пусть x — произвольный вектор из $B_\varepsilon(0)$. Тогда его можно записать в виде

$$x = \sum_{j=1}^d x_j e_j = \sum_{j=1}^d x_j \sum_{k=2}^{d+1} \alpha_{jk} a_k = \sum_{k=2}^{d+1} \sum_{j=1}^d x_j \alpha_{jk} a_k,$$

где $|x_j| < \varepsilon$. Таким образом,

$$x_0 + x = \sum_{k=2}^{d+1} \left(\lambda_k + \sum_{j=1}^d x_j \alpha_{jk} \right) a_k = \sum_{k=2}^{d+1} \gamma_k a_k.$$

В силу выбора ε , имеем

$$\gamma_k > 0, \quad k = 2, \dots, d+1, \quad \sum_{k=2}^{d+1} \gamma_k < 1.$$

Тем самым точка x_0 является внутренней точкой симплекса. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть X — линейное пространство размерности d . Для любой точки $x \in X$ найдется d -мерный симплекс, содержащий некоторую окрестность x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_1, \dots, e_d — базис пространства X . Рассмотрим d -мерный симплекс A с вершинами в точках $0, e_1, \dots, e_d$ и точку

$$\tilde{x} = \frac{1}{d+1} \sum_{j=1}^d e_j.$$

Очевидно, что $\tilde{x} \in A$. Функция

$$\varphi(\xi) = \left\| \sum_{j=1}^d \xi_j e_j \right\|_X, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,$$

непрерывна на единичной сфере \mathbb{R}^d и в силу теоремы Вейерштрасса достигает минимума на ней, который обозначим через $m > 0$. Тем самым имеет место неравенство

$$(5.4) \quad \left\| \sum_{j=1}^d \xi_j e_j \right\|_X \geq m \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right)^{1/2}.$$

Положим для $x \in X$ и $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(\hat{x}) = \{ x \in X : \|x - \hat{x}\|_X < \varepsilon \}.$$

Если

$$x_\xi = \sum_{j=1}^d \xi_j e_j \in B_\varepsilon(0),$$

то из неравенства (5.4) получаем

$$|\xi_j| \leq \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Выберем $\varepsilon < m/(d(d+1))$. Тогда для всех $x_\xi \in B_\varepsilon(0)$ имеем

$$\tilde{x} + x_\xi = \sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{d+1} + \xi_j \right) e_j.$$

Из того, что

$$\frac{1}{d+1} + \xi_j > \frac{1}{d+1} - \frac{\varepsilon}{m} > \frac{d-1}{d(d+1)} \geq 0,$$

а

$$\sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{d+1} + \xi_j \right) < \frac{d}{d+1} + d \frac{\varepsilon}{m} < 1,$$

вытекает, что симплекс A содержит шар $B_\varepsilon(\tilde{x})$. Сдвинув симплекс A на вектор $x - \tilde{x}$, получим d -мерный симплекс с вершинами $a_0 = x - \tilde{x}$, $e_j + x - \tilde{x}$, $j = 1, \dots, d$, содержащий шар $B_\varepsilon(x)$. \square

5.3. Выпуклые функции

Мы будем рассматривать функции, которые принимают не только конечные значения. С этой целью вводится понятие расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Арифметические операции и неравенства для элементов расширенной прямой понимаются следующим образом: $-\infty < a < +\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $a + (\pm\infty) = \pm\infty$ для всех $a \in \mathbb{R}$,

$$a(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & a < 0, \end{cases}$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Пусть X — линейное пространство и $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Множества

$$\text{dom } f = \{ x \in X : f(x) < +\infty \},$$

$$\text{epi } f = \{ (x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x), x \in \text{dom } f \}$$

называются соответственно эффективным множеством и надграфиком (или эпиграфом) функции f . Функцию f называют собственной, если $\text{dom } f \neq \emptyset$ и $f(x) > -\infty$ при всех $x \in X$.

Функция $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется выпуклой, если ее надграфик — выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что функция f выпукла тогда и

только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in \text{dom } f$ и любого $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется неравенство

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

которое называется неравенством Йенсена.

Если функция f — выпукла, тогда для любых $x_1, \dots, x_k \in \text{dom } f$ и любых $\alpha_j \geq 0$ таких, что

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1,$$

выполняется неравенство

$$(5.5) \quad f\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j f(x_j).$$

Докажем это неравенство по индукции. При $k = 2$ оно непосредственно вытекает из неравенства Йенсена. Пусть неравенство доказано для $k \leq n - 1$. Докажем его для $k = n$. При $\alpha_1 = 1$ оно очевидно. Пусть $\alpha_1 < 1$. Положим

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_1}, \quad j = 2, \dots, n, \quad \tilde{x} = \sum_{j=2}^n \tilde{\alpha}_j x_j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) &= f\left(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_1} x_j\right) = f(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \tilde{x}) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + (1 - \alpha_1) f(\tilde{x}) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда f непрерывна в любой точке $\hat{x} \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем доказывать непрерывность в точке $\hat{x} = 0$. Пусть $\dim X = d$. Из предложения 5.7 следует, что существует d -мерный симплекс, содержащий некоторый шар $B_r(0)$. Если a_0, a_1, \dots, a_d — вершины этого симплекса, то для всех точек $x \in B_r(0)$, учитывая (5.5), имеем

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_d a_d)| \leq |\alpha_0 f(a_0) + \dots + \alpha_d f(a_d)| \leq C, \\ C &= \max_{0 \leq j \leq d} |f(a_j)|. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$, а $x \in B_r(0)$. Тогда

$$f(\varepsilon x) = f(\varepsilon x + (1 - \varepsilon)0) \leq \varepsilon f(x) + (1 - \varepsilon)f(0).$$

Отсюда

$$(5.6) \quad f(\varepsilon x) - f(0) \leq \varepsilon(f(x) - f(0)) \leq \varepsilon(C - f(0)).$$

Кроме того,

$$f(0) = f\left(\frac{1}{\varepsilon + 1}\varepsilon x + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}(-x)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon + 1}f(\varepsilon x) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}f(-x).$$

Следовательно,

$$(\varepsilon + 1)f(0) \leq f(\varepsilon x) + \varepsilon f(-x).$$

Тем самым

$$f(\varepsilon x) - f(0) \geq \varepsilon(f(0) - f(-x)) \geq \varepsilon(f(0) - C).$$

Из этого неравенства, учитывая (5.6), получаем

$$|f(\varepsilon x) - f(0)| \leq \varepsilon(C - f(0)).$$

Для всех $y \in B_{\varepsilon r}(0)$ $y/\varepsilon \in B_r(0)$, поэтому

$$|f(y) - f(0)| = |f(\varepsilon(y/\varepsilon)) - f(0)| \leq \varepsilon(C - f(0)).$$

Из этого неравенства следует непрерывность функции f в нуле. \square

5.4. Двойственность выпуклых функций

Функция $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется замкнутой, если множество $\text{epi } f$ замкнуто в $X \times \mathbb{R}$.

Напомним, что функция $a(x) = \langle x^*, x \rangle + \alpha$, где $x^* \in X^*$, а $\alpha \in \mathbb{R}$, называется аффинной.

ТЕОРЕМА 5.9 (о поточечной верхней грани аффинных функций). *Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является выпуклой и замкнутой тогда и только тогда, когда она есть поточечная верхняя грань аффинных функций, не превосходящих f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f — поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, то ее надграфик есть пересечение надграфиков этих функций, которые, очевидно, выпуклы и замкнуты, и поэтому функция f выпукла и замкнута.

Обратно, пусть функция f выпукла и замкнута. Если $f(x) \equiv +\infty$, то она есть, например, поточечный предел констант. Пусть функция f не равна тождественно $+\infty$ и $x_0 \in X$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_0 < f(x_0)$. Ясно, что $(x_0, \alpha_0) \notin \text{epi } f$. По второй теореме отделимости (теорема 5.2) найдется $x^* \in X^*$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$(5.7) \quad \sup_{(x, \alpha) \in \text{epi } f} (\langle x^*, x \rangle + \gamma \alpha) < \langle x^*, x_0 \rangle + \gamma \alpha_0.$$

Заметим, что $\gamma \leq 0$, ибо в противном случае, увеличивая α , пришли бы к противоречию с неравенством (5.7).

Пусть $f(x_0) < +\infty$. Подставляя точку $(x_0, f(x_0)) \in \text{epi } f$ в (5.7), получаем, что $\gamma(\alpha_0 - f(x_0)) > 0$. Но $\alpha_0 - f(x_0) < 0$, и поэтому в данном случае $\gamma < 0$. Можно считать, что $\gamma = -1$ (деля, если необходимо, обе части неравенства (5.7) на $-\gamma$). Тогда, обозначая через c верхнюю грань в (5.7), это неравенство можно записать в виде двух неравенств

$$(5.8) \quad \langle x^*, x_0 \rangle - c > \alpha_0, \quad \langle x^*, x \rangle - c \leq \alpha \quad \forall (x, \alpha) \in \text{epi } f.$$

Рассмотрим аффинную функцию $a(x) = \langle x^*, x \rangle - c$. Если $f(x) = +\infty$, то, очевидно, $a(x) < f(x)$. Если $f(x) < +\infty$, то из второго неравенства в (5.8) при $\alpha = f(x)$ следует, что $a(x) \leq f(x)$. Таким образом, это неравенство выполняется для всех $x \in X$. Из первого неравенства в (5.8) следует, что $\alpha_0 < a(x_0)$, и, значит, $\alpha_0 < a(x_0) \leq f(x_0)$. Выбирая α_0 сколь угодно близко к $f(x_0)$, получаем, что во всех точках, где функция f конечна, она есть поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, не превосходящих f .

Пусть теперь $f(x_0) = +\infty$. Для доказательства теоремы в этом случае надо для любого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ построить аффинную функцию, не превосходящую f , значение которой в точке x_0 больше α_0 . Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Если в (5.7) $\gamma < 0$ (как и выше, считаем тогда, что $\gamma = -1$), то из (5.8) вытекает, что $a(x_0) = \langle x^*, x_0 \rangle - c > \alpha_0$ и все доказано. Если же $\gamma = 0$ (отделяющая гиперплоскость “вертикальна”), то (5.7) запишется так:

$$(5.9) \quad \langle x^*, x_0 \rangle - c > 0, \quad \langle x^*, x \rangle - c \leq 0 \quad \forall (x, \alpha) \in \text{epi } f.$$

По доказанному выше существует аффинная функция a , которая всюду не превосходит f . Для каждого $\mu > 0$ рассмотрим аффинную функцию $a_\mu(x) = a(x) + \mu(\langle x^*, x \rangle - c)$. Из второго неравенства в (5.9) следует, что эта функция также всюду не превосходит f , а из первого, — что $a_\mu(x_0) = a(x_0) + \mu(\langle x^*, x_0 \rangle - c) > \alpha_0$ для достаточно больших μ . Итак, f есть поточечная верхняя грань семейства аффинных функций, ее не превосходящих. \square

5.5. Интегральное неравенство Йенсена

ТЕОРЕМА 5.10 (неравенство Йенсена). Пусть $v(\cdot) \in L_1(T, \mu)$, где μ — вероятностная мера ($\mu(T) = 1$), а $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда

$$(5.10) \quad \varphi\left(\int_T v(x) d\mu(x)\right) \leq \int_T \varphi(v(x)) d\mu(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 5.8 вытекает, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна. Следовательно, она замкнута. Кроме того, $\varphi(v(\cdot))$ измерима (см. [34, стр. 301]). В силу выпуклости и замкнутости $\varphi(\cdot)$ она является поточечной верхней гранью аффинных функций (см. теорему 5.9). Тем самым для всех $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t_0) = \sup\{at_0 + b : at + b \leq \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $at + b \leq \varphi(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда рассмотрим измеримую функцию

$$g(x) = \varphi(v(x)) - av(x) - b \geq 0.$$

Если

$$\int_T g(x) d\mu(x) = +\infty,$$

то и

$$\int_T \varphi(v(x)) d\mu(x) = +\infty.$$

Поэтому неравенство (5.10) очевидным образом выполнено. В противном случае $\varphi(v(\cdot))$ — интегрируемая функция, и

$$a \int_T v(x) d\mu(x) + b = \int_T (av(x) + b) d\mu(x) \leq \int_T \varphi(v(x)) d\mu(x).$$

Переходя в левой части к точной верхней грани, получаем (5.10). \square

5.6. Первая теорема отделимости в конечномерном случае

ТЕОРЕМА 5.11. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ — непустое выпуклое множество и $0 \notin \text{int } A$. Тогда A отделимо от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim A = d$, то из предложения 5.6 следует, что $\text{int } A \neq \emptyset$. В этом случае утверждение теоремы вытекает из первой теоремы отделимости (теоремы 5.1).

Предположим, что $\dim A = n < d$. Тогда $A \subset \text{aff } A = a + \text{lin}\{a_1, \dots, a_n\}$. Найдется ненулевой вектор $e \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\langle e, a_j \rangle = 0$, $j = 1, \dots, n$. Без ограничения общности можно считать, что $\langle e, a \rangle \leq 0$ (в противном случае можно рассмотреть вектор $-e$). Любой вектор $x \in A$ представим в виде

$$x = a + \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j.$$

Поэтому для всех $x \in A$ выполнено неравенство $\langle e, x \rangle \leq 0$, что и означает отделимость A от нуля. \square

5.7. Субдифференциал

Пусть X — линейное нормированное пространство, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\hat{x} \in X$ и функция f конечна в точке \hat{x} . Субдифференциалом функции f в точке \hat{x} называется множество (возможно, пустое)

$$\partial f(\hat{x}) = \{x^* \in X^* : f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle x^*, x - \hat{x} \rangle, \forall x \in X\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. *Субдифференциал функции является выпуклым множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если субдифференциал — пустое множество, то утверждение вытекает из того, что пустое множество выпукло. Пусть субдифференциал функции f в точке \hat{x} не пуст и $x_1^*, x_2^* \in \partial f(\hat{x})$. Тогда для всех $x \in X$

$$f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle x_1^*, x - \hat{x} \rangle, \quad f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle x_2^*, x - \hat{x} \rangle.$$

Отсюда при всех $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$(1 - \alpha)(f(x) - f(\hat{x})) + \alpha(f(x) - f(\hat{x})) \geq (1 - \alpha)\langle x_1^*, x - \hat{x} \rangle + \alpha\langle x_2^*, x - \hat{x} \rangle.$$

Следовательно,

$$f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle (1 - \alpha)x_1^* + \alpha x_2^*, x - \hat{x} \rangle.$$

Это означает, что $(1 - \alpha)x_1^* + \alpha x_2^* \in \partial f(\hat{x})$. \square

Пример 5.1. Пусть X — линейное нормированное пространство и $f(x) = \|x\|$. Найдем сначала $\partial f(0)$. Поскольку $f(0) = 0$, то из определения субдифференциала вытекает, что

$$\partial f(0) = \{x^* \in X^* : \|x\| \geq \langle x^*, x \rangle, \forall x \in X\}.$$

Покажем, что единичный шар сопряженного пространства

$$BX^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$$

содержится в $\partial f(0)$. Действительно, если $x^* \in BX^*$, то для всех $x \in X$

$$\langle x^*, x \rangle \leq \|x^*\| \|x\| \leq \|x\|.$$

Если теперь $x^* \in \partial f(0)$, то $x^* \in BX^*$, ибо если $\|x^*\| > 1$, то существует $x \in X$ такой, что $\|x\| \leq 1$ и $\langle x^*, x \rangle > 1 \geq \|x\|$. Итак, доказано, что $\partial f(0) = BX^*$.

Найдем теперь $\partial f(x_0)$ при $x_0 \neq 0$. Имеем

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : \|x\| - \|x_0\| \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \forall x \in X\}.$$

Предположим, что $x^* \in \partial f(x_0)$. Подставив $x = 0$, получим, что $\langle x^*, x_0 \rangle \geq \|x_0\|$. С другой стороны, если подставить $x = 2x_0$, то получим, что $\|x_0\| \geq \langle x^*, x_0 \rangle$. Следовательно, $\langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|$. Тогда для всех $x \in X$ должно выполняться неравенство $\|x\| \geq \langle x^*, x \rangle$. Как было показано выше, это означает, что $x^* \in BX^*$. Нетрудно убедиться, что если $x^* \in BX^*$ и $\langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|$, то $x^* \in \partial f(x_0)$. Таким образом, при $x_0 \neq 0$

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in BX^* : \langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|\}.$$

Пример 5.2. Пусть X — нормированное пространство, а L — собственное подпространство в X . Положим

$$\delta L(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in L, \\ +\infty, & \xi \notin L. \end{cases}$$

Через L^\perp обозначим аннулятор L :

$$L^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x \in L\}.$$

Покажем, что для любого $\xi \in L$

$$(5.11) \quad \partial \delta L(\xi) = L^\perp.$$

Пусть $x^* \in \partial\delta L(\xi)$. Тогда для любого $x \in X$ должно выполняться неравенство

$$(5.12) \quad \delta L(x) \leq \langle x^*, x - \xi \rangle.$$

Из него вытекает, что $\langle x^*, x - \xi \rangle \geq 0$ для всех $x \in L$, что возможно лишь при $x^* \in L^\perp$. С другой стороны, легко убедиться, что при $x^* \in L^\perp$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство (5.12). Следовательно, $x^* \in \partial\delta L(\xi)$.

Пусть X — линейное нормированное пространство, а U — открытое подмножество X . Функция $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $\hat{x} \in U$, если найдется такой линейный функционал $x^* \in X^*$, что для всех $h \in X$, для которых $\hat{x} + h \in U$, справедливо представление

$$(5.13) \quad f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + \langle x^*, h \rangle + r(h),$$

где $r(h) = o(\|h\|_X)$ ($|r(h)|/\|h\|_X \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$). Линейный функционал x^* называется производной функции f в точке \hat{x} и обозначается: $f'(\hat{x})$.

Следующее предложение показывает, что субдифференциал — достаточно естественное обобщение понятия производной на выпуклые функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. Пусть X — линейное нормированное пространство и $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция, дифференцируемая в точке \hat{x} . Тогда $\partial f(\hat{x}) = \{f'(\hat{x})\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$. Для любого достаточно малого $\alpha > 0$ имеем по неравенству Йенсена

$$f((1 - \alpha)\hat{x} + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(x),$$

откуда

$$f(\hat{x} + \alpha(x - \hat{x})) - f(\hat{x}) \leq \alpha(f(x) - f(\hat{x})).$$

В силу дифференцируемости функции f в точке \hat{x} имеем

$$\alpha \langle f'(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(\alpha) \leq \alpha(f(x) - f(\hat{x})).$$

Сокращая на α и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получаем, что $f'(\hat{x}) \in \partial f(\hat{x})$.

Обратно, если $x^* \in \partial f(\hat{x})$, то для любого $x \in X$ и любого $t > 0$ имеем $f(\hat{x} + tx) - f(\hat{x}) \geq t \langle x^*, x \rangle$. Следовательно,

$$t \langle f'(\hat{x}), x \rangle + o(t) \geq t \langle x^*, x \rangle,$$

т. е. $\langle f'(\hat{x}), x \rangle \geq \langle x^*, x \rangle$ для любого x и, значит, $x^* = f'(\hat{x})$. \square

Приведем пример: если $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, то $\partial f(x) = f'(x) = 2x$. Определение субдифференциала приводит к неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) \Rightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

5.8. Теорема Ферма в субдифференциальной форме

Пусть X — линейное нормированное пространство и $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — собственная функция. Рассмотрим задачу

$$(5.14) \quad f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

ТЕОРЕМА 5.14 (Ферма в субдифференциальной форме). Точка $\hat{x} \in \text{dom } f$ является глобальным минимумом в задаче (5.14) тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(\hat{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если \hat{x} — глобальный минимум, то $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0 = \langle 0, x - \hat{x} \rangle$ для любого $x \in X$, т. е. $0 \in \partial f(\hat{x})$. Если $0 \in \partial f(\hat{x})$, то $f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle 0, x - \hat{x} \rangle = 0$, т. е. $f(x) \geq f(\hat{x})$ для любого $x \in X$. \square

Из предложения 5.13 и теоремы 5.14 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.15. Если в задаче (5.14) f — выпуклая функция, дифференцируемая в точке \hat{x} , то \hat{x} — глобальный минимум в том и только в том случае, если $f'(\hat{x}) = 0$.

5.9. Существование элемента наилучшего приближения

ТЕОРЕМА 5.16. Пусть X — линейное нормированное пространство, а L — конечномерное линейное подпространство X . Тогда для любого $\xi \in X$ существует элемент наилучшего приближения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ — произвольный элемент из X . По определению нижней грани найдется последовательность $\{x_n\}$, для которой

$$\|\xi - x_n\|_X < d(\xi, L, X) + \frac{1}{n}.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\|_X \leq \|x_n - \xi\|_X + \|\xi\|_X \leq d(\xi, L, X) + 1 + \|\xi\|_X.$$

Тем самым последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow \hat{x} \in L$. Имеем

$$\begin{aligned} d(\xi, L, X) &\leq \|\xi - \hat{x}\|_X \leq \|\xi - x_{n_k}\|_X + \|x_{n_k} - \hat{x}\|_X \\ &\leq d(\xi, L, X) + \frac{1}{n_k} + \|x_{n_k} - \hat{x}\|_X. \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности, получаем

$$\|\xi - \hat{x}\|_X = d(\xi, L, X).$$

\square

Норма в пространстве X называется *строго выпуклой*, если из того, что $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$, следует, что при $0 < \alpha < 1$ $\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|_X < 1$. Пространство со строго выпуклой нормой называют *строго нормированным*.

ТЕОРЕМА 5.17. Пусть X — строго нормированное пространство, а $L \subset X$ — выпуклое множество. Если для $\xi \in X$ существует элемент наилучшего приближения из L , то он единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \hat{x}_1, \hat{x}_2 ($\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$) — два элемента наилучшего приближения из L :

$$\|\xi - \hat{x}_1\|_X = \|\xi - \hat{x}_2\|_X = d(\xi, L, X).$$

Если $\hat{x}_\alpha = \alpha \hat{x}_1 + (1 - \alpha) \hat{x}_2$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), то $\hat{x}_\alpha \in L$ и

$$d(\xi, L, X) \leq \|\xi - \hat{x}_\alpha\|_X \leq \alpha \|\xi - \hat{x}_1\|_X + (1 - \alpha) \|\xi - \hat{x}_2\|_X = d(\xi, L, X).$$

Следовательно, $\|\xi - \hat{x}_\alpha\|_X = \alpha \|\xi - \hat{x}_1\|_X + (1 - \alpha) \|\xi - \hat{x}_2\|_X$, что противоречит строгой нормированности пространства X . \square

Множество L из линейного нормированного пространства X , обладающее тем свойством, что для любого $x \in X$ существует единственный элемент наилучшего приближения из L , называется *чебышёвским* множеством. Пусть L —

чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве X . *Оператором наилучшего приближения* называется оператор $P: X \rightarrow L$, сопоставляющий каждому $\xi \in X$ элемент наилучшего приближения, т. е. определенный равенством

$$\|\xi - P\xi\|_X = d(\xi, L, X).$$

ТЕОРЕМА 5.18. *Если L — конечномерное подпространство линейного нормированного пространства X , являющееся чебышёвским множеством, то оператор наилучшего приближения непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in X$. Тогда для любого $x \in L$

$$d(a, L, X) \leq \|a - x\|_X \leq \|a - b\|_X + \|b - x\|_X.$$

Следовательно,

$$d(a, L, X) \leq \|a - b\|_X + d(b, L, X).$$

Отсюда вытекает, что для любых $a, b \in X$

$$(5.15) \quad |d(a, L, X) - d(b, L, X)| \leq \|a - b\|_X.$$

Пусть $\xi_n \rightarrow \hat{\xi}$. Положим $x_n = P\xi_n$, $\hat{x} = P\hat{\xi}$ и докажем, что $x_n \rightarrow \hat{x}$. Из (5.15) следует, что

$$|d(\xi_n, L, X) - d(\xi, L, X)| \leq \|\xi_n - \xi\|_X.$$

Тем самым последовательность $\{d(\xi_n, L, X)\}$ сходящаяся. Тогда из того, что

$$\|x_n\|_X \leq \|x_n - \xi_n\|_X + \|\xi_n\|_X = d(\xi_n, L, X) + \|\xi_n\|_X,$$

вытекает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. Если предположить, что $x_n \not\rightarrow \hat{x}$, то найдется подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow \hat{x}_0 \neq \hat{x}$. Имеем

$$\|\xi_{n_k} - x_{n_k}\|_X = d(\xi_{n_k}, L, X) \leq \|\xi_{n_k} - \hat{x}\|_X.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\|\hat{\xi} - \hat{x}_0\|_X \leq \|\hat{\xi} - \hat{x}\|_X,$$

что противоречит тому, что L — чебышёвское множество. \square

ТЕОРЕМА 5.19. *Пусть X — евклидово пространство, L — конечномерное линейное подпространство X , а e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис L . Тогда для любого $\xi \in X$ элемент наилучшего приближения имеет вид*

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^n (\xi, e_j) e_j,$$

а

$$d(\xi, L, X) = \left(\|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^n |(\xi, e_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть разложение $x \in L$ имеет вид

$$x = \sum_{j=1}^n c_j e_j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\xi - x\|^2 &= \left(\xi - \sum_{j=1}^n c_j e_j, \xi - \sum_{j=1}^n c_j e_j \right) = \|\xi\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n c_j (\xi, e_j) + \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \\ &= \|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^n |(\xi, e_j)|^2 + \sum_{j=1}^n |c_j - (\xi, e_j)|^2. \end{aligned}$$

Тем самым

$$d(\xi, L, X) \leq \left(\|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^n |(\xi, e_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$d(\xi, L, X) \geq \|\xi - \hat{x}\| = \left(\|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^n |(\xi, e_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

□

5.10. Двойственность в задачах о наилучшем приближении

Пусть X — линейное нормированное пространство, L — собственное подпространство в X и $x \in X \setminus L$.

ТЕОРЕМА 5.20. *Имеет место равенство*

$$\inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|_X = \sup_{\substack{x^* \in X^*, \\ \|x^*\|_{X^*} \leq 1 \\ x^* \in L^\perp}} \langle x^*, x \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^* \in X^*$, $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$, $x^* \in L^\perp$ и $\xi \in L$. Имеем

$$\langle x^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle - \langle x^*, \xi \rangle = \langle x^*, x - \xi \rangle \leq \|x - \xi\|_X.$$

Переходя в правой части к нижней грани по всем $\xi \in L$, получаем

$$\langle x^*, x \rangle \leq \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|_X.$$

Отсюда вытекает, что

$$(5.16) \quad \sup_{\substack{x^* \in X^*, \\ \|x^*\|_{X^*} \leq 1 \\ x^* \in L^\perp}} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|_X.$$

Положим

$$d = \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|_X$$

и рассмотрим шар

$$B_X(x, d) = \{y \in X : \|y - x\|_X < d\}.$$

Множества $B_X(x, d)$ и L являются непересекающимися выпуклыми множествами. Внутренность $B_X(x, d)$, очевидно, непуста. Поэтому по первой теореме делимости (см. теорему 5.1) найдется $\hat{x}^* \in X^*$, $\hat{x}^* \neq 0$, для которого

$$(5.17) \quad \sup_{\xi \in L} \langle \hat{x}^*, \xi \rangle \leq \inf_{y \in B_X(x, d)} \langle \hat{x}^*, y \rangle.$$

Если существует $\xi_1 \in L$, для которого $\langle \hat{x}^*, \xi_1 \rangle \neq 0$, то

$$\sup_{\xi \in L} \langle \hat{x}^*, \xi \rangle = +\infty.$$

Следовательно, $\hat{x}^* \in L^\perp$. Без ограничения общности можно считать, что $\|\hat{x}^*\|_{X^*} = 1$. Тогда из неравенства (5.17) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \inf_{y \in B_X(x, d)} \langle \hat{x}^*, y \rangle &= \inf_{\|z\|_X < d} \langle \hat{x}^*, x + z \rangle = \langle \hat{x}^*, x \rangle + \inf_{\|z\|_X < d} \langle \hat{x}^*, z \rangle \\ &= \langle \hat{x}^*, x \rangle - d. \end{aligned}$$

Тем самым $\langle \hat{x}^*, x \rangle \geq d$. Таким образом,

$$\sup_{\substack{x^* \in X^*, \\ \|x^*\|_{X^*} \leq 1 \\ x^* \in L^\perp}} \langle x^*, x \rangle \geq \langle \hat{x}^*, x \rangle \geq \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|_X.$$

Из этого неравенства, учитывая (5.16), вытекает доказываемое равенство. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.21. Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$. Для любого $x \in X$

$$(5.18) \quad \inf_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|_X = \sup_{\substack{x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1 \\ \langle x^*, x_k \rangle = 0, k=1, \dots, n}} \langle x^*, x \rangle.$$

Пусть X, Y — линейные пространства, X', Y' — линейные пространства, алгебраически сопряженные к X, Y , т. е. пространства линейных функционалов на X, Y , $I: X \rightarrow Y$ — линейный оператор, L — подпространство Y' и $W \subset X$ — выпуклое центрально-симметричное множество.

ТЕОРЕМА 5.22. Имеет место равенство

$$\inf_{y' \in L} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y', Ix \rangle| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |\langle x', x \rangle|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $y' \in L$

$$\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y', Ix \rangle| \geq \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |\langle x', x \rangle|.$$

Отсюда

$$(5.19) \quad \inf_{y' \in L} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y', Ix \rangle| \geq \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |\langle x', x \rangle|.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{ (Ix, \langle x', x \rangle) \in Y \times \mathbb{R} : x \in W \}.$$

Легко видеть, что это выпуклое центрально-симметричное множество. Функционал Минковского $\mu(\cdot)$ множества Ω имеет вид

$$\mu(\omega) = \inf \{ t > 0 \mid \omega \in t\Omega \},$$

причем $\mu(\omega) = +\infty$, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто. Положим

$$p(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \mu(\omega) = +\infty, \\ \rho\mu(\omega), & \mu(\omega) < +\infty, \end{cases}$$

где через ρ обозначена величина в правой части равенства (5.18). Рассмотрим линейный функционал ω'_0 , определенный на подпространстве $\{0\} \times \mathbb{R} \subset Y \times \mathbb{R}$ равенством $\langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$. Покажем, что для всех $\omega \in \{0\} \times \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$(5.20) \quad |\langle \omega'_0, \omega \rangle| \leq p(\omega).$$

Если $p(\omega) = +\infty$, то неравенство (5.20) очевидно. Пусть $p(\omega) < +\infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon = \frac{\omega}{\mu(\omega) + \varepsilon}.$$

Тогда $\mu(\omega_\varepsilon) < 1$ и $\omega_\varepsilon \in \Omega$ (в силу того, что множество Ω является выпуклым и центрально-симметричным). Далее, очевидно, $\omega_\varepsilon \in \{0\} \times \mathbb{R}$ и тем самым $\omega_\varepsilon = (0, \langle x', x_\varepsilon \rangle)$ для некоторого $x_\varepsilon \in W$ такого, что $Ix_\varepsilon = 0$. Следовательно,

$$|\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| = |\langle x', x_\varepsilon \rangle| \leq \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |\langle x', x \rangle| = \rho,$$

откуда

$$|\langle \omega'_0, \omega \rangle| = (\mu(\omega) + \varepsilon) |\langle \omega'_0, \omega_\varepsilon \rangle| \leq (\mu(\omega) + \varepsilon)\rho = p(\omega) + \rho\varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает неравенство (5.20).

По теореме Хана–Банаха существует функционал ω' , являющийся продолжением ω'_0 на $Y \times \mathbb{R}$, и при этом справедливо неравенство

$$(5.21) \quad |\langle \omega', \omega \rangle| \leq p(\omega), \quad \forall \omega \in Y \times \mathbb{R}.$$

Пусть $\omega' = (-\hat{y}', \hat{\alpha})$, $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}$. Тогда в силу того, что $\langle \omega', (0, r) \rangle = \langle \omega'_0, (0, r) \rangle = r$, $\hat{\alpha} = 1$. Тем самым

$$(5.22) \quad \langle \omega', (y, r) \rangle = -\langle \hat{y}', y \rangle + r, \quad \forall (y, r) \in Y \times \mathbb{R}.$$

Пусть $x \in W$. Тогда $\omega = (Ix, \langle x', x \rangle) \in \Omega$ и, значит, $\mu(\omega) \leq 1$. Отсюда, из (5.22) и (5.21) получаем

$$|\langle \omega', \omega \rangle| = |\langle x', x \rangle - \langle \hat{y}', y \rangle| \leq p(\omega) = \rho \mu(\omega) \leq \rho.$$

Следовательно,

$$\sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \hat{y}', Ix \rangle| \leq \rho.$$

Отсюда

$$\inf_{y' \in L} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y', Ix \rangle| \leq \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle \hat{y}', Ix \rangle| \leq \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |\langle x', x \rangle|.$$

Учитывая неравенство (5.19), получаем доказываемое равенство. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.23. Пусть $x'_1, \dots, x'_n \in X'$ и $W \subset X$ — выпуклое центрально-симметричное множество. Для любого $x' \in X'$ имеет место равенство

$$\inf_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \sup_{x \in W} \left| \langle x', x \rangle - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x'_k, x \rangle \right| = \sup_{\substack{x \in W \\ \langle x'_k, x \rangle = 0, k=1, \dots, n}} |\langle x', x \rangle|.$$

5.11. Теорема Моро–Рокафеллара

ТЕОРЕМА 5.24 (Моро–Рокафеллара). Если $f_1, f_2: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — собственные выпуклые функции, хотя бы одна из которых непрерывна в точке \hat{x} , то

$$\partial(f_1 + f_2)(\hat{x}) = \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что

$$\partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x}) \subset \partial(f_1 + f_2)(\hat{x}).$$

Пусть $x^* \in \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x})$. Это означает, что существуют $x_1^* \in \partial f_1(\hat{x})$ и $x_2^* \in \partial f_2(\hat{x})$ такие, что $x^* = x_1^* + x_2^*$. Имеем

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(\hat{x}) - \langle x^*, x - \hat{x} \rangle &= f_1(x) - f_1(\hat{x}) - \langle x_1^*, x - \hat{x} \rangle \\ &\quad + f_2(x) - f_2(\hat{x}) - \langle x_2^*, x - \hat{x} \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(\hat{x})$.

Докажем теперь, что

$$\partial(f_1 + f_2)(\hat{x}) \subset \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x}).$$

Без ограничения общности можно читать, что $f_1(\hat{x}) = f_2(\hat{x}) = 0$. Если это не так, то можно рассмотреть функции

$$g_1(x) = f_1(x) - f_1(\hat{x}), \quad g_2(x) = f_2(x) - f_2(\hat{x}).$$

Докажем, что если

$$(5.23) \quad 0 \in \partial(f_1 + f_2)(\hat{x}),$$

то найдется $\tilde{x}^* \in \partial f_1(\hat{x})$ такой, что $-\tilde{x}^* \in \partial f_2(\hat{x})$. Из (5.23) следует, что для всех $x \in X$

$$(5.24) \quad (f_1 + f_2)(x) \geq (f_1 + f_2)(\hat{x}) = 0.$$

Будем считать, что f_2 непрерывна в \hat{x} . Положим

$$A = \{ (x, v) : x \in \text{dom } f_1, v < -f_1(x) \},$$

$$B = \text{epi } f_2 = \{ (x, u) : x \in \text{dom } f_2, u \geq f_2(x) \}.$$

Эти два множества выпуклы и непусты. Они не пересекаются, т. к. из того, что $(x, v) \in A$, следует, учитывая (5.24), что $v < -f_1(x) \leq f_2(x)$. Тем самым $(x, v) \notin \text{epi } f_2 = B$. Поскольку f_2 непрерывна в \hat{x} , она ограничена в некоторой окрестности U этой точки. Положим

$$M = \sup_{x \in U} f_2(x).$$

Тогда открытое множество

$$V = \{ (x, v) : x \in U, v > M \}$$

лежит в $\text{epi } f_2$. Следовательно, $\text{int } B \neq \emptyset$. По первой теореме отделимости множества A и B можно отделить, т. е. существуют $x^* \in X^*$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю, такие, что для любых $(x_1, v) \in A$ и $(x_2, u) \in B$ выполняется неравенство

$$(5.25) \quad \langle x^*, x_1 \rangle + \lambda v \leq \langle x^*, x_2 \rangle + \lambda u.$$

Положим в (5.25) $x_1 = x_2 = \hat{x}$, $v < 0$, а $u = f_2(x_2) = f_2(\hat{x}) = 0$. Тогда

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle + \lambda v \leq \langle x^*, \hat{x} \rangle.$$

Следовательно, $\lambda v \leq 0$, а т. к. $v < 0$, получаем, что $\lambda \geq 0$.

Если предположить, что $\lambda = 0$, то из (5.25) получаем

$$\sup_{x \in \text{dom } f_1} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in \text{dom } f_2} \langle x^*, x \rangle.$$

Поскольку $x^* \neq 0$, а линейная функция, отличная от тождественного нуля, не может принимать минимального значения во внутренней точке, то

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle \leq \sup_{x \in \text{dom } f_1} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in \text{dom } f_2} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle.$$

Полученное противоречие показывает, что $\lambda \neq 0$.

Пусть $x_1 = \hat{x}$, $v < 0$, $x_2 \in X$, $u = f_2(x_2)$. Тогда из (5.25) получаем

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle + \lambda v \leq \langle x^*, x_2 \rangle + \lambda f_2(x_2).$$

Устремляя v к нулю, получаем

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle \leq \langle x^*, x_2 \rangle + \lambda f_2(x_2).$$

Отсюда

$$f_2(x_2) \geq \langle -\lambda^{-1} x^*, x_2 - \hat{x} \rangle.$$

Следовательно, $-\lambda^{-1} x^* \in \partial f_2(\hat{x})$.

Пусть теперь $x_2 = \hat{x}$, $x_1 \in \text{dom } f_1$. Тогда для любого $v < -f_1(x_1)$ выполняется неравенство

$$\langle x^*, x_1 \rangle + \lambda v \leq \langle x^*, \hat{x} \rangle + \lambda f_2(\hat{x}) = \langle x^*, \hat{x} \rangle.$$

Устремляя v к $-f_1(x_1)$, получаем

$$\langle x^*, x_1 \rangle - \lambda f_1(x_1) \leq \langle x^*, \hat{x} \rangle,$$

откуда $\lambda^{-1} x^* \in \partial f_1(\hat{x})$. Тем самым доказано, что $0 \in \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x})$.

Предположим, что $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(\hat{x})$. Положим

$$g(x) = f_1(x) - \langle x^*, x - \hat{x} \rangle.$$

Нетрудно убедиться, что $0 \in \partial(g + f_2)(\hat{x})$. По доказанному выше $0 \in \partial g(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x})$. Тем самым найдется $\tilde{x}^* \in \partial g(\hat{x})$ такой, что $-\tilde{x}^* \in \partial f_2(\hat{x})$. Включение $\tilde{x}^* \in \partial g(\hat{x})$ означает, что выполняется неравенство

$$f_1(x) - \langle x^*, x - \hat{x} \rangle \geq \langle \tilde{x}^*, x - \hat{x} \rangle.$$

Следовательно, $x^* + \tilde{x}^* \in \partial f_1(\hat{x})$. Поэтому $x^* \in \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x})$. \square

5.12. Теоремы Радона и Хелли

ТЕОРЕМА 5.25 (Радона). Пусть X — линейное пространство размерности d . Тогда любое конечное множество из X , содержащее не менее $d + 2$ точек, может быть разбито на два непересекающихся множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны точки x_1, \dots, x_n , $n \geq d + 2$. Векторы $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$ линейно зависимы, т. к. их не менее $d + 1$. Следовательно, существуют $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j=2}^n \alpha_j (x_j - x_1) = 0.$$

Положим

$$\beta_1 = -\sum_{j=2}^n \alpha_j, \quad \beta_j = \alpha_j, \quad j = 2, \dots, n.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n \beta_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = 0,$$

причем β_1, \dots, β_n не все равны нулю. Поменяем нумерацию и будем считать, что $\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$, а $\beta_{m+1}, \dots, \beta_n < 0$. Положим

$$\beta = \sum_{j=1}^m \beta_j = -\sum_{j=m+1}^n \beta_j, \quad A = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad B = \{x_{m+1}, \dots, x_n\}.$$

Тогда

$$(5.26) \quad \sum_{j=1}^m \gamma_j x_j = \sum_{j=m+1}^n \gamma_j x_j,$$

где $\gamma_j = \beta_j/\beta$, $j = 1, \dots, m$, и $\gamma_j = -\beta_j/\beta$, $j = m + 1, \dots, n$. Причем

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = \sum_{j=m+1}^n \gamma_j = 1.$$

Таким образом, выпуклая комбинация в левой части равенства (5.26) лежит в $\text{co}A$, а выпуклая комбинация в правой части равенства (5.26) лежит в $\text{co}B$. Тем самым $\text{co}A \cap \text{co}B \neq \emptyset$. \square

ТЕОРЕМА 5.26 (Хелли).

1. Если $\dim X = d$ и в X имеются $n \geq d + 1$ выпуклых множеств, любые $d + 1$ из которых имеют общую точку, то и все эти множества имеют общую точку.

2. Пусть X — линейное нормированное пространство, $\dim X = d$, \mathcal{I} — некоторое бесконечное множество индексов и $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ — семейство замкнутых выпуклых подмножеств X , по крайней мере одно из которых компактно. Тогда если любое подсемейство из $d + 1$ множеств имеет общую точку, то и все семейство имеет общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Будем доказывать утверждение индукцией по числу множеств n . При $n = d + 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq d + 2$ и теорема доказана для любых $n - 1$ выпуклых множеств. Обозначим данные множества через A_j , $j = 1, \dots, n$. Для каждого $k = 1, \dots, n$ возьмем произвольную точку

$$x_k \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n A_j$$

(по предположению индукции эти пересечения не пусты). Так как $n \geq d + 2$, то к точкам x_1, \dots, x_n применима теорема Радона. С возможной перенумерацией точек получаем, что существует натуральное число $m \leq n - 1$, для которого множества $\text{co}\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\text{co}\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ имеют общую точку x . Точка x_j при всех $j = 1, \dots, m$ принадлежит каждому из множеств A_{m+1}, \dots, A_n . В силу выпуклости этих множеств каждое из них содержит $\text{co}\{x_1, \dots, x_m\}$. Следовательно, каждое из этих множеств содержит точку x . Аналогично доказывается, что каждое из множеств A_1, \dots, A_m содержит точку x . Тем самым доказано, что у всех множеств A_1, \dots, A_n имеется общая точка.

2. Пусть A_{α_0} — компактное множество. Из 1 следует, что любое конечное семейство из множества замкнутых подмножеств $B_\alpha = A_\alpha \cap A_{\alpha_0}$, $\alpha \in \mathcal{I}$, содержащихся в A_{α_0} , имеет общую точку. Предположим, что все семейство не имеет общей точки. Тогда множества $\{X \setminus B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ открытые и образуют покрытие компактного множества A_{α_0} . В силу компактности из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие $\{X \setminus B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_n}$. Но тогда конечное семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_n}$ не может иметь общей точки. Полученное противоречие доказывает утверждение 2. \square

5.13. Теорема Каруша–Куна–Таккера

Пусть $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, m$, — функции, определенные на некотором множестве A . Рассмотрим экстремальную задачу

$$(5.27) \quad f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in A.$$

Свяжем с задачей (5.27) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x),$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — набор множителей Лагранжа. Всякий элемент, для которого выполнены условия экстремальной задачи ($f_j(x) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, $x \in A$), будем называть допустимым.

ЛЕММА 5.27. Пусть \hat{x} — допустимый элемент в задаче (5.27) и существует набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ таких, что

- (a) $\min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \bar{\lambda})$ (условие минимума);
- (b) $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, m$ (условие неотрицательности);
- (c) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0$, $j = 1, \dots, m$ (условие дополняющей нежесткости).

Тогда, если $\lambda_0 > 0$, то \hat{x} — экстремальный элемент в задаче (5.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого допустимого в задаче (5.27) элемента $x \in A$ имеем

$$\lambda_0 f_0(x) \geq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f_0(\hat{x}).$$

Деля на λ_0 , получаем требуемое. \square

Пусть X — вещественное линейное пространство, $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, m$, — выпуклые функции и A — непустое выпуклое подмножество X . Задачу

$$(5.28) \quad f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in A,$$

называют выпуклой задачей, или задачей выпуклого программирования.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.28 (Каруша–Куна–Таккера).

1. Если \hat{x} — минимум в задаче (5.28), то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, что выполнены условия (a), (b) и (c) из леммы 5.27.

2. Если существует допустимая в (5.28) точка \hat{x} и набор множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, удовлетворяющие условиям (a), (b) и (c) и при этом $\lambda_0 > 0$, то \hat{x} — решение задачи (5.28).

3. Если при выполнении условий 1 найдется точка $\bar{x} \in A$ такая, что $f_j(\bar{x}) < 0$, $1 \leq j \leq m$, то $\lambda_0 \neq 0$ (условие Слейтера).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть \hat{x} — решение задачи (5.28). Рассмотрим множество

$$M = \{ \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1} : \exists x \in A : f_0(x) - f_0(\hat{x}) < \mu_0, \\ f_j(x) \leq \mu_j, \quad j = 1, \dots, m \}.$$

Непосредственная проверка показывает, что это множество выпукло. Кроме того, легко видеть, что оно содержит все векторы с положительными компонентами (надо взять $x = \hat{x}$) и тем самым его внутренность не пуста. Наконец, $0 \notin M$, т. к. в противном случае нашелся бы элемент $\bar{x} \in A$ такой, что $f_j(\bar{x}) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, и $f_0(\bar{x}) - f_0(\hat{x}) < 0$, в противоречие с тем, что \hat{x} — минимум.

Согласно первой теореме отделимости найдется такой ненулевой функционал, т. е. вектор $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (\mathbb{R}^{m+1})^*$, что

$$(5.29) \quad \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \geq 0$$

для всех $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)^T \in M$. Пусть $\delta > 0$. Подставляя в (5.29) векторы $(1, \delta, \dots, \delta)^T, \dots, (\delta, \dots, \delta, 1)^T$, а затем устремляя δ к нулю, получаем, что $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, m$, т. е. доказано утверждение (b) теоремы.

Теперь подставим в (5.29) векторы $(\delta, \dots, \delta, f_j(\hat{x}), \delta, \dots, \delta)^T$, $j = 1, \dots, m$ (они принадлежат M , надо взять $x = \hat{x}$), и снова, устремляя δ к нулю, получим, что $\lambda_j f_j(\hat{x}) \geq 0$. Но $\lambda_j f_j(\hat{x}) \leq 0$, т. к. $\lambda_j \geq 0$, а $f_j(\hat{x}) \leq 0$, и поэтому $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0$, $j = 1, \dots, m$, что доказывает утверждение (c).

Пусть $x \in A$. Ясно, что $(f_0(x) - f_0(\hat{x}) + \delta, f_1(x), \dots, f_m(x))^T \in M$. Подставляя этот вектор в (5.29), приходим (в пределе при $\delta \rightarrow 0$) к неравенству $\sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x) \geq \lambda_0 f_0(\hat{x})$. Добавляя справа нулевые слагаемые $\lambda_j f_j(\hat{x})$, $j = 1, \dots, m$, получаем, что $\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \bar{\lambda})$ и (a) доказано.

2. Второе утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 5.27.

3. Докажем последнее утверждение теоремы. Если $\lambda_0 = 0$, то ненулевой множитель Лагранжа находится среди остальных и поэтому (с учетом (c)) $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\bar{x}) < 0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\hat{x}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \bar{\lambda})$, что противоречит (a). \square

5.14. Теорема Дубовицкого–Миллютина

ТЕОРЕМА 5.29 (Дубовицкого–Миллютина). Если $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — выпуклые функции, непрерывные в точке \hat{x} , и

$$f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\},$$

то

$$\partial f(\hat{x}) = \text{co} \left(\bigcup_{j \in I} \partial f_j(\hat{x}) \right),$$

где $I = \{j : f_j(\hat{x}) = f(\hat{x})\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда

$$f_1(\hat{x}) = \dots = f_n(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Докажем, что

$$(5.30) \quad \text{co} \left(\bigcup_{j=1}^n \partial f_j(\hat{x}) \right) \subset \partial f(\hat{x}).$$

Пусть $x^* \in \partial f_j(\hat{x})$ при некотором j , $1 \leq j \leq n$. Тогда для всех $x \in X$

$$f(x) \geq f_j(x) \geq f_j(\hat{x}) + \langle x^*, x - \hat{x} \rangle = f(\hat{x}) + \langle x^*, x - \hat{x} \rangle.$$

Следовательно, $x^* \in \partial f(\hat{x})$. Тем самым $\partial f_j(\hat{x}) \subset \partial f(\hat{x})$. Отсюда

$$\bigcup_{j=1}^n \partial f_j(\hat{x}) \subset \partial f(\hat{x}).$$

В силу выпуклости субдифференциала (см. предложение 5.12) имеет место (5.30).

Пусть $x^* \in \partial f(\hat{x})$. Положим

$$\varphi_j(x) = f_j(x) - f_j(\hat{x}) - \langle x^*, x - \hat{x} \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для каждого $k = 1, \dots, n$ рассмотрим систему неравенств

$$(5.31) \quad \begin{cases} \varphi_k(x) < 0, \\ \varphi_j(x) \leq 0, \quad j \neq k. \end{cases}$$

Предположим, что для всех k эта система совместна, и обозначим через x_k какое-либо решение этой системы. Рассмотрим точку

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Тогда при каждом $k = 1, \dots, n$

$$\varphi_k(\tilde{x}) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_k(x_j) \leq \frac{1}{n} \varphi_k(x_k) < 0.$$

Отсюда

$$f_k(\tilde{x}) - f(\hat{x}) - \langle x^*, \tilde{x} - \hat{x} \rangle < 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тем самым

$$f(\tilde{x}) - f(\hat{x}) - \langle x^*, \tilde{x} - \hat{x} \rangle < 0,$$

что противоречит тому, что $x^* \in \partial f(\hat{x})$. Следовательно, найдется k , $1 \leq k \leq n$, для которого система (5.31) будет несовместна. Из непрерывности функций f_j , $j = 1, \dots, n$, в точке \hat{x} следует, что существует окрестность U точки \hat{x} , в которой все функции f_j конечны. Тогда для такого k экстремальная задача

$$\varphi_k(x) \rightarrow \min, \quad \varphi_j(x) \leq 0, \quad j \neq k, \quad x \in U,$$

будет иметь решение \hat{x} . По теореме Каруша–Куна–Таккера (теорема 5.28) найдутся $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, не все равные нулю, для которых при всех $x \in U$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(x) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(\hat{x}) = 0.$$

В силу выпуклости это неравенство выполняется для всех $x \in X$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Тогда получаем, что для всех $x \in X$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\hat{x}) - \langle x^*, x - \hat{x} \rangle \geq 0.$$

Следовательно, пользуясь теоремой Моро–Рокафеллара, получаем

$$x^* \in \partial \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \right) (\hat{x}) = \sum_{j=1}^n \partial(\lambda_j f_j)(\hat{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \partial f_j(\hat{x}) \subset \text{co} \left(\bigcup_{j=1}^n \partial f_j(\hat{x}) \right).$$

Рассмотрим теперь общий случай. Положим $J = \{j : f_j(\hat{x}) < f(\hat{x})\}$ и $g(x) = \max_{j \in J} f_j(x)$. В силу непрерывности функций f_j , $j = 1, \dots, n$, в точке \hat{x} существует окрестность V точки \hat{x} , в которой $f_j(x) < f(x)$ для всех $j \in J$. Тогда в окрестности V функции f и g совпадают. Следовательно, $\partial f(\hat{x}) = \partial g(\hat{x})$, а для $\partial g(\hat{x})$ нужное равенство уже доказано. \square

5.15. Теорема об очистке

ТЕОРЕМА 5.30 (В. Левина об очистке). Пусть T — компакт, X — конечномерное пространство, $\text{card } T \geq \dim X + 1$ и функция $F: T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что:

- 1) отображение $F(t, \cdot)$ выпукло при любом $t \in T$;
- 2) отображение $F(\cdot, x)$ полунепрерывно сверху при любом $x \in X$;
- 3) $M = \inf_{x \in X} \max_{t \in T} F(t, x) > -\infty$.

Тогда найдутся число $r \in \mathbb{N}$, $r \leq \dim X + 1$, и точки $\{\tau_i\}_{i=1}^r \subset T$ такие, что

$$M = \inf_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq r} F(\tau_i, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim X = d$. Сопоставим каждому набору $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{d+1}) \in T^{d+1}$ число

$$m(\tau) = \inf_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq d+1} F(\tau_i, x).$$

Положим

$$m = \sup_{\tau \in T^{d+1}} m(\tau).$$

Очевидно, что $m \leq M$. Докажем противоположное неравенство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для всякого $t \in T$ рассмотрим множество

$$A(t) = \{x \in X : F(t, x) \leq m + \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что это непустые и выпуклые подмножества X . Кроме того, из непрерывности функции $F(t, \cdot)$ вытекает замкнутость этих множеств. Построим еще одно множество \hat{A} . Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in T^d$. Очевидно, что найдется $x(\xi) \in X$, для которого $F(\xi_i, x(\xi)) < m + \varepsilon$, $i = 1, \dots, d$. Положим

$$V(\xi) = \{\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_d) \in T^d : F(\xi'_i, x(\xi)) < m + \varepsilon, i = 1, \dots, d\}.$$

Так как функция $F(\cdot, x(\xi))$ полунепрерывна сверху, то $V(\xi)$ — открытое подмножество (содержащее ξ). Из открытого покрытия $\{V(\xi)\}_{\xi \in T^d}$ компакта T^d выберем конечное подпокрытие $V(\xi^1), \dots, V(\xi^s)$. Рассмотрим множество

$$\hat{A} = \text{co}\{x(\xi^1), \dots, x(\xi^s)\}.$$

Ясно, что \widehat{A} — выпуклый компакт.

Покажем, что любые из $d + 1$ множеств из семейства $\{A(t)\}_{t \in T} \cup \widehat{A}$ имеют непустое пересечение. Действительно, если среди этих множеств нет \widehat{A} , то это очевидно. Рассмотрим множества $A(\eta_1), \dots, A(\eta_d), \widehat{A}$, где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in T^d$. Поскольку $\eta \in V(\xi^i)$ при некотором $1 \leq i \leq s$, то это означает, что $F(\eta_j, x(\xi^i)) < m + \varepsilon$, $j = 1, \dots, d$, т. е.

$$x(\xi^i) \in \bigcap_{j=1}^d A(\eta_j).$$

Но $x(\xi^i) \in \widehat{A}$, и тем самым семейство $A(\eta_1), \dots, A(\eta_d), \widehat{A}$ имеет непустое пересечение. Тогда по теореме Хелли (теорема 5.26)

$$\widehat{A} \cap \left(\bigcap_{t \in T} A(t) \right) \neq \emptyset.$$

Отсюда следует, что $M \leq m + \varepsilon$ и, значит, $M = m$.

Функция

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{d+1}) \rightarrow \max_{1 \leq i \leq d+1} F(\tau_i, x)$$

полу непрерывна сверху на T^{d+1} для каждого $x \in X$. Тогда и функция $m(\tau)$ полу непрерывна сверху на T^{d+1} , и поэтому она достигает своего максимума в некоторой точке $\widehat{\tau} = (\widehat{\tau}_1, \dots, \widehat{\tau}_{d+1})$. Оставляя в этом векторе несовпадающие координаты, получаем утверждение теоремы. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.31. Пусть $T = [a, b]$, X — конечномерное пространство и функция $F: [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы об очистке. Тогда $\widehat{x} \in X$ является минимумом функции

$$f(x) = \max_{t \in [a, b]} F(t, x)$$

в том и только в том случае, когда найдутся натуральное число $r \leq \dim X + 1$, точки $\tau_i \in [a, b]$, векторы $y_i \in \partial_x F(\tau_i, \widehat{x})$ ($\partial_x F(\tau_i, \widehat{x})$ — субдифференциал функции $x \rightarrow F(\tau_i, x)$ в точке \widehat{x}) и числа

$$\alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1,$$

такие, что

$$(5.32) \quad f(\widehat{x}) = F(\tau_i, \widehat{x}), \quad i = 1, \dots, r,$$

и

$$(5.33) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \widehat{x} — точка минимума f . Тогда выполнено условие 3) теоремы об очистке и, значит, найдутся натуральное число $r \leq \dim X + 1$ и точки $\tau_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, r$, такие, что \widehat{x} — минимум функции

$$f_0(x) = \max_{1 \leq i \leq r} F(\tau_i, x),$$

и $f_0(\widehat{x}) = f(\widehat{x})$. Оставляя только те i , при которых $f(\widehat{x}) = F(\tau_i, \widehat{x})$, получаем (5.32).

По теореме Ферма (теорема 5.14) $0 \in \partial f_0(\widehat{x})$. Тогда из теоремы Дубовицкого–Миллютина следует, что найдутся векторы $y_i \in \partial_x F(\tau_i, \widehat{x})$ и числа

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1,$$

такие, что выполнено соотношение (5.33). Уменьшая r , можно считать, что все $\alpha_i > 0$.

Пусть выполнены соотношения (5.32) и (5.33) для $\hat{x} \in X$, точек $\tau_i \in [a, b]$, векторов $y_i \in \partial F(\tau_i, \hat{x})$ и чисел

$$\alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1.$$

Это означает, что $0 \in \partial f_0(\hat{x})$. Тогда по теореме Ферма \hat{x} — минимум функции f_0 . Но, очевидно, $f(x) \geq f_0(x)$ для всех $x \in X$, поэтому \hat{x} — минимум f . \square

5.16. Лемма о правом обратном и замкнутости образа

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Совокупность всех линейных непрерывных операторов $\Lambda: X \rightarrow Y$ обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)$. Пусть X — нормированное пространство, $\hat{x} \in X$ и $r > 0$. Положим

$$B_X(\hat{x}, r) = \{x \in X : \|x - \hat{x}\|_X < r\}.$$

ЛЕММА 5.32 (о правом обратном). Пусть X и Y — банаховы пространства, $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\text{Im } \Lambda = Y$. Тогда существуют отображение $R: Y \rightarrow X$ и константа $\gamma > 0$ такие, что $\Lambda R(y) = y$ и $\|R(y)\|_X \leq \gamma \|y\|_Y$ для любого $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Банаха об открытом отображении [34, стр. 243] множество $\Lambda(B_X(0, 1))$ открыто. Оно, очевидно, содержит ноль и тем самым содержит некоторый шар $B_Y(0, r)$, $r > 0$, т. е. для каждого $z \in B_Y(0, r)$ найдется элемент $x(z) \in B_X(0, 1)$ такой, что $\Lambda x(z) = z$. Положим $R(0) = 0$, а если $y \neq 0$, то

$$R(y) = \frac{2\|y\|_Y}{r} x \left(\frac{r}{2\|y\|_Y} y \right).$$

Тогда $\Lambda R(y) = y$ и $\|R(y)\|_X \leq \gamma \|y\|_Y$, где $\gamma = 2/r$. \square

ЛЕММА 5.33 (о замкнутости образа). Пусть X и Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^d)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $C: X \rightarrow \mathbb{R}^d \times Y$, $Cx = (Ax, Bx)$ и $\text{Im } B = Y$. Тогда $\text{Im } C$ — замкнутое подпространство в $\mathbb{R}^d \times Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(y, z) \in \text{cl Im } C$ и пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X такая, что $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ и $z = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n$. Положим $h_n = R(Bx_n - z)$, где R — правый обратный к B , тогда $B(x_n - h_n) = z$. Так как $\|h_n\|_X = \|R(Bx_n - z)\|_X \leq \gamma \|Bx_n - z\|_Y$, то $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n - h_n) = y$. Таким образом, y принадлежит замыканию образа множества

$$X_z = \{x \in X : Bx = z\}$$

при отображении A . Но $A(X_z)$ — линейное многообразие в \mathbb{R}^d и тем самым замкнуто. Следовательно, существует такое $\bar{x} \in X$, что $B\bar{x} = z$ и $y = A\bar{x}$, т. е. $(y, z) \in \text{Im } C$. \square

5.17. Теорема Люстерника

Пусть X и Y — нормированные пространства, а U — открытое подмножество X . Отображение $F: U \rightarrow Y$ называется дифференцируемым в точке $\hat{x} \in U$, если найдется такой оператор $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$, что для всех $h \in X$, для которых $\hat{x} + h \in U$, справедливо представление

$$(5.34) \quad F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + \Lambda h + r(h),$$

где $r(h) = o(\|h\|_X)$ ($\|r(h)\|_Y / \|h\|_X \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$). Линейный оператор Λ называется производной отображения F в точке \hat{x} и обозначается $F'(\hat{x})$. Нетрудно показать единственность оператора Λ , удовлетворяющего равенству (5.34).

Если отображение F дифференцируемо в каждой точке U , то определено отображение $F': U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, сопоставляющее $x \in U$ производную $F'(x)$. Если это отображение непрерывно в $\hat{x} \in U$ (на U), то говорят, что отображение F непрерывно дифференцируемо в \hat{x} (на U).

Отображение $F: U \rightarrow Y$, где U — открытое подмножество X , называется строго дифференцируемым в точке $\hat{x} \in U$, если найдется такой оператор $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, обладающее тем свойством, что для всех $x_1, x_2 \in B_X(\hat{x}, \delta)$ справедливо неравенство

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\|_Y \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|_X.$$

Отсюда следует (полагая $x_2 = \hat{x}$), что F дифференцируемо в \hat{x} и тем самым $\Lambda = F'(\hat{x})$.

Пусть M — непустое подмножество нормированного пространства X . Элемент $h \in X$ называется касательным вектором к M в точке $\hat{x} \in M$, если существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ такие, что $\hat{x} + th + r(t) \in M$ для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\|r(t)\|_X/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Множество всех касательных векторов к M в точке $\hat{x} \in M$ обозначается через $T_{\hat{x}}M$.

ТЕОРЕМА 5.34 (Люстерника). Пусть X, Y — банаховы пространства, U — окрестность точки $\hat{x} \in X$, отображение $F: U \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в \hat{x} , $F(\hat{x}) = 0$, $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$ и $M = \{x \in U : F(x) = 0\}$. Тогда $T_{\hat{x}}M = \text{Ker } F'(\hat{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in T_{\hat{x}}M$ и r из определения касательного вектора. Тогда вследствие дифференцируемости F в точке \hat{x} имеем

$$0 = F(\hat{x} + th + r(t)) - F(\hat{x}) = tF'(\hat{x})h + o(t),$$

откуда (деля на t и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$) следует, что $h \in \text{Ker } F'(\hat{x})$.

Обратно, пусть $h \in \text{Ker } F'(\hat{x})$. Обозначим для краткости $\Lambda = F'(\hat{x})$. Так как $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$, то по лемме о правом обратном (лемма 5.32) существуют отображение $R: Y \rightarrow X$ и константа $\gamma > 0$ такие, что $\Lambda R(y) = y$ и $\|R(y)\|_X \leq \gamma \|y\|_Y$ для всех $y \in Y$.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ таково, что $\theta = \varepsilon_0 \gamma < 1$ и $\delta > 0$ из определения строгой дифференцируемости, соответствующее $\varepsilon_0 > 0$. Выберем окрестность U_0 так, что $U_0 \subset B_X(\hat{x}, \delta/2)$ и при этом $\|F(x)\|_Y < \delta(1 - \theta)/2\gamma$, если $x \in U_0$.

Пусть $x \in U_0$. Рассмотрим последовательность

$$(5.35) \quad x_n = x_{n-1} - R(F(x_{n-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = x.$$

Докажем, что эта последовательность принадлежит $B_X(\hat{x}, \delta)$ и фундаментальна. Первое доказываем по индукции. Ясно, что $x_0 \in B_X(\hat{x}, \delta)$. Пусть $x_k \in B_X(\hat{x}, \delta)$, $1 \leq k \leq n$. Применяя к обеим частям (5.35) оператор Λ , получим

$$(5.36) \quad \Lambda(x_n - x_{n-1}) = -F(x_{n-1}).$$

Используя последовательно (5.35), оценку для правого обратного, (5.36), строгую дифференцируемость и затем итерируя процедуру, будем иметь

$$(5.37) \quad \|x_{n+1} - x_n\|_X \leq \gamma \|F(x_n)\|_Y = \gamma \|F(x_n) - F(x_{n-1}) - \Lambda(x_n - x_{n-1})\|_Y \\ \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X \leq \dots \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|_X.$$

Далее, по неравенству треугольника, (5.37), (5.35) и согласно определению окрестности U_0 получаем, что

$$(5.38) \quad \begin{aligned} \|x_{n+1} - \hat{x}\|_X &\leq \|x_{n+1} - x\|_X + \|x - \hat{x}\|_X \leq \|x_{n+1} - x_n\|_X + \dots + \|x_1 - x\|_X \\ &\quad + \|x - \hat{x}\|_X \leq (\theta^n + \theta^{n-1} + \dots + 1)\|x_1 - x\|_X + \|x - \hat{x}\|_X \\ &\leq \frac{\gamma}{1-\theta}\|F(x)\|_Y + \|x - \hat{x}\|_X < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

т. е. $x_{n+1} \in B_X(\hat{x}, \delta)$ и, значит, вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит $B_X(\hat{x}, \delta)$.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, используя (5.37) и рассуждая, как в предыдущем неравенстве, будем иметь для всех $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\|_X &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\|_X + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|_X \\ &\leq (\theta^{n+m-1} + \dots + \theta^n)\|x_1 - x\|_X \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\|x_1 - x\|_X \leq \frac{\delta}{2}\theta^n. \end{aligned}$$

Положим $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из (5.38) следует, что $\varphi(x) \in B_X(\hat{x}, \delta)$. Из строгой дифференцируемости следует, что отображение $F(x)$ непрерывно на $B_X(\hat{x}, \delta)$, и тогда, переходя к пределу в (5.36) при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $F(\varphi(x)) = 0$.

В (5.38) доказано, что

$$\|x_n - x\|_X \leq \frac{\gamma}{1-\theta}\|F(x)\|_Y.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству $\|\varphi(x) - x\|_X \leq K\|F(x)\|_Y$, где $K = \gamma/(1-\theta)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\hat{x} + th \in U_0$ при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Положим $r(t) = \varphi(\hat{x} + th) - \hat{x} - th$. Имеем $F(\hat{x} + th + r(t)) = F(\hat{x}) = 0$ и

$$\begin{aligned} \|r(t)\|_X &\leq K\|F(\hat{x} + th)\|_Y = K\|F(\hat{x} + th) - F(\hat{x})\|_Y = K\|tF'(\hat{x})h + o(t)\|_Y \\ &= K\|o(t)\|_Y, \end{aligned}$$

т. е. h — касательный вектор. \square

5.18. Леммы об аннуляторах

Пусть L — подпространство нормированного пространства X . Множество

$$L^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x \in L\}$$

называется *аннулятором* L . Легко видеть, что L^\perp — замкнутое подпространство в X^* .

ЛЕММА 5.35 (о нетривиальности аннулятора). *Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства X , не совпадающее с X . Тогда L^\perp содержит ненулевой элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L \neq X$, то существует $\hat{x} \notin L$. Множество L , очевидно, выпукло и по условию замкнуто, поэтому по второй теореме отделимости найдется ненулевой функционал $x^* \in X^*$ такой, что

$$(5.39) \quad \sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle.$$

Тогда $x^* \in L^\perp$. Действительно, если $\langle x^*, x_0 \rangle \neq 0$ для некоторого $x_0 \in L$, то т. к. $\alpha x_0 \in L$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle \geq \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \langle x^*, \alpha x_0 \rangle = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \langle x^*, x_0 \rangle = +\infty,$$

что противоречит (5.39). \square

ЛЕММА 5.36 (об аннуляторе ядра). Пусть X и Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\text{Im } A = Y$. Тогда $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^* \in \text{Im } A^*$. Тогда $x^* = A^*y^*$, где $y^* \in Y^*$. Для любого $x \in \text{Ker } A$ имеем

$$\langle x^*, x \rangle = \langle A^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle = 0.$$

Тем самым $x^* \in (\text{Ker } A)^\perp$.

Пусть $x^* \in (\text{Ker } A)^\perp$. Образ оператора $M: X \rightarrow \mathbb{R} \times Y$,

$$Mx = (\langle x^*, x \rangle, Ax),$$

замкнут по лемме о замкнутости образа (лемма 5.33) и не совпадает с $\mathbb{R} \times Y$, т. к. $(1, 0) \notin \text{Im } M$. Следовательно, по лемме о нетривиальности аннулятора (лемма 5.35) существует ненулевой функционал $(\alpha, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^*$ такой, что

$$\alpha \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, Ax \rangle = 0$$

для всех $x \in X$. При этом $\alpha \neq 0$, ибо в противном случае функционал y^* был бы нулевым в силу того, что $\text{Im } A = Y$. Таким образом,

$$\langle x^* + \alpha^{-1}A^*y^*, x \rangle = 0$$

для всех $x \in X$. Следовательно,

$$x^* = A^*(-\alpha^{-1}y^*) \in \text{Im } A^*.$$

\square

5.19. Аффинные подпространства

Подмножество $Y \subset X$ называется аффинным подпространством X , если для любых $x, y \in Y$ точка $(1 - \alpha)x + \alpha y \in Y$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Аффинной комбинацией точек x_1, \dots, x_n называется точка

$$(5.40) \quad x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Множество всех аффинных комбинаций точек из множества A называется аффинной оболочкой $\text{aff } A$ множества A

$$\text{aff } A = \left\{ x \in X : x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad x_1, \dots, x_n \in A, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.37. Каждое аффинное подпространство $Y \subset X$ представляется в виде $Y = a + L_Y$, где a — произвольная точка из Y , а L_Y — линейное подпространство из X , причем L_Y определено однозначно (не зависит от a).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in Y$. Положим

$$L_Y = \{ x \in X : x = y - a, \quad y \in Y \}.$$

Докажем, что L_Y — линейное подпространство X . Пусть $x \in L_Y$. Тогда $x = y - a$, где $y \in Y$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу того, что $\lambda y + (1 - \lambda)a \in Y$, имеем

$$\lambda x = \lambda(y - a) = \lambda y + (1 - \lambda)a - a \in L_Y.$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in L_Y$ и $x_1 = y_1 - a$, а $x_2 = y_2 - a$, где $y_1, y_2 \in Y$. Так как $(y_1 + y_2)/2 \in Y$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} - a \in L_Y.$$

Из доказанного выше, положив $\lambda = 2$, получаем, что $x_1 + x_2 \in L_Y$.

Положим

$$M_Y = \{x \in X : x = y - b, \quad y \in Y\},$$

где $b \in Y$. В силу того, что $b - a \in L_Y$, имеем

$$b + L_Y = a + (b - a) + L_Y = a + L_Y = Y.$$

Следовательно, $M_Y = L_Y$. \square

Размерностью аффинного подпространства Y называется размерность соответствующего линейного подпространства L_Y :

$$\dim Y = \dim L_Y.$$

Размерностью произвольного множества A называется размерность его аффинной оболочки $\text{aff } A$:

$$\dim A = \dim \text{aff } A.$$

5.20. Теорема Каратеодори

ТЕОРЕМА 5.38 (Каратеодори). *Если $\dim \text{co}A = d$, то любой элемент множества $\text{co}A$ представляется в виде выпуклой комбинации не более, чем $d + 1$ элемента множества A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Y = \text{aff } A$. Тогда $\dim Y = d$. Пусть

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad n \geq d + 2, \quad x_j \in A.$$

Тогда элементы $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$ принадлежат линейному пространству L_Y (см. предложение 5.37), размерность которого d . Следовательно, они линейно зависимы. Тем самым существуют β_2, \dots, β_n , не все равные нулю, для которых

$$\sum_{j=2}^n \beta_j (x_j - x_1) = 0.$$

Положим

$$\gamma_1 = - \sum_{j=2}^n \beta_j, \quad \gamma_j = \beta_j, \quad j = 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j = 0,$$

причем $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ не все равны нулю. Следовательно, среди чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ существуют отрицательные числа. Пусть

$$a = \min \left\{ -\frac{\alpha_j}{\gamma_j} : \gamma_j < 0 \right\} = -\frac{\alpha_k}{\gamma_k}.$$

Тогда $\alpha_j + a\gamma_j \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Кроме того,

$$x = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + a\gamma_j) x_j, \quad \sum_{j=1}^n (\alpha_j + a\gamma_j) = 1.$$

Так как $\alpha_k + a\gamma_k = 0$, то x представляется в виде выпуклой комбинации из $n - 1$ точки. Если $n - 1 > d + 1$, то, продолжая этот процесс, придем к тому, что x представляется в виде выпуклой комбинации не более, чем $d + 1$ элемента множества A . \square

5.21. Правило множителей Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств

Пусть U — открытое подмножество банахова пространства X , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ и $F: U \rightarrow Y$, где Y — банахово пространство. Задачу

$$(5.41) \quad f(x) \rightarrow \text{extr}, \quad F(x) = 0,$$

называют *задачей с ограничениями типа равенств*. Если функция f и отображение F обладают некоторой гладкостью, то говорят о *гладкой задаче с ограничениями типа равенств*.

Сопоставим задаче (5.41) *функцию Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f(x) + \langle y^*, F(x) \rangle,$$

где $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $y^* \in Y^*$ называются *множителями Лагранжа*.

ТЕОРЕМА 5.39 (правило множителей Лагранжа). *Если $\hat{x} \in U$ — локальный экстремум в задаче (5.41), функция f дифференцируема в \hat{x} , отображение F строго дифференцируемо в \hat{x} и $\text{Im } F'(\hat{x})$ — замкнутое подпространство в Y , то найдутся не равные одновременно нулю множители Лагранжа λ_0 и y^* такие, что*

$$(5.42) \quad \mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda_0, y^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 f'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0.$$

Если $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$, то $\lambda_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$. Пусть $h \in \text{Ker } F'(\hat{x})$. Отображение F удовлетворяет условиям теоремы Люстерника (теорема 5.34), и поэтому $h \in T_{\hat{x}}M$, т. е. существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ такие, что $F(\hat{x} + th + r(t)) = 0$ для $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $r(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$. Таким образом, элементы $\hat{x} + th + r(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, допустимы в (5.41) и т. к. \hat{x} — локальный экстремум в этой задаче, то

$$f(\hat{x} + th + r(t)) - f(\hat{x}) = t \langle f'(\hat{x}), h \rangle + o(t)$$

сохраняет знак для достаточно малых t . Деля последнее соотношение на $t > 0$ и устремляя t к нулю, получаем, что $\langle f'(\hat{x}), h \rangle$ сохраняет знак. Но h — произвольный элемент из $\text{Ker } F'(\hat{x})$, и поэтому $\langle f'(\hat{x}), h \rangle = 0$ для любого $h \in \text{Ker } F'(\hat{x})$, т. е. $f'(\hat{x}) \in (\text{Ker } F'(\hat{x}))^\perp$. Согласно лемме об аннуляторе ядра (лемма 5.36) $f'(\hat{x}) \in \text{Im}(F'(\hat{x}))^*$ и, следовательно, существует функционал $y^* \in Y^*$ такой, что $f'(\hat{x}) = -(F'(\hat{x}))^* y^*$, или $f'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0$. Тем самым равенство (5.42) с $\lambda_0 = 1$ доказано.

Пусть теперь $\text{Im } F'(\hat{x}) \neq Y$. Так как по условию подпространство $\text{Im } F'(\hat{x})$ замкнуто, то по лемме о нетривиальности аннулятора (лемма 5.35) существует ненулевой функционал $y^* \in Y^*$ такой, что $\langle y^*, F'(\hat{x})x \rangle = 0$ для любого $x \in X$, т. е. $(F'(\hat{x}))^* y^* = 0$. Это доказывает утверждение теоремы в рассматриваемом случае с $\lambda_0 = 0$. \square

Рассмотрим частный случай задачи (5.41), когда $X = \mathbb{R}^{d_1}$, $Y = \mathbb{R}^{d_2}$, а отображение F задается функциями $f_j: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d_2$, т. е. $F(x) = (f_1(x), \dots, f_{d_2}(x))^T$, $x \in \mathbb{R}^{d_1}$. Таким образом, рассматривается задача

$$(5.43) \quad f_0(x) \rightarrow \text{extr}, \quad f_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, d_2.$$

Поскольку линейные функционалы на \mathbb{R}^{d_2} являются вектор-строками $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d_2})$, то функция Лагранжа задачи (5.43) записывается в виде

$$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{j=0}^{d_2} \lambda_j f_j(x),$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d_2})$.

Классическим правилом множителей Лагранжа для гладких конечномерных задач является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.40 (правило множителей Лагранжа в конечномерном случае). *Если \hat{x} — локальный экстремум в задаче (5.43), функция f_0 дифференцируема в \hat{x} , а функции f_j , $j = 1, \dots, d_2$, строго дифференцируемы в \hat{x} , то найдутся не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d_2}$ такие, что*

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \bar{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{d_2} \lambda_j f'_j(\hat{x}) = 0.$$

Если векторы $f'_1(\hat{x}), \dots, f'_{d_2}(\hat{x})$ линейно независимы, то $\lambda_0 \neq 0$.

Доказательство сразу следует из предыдущей теоремы, если учесть, что подпространство $\text{Im } F'(\hat{x})$ конечномерно и поэтому замкнуто, а линейная независимость векторов $f'_1(\hat{x}), \dots, f'_{d_2}(\hat{x})$ эквивалентна условию $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$.

5.22. Неравенства для последовательностей

Пусть $a_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.41. *Если $0 < p \leq q$, то*

$$\left(\sum_{k=1}^N a_k^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что

$$\sum_{k=1}^N a_k^p > 0$$

(в противном случае $a_1 = \dots = a_N = 0$ и утверждение предложения, очевидно, справедливо). Положим

$$\alpha_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right)^{1/p}}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^p = 1.$$

Поэтому $\alpha_k \leq 1$, $k = 1, \dots, N$. Следовательно, $\alpha_k^q \leq \alpha_k^p$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^q \leq \sum_{k=1}^N \alpha_k^p = 1.$$

Тем самым

$$\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^q \right)^{1/q} \leq 1.$$

Это означает, что

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^N a_k^q \right)^{1/q}}{\left(\sum_{k=1}^N a_k^p \right)^{1/p}} \leq 1.$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает доказываемое неравенство. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.42. Если $q \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^N a_k^q \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^q.$$

Пусть $a_k, b_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.43. Если $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$, то

$$\sum_{k=1}^N a_k^\alpha b_k^\beta \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^N b_k \right)^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то очевидно, что неравенство обращается в равенство. Предположим, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Положим $p = 1/\alpha$, $q = 1/\beta$. Тогда $p > 1$, $q > 1$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Положим

$$t_k = a_k^\alpha, \quad s_k = b_k^\beta.$$

По неравенству Гельдера имеем

$$\sum_{k=1}^N t_k s_k \leq \left(\sum_{k=1}^N t_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^N s_k^q \right)^{1/q}.$$

Возвращаясь к последовательностям $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, получаем доказываемое неравенство. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.44. Если $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^N a_k^\alpha b_k^\beta \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^N b_k \right)^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Тогда из предложения 5.43 и следствия 5.42 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k^\alpha b_k^\beta &= \sum_{k=1}^N \left(a_k^{\alpha+\beta} \right)^{\alpha'} \left(b_k^{\alpha+\beta} \right)^{\beta'} \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^{\alpha+\beta} \right)^{\alpha'} \left(\sum_{k=1}^N b_k^{\alpha+\beta} \right)^{\beta'} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^{(\alpha+\beta)\alpha'} \left(\sum_{k=1}^N b_k \right)^{(\alpha+\beta)\beta'} = \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^N b_k \right)^\beta. \end{aligned}$$

\square

СЛЕДСТВИЕ 5.45. Если $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 1$, а ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha b_k^\beta \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)^\beta.$$

5.23. Неравенства для норм функций и их производных

Пусть S — отрезок числовой прямой, полупрямая или прямая. Через $\mathcal{W}_{pr}^n(S)$ обозначим множество функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$ -я производная абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a, b] \subset S$, $x(\cdot) \in L_p(S)$ и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(S)$.

ТЕОРЕМА 5.46 ([28]). Пусть $p, q, r \geq 1$, $0 \leq k < n$ и

$$\frac{n-k}{p} + \frac{k}{r} \geq \frac{n}{q}.$$

Тогда для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^n(S)$ при всех δ , $0 < \delta < \text{mes } S$, выполнено неравенство

$$(5.44) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A \left(\delta^{-k-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-k-1/r+1/q} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

где A не зависит от δ и S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что S — отрезок на прямой, т. к. случай $\text{mes } S = \infty$ получается предельным переходом. Доказательство проведем с помощью индукции по параметру n .

1. $n = 1$, $k = 0$. Для $t_0 \in S$ и $\delta > 0$ положим $T_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap S$. Для функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^1(S)$ выберем $t_1 \in T_\delta$ так, чтобы

$$|x(t_1)| = \min_{t \in T_\delta} |x(t)|.$$

Имеем

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T_\delta)} \geq |x(t_1)| (\text{mes } T_\delta)^{1/p} \geq \delta^{1/p} |x(t_1)|.$$

По неравенству Гельдера

$$\int_{t_1}^{t_0} |x'(t)| dt \leq \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(T_\delta)}.$$

Из равенства

$$x(t_0) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} x'(t) dt$$

получаем

$$\begin{aligned} |x(t_0)| &\leq \delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(T_\delta)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(T_\delta)} \\ &\leq \delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

В силу произвольности t_0 доказано, что

$$(5.45) \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(S)} \leq \delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}.$$

Пусть теперь $q \geq p$. Тогда

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(S)} = \left(\int_S |x(t)|^p |x(t)|^{q-p} dt \right)^{1/q} \leq \|x(\cdot)\|_{L_\infty(S)}^{1-p/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{p/q}.$$

Пользуясь неравенством (5.45) и тем, что

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq \delta^{1/p} \left(\delta^{-1/p} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

получаем

$$(5.46) \quad \|x(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq \delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}.$$

Тем самым теорема при $n = 1$ доказана.

2. $n = 2$, $k = 1$. Пусть $q \geq p \geq 1$. Докажем, что для всех функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^1(S)$, $S = [a, b]$, имеет место неравенство

$$(5.47) \quad \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_q(S)} \leq 4 \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^\alpha \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1 - 1/r + 1/q}{1 - 1/r + 1/p},$$

а точка $\xi \in S$ такова, что

$$(5.48) \quad |x(\xi)| = \min_{t \in S} |x(t)|.$$

Положим $y(\cdot) = x(\cdot) - x(\xi)$. Тогда $|y(t)| \leq |x(t)|$ и, следовательно,

$$\|y(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}.$$

Пусть $S_1 = (-\infty, b]$, а $S_2 = [a, +\infty)$. Функции

$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq \xi, \\ y(t), & \xi < t \leq b, \end{cases} \quad y_2(t) = \begin{cases} y(t), & a \leq t < \xi, \\ 0, & \xi < t < +\infty, \end{cases}$$

локально абсолютно непрерывны. Кроме того,

$$\|y_j(\cdot)\|_{L_p(S_j)} \leq \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}, \quad \|y'_j(\cdot)\|_{L_r(S_j)} \leq \|y'(\cdot)\|_{L_r(S)} = \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)},$$

$j = 1, 2.$

Следовательно, $y_j(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^1(S_j)$, $j = 1, 2$. Из (5.46) получаем

$$\begin{aligned} \|y_j(\cdot)\|_{L_q(S_j)} &\leq \delta^{-1/p+1/q} \|y_j(\cdot)\|_{L_p(S_j)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|y'_j(\cdot)\|_{L_r(S_j)} \\ &\leq \delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

Поскольку $y(\cdot) = y_1(\cdot) + y_2(\cdot)$, то

$$\|y(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 2 \left(\delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Положив

$$\delta = \left(\frac{\|x(\cdot)\|_{L_p(S)}}{\|x'(\cdot)\|_{L_r(S)}} \right)^{(1-1/r+1/p)^{-1}},$$

получим неравенство (5.47).

Покажем, что если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ и $x'(\cdot)$ имеет хотя бы один нуль на S , то при $1/p + 1/r \geq 2/q$

$$(5.49) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha},$$

где

$$K = \begin{cases} 2^{\frac{3\alpha_2+2}{1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}}, & q > 1, \\ 8, & q = 1, \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{1-1/q}{1-1/q+1/p},$$

$$\alpha_2 = \frac{1-1/r+1/q}{2-1/r}, \quad \alpha = \frac{1-1/r+1/q}{2-1/r+1/p}.$$

При $\|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} = 0$ утверждение очевидно, т. к. $\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} = 0$. Предположим сначала, что $x'(\cdot)$ не меняет знака на S . Тогда для любой точки $t_0 \in S$

$$(5.50) \quad \|x'(\cdot)\|_{L(S)} = \int_S |x'(t)| dt = \left| \int_S x'(t) dt \right| = |x(b) - x(a)|$$

$$\leq |x(b) - x(t_0)| + |x(a) - x(t_0)| \leq 2 \|x(\cdot) - x(t_0)\|_{L_\infty(S)}.$$

Так как $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ и $\text{mes } S < \infty$, то $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pq}^1(S)$ и $x'(\cdot) \in \mathcal{W}_{1r}^1(S)$. Применяя неравенство (5.47), получаем

$$(5.51) \quad \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)} \leq 4 \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha_1} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^{1-\alpha_1},$$

$$(5.52) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 4 \|x'(\cdot)\|_{L(S)}^{\alpha_2} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha_2},$$

где точка $\xi \in S$ такова, что выполнено условие (5.48). Оценивая в (5.52) $\|x'(\cdot)\|_{L(S)}$ с помощью (5.50) (при $t_0 = \xi$), имеем

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 4 \cdot 2^{\alpha_2} \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)}^{\alpha_2} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha_2}.$$

Используя оценку (5.51), получаем неравенство

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq 4 \cdot 2^{\alpha_2} \left(4 \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha_1} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^{1-\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha_2},$$

из которого при $q > 1$ следует (5.49).

Если $q = 1$, то из условия $1/p + 1/r \geq 2/q$ вытекает, что $p = r = 1$. В этом случае из уже доказанного неравенства (5.51) при $p = 1$, $q = \infty$ имеем

$$\|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)} \leq 4 \|x(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2} \|x'(\cdot)\|_{L_\infty(S)}^{1/2}.$$

Из равенства

$$x'(t) = \int_{t_1}^t x''(\tau) d\tau,$$

где t_1 — нуль x' , получаем

$$\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(S)} \leq \|x''(\cdot)\|_{L(S)}.$$

Тем самым, учитывая (5.50), имеем

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L(S)} &\leq 2 \|x(\cdot) - x(\xi)\|_{L_\infty(S)} \leq 8 \|x(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2} \|x'(\cdot)\|_{L_\infty(S)}^{1/2} \\ &\leq 8 \|x(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2} \|x''(\cdot)\|_{L(S)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Докажем теперь неравенство (5.49) в предположении, что у функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ имеется хотя бы один нуль производной на S , но не предполагая, что $x'(\cdot)$ сохраняет знак на S . Для этого рассмотрим множество точек разрыва функции $\text{sign } x'(\cdot)$. Это замкнутое множество разбивает S не более чем на счетное множество интервалов E_k , $k \in A$. На каждом отрезке \bar{E}_k функция $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(\bar{E}_k)$, $x'(\cdot)$ не меняет знака и имеет хотя бы один нуль. Применяя неравенство (5.49), получаем

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^q &= \sum_{k \in A} \int_{\bar{E}_k} |x'(t)|^q dt \\ &\leq \sum_{k \in A} K \left(\int_{\bar{E}_k} |x(t)|^p dt \right)^{\alpha q/p} \left(\int_{\bar{E}_k} |x''(t)|^r dt \right)^{(1-\alpha)q/r}. \end{aligned}$$

Из условия $1/p + 1/r \geq 2/q$ вытекает, что

$$\frac{\alpha q}{p} + \frac{(1-\alpha)q}{r} \geq 1.$$

Воспользуемся неравенством (см. предложение 5.44 и следствие 5.45)

$$\sum_{k \in A} a_k^\lambda b_k^\mu \leq \left(\sum_{k \in A} a_k \right)^\lambda \left(\sum_{k \in A} b_k \right)^\mu, \quad \lambda + \mu \geq 1.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)}^q &\leq K \left(\sum_{k \in A} \int_{\bar{E}_k} |x(t)|^p dt \right)^{\alpha q/p} \left(\sum_{k \in A} \int_{\bar{E}_k} |x''(t)|^r dt \right)^{(1-\alpha)q/r} \\ &= K \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^{\alpha q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{(1-\alpha)q}. \end{aligned}$$

Поскольку при $\alpha \in [0, 1]$

$$A^\alpha B^{1-\alpha} \leq \alpha A + (1-\alpha)B \leq A + B,$$

то при всех $\delta > 0$

$$(5.53) \quad \begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq K \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}^\alpha \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}^{1-\alpha} \\ &= K \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \right)^\alpha \left(\delta^{1-1/r+1/q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} \right)^{1-\alpha} \\ &\leq K \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} \right). \end{aligned}$$

Завершим доказательство теоремы для $n = 2$, $k = 1$. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$ и $p_1(t) = a_0 + a_1 t$ — полином наилучшего приближения $x(\cdot)$ в метрике $L_p(S)$. Положим $\varphi(\cdot) = x(\cdot) - p_1(\cdot)$. Очевидно, что

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \|\varphi(\cdot)\|_{L_p(S)} &\leq \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}, \quad \|\varphi''(\cdot)\|_{L_r(S)} = \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)}, \\ \|p_1(\cdot)\|_{L_p(S)} &\leq 2\|x(\cdot)\|_{L_p(S)}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что при всех $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_S |a_0 + a_1 t| dt \geq \frac{|a_1|}{4} (\text{mes } S)^2.$$

Отсюда для любого $0 < \delta < \text{mes } S$

$$(5.55) \quad \begin{aligned} \|p_1'(\cdot)\|_{L_q(S)} &= |a_1| (\text{mes } S)^{1/q} \leq 4(\text{mes } S)^{-2+1/q} \int_S |p_1(t)| dt \\ &\leq 4(\text{mes } S)^{-1-1/p+1/q} \|p_1(\cdot)\|_{L_p(S)} \leq 8\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)}. \end{aligned}$$

Функция $\varphi(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^2(S)$, а т. к. $x(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ имеют по меньшей мере две общие точки, то $\varphi'(\cdot)$ имеет хотя бы один нуль на S . Из (5.55) и (5.53) с учетом (5.54) получаем, что для любого $0 < \delta < \text{mes } S$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq \|p_1'(\cdot)\|_{L_q(S)} + \|\varphi'(\cdot)\|_{L_q(S)} \\ &\leq (K + 8) \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/r+1/q} \|x''(\cdot)\|_{L_r(S)} \right). \end{aligned}$$

Итак, теорема для $n = 2$ и $k = 1$ доказана.

3. $n > 2$, $0 < k < n$. Предположим, что теорема верна для всех $l \leq n$ и всех $0 < k < l$. Докажем ее для $l = n + 1$ и всех $0 < k \leq n$. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pr}^{n+1}(S)$ и выполняются условия

$$(5.56) \quad \frac{n+1-k}{p} + \frac{k}{r} \geq \frac{n+1}{q}.$$

1а. $k > 1$. В силу условия (5.56) имеет место неравенство

$$\frac{n+1-k}{p} + \frac{k}{r} - \frac{n+1}{q} \geq \frac{1}{k} \left(\frac{n+1-k}{p} + \frac{k}{r} - \frac{n+1}{q} \right).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(5.57) \quad (n+1-k) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{pk} + \frac{1}{qk} \right) \geq \frac{n}{q} - \frac{k-1}{r}.$$

Положим

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{pk} + \frac{1}{qk}.$$

Если $1/q - 1/p \leq 0$, то $1/q_1 \leq 1/p \leq 1$. Если же $1/q - 1/p > 0$, то из того, что $k \geq 2$, получаем

$$\frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} \leq 1.$$

Итак, существует $q_1 \geq 1$ такое, что

$$(5.58) \quad \frac{k-1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{q_1}.$$

Если записать неравенство (5.57), используя обозначение q_1 , то получим неравенство

$$(5.59) \quad \frac{n+1-k}{q_1} + \frac{k-1}{r} \geq \frac{n}{q}.$$

Из того, что $x(\cdot)$ и $x^{(k)}(\cdot)$ непрерывны на S , а $\text{mes } S < \infty$, следует, что $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{pq}^k(S)$. Тогда по предположению индукции, учитывая (5.58), при всех $0 < \delta_1 < \text{mes } S$ имеем

$$(5.60) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \leq A_1 \left(\delta_1^{-1-1/p+1/q_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta_1^{k-1-1/q+1/q_1} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \right).$$

Теперь в силу того, что $x'(\cdot) \in \mathcal{W}_{q_1,r}^n(S)$, учитывая (5.59), при всех $0 < \delta < \text{mes } S$ получаем

$$(5.61) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A_2 \left(\delta^{1-k-1/q_1+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} + \delta^{n-k+1-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Положим $\delta_1 = \gamma\delta$, $0 < \gamma \leq 1$. Из (5.60), (5.61) следует, что

$$\begin{aligned} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq A_1 A_2 \gamma^{-1-1/p+1/q_1} \delta^{-k-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \\ &\quad + A_1 A_2 \gamma^{k-1-1/q+1/q_1} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} + A_2 \delta^{n-k+1-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

Выбирая γ так, чтобы

$$A_1 A_2 \gamma^{k-1-1/q+1/q_1} \leq 1/2,$$

получаем

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A \left(\delta^{-k-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-k+1-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

где

$$A = 2 \max \left(A_1 A_2 \gamma^{-1-1/p+1/q_1}, A_2 \right).$$

1b. $k = 1$. В силу условия (5.56) имеет место неравенство

$$\frac{n}{p} + \frac{1}{r} - \frac{n+1}{q} \geq \frac{1}{n} \left(\frac{n}{p} + \frac{1}{r} - \frac{n+1}{q} \right).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(5.62) \quad \frac{n-1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} + \frac{1}{nq} \geq \frac{n}{q}.$$

Положим

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} + \frac{1}{nq}.$$

Если $1/q - 1/r \leq 0$, то $1/q_1 \leq 1/r \leq 1$. Если же $1/q - 1/r > 0$, то из того, что $n \geq 2$, получаем

$$\frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2r} + \frac{1}{2q} \leq 1.$$

Итак, существует $q_1 \geq 1$ такое, что

$$(5.63) \quad \frac{1}{q} + \frac{n-1}{r} = \frac{n}{q_1}.$$

Если записать неравенство (5.62), используя обозначение q_1 , то получим неравенство

$$(5.64) \quad \frac{n-1}{p} + \frac{1}{q_1} \geq \frac{n}{q}.$$

По предположению индукции, учитывая (5.64) и то, что $x(\cdot) \in \mathcal{W}_{p,q_1}^n(S)$, при всех $0 < \delta_1 < \text{mes } S$ имеем

$$(5.65) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A_1 \left(\delta_1^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta_1^{n-1-1/q_1+1/q} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \right).$$

В силу того, что $x'(\cdot) \in \mathcal{W}_{q,r}^n(S)$, учитывая (5.63), при всех $0 < \delta < \text{mes } S$ получаем

$$(5.66) \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \leq A_2 \left(\delta^{-n+1-1/q+1/q_1} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} + \delta^{1-1/r+1/q_1} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Положим $\delta_1 = \gamma\delta$, $0 < \gamma \leq 1$. Из (5.65), (5.66) следует, что

$$\begin{aligned} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} &\leq A_1 \gamma^{-1-1/p+1/q} \delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} \\ &\quad + A_1 A_2 \gamma^{n-1-1/q_1+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \\ &\quad + A_1 A_2 \gamma^{n-1-1/q_1+1/q} \delta^{n-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)}. \end{aligned}$$

Выбирая γ так, чтобы

$$A_1 A_2 \gamma^{n-1-1/q_1+1/q} \leq 1/2,$$

получаем

$$\|x'(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq A \left(\delta^{-1-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-1/r+1/q} \|x^{(n+1)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right),$$

где

$$A = \max \left(2A_1 \gamma^{-1-1/p+1/q}, 1 \right).$$

4. $n \geq 2$, $k = 0$. Определим q_1 равенством

$$\frac{n-1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{n}{q_1}.$$

Аналогично тому, как это делалось в пп. **1a** и **1b**, доказывается, что $q_1 \geq 1$. Тем самым в силу п. **1b**

$$(5.67) \quad \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)} \leq A_1 \left(\delta^{-1-1/p+1/q_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-1-1/r+1/q_1} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

Из (5.46) следует, что

$$(5.68) \quad \|x(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq \delta^{-1/p+1/q} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{1-1/q_1+1/q} \|x'(\cdot)\|_{L_{q_1}(S)}.$$

Из (5.67) и (5.68) получаем

$$\|x(\cdot)\|_{L_q(S)} \leq (A_1 + 1) \left(\delta^{-1/p+1/q_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(S)} + \delta^{n-1/r+1/q} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(S)} \right).$$

□

5.24. Функции Стеклова

Пусть функция $x(\cdot) \in L_1([-1, 1])$ и имеем период 2. Положим при $h > 0$

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h x(t+s) ds = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(s) ds.$$

Эта функция называется функцией Стеклова для $x(\cdot)$. Функция $x_h(\cdot)$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ и почти всюду

$$x'_h(t) = \frac{1}{2h}(x(t+h) - x(t-h)).$$

Если $x(\cdot)$ — абсолютно непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, то почти всюду

$$(5.69) \quad x'_h(t) = (x'(t))_h.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.47. Пусть $x(\cdot) \in L_1([-1, 1])$ и имеем период 2. Тогда

$$\|x_h(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \leq \|x(\cdot)\|_{L_1([-1,1])},$$

а также

$$(5.70) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|x_h(\cdot) - x(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \|x_h(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^h x(t+s) ds \right| dt \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_{-1}^1 |x(t+s)| dt ds \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \|x(\cdot+s)\|_{L_1([-1,1])} ds = \|x(\cdot)\|_{L_1([-1,1])}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|x_h(\cdot) - x(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2h} \left| \int_{-h}^h (x(t+s) - x(t)) ds \right| dt \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_{-1}^1 |x(t+s) - x(t)| dt ds = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \|x(\cdot+s) - x(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} ds. \end{aligned}$$

Остается применить лемму 2.8. □

Отметим, что из равенства (5.70) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|x_h(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \|x(\cdot)\|_{L_1([-1,1])}.$$

Рассмотрим функцию Стеклова $\varphi_{n-1,h}(\cdot)$ для идеального сплайна Эйлера $\varphi_{n-1}(\cdot)$ (см. (2.23)). Из предложения 5.47 следует, что

$$(5.71) \quad \|\varphi_{n-1,h}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \leq \|\varphi_{n-1,h}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \|\varphi'_n(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \frac{4K_n}{\pi^n}.$$

Из равенства (5.69) получаем

$$(5.72) \quad \begin{aligned} \|\varphi_{n-1,h}^{(n)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} &= \|(\varphi_{n-1,h}^{(n-1)})'(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \|((\varphi_{n-1}^{(n-1)})_h)'(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \\ &= \|(\varphi'_{0,h})'(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = 4. \end{aligned}$$

Для $0 < k < n$ имеем

$$\|\varphi_{n-1,h}^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \|\varphi_{n-k-1,h}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \rightarrow \|\varphi_{n-k-1}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])}$$

при $h \rightarrow 0$. Так как

$$\|\varphi_{n-k-1}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \|\varphi'_{n-k}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} = \frac{4K_{n-k}}{\pi^{n-k}},$$

то

$$(5.73) \quad \|\varphi_{n-1,h}^{(k)}(\cdot)\|_{L_1([-1,1])} \rightarrow \frac{4K_{n-k}}{\pi^{n-k}}$$

при $h \rightarrow 0$.

**5.25. Теорема Хана–Банаха (для случая, когда
однородно-выпуклый функционал может принимать
бесконечные значения)**

Неотрицательный функционал $p(\cdot)$ на вещественном (комплексном) линейном пространстве назовем *однородно-выпуклым*, если для всех $x, y \in X$ и всех вещественных (комплексных) чисел λ

$$(5.74) \quad \begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y), \\ p(\lambda x) &= |\lambda|p(x). \end{aligned}$$

Однородно-выпуклый функционал, вообще говоря, может принимать и бесконечные значения.

Пусть W — выпуклое уравновешенное множество в линейном пространстве X . Тогда функционал

$$p_W(x) = \inf\{t > 0 : x \in tW\}$$

называется *функционалом Минковского* множества W . Если не существует таких $t > 0$, при которых $x \in tW$, то считается, что $p_W(x) = +\infty$.

Докажем, что функционал Минковского $p_W(\cdot)$ является однородно-выпуклым. Пусть $y = \lambda x$, где $\lambda \neq 0$ — вещественное или комплексное число (в зависимости от того, над каким полем рассматривается линейное пространство X). Тогда

$$p_W(y) = \inf\{t > 0 : \lambda x \in tW\} = \inf\{|\lambda|r > 0 : x \in rW\} = |\lambda|p_W(x).$$

Пусть теперь $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Будем считать, что $p_W(x) < +\infty$ и $p_W(y) < +\infty$ (в противном случае неравенство (5.74) очевидным образом выполняется). Выберем t и s так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} p_W(x) &< t < p_W(x) + \varepsilon, \\ p_W(y) &< s < p_W(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда $x \in tW$ и $y \in sW$. Положим $r = t + s$. Имеем

$$\frac{x+y}{r} = \frac{t}{r} \frac{x}{t} + \frac{s}{r} \frac{y}{s}.$$

Тем самым элемент $(x+y)/r$ принадлежит отрезку с концами x/t и y/s , а следовательно, и множеству W . Отсюда

$$p_W(x+y) \leq r = t + s < p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$p_W(x+y) \leq p_W(x) + p_W(y).$$

Пусть X — линейное пространство и X_0 — некоторое его подпространство. Предположим, что на X_0 задан линейный функционал x'_0 . Линейный функционал x' , определенный на всем пространстве X , называется *продолжением функционала x'_0* , если

$$\langle x', x \rangle = \langle x'_0, x \rangle$$

для всех $x \in X_0$.

ТЕОРЕМА 5.48 (Хан–Банах). Пусть $p(\cdot)$ — однородно-выпуклый функционал (не обязательно конечный), определенный на линейном пространстве X , и пусть X_0 — линейное подпространство X . Если x' — линейный функционал на X_0 , удовлетворяющий при всех $x \in X_0$ условию

$$(5.75) \quad |\langle x'_0, x \rangle| \leq p(x),$$

то x'_0 может быть продолжен до линейного функционала x' на X , для которого сохраняется условие подчинения (5.75) на всем X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала теорему для вещественного случая. Покажем, что при $X_0 \neq X$ функционал x'_0 можно продолжить с X_0 на некоторое большее подпространство X_1 с сохранением условия (5.75). Действительно, пусть z — произвольный элемент из X , не принадлежащий X_0 . Обозначим через X_1 линейное подпространство элементов, имеющих вид $x + tz$, где $x \in X_0$, а $t \in \mathbb{R}$. Положим

$$\langle x', x + tz \rangle = \langle x'_0, x \rangle + tc,$$

а число c подберем так, чтобы сохранить условие (5.75), т. е. так, чтобы при всех $x \in X_0$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство

$$|\langle x'_0, x \rangle + tc| \leq p(x + tz).$$

При $t \neq 0$ это неравенство можно записать в виде

$$-p\left(\frac{x}{t} + z\right) - \left\langle x'_0, \frac{x}{t} \right\rangle \leq c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) - \left\langle x'_0, \frac{x}{t} \right\rangle.$$

Покажем, что всегда существует c , удовлетворяющее этим условиям. Пусть x_1 и x_2 — произвольные элементы из X_0 . Тогда из того, что

$$\langle x'_0, x_2 \rangle - \langle x'_0, x_1 \rangle \leq p(x_2 - x_1) = p((x_2 + z) - (x_1 + z)) \leq p(x_2 + z) + p(x_1 + z),$$

имеем

$$(5.76) \quad -p(x_1 + z) - \langle x'_0, x_1 \rangle \leq p(x_2 + z) - \langle x'_0, x_2 \rangle.$$

Положим

$$c_1 = \sup_{x_1 \in X_0} (-p(x_1 + z) - \langle x'_0, x_1 \rangle), \quad c_2 = \inf_{x_2 \in X_0} (p(x_2 + z) - \langle x'_0, x_2 \rangle).$$

Из (5.76) вытекает, что $c_1 \leq c_2$. Если существует $x \in X_0$, для которого $p(x + z) < +\infty$, то $c_1 > -\infty$ и $c_2 < +\infty$, а значит, найдется $c \in \mathbb{R}$, для которого

$$(5.77) \quad c_1 \leq c \leq c_2.$$

Если же $p(x + z) = +\infty$ для всех $x \in X_0$, то $c_1 = -\infty$, а $c_2 = +\infty$ и существование c , удовлетворяющего равенству (5.77), очевидно.

Тем самым доказано, что функционал x'_0 можно продолжить с сохранением условия (5.75) на некоторое большее подпространство X_1 . Совокупность всевозможных продолжений функционала x'_0 , удовлетворяющих условию (5.75), частично упорядочена, и каждое ее линейно упорядоченное подмножество обладает верхней гранью: этой верхней гранью является функционал, определенный на объединении областей определения функционалов из этого подмножества и совпадающий с каждым таким функционалом на его области определения. В силу леммы Цорна во всем множестве всевозможных продолжений существует максимальный элемент. Этот максимальный элемент и представляет собой искомый функционал.

Докажем теперь утверждение теоремы для комплексного случая. Обозначим через $X_{\mathbb{R}}$ и $X_{0\mathbb{R}}$ пространства X и X_0 , рассматриваемые как вещественные линейные пространства. Определим вещественный линейный функционал $x'_{0\mathbb{R}}$ на $X_{0\mathbb{R}}$ равенством

$$\langle x'_{0\mathbb{R}}, x \rangle = \operatorname{Re} \langle x'_0, x \rangle.$$

По доказанному существует продолжение этого функционала $x'_\mathbb{R}$ на все $X_\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию

$$(5.78) \quad |\langle x'_\mathbb{R}, x \rangle| \leq p(x).$$

Положим

$$\langle x', x \rangle = \langle x'_\mathbb{R}, x \rangle - i \langle x'_\mathbb{R}, ix \rangle.$$

Нетрудно убедиться, что x' — линейный функционал на X , причем при $x \in X_0$

$$\langle x', x \rangle = \operatorname{Re} \langle x'_0, x \rangle - i \operatorname{Re} \langle x'_0, ix \rangle = \langle x'_0, x \rangle.$$

Предположим, что найдется $x_0 \in X$, для которого $|\langle x', x_0 \rangle| > p(x_0)$. Пусть $\langle x', x_0 \rangle = |\langle x', x_0 \rangle| e^{i\varphi}$. Положим $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$. Тогда

$$\langle x'_\mathbb{R}, y_0 \rangle = \operatorname{Re} \langle x', y_0 \rangle = \operatorname{Re} e^{-i\varphi} \langle x', x_0 \rangle = |\langle x', x_0 \rangle| > p(x_0),$$

что противоречит (5.78). \square

5.26. Теорема Борсука

5.26.1. Симплексы в \mathbb{R}^n и триангуляция \mathbb{S}^n . Точки $p_0, p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}^n$ называются *аффинно-независимыми*, если не существует $(s-1)$ -мерной гиперплоскости, содержащей эти точки. Пусть p_0, p_1, \dots, p_s — аффинно-независимые точки из \mathbb{R}^n . Тогда выпуклая оболочка этих точек

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=0}^s \lambda_j p_j, 0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=0}^s \lambda_j = 1 \right\}$$

называется *s-симплексом* с вершинами p_0, p_1, \dots, p_s и обозначается через $[p_0, p_1, \dots, p_s]$. Будем также обозначать симплексы через σ и σ^s , где верхний индекс обозначает размерность симплекса. Симплекс с $k+1$ вершиной из множества p_0, p_1, \dots, p_s называется *k-гранью* σ^s . При $k=1$ *k-грань* — это отрезок $[p_i, p_j]$, называемый *ребром* σ^s . В силу выпуклости симплекса σ^s его диаметр $\delta(\sigma^s)$ равен длине максимального ребра.

Стандартным s-симплексом в \mathbb{R}^{s+1} называется *s-симплекс* с вершинами

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_s = (0, 0, \dots, 1).$$

Введем в \mathbb{R}^n норму

$$\|x\| = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Через \mathbb{B}^n будем обозначать единичный шар в \mathbb{R}^n

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

а через \mathbb{S}^{n-1} — единичную сферу

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Верхней полусферой будем называть множество

$$\mathbb{S}_+^n = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \geq 0\},$$

а *нижней полусферой* — множество

$$\mathbb{S}_-^n = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \leq 0\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}_+^n \cup \mathbb{S}_-^n$, а $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n$.

Конечное семейство симплексов $\mathcal{S}^n = \{\sigma\}$ из \mathbb{S}^n называется *триангуляцией* \mathbb{S}^n , если:

- 1) пересечение любых двух симплексов из \mathcal{S}^n либо пусто, либо является общей гранью каждого;
- 2) если $\sigma \in \mathcal{S}^n$, то каждая грань σ принадлежит \mathcal{S}^n ;

$$3) \mathbb{S}^n = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}^n} \sigma.$$

Из свойств 1)–3) вытекает, что каждый $(n-1)$ -симплекс из \mathcal{S}^n является общей гранью в точности двух n -симплексов из \mathcal{S}^n .

Множество всех n -симплексов $[\pm e_1, \dots, \pm e_{n+1}]$ и всех их граней называется *базисной триангуляцией* \mathbb{S}^n и обозначается через Σ^n . Каждый симплекс из Σ^n имеет единственное представление в виде $[\pm e_{i_0}, \dots, \pm e_{i_s}]$, где $i_0 < \dots < i_s$, называемое *стандартной формой*.

Отображение $\alpha: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, определяемое равенством $\alpha(x) = -x$ называется *симметричным*. Триангуляцию \mathcal{S}^n сферы \mathbb{S}^n будем называть *симметричной*, если для всех $k \leq n$ и всех симплексов $\sigma^k \in \mathcal{S}^n$ множество $\alpha(\sigma^k)$ — также k -симплекс из \mathcal{S}^n .

Очевидно, что Σ^n является симметричной триангуляцией. Кроме того, существует симметричная триангуляция \mathbb{S}^n со сколь угодно малыми симплексами. Формальное доказательство этого простого геометрического факта основывается на том, что симметричная триангуляция $\mathbb{S}^n = \partial \mathbb{S}_+^{n+1}$ с малыми симплексами может быть продолжена на разбиение с малыми симплексами \mathbb{S}_+^{n+1} . Тогда множество

$$\{ \sigma^{n+1}, \alpha(\sigma^{n+1}) : \sigma^{n+1} \in \mathbb{S}_+^{n+1} \}$$

будет являться симметричной триангуляцией \mathbb{S}^{n+1} .

5.26.2. Комбинаторная лемма. Пусть \mathcal{S}^k и \mathcal{S}^n — триангуляции \mathbb{S}^k и \mathbb{S}^n , соответственно. Отображение вершин из \mathcal{S}^k в вершины \mathcal{S}^n называется *симплициальным*, если для каждого симплекса $[p_0, \dots, p_s]$ из \mathcal{S}^k точки $f(p_0), \dots, f(p_s)$ являются вершинами некоторого симплекса из \mathcal{S}^n (быть может, меньшей размерности). Пусть \mathcal{S}^k — произвольная триангуляция \mathbb{S}^k и $f: \mathcal{S}^k \rightarrow \mathcal{S}^n$ — симплициальное отображение. Симплекс $[p_0, \dots, p_r]$ из \mathcal{S}^k называется *положительным*, если вершины $f(p_0), \dots, f(p_r)$ образуют r -симплекс $\sigma^r \in \Sigma^n$, стандартная форма которого имеет вид

$$\sigma^r = [e_{i_0}, -e_{i_1}, \dots, (-1)^r e_{i_r}].$$

Симплекс $[p_0, \dots, p_r]$ из \mathcal{S}^k называется *отрицательным*, если вершины $f(p_0), \dots, f(p_r)$ образуют r -симплекс $\sigma^r \in \Sigma^n$, стандартная форма которого имеет вид

$$\sigma^r = [-e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, (-1)^{r+1} e_{i_r}].$$

Симплекс $[p_0, \dots, p_r]$ из \mathcal{S}^k , не являющийся ни положительным, ни отрицательным, называется *нейтральным*.

Пусть L — некоторое множество из \mathcal{S}^k . Число положительных r -симплексов из L под действием симплициального отображения f будем обозначать через $p(f, L, r)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.49. Пусть $k \leq n$, \mathcal{S}^k — симметричная триангуляция и $f: \mathcal{S}^k \rightarrow \mathcal{S}^n$ — нечетное симплициальное отображение. Тогда

$$p(f, \mathcal{S}^k, k) \equiv p(f, \mathcal{S}^{k-1}, k-1) \pmod{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем множество k -симплексов из верхней полусферы \mathbb{S}_+^k на три непересекающихся множества: \mathcal{A}_+ — множество положительных k -симплексов, \mathcal{A}_- — множество отрицательных k -симплексов и \mathcal{A}_0 — множество нейтральных k -симплексов. Положим

$$T = \sum_{s^k \in \mathcal{A}_+} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathcal{A}_-} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathcal{A}_0} p(f, s^k, k-1).$$

Отметим, что $p(f, s^k, k-1)$ — это число положительных $(k-1)$ -граней симплекса s^k . Каждый положительный симплекс s^{k-1} из \mathbb{S}_+^k , не лежащий в \mathbb{S}^{k-1} , является гранью в точности двух симплексов из \mathbb{S}_+^k , а каждый положительный симплекс s^{k-1} из \mathbb{S}^{k-1} — гранью только одного симплекса s^k из \mathbb{S}_+^k . Поэтому

$$T \equiv p(f, \mathbb{S}^{k-1}, k-1) \pmod{2}.$$

Получим теперь другое представление для T . Рассмотрим произвольный нейтральный симплекс s^k из \mathbb{S}_+^k . Если он содержит положительную $k-1$ -грань, то его образ $f(s^k)$ может быть записан в виде

$$f(s^k) = [\pm e_{i_0}, \dots, \pm e_{i_k}],$$

где $i_0 \leq \dots \leq i_k$, и либо имеется одна повторяющаяся вершина, либо все вершины разные, но знаки не альтернируют. И в том, и в другом случае должна существовать одна пара соседних вершин с одинаковым знаком. Положительные $(k-1)$ -гранни будут получаться при удалении одной из этих вершин. Тем самым доказано, что $p(f, s^k, k-1)$ — четное число для всех $s^k \in \mathcal{A}_0$. Следовательно,

$$T \equiv \left(\sum_{s^k \in \mathcal{A}_+} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathcal{A}_-} p(f, s^k, k-1) \right) \pmod{2}.$$

Поскольку каждый положительный симплекс s^k имеет ровно одну положительную $(k-1)$ -грань, а каждый отрицательный симплекс s^k имеет также ровно одну положительную $(k-1)$ -грань, то

$$\sum_{s^k \in \mathcal{A}_+} p(f, s^k, k-1) = \text{card } \mathcal{A}_+, \quad \sum_{s^k \in \mathcal{A}_-} p(f, s^k, k-1) = \text{card } \mathcal{A}_-.$$

Тем самым

$$T \equiv (\text{card } \mathcal{A}_+ + \text{card } \mathcal{A}_-) \pmod{2}.$$

В силу нечетности f симплекс s^k из \mathbb{S}_+^k является отрицательным в том и только в том случае, если $\alpha(s^k)$ — положительный симплекс из \mathbb{S}_-^k . Поэтому

$$\text{card } \mathcal{A}_+ + \text{card } \mathcal{A}_- = p(f, \mathbb{S}^k, k).$$

□

ТЕОРЕМА 5.50 (комбинаторная лемма). Пусть \mathcal{S}^n — симметричная триангуляция и $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \Sigma^n$ — нечетное симплициальное отображение. Тогда f отображает нечетное число симплексов из \mathcal{S}^n в симплекс

$$[e_1, -e_2, \dots, (-1)^n e_{n+1}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 5.49

$$p(f, \mathbb{S}^n, n) \equiv p(f, \mathbb{S}^{n-1}, n-1) \equiv \dots \equiv p(f, \mathbb{S}^0, 0) \pmod{2}.$$

Поскольку \mathbb{S}^0 состоит из двух симметричных вершин и f отображает их в пару симметричных вершин, то $p(f, \mathbb{S}^0, 0) = 1$. □

5.26.3. Теорема Люстерника–Шнирельмана–Борсука. Пусть A — подмножество метрического пространства (X, ρ) . Через $\delta(A)$ обозначим диаметр множества A :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y).$$

ЛЕММА 5.51 (Лебег). Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ — семейство замкнутых непустых множеств из компактного метрического пространства (X, ρ) и $M_1 \cap \dots \cap M_n = \emptyset$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого подмножества $A \subset X$, пересекающегося с каждым из множеств M_i , $i = 1, \dots, n$, $\delta(A) \geq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывное отображение $\lambda: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow \mathbb{R}$, определенное равенством

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i < j \leq n} \rho(x_i, x_j).$$

Из того, что $M_1 \cap \dots \cap M_n = \emptyset$, следует, что λ не обращается в нуль. Тем самым

$$\min_{(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n} \lambda(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon > 0.$$

Предположим, что $A \subset X$ пересекается с каждым из M_i , $i = 1, \dots, n$, и $x_i \in A \cap M_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как $\lambda(x_1, \dots, x_n) \geq \varepsilon$, то найдутся x_i и x_j , для которых $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Отсюда $\delta(A) \geq \varepsilon$. \square

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 5.52 (Лебег). Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ — замкнутое покрытие компактного метрического пространства (X, ρ) . Тогда существует $\lambda > 0$ (число Лебега для данного покрытия) такое, что если некоторое множество A с диаметром, меньшим λ , пересекается с каждым из множеств M_{i_1}, \dots, M_{i_r} , то $M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_r} \neq \emptyset$.

Для доказательства теоремы Люстерника–Шнирельмана–Борсука нам потребуется еще один вспомогательный результат.

ЛЕММА 5.53. Пусть M_1, \dots, M_{n+1} — замкнутые подмножества \mathbb{S}^n , ни одно из которых не содержит пары симметричных точек. Если семейство

$$\{M_1, \dots, M_{n+1}, \alpha(M_1), \dots, \alpha(M_{n+1})\}$$

является покрытием \mathbb{S}^n , то $M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M_{-i} = \alpha(M_i)$. Так как M_i не содержит ни одной пары симметричных точек, то

$$\max_{x \in M_i, y \in M_{-i}} \|x - y\| = \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Упорядочим покрытие следующим образом:

$$(5.79) \quad M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2}, \dots, M_{n+1}, M_{-(n+1)}.$$

Пусть λ — число Лебега для этого покрытия. Обозначим через \mathcal{S}^n симметричную триангуляцию \mathbb{S}^n с диаметром каждого симплекса, меньшим $\varepsilon = \min\{\lambda, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}\}$. Рассмотрим отображение $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \Sigma^n$, которое каждой вершине p из \mathcal{S}^n ставит в соответствие вершину

$$f(p) = \text{sign } j(-1)^{j+1} e_{|j|},$$

где j таково, что M_j — первое множество из покрытия (5.79), содержащее p . Любые две вершины p_i и p_j не могут отобразиться в симметричные вершины, т. к. $\|p_i - p_j\| < \varepsilon$. Поэтому f — симплицальное отображение. Нетрудно убедиться, что оно нечетное. Из теоремы 5.50 вытекает, что найдется симплекс $[p_1, \dots, p_{n+1}]$, отображаемый f в $[e_1, -e_2, \dots, (-1)^n e_{n+1}]$. Можно для определенности считать, что $f(p_i) = (-1)^{i+1} e_i$. Это означает, что $p_i \in M_i$, т. е. $[p_1, \dots, p_{n+1}] \cap M_i \neq \emptyset$ при всех $i = 1, \dots, n+1$. Из теоремы 5.52 и того, что $\delta([p_1, \dots, p_{n+1}]) < \lambda$ вытекает, что $M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset$. \square

ТЕОРЕМА 5.54 (Люстерник–Шнирельман–Борсука). В любом замкнутом покрытии

$$\{M_1, \dots, M_{n+1}\}$$

множества \mathbb{S}^n существует множество M_i , содержащее симметричные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда, применяя лемму 5.53 к покрытию

$$\{M_1, \dots, M_{n+1}, \alpha(M_1), \dots, \alpha(M_{n+1})\},$$

получим, что $M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset$. Если $x_0 \in M_1 \cap \dots \cap M_{n+1}$, то $x_0 \in \alpha(M_j)$ для некоторого j , т. к. $\{\alpha(M_1), \dots, \alpha(M_{n+1})\}$ — тоже покрытие \mathbb{S}^n . Но тогда M_j будет содержать пару симметричных точек, что противоречит предположению. \square

5.26.4. Теорема Борсука.

ТЕОРЕМА 5.55 (Борсук). *Для любого непрерывного нечетного отображения $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдется точка $\hat{x} \in \mathbb{S}^n$, для которой $f(\hat{x}) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такой точки не существует. Тогда отображение $F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, определенное равенством

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

является непрерывным и нечетным. Проецируя границу какого-либо n -симплекса с центром в нуле на \mathbb{S}^{n-1} , можно разбить \mathbb{S}^{n-1} на замкнутые множества A_1, \dots, A_{n+1} (A_i — образы $(n-1)$ -граней при таком проектировании). Очевидно, что A_i не содержат симметричных точек. Положим $M_i = F^{-1}(A_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Тогда M_i — замкнутые множества, образующие покрытие \mathbb{S}^n . Из теоремы 5.54 следует, что существует $x \in M_i \cap \alpha(M_i)$ при некотором $1 \leq i \leq n+1$. Из нечетности F вытекает, что $F(x)$ и $-F(x)$ принадлежат A_i , что противоречит построению A_i . \square

5.26.5. Теорема о поперечнике шара.

ТЕОРЕМА 5.56. *Пусть L_{n+1} — $(n+1)$ -мерное линейное подпространство нормированного пространства X ,*

$$B_{n+1} = \{x \in L_{n+1} : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Тогда

$$d_n(B_{n+1}, X) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что

$$d_n(B_{n+1}, X) \leq d_0(B_{n+1}, X) = 1,$$

достаточно доказать, что для любого n -мерного подпространства $M_n \subset X$ $d(B_{n+1}, M_n, X) \geq 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда норма в X строго выпукла. Тогда в силу теорем 5.16 и 5.17 для каждого $\xi \in X$ существует и притом единственный элемент наилучшего приближения $P\xi$. Оператор P является непрерывным (см. теорему 5.18) и нечетным. Рассмотрим этот оператор на сфере

$$\mathbb{S}^n = \{\xi \in B_{n+1} : \|\xi\|_X = 1\}.$$

По теореме Борсука найдется элемент $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^n$ такой, что $P\hat{\xi} = 0$. Поэтому

$$d(B_{n+1}, M_n, X) \geq d(\mathbb{S}^n, M_n, X) \geq d(\hat{\xi}, M_n, X) = \|\hat{\xi} - P\hat{\xi}\|_X = \|\hat{\xi}\|_X = 1.$$

Если норма в X не является строго выпуклой, перейдем от X к его конечномерному подпространству Y , содержащему L_{n+1} и M_n . Аппроксимируем $\|\cdot\|_X$ строго выпуклой нормой следующим образом. Пусть $\|\cdot\|_Y$ — строго выпуклая

норма в Y (например, евклидова норма). В силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах существует постоянная c такая, что $\|x\|'_Y \leq c\|x\|_X$ для любого $x \in Y$. Положим при $\varepsilon > 0$

$$\|x\|_\varepsilon = \|x\|_X + \frac{\varepsilon}{c}\|x\|'_Y.$$

Введенная норма является строго выпуклой в Y , причем

$$(5.80) \quad \frac{1}{1+\varepsilon}\|x\|_\varepsilon \leq \|x\|_X \leq \|x\|_\varepsilon, \quad x \in Y.$$

Из доказанного выше следует, что существует элемент $\widehat{\xi} \in L_{n+1}$ такой, что

$$\inf_{y \in M_n} \|\widehat{\xi} - y\|_\varepsilon = \|\widehat{\xi}\|_\varepsilon = 1.$$

Вернувшись к исходной норме $\|\cdot\|_X$ и учитывая (5.80), получаем

$$d(\widehat{\xi}, M_n, Y) = \inf_{y \in M_n} \|\widehat{\xi} - y\|_X \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \inf_{y \in M_n} \|\widehat{\xi} - y\|_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Так как $\|\widehat{\xi}\|_X \leq \|\widehat{\xi}\|_\varepsilon = 1$, то $\widehat{\xi} \in B_{n+1}$. Таким образом,

$$d(B_{n+1}, M_n, X) = d(B_{n+1}, M_n, Y) \geq d(\widehat{\xi}, M_n, Y) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Так как это неравенство выполнено для любого $\varepsilon > 0$, то

$$d(B_{n+1}, M_n, X) \geq 1.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 5.57. Пусть L_{n+1} — $(n+1)$ -мерное линейное подпространство нормированного пространства X , $W \subset X$ и

$$B_{n+1} = \{x \in L_{n+1} : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Если $rB_{n+1} \subset W$ при некотором $r > 0$, то

$$d_n(W, X) \geq r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 5.56, получаем

$$d_n(W, X) \geq d_n(rB_{n+1}, X) = rd_n(B_{n+1}, X) \geq r.$$

□

5.27. Совершенные сплайны. Интерполяция сплайнами

5.27.1. Разделенные нули и существенные перемены знака функций. Пусть функция $x(\cdot)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $n \geq 2$ и

$$x(t_1) = \dots = x(t_n) = 0, \quad a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b.$$

Точки t_1, \dots, t_n называются *разделенными нулями* функции $x(\cdot)$, если на каждом интервале (t_j, t_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, функция $x(\cdot)$ не есть тождественный нуль. Максимальное число разделенных нулей функции $x(\cdot)$ будем обозначать через $\nu(x(\cdot); [a, b])$. Если у функции $x(\cdot) \not\equiv 0$ не существует двух разделенных нулей, но она обращается в нуль на отрезке $[a, b]$, то положим $\nu(x(\cdot); [a, b]) = 1$. Если $|x(t)| > 0$, $t \in [a, b]$, то положим $\nu(x(\cdot); [a, b]) = 0$.

Будем говорить, что функция $x(\cdot)$, определенная в каждой точке отрезка $[a, b]$, имеет n *перемен знака*, если существуют точки $a < t_0 < \dots < t_n < b$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для почти всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\alpha(-1)^j x(t_j + t) > 0, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где $\alpha = 1$ или -1 . Максимальное число перемен знака функции $x(\cdot)$ будем обозначать через $\mu(x(\cdot); [a, b])$.

Если функция $x(\cdot)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своей производной, то из теоремы Ролля вытекает, что

$$\nu(x'(\cdot); [a, b]) \geq \nu(x(\cdot); [a, b]) - 1.$$

ЛЕММА 5.58. Если $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\mu(x'(\cdot); [a, b]) \geq \nu(x(\cdot); [a, b]) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно доказать, что между любыми двумя разделенными нулями функции $x(\cdot)$ ее производная имеет не менее одной перемены знака. Пусть $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, а t_1, t_2 — разделенные нули функции $x(\cdot)$. Тогда если предположить, что $x'(\cdot)$ не имеет перемен знака на $[a, b]$, то $x'(t) \geq 0$ или $x'(t) \leq 0$ почти всюду на (t_1, t_2) . Из того, что

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(t) dt = 0,$$

вытекает, что $x(t) \equiv 0$ на интервале (t_1, t_2) , что противоречит определению разделенных нулей. \square

5.27.2. Совершенные сплайны. Совершенным сплайном порядка r с N узлами $s_1 < \dots < s_N$ называется функция вида

$$s(t) = p_{r-1}(t) + \frac{\alpha}{r!} \left(t^r + 2 \sum_{j=1}^N (-1)^j (t - s_j)_+^r \right),$$

где $p_{r-1}(\cdot)$ — полином степени не выше $r - 1$, $\alpha = 1$ или -1 , а

$$t_+ = \begin{cases} t, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Будем считать, что узлы лежат в интервале $(-1, 1)$. Совершенный сплайн характеризуется тем, что его $(r - 1)$ -я производная абсолютно непрерывна и $s^{(r)}(t) = \alpha(-1)^j$ при $t \in (s_j, s_{j+1})$, $j = 0, \dots, N$ ($s_0 = -1$, $s_{N+1} = 1$).

ТЕОРЕМА 5.59. Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu_j \leq r$, $j = 1, \dots, n$ и $m = \nu_1 + \dots + \nu_n \geq r$. Тогда существует совершенный сплайн порядка r с $m - r$ узлами в интервале $(-1, 1)$, удовлетворяющий условиям:

$$(5.81) \quad s^{(\nu)}(t_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $N = m - r$ и

$$\mathbb{S}^N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N+1} : \|\xi\| = \sum_{j=1}^{N+1} |\xi_j| = 2 \right\}.$$

Для $\xi \in \mathbb{S}^N$ положим $s_0 = -1$, $s_j = -1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_j|$, $j = 1, \dots, N + 1$. Тем самым $s_{N+1} = 1$. Нетрудно убедиться, что функция $s_\xi(\cdot) = p_{r-1}(\cdot) + g_\xi(\cdot)$, где

$$g_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-1} h_\xi(\tau) d\tau,$$

$p_{r-1}(\cdot)$ — полином степени не выше $r - 1$, а

$$h_\xi(\tau) = \text{sign } \xi_j, \quad t \in (s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, \dots, N + 1,$$

является совершенным сплайном с числом узлов, не превосходящим N . Выберем $1 \leq l \leq n$ и $1 \leq p \leq \nu_l$ так, чтобы $\nu_1 + \dots + \nu_{l-1} + p = r$. Полином $p_{r-1}(\cdot)$ определим из r условий:

$$(5.82) \quad \begin{aligned} p_{r-1}^{(\nu)}(t_j) &= -g_\xi^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, l - 1, \\ p_{r-1}^{(\nu)}(t_l) &= -g_\xi^{(\nu)}(t_l), \quad \nu = 0, 1, \dots, p - 1. \end{aligned}$$

Мера множества точек t , в которых $h_{\xi'}(t) \neq h_\xi(t)$ стремится к нулю при $\xi' \rightarrow \xi$. Поэтому в силу неравенств

$$|g_{\xi'}^{(j)}(t) - g_\xi^{(j)}(t)| \leq \frac{1}{(r-j-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-j-1} |h_{\xi'}(\tau) - h_\xi(\tau)| d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, r-1,$$

функции $g_\xi^{(j)}(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, непрерывно (относительно нормы в $C([-1, 1])$) зависят от ξ на сфере \mathbb{S}^N . Следовательно (в силу непрерывной зависимости от интерполяционных условий полинома $p_{r-1}(\cdot)$), и функции $s_\xi^{(j)}(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, непрерывно зависят от ξ .

Положим теперь для $\xi \in \mathbb{S}^N$

$$(5.83) \quad \begin{aligned} \eta_{l,\nu}(\xi) &= s_\xi^{(\nu)}(t_l), \quad \nu = p, \dots, \nu_l - 1, \\ \eta_{j,\nu}(\xi) &= s_\xi^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = l+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Равенства (5.83) задают ровно N условий, которыми на \mathbb{S}^N задается непрерывное и нечетное отображение $\eta: \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. В силу теоремы Борсука найдется $\hat{\xi} \in \mathbb{S}^N$, для которого $\eta(\hat{\xi}) = 0$. С учетом равенств (5.82) это означает, что совершенный сплайн $s_{\hat{\xi}}(\cdot)$ удовлетворяет условиям (5.81).

Докажем, что у совершенного сплайна $s_{\hat{\xi}}(\cdot)$ ровно $m-r$ узлов. Действительно, по теореме Ролля у функции $s_{\hat{\xi}}^{(r-1)}(\cdot)$ не менее, чем $m-r+1$ разделенных нулей. Тогда по лемме 5.58 у $s_{\hat{\xi}}^{(r)}(\cdot)$ не менее $m-r$ перемен знака, что и означает наличие у $s_{\hat{\xi}}(\cdot)$ ровно $m-r$ узлов. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.60. *Если $s_1 < \dots < s_{m-r}$ — узлы совершенного сплайна $s(\cdot)$ порядка r , удовлетворяющего интерполяционным условиям (5.81), то при всех $1 \leq j \leq m-r$ в промежутке $[-1, s_j]$ содержится не менее j интерполяционных условий, а в промежутке $(s_j, 1]$ — не менее $m-r-j+1$. При этом если при некотором k , $1 \leq k \leq n$, точка t_k совпала с каким-нибудь из узлов совершенного сплайна, то $\nu_k \leq r-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в промежутке $[-1, s_j]$ содержится менее j интерполяционных условий. Тогда отрезок $[s_j, 1]$ будет содержать более $m-j$ интерполяционных условий. Следовательно, функция $s^{(r-1)}(\cdot)$ будет иметь более $m-j-r+1$ разделенных нулей. По лемме 5.58 у $s^{(r)}(\cdot)$ должно тогда быть более $m-j-r$ перемен знака. Но, как легко убедиться, кусочно постоянная функция $s^{(r)}(\cdot)$, принимающая попеременно значения 1 и -1 , имеет на $[s_j, 1]$ ровно $m-j-r-1$ перемен знака. Аналогично доказывается утверждение относительно числа интерполяционных условий на промежутке $(s_j, 1]$.

Предположим, что точка t_k совпала с узлом s_j . Тогда по доказанному число интерполяционных условий левее точки t_k не менее j , правее — не менее $m-r-j+1$, а в самой точке — ν_k . В силу того, что общее число интерполяционных условий равно m , имеем

$$m \geq j + \nu_k + m - r - j + 1.$$

Отсюда $\nu_k \leq r - 1$. \square

Обозначим через \mathcal{S}_N^r множество совершенных сплайнов порядка r с числом узлов, не превосходящим N .

ТЕОРЕМА 5.61. *При всех $r \in \mathbb{N}$ существуют совершенный сплайн $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r$ и точки $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{N+r+1} \leq 1$ такие, что*

$$(5.84) \quad \widehat{s}(\tau_j) = (-1)^j \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])} \quad j = 1, \dots, N + r + 1.$$

При этом

$$(5.85) \quad \inf_{s(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r} \|s(\cdot)\|_{C([-1,1])} = \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(5.86) \quad \mathbb{S}^N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N+1} : \|\xi\| = \sum_{j=1}^{N+1} |\xi_j| = 2 \right\}.$$

Для $\xi \in \mathbb{S}^N$ определим $s_0 = -1$, $s_j = -1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_j|$, $j = 1, \dots, N + 1$. Рассмотрим функцию

$$g_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-1} h_\xi(\tau) d\tau,$$

где

$$h_\xi(\tau) = \text{sign } \xi_j, \quad t \in (s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, \dots, N + 1.$$

Функция $g_\xi(\cdot)$ непрерывно зависит от $\xi \in \mathbb{S}^N$ относительно нормы в $C([-1, 1])$ (см. доказательство теоремы 5.59). Пусть

$$\widehat{p}_\xi(t) = \sum_{j=0}^{N+r-1} a_j(\xi) t^j$$

— многочлен наилучшего равномерного приближения функции $g_\xi(\cdot)$ на отрезке $[-1, 1]$. Положим

$$A(\xi) = (a_r(\xi), \dots, a_{N+r-1}(\xi)).$$

Отображение $A: \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ является нечетным и непрерывным (непрерывность следует из непрерывной зависимости $g_\xi(\cdot)$ от $\xi \in \mathbb{S}^N$ и теоремы 5.18). По теореме Борсука существует $\widehat{\xi} \in \mathbb{S}^N$, для которого $A(\widehat{\xi}) = 0$. Положим

$$(5.87) \quad \widehat{s}(t) = - \sum_{j=0}^{r-1} a_j(\widehat{\xi}) t^j + g_{\widehat{\xi}}(t).$$

Очевидно, что $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r$. По теореме Чебышёва найдутся $N + r + 1$ точек $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{N+r+1} \leq 1$, для которых

$$\widehat{s}(\tau_j) = \sigma(-1)^j \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])}, \quad j = 1, \dots, N + r + 1,$$

где $\sigma = 1$ или -1 (если $\sigma = -1$, то в качестве $\widehat{s}(\cdot)$ можно взять выражение в правой части (5.87) с противоположным знаком).

Докажем теперь равенство (5.85). Прежде всего заметим, что у $\widehat{s}(\cdot)$ ровно N узлов. Действительно, в силу равенств (5.84) у $\widehat{s}(\cdot)$ не менее $N + r$ нулей. Тем самым $\widehat{s}^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее N перемен знака, а следовательно, не может иметь меньше N узлов. Обозначим узлы $\widehat{s}(\cdot)$ через $-1 < \widehat{s}_1 < \dots < \widehat{s}_N < 1$. Предположим, что нашелся совершенный сплайн $\widetilde{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_N^r$ с узлами $-1 < \widetilde{s}_1 < \dots < \widetilde{s}_m < 1$, $m \leq N$, для которого

$$\|\widetilde{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])} < \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Будем считать, что $\text{sign } \tilde{s}^{(r)}(t) = \text{sign } \widehat{s}^{(r)}(t)$ при $t \in (-1, \min\{\widehat{s}_1, \tilde{s}_1\})$ (в противном случае вместо $\tilde{s}(\cdot)$ рассмотрим совершенный сплайн с противоположным знаком). Положим $R(\cdot) = \widehat{s}(\cdot) - \tilde{s}(\cdot)$. Имеем

$$\text{sign } R(\tau_j) = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, N + r + 1.$$

Поэтому у $R(\cdot)$ не менее $N + r$ нулей. Следовательно, у $R^{(r)}(\cdot)$ не менее N перемен знака. Однако поскольку $R^{(r)}(t) \equiv 0$ при $t \in (-1, \min\{\widehat{s}_1, \tilde{s}_1\})$, то у функции $R^{(r)}(\cdot)$ число перемен знака не превышает $N - 1$. Полученное противоречие доказывает равенство (5.85). \square

Обозначим через \mathcal{S}_{0N}^r множество совершенных сплайнов $s(\cdot)$ порядка r с числом узлов, не превосходящим N , удовлетворяющих условию

$$s^{(\nu)}(-1) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 1.$$

ТЕОРЕМА 5.62. *При всех $r \in \mathbb{N}$ существует совершенный сплайн $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_{0N}^r$ и точки $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{N+1} \leq 1$ такие, что*

$$(5.88) \quad \widehat{s}(\tau_j) = (-1)^j \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])} \quad j = 1, \dots, N + 1.$$

При этом

$$(5.89) \quad \inf_{s(\cdot) \in \mathcal{S}_{0N}^r} \|s(\cdot)\|_{C([-1,1])} = \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\xi \in \mathbb{S}^N$, где \mathbb{S}^N определено равенством (5.86), определим $s_0 = -1$, $s_j = -1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_j|$, $j = 1, \dots, N + 1$. Рассмотрим функцию

$$g_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^t (t-\tau)^{r-1} h_\xi(\tau) d\tau,$$

где

$$h_\xi(\tau) = \text{sign } \xi_j, \quad t \in (s_{j-1}, s_j), \quad j = 1, \dots, N + 1.$$

Функция $g_\xi(\cdot)$ непрерывно зависит от $\xi \in \mathbb{S}^N$ относительно нормы в $C([-1, 1])$ (см. доказательство теоремы 5.59). Пусть

$$\widehat{p}_\xi(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j(\xi) t^j$$

— многочлен наилучшего равномерного приближения функции $g_\xi(\cdot)$ на отрезке $[-1, 1]$. Положим

$$A(\xi) = (a_0(\xi), \dots, a_{N-1}(\xi)).$$

Отображение $A: \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ является нечетным и непрерывным (непрерывность следует из непрерывной зависимости $g_\xi(\cdot)$ от $\xi \in \mathbb{S}^N$ и теоремы 5.18). По теореме Борсука существует $\widehat{\xi} \in \mathbb{S}^N$, для которого $A(\widehat{\xi}) = 0$. Положим

$$(5.90) \quad \widehat{s}(t) = g_{\widehat{\xi}}(t).$$

Очевидно, что $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_{0N}^r$. По теореме Чебышёва найдется $N + 1$ точек $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{N+1} \leq 1$, для которых

$$\widehat{s}(\tau_j) = \sigma(-1)^j \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])}, \quad j = 1, \dots, N + 1,$$

где $\sigma = 1$ или -1 (если $\sigma = -1$, то в качестве $\widehat{s}(\cdot)$ можно взять выражение в правой части (5.90) с противоположным знаком).

Докажем теперь равенство (5.89). Прежде всего заметим, что у $\widehat{s}(\cdot)$ ровно N узлов. Действительно, в силу равенств (5.88) у $\widehat{s}(\cdot)$ не менее N нулей на интервале $(-1, 1)$ и еще имеется нуль при $t = -1$. Следовательно, у $\widehat{s}'(\cdot)$ тоже не менее N нулей на интервале $(-1, 1)$ и еще имеется нуль при $t = -1$. Продолжая эти рассуждения, приходим к тому, что у $\widehat{s}^{(r-1)}(\cdot)$ не менее N нулей

на интервале $(-1, 1)$ и еще имеется нуль при $t = -1$. Тем самым $\widehat{s}^{(r)}(\cdot)$ имеет не менее N перемен знака, а, следовательно, не может иметь меньше N узлов. Обозначим узлы $\widehat{s}(\cdot)$ через $-1 < \widehat{s}_1 < \dots < \widehat{s}_N < 1$. Предположим, что нашелся совершенный сплайн $\widetilde{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_{0N}^r$ с узлами $-1 < \widetilde{s}_1 < \dots < \widetilde{s}_m < 1$, $m \leq N$, для которого

$$\|\widetilde{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])} < \|\widehat{s}(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Будем считать, что $\text{sign } \widetilde{s}^{(r)}(t) = \text{sign } \widehat{s}^{(r)}(t)$ при $t \in (-1, \min\{\widehat{s}_1, \widetilde{s}_1\})$ (в противном случае вместо $\widetilde{s}(\cdot)$ рассмотрим совершенный сплайн с противоположным знаком). Положим $R(\cdot) = \widehat{s}(\cdot) - \widetilde{s}(\cdot)$. Имеем

$$\text{sign } R(\tau_j) = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, N + 1.$$

Поэтому у $R(\cdot)$ не менее N нулей на интервале $(-1, 1)$ и еще имеется нуль кратности r при $t = -1$. Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились выше, приводят к тому, что у $R^{(r)}(\cdot)$ не менее N перемен знака. Однако поскольку $R^{(r)}(t) \equiv 0$ при $t \in (-1, \min\{\widehat{s}_1, \widetilde{s}_1\})$, то у функции $R^{(r)}(\cdot)$ число перемен знака не превышает $N - 1$. Полученное противоречие доказывает равенство (5.89). \square

5.27.3. Интерполяция сплайнами. *Полиномиальным сплайном степени $r - 1$, $r \in \mathbb{N}$, с N узлами $s_1 < \dots < s_N$ называется функция вида*

$$S(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j t^j + \sum_{j=1}^N b_j (t - s_j)_+^{r-1}.$$

На каждом из промежутков $(-\infty, s_1], [s_1, s_2], \dots, [s_N, +\infty)$ сплайн $S(\cdot)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше $r - 1$, а при $r \geq 2$ $S^{(r-2)}(\cdot)$ — непрерывная кусочно-линейная функция.

ТЕОРЕМА 5.63. *Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu_j \leq r$, $j = 1, \dots, n$ и $m = \nu_1 + \dots + \nu_n \geq r$. Пусть, кроме того, $s_1 < \dots < s_{m-r}$ — узлы совершенного сплайна порядка r , удовлетворяющего условиям (5.81). Тогда для любых $x_{j\nu}$ существует единственный полиномиальный сплайн $S(\cdot)$ степени $r - 1$ с узлами в точках s_1, \dots, s_{m-r} , удовлетворяющий интерполяционным условиям*

$$(5.91) \quad S^{(\nu)}(t_j) = x_{j\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (5.91) — это система линейных уравнений порядка m относительно коэффициентов сплайна a_j, b_j . Для доказательства ее однозначной разрешимости при любых $x_{j\nu}$ достаточно доказать, что однородная система имеет только нулевое решение.

Допустим противное, т. е. существует сплайн $S(\cdot) \not\equiv 0$, обращающийся в нуль в точках t_j с соответствующими кратностями. Тогда возможны следующие случаи (здесь по-прежнему считается, что $s_0 = -1$, а $s_{N+1} = 1$):

- (1) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[-1, 1]$;
- (2) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[-1, s_j]$, $1 \leq j \leq N$, но $S(t) \equiv 0$ на $[s_j, s_{j+1}]$;
- (3) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[s_j, 1]$, $1 \leq j \leq N$, но $S(t) \equiv 0$ на $[s_{j-1}, s_j]$;
- (4) $|S(t)| > 0$ почти всюду на $[s_j, s_{j+k}]$, $1 \leq j < j + k \leq N$, но $S(t) \equiv 0$ на $[s_{j-1}, s_j]$ и $[s_{j+k}, s_{j+k+1}]$.

Предположим, что имеет место случай 1. Тогда $S^{(r-2)}(\cdot)$ имеет по теореме Ролля не менее $m - r + 2$ разделенных нулей и, следовательно, число перемен знака у $S^{(r-1)}(\cdot)$ — не менее $m - r + 1$, но у кусочно-постоянной на $m - r + 1$ интервалах функции не может быть больше $m - r$ перемен знака.

Пусть имеет место случай 2. Тогда в силу непрерывности $S^{(r-2)}(\cdot)$

$$S^{(\nu)}(s_j) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, r-2.$$

Тем самым из предложения 5.60 вытекает, что у сплайна $S(\cdot)$ на отрезке $[-1, s_j]$ имеется не менее $j+r-1$ нулевых интерполяционных условий. Отсюда аналогично предыдущему случаю заключаем, что $S^{(r-1)}(\cdot)$ имеет не менее j перемен знака, что невозможно для функции, кусочно-постоянной на j интервалах.

Случай 3 рассматривается аналогично. Перейдем к последнему случаю 4. Обозначим число нулевых интерполяционных условий на интервале (t_j, t_j+k) через p . Тогда если α — число интерполяционных условий левее этого интервала, а β — правее, то в силу предложения 5.60

$$\alpha + p \geq j + k, \quad p + \beta \geq m - r - j + 1.$$

Складывая эти неравенства получаем, что $p \geq k - r + 1$. Учитывая непрерывность $S^{(r-2)}(\cdot)$, получаем еще $2r - 2$ нулевых интерполяционных условий на концах интервала (t_j, t_j+k) . Следовательно, $S^{(r-1)}(\cdot)$ имеет не менее k перемен знака, что невозможно для функции, кусочно-постоянной на k интервалах. \square

ТЕОРЕМА 5.64. Пусть совершенный сплайн $\widehat{s}(\cdot) \in \mathcal{S}_{0N}^r$ удовлетворяет условию (5.88) и $-1 < t_1 < \dots < t_n < 1$ — его нули. Тогда для любых x_j существует единственный полиномиальный сплайн $S(\cdot)$ степени $r-1$ с узлами в точках s_1, \dots, s_n , удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$(5.92) \quad S(t_j) = x_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad S^{(\nu)}(-1) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, r-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (5.92) — это система линейных уравнений порядка $n+r$ относительно коэффициентов сплайна a_j, b_j . Для доказательства ее однозначной разрешимости при любых x_j достаточно доказать, что однородная система имеет только нулевое решение.

Допустим противное, т. е. существует сплайн $S(\cdot) \not\equiv 0$, обращающийся в нуль в точках $t_j, j = 1, \dots, n$, и такой, что $S^{(\nu)}(-1) = 0, \nu = 0, 1, \dots, r-1$. Подберем α так, чтобы в некоторой точке $t_0 \in (-1, 1)$, в которой $\widehat{s}(\cdot)$ отличен от нуля, выполнялось условие $\widehat{s}(\cdot) = \alpha S(\cdot)$. Тогда число нулей у функции $\widehat{s}(\cdot) - \alpha S(\cdot)$ на интервале $(-1, 1)$ не меньше $n+1$ и еще имеется нуль кратности r при $t = -1$. Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при доказательстве теоремы 5.62, приводят к тому, что у функции $\widehat{s}^{r-1}(\cdot) - \alpha S^{r-1}(\cdot)$ не менее $n+1$ перемен знака. На каждом из интервалов $(-1, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_n, 1)$ эта функция линейная и монотонная, причем если на каком-то интервале она монотонно возрастает, то на соседнем с ним она монотонно убывает. Кроме того, т. к. $\widehat{s}^{r-1}(-1) - \alpha S^{r-1}(-1) = 0$, то на интервале $(-1, s_1)$ перемен знака нет. Поэтому число перемен знака у этой функции не может быть больше n . \square

5.28. Неравенство Юнга для сверток

ТЕОРЕМА 5.65. Пусть $1 \leq q \leq \infty, f(\cdot) \in L_1(\mathbb{T})$ и $g(\cdot) \in L_q(\mathbb{T})$. Тогда

$$(5.93) \quad \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})} \leq \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \|g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q &\leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\theta)| |g(\theta)| d\theta \right)^q dt \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} (|f(t-\theta)| |g(\theta)|^q)^{1/q} |f(t-\theta)|^{1-1/q} d\theta \right)^q dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} (|f(t-\theta)||g(\theta)|^q)^{1/q} |f(t-\theta)|^{1-1/q} d\theta \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\theta)||g(\theta)|^q d\theta \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\theta)| d\theta \right)^{1-1/q} \\ & = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\theta)||g(\theta)|^q d\theta \right)^{1/q} \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{1-1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|(f * g)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q & \leq \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{q-1} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\theta)||g(\theta)|^q d\theta \right) dt \\ & = \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{q-1} \int_{\mathbb{T}} (|g(\theta)|^q \int_{\mathbb{T}} |f(t-\theta)| dt) d\theta \\ & = \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^{q-1} \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \|g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q = \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}^q \|g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T})}^q. \end{aligned}$$

□

5.29. Формула Йенсена

ЛЕММА 5.66. Пусть $|z_0| = \rho$. Тогда имеет место равенство

$$(5.94) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\rho e^{i\theta} - z_0| d\theta = \ln \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f(z) = \ln(z - z_0)$ аналитична в круге $|z| \leq r < \rho$. По формуле Пуассона

$$\ln |z_0| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |r e^{i\theta} - z_0| d\theta.$$

Докажем, что

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |r e^{i\theta} - z_0| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\rho e^{i\theta} - z_0| d\theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \rho - 0.$$

Пусть $z = \rho e^{i\theta_0}$. Имеем

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln |1 - \varepsilon - e^{-i(\theta-\theta_0)}| - \ln |1 - e^{-i(\theta-\theta_0)}|) d\theta,$$

где $\varepsilon = 1 - r/\rho$. В силу периодичности

$$\begin{aligned} \Delta & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln |1 - \varepsilon - e^{-i\theta}| - \ln |1 - e^{-i\theta}|) d\theta \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln((1 - \varepsilon)4 \sin^2 \theta/2 + \varepsilon^2) - \ln 4 \sin^2 \theta/2) d\theta \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\ln((1 - \varepsilon)4 \sin^2 \alpha + \varepsilon^2) - \ln 4 \sin^2 \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\pi} \alpha (\ln((1 - \varepsilon)4 \sin^2 \alpha + \varepsilon^2) - \ln 4 \sin^2 \alpha) \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha \left(\frac{(1 - \varepsilon)4 \sin 2\alpha}{(1 - \varepsilon)4 \sin^2 \alpha + \varepsilon^2} - \frac{4 \sin 2\alpha}{4 \sin^2 \alpha} \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\delta^2}{4 \sin^2 \alpha + \delta^2} d\alpha, \end{aligned}$$

где

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}.$$

Положим

$$I_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\delta^2}{4 \sin^2 \alpha + \delta^2} d\alpha.$$

В силу того, что

$$\frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$0 \leq I_0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\delta^2}{4 \sin^2 \alpha + \delta^2} d\alpha = \frac{\pi \delta}{2\sqrt{4 + \delta^2}}.$$

Отсюда следует, что $I_0 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\Delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

ТЕОРЕМА 5.67. Пусть функция $f(\cdot)$ аналитична в единичном круге D и $0 < |z_1| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$ — ее нули (каждый нуль пишется столько раз, какова его кратность). Тогда для любого $0 < \rho < 1$ имеет место равенство

$$(5.95) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln |f(0)| + \sum_{|z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что z_1, \dots, z_n — все нули $f(\cdot)$ в круге $|z| < \rho$. Рассмотрим сначала случай, когда $|z_{n+1}| > \rho$. Положим $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Тогда имеет место представление

$$f_\rho(\cdot) = b_\rho(\cdot)h_\rho(\cdot),$$

где

$$b_\rho(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j/\rho}{1 - \bar{z}_j z/\rho},$$

а $h_\rho(\cdot)$ — аналитическая функция в \bar{D} , не обращающаяся в нуль. Тем самым функция $\ln h_\rho(\cdot)$ аналитична в \bar{D} и по формуле Пуассона

$$\ln |h_\rho(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |h_\rho(e^{i\theta})| d\theta.$$

Отсюда, учитывая, что $|h_\rho(e^{i\theta})| \equiv |f_\rho(e^{i\theta})|$, получаем доказываемое равенство.

Пусть теперь $|z_{n+1}| = \dots = |z_{n+k}| = \rho$, а $|z_{n+k+1}| > \rho$. Положим

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{(z - z_{n+1}) \dots (z - z_{n+k})}.$$

Функция $f_1(\cdot)$ не имеет нулей на окружности радиуса ρ , и по доказанному к ней можно применить формулу (5.95). Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_1(\rho e^{i\theta})| d\theta = \ln |f_1(0)| + \sum_{|z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\rho e^{i\theta} - z_{n+j}| d\theta \\ = \ln |f(0)| - \sum_{j=1}^k |z_{n+j}| + \sum_{|z_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство (5.94), получаем доказываемое равенство в общем случае. \square

Равенство (5.95) обычно называется *формулой Йенсена*.

5.30. Произведения Бляшке–Золотарёва

Пусть $k \in (0, 1)$, а K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k . Функцию

$$Z_n(z, k) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - z_j z},$$

где

$$z_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(-K + \frac{2j-1}{n} K, k \right),$$

будем называть *произведением Бляшке–Золотарёва*. Если $n = 2m + 1$, то $Z_n(\cdot, k)$ можно записать в виде

$$Z_n(z, k) = z \prod_{j=1}^m \frac{z^2 - u_j^2}{1 - u_j^2 z^2}, \quad u_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2j}{n} K, k \right).$$

При $n = 2m$ функция $Z_n(\cdot, k)$ записывается в виде

$$Z_n(z, k) = \prod_{j=1}^m \frac{z^2 - v_j^2}{1 - v_j^2 z^2}, \quad v_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2j-1}{n} K, k \right).$$

Подставляя $z = \sqrt{k} \operatorname{sn}(Kt, k)$ и используя формулы для первого главного преобразования n -й степени эллиптических функций, получаем параметрическую запись для произведений Бляшке–Золотарёва

$$Z_n(z, k) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(n\Lambda t + \Lambda, \lambda), & n = 2m, \\ (-1)^{(n-1)/2} \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}(n\Lambda t, \lambda), & n = 2m + 1, \end{cases}$$

где λ определено равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K},$$

а Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ и $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$. Таким образом,

$$\|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])} = \sqrt{\lambda}.$$

Важным свойством произведений Бляшке–Золотарёва является наличие у них альтернанса, т. е. таких точек

$$\xi_j = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(-K + \frac{2j}{n} K, k \right), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

для которых

$$(5.96) \quad Z(\xi_j, k) = (-1)^j \|Z_n(\cdot, k)\|_{C([- \sqrt{k}, \sqrt{k}])}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Список литературы

- [1] Cavaretta A. S. An elementary proof of Kolmogorov's theorem, *Amer. Math. Monthly*, 1974, 81, 5, 480–486.
- [2] Farkov Yu. A. n -widths, Faber expansion, and computation of analytic functions, *J. Complexity*, 1996, 12, 58–79.
- [3] Fisher S. D. Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions, *Constr. Approx.*, 1989, 5, 171–187.
- [4] Fisher S. D., Micchelli C. A. The n -width of sets of analytic functions, *Duke Math. J.*, 1980, 47, 789–801.
- [5] Fisher S. D., M. I. Stessin. The n -width of the unit ball of H^q , *J. Approx. Theory*, 1991, 67, 347–356.
- [6] Fisher S. D., M. I. Stessin. The n -width of the unit ball of H^q — addendum. *J. Approx. Theory*, 1994, 79, 167–168.
- [7] Gaffney P. W., Powell M. J. D. Optimal interpolation, *Lecture Notes in Math.*, 1976, 506, 90–99.
- [8] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et ses dérivées, *C. R. Soc. Math. France*, 1914, 41, 68–72.
- [9] Kolmogorov A. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. *Annals of Math.*, 1936, 37, 107–110.
- [10] Landau E. Ungleichungen für zweimal differenzierbar Funktiontn, *Proc. London. Math. Soc.*, 1913, 2, 13, 43–49.
- [11] Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M. On optimal recovery of heat equation solutions, In: *Approximation Theory: A volume dedicated to B.Bojanov (D.K. Dimitrov, G.Nikolov, and R.Uluchev, Eds.)*, 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [12] Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1979, 16, 87–105.
- [13] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery, *Optimal Estimation in Approximation Theory*. New York: Plenum Press, 1977, 1–54.
- [14] Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery, *Lecture Notes in Math.* Berlin: Springer-Verlag, 1985, 1129, 21–93.
- [15] Micchelli C. A., Rivlin T. J., Winograd S. The optimal recovery of smooth functions, *Numer. Math.*, 1976, 26, 191–200.
- [16] Osipenko K. Yu., Stessin M. I. On some problems of optimal recovery of analytic and harmonic functions from inaccurate data, *J. Approx. Theory*, 1992, 70, 206–228.
- [17] Osipenko K. Yu. Optimal recovery of linear functionals and operators, *Commun. Appl. Math. Comput.*, 2016, 30, 4, 459–481.
- [18] Pietsch A. s -Numbers of operators in Banach spaces, *Studia Math.*, 1974, 51, 201–223.
- [19] Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin. Springer-Verlag, 1985.
- [20] Plaskota L. *Noisy Information and Computational Complexity*. Cambridge University Press, 1996.
- [21] Stein E. M. Functions of exponential type, *Ann. of Math. (2)*, 1957, 65, 3, 582–592.
- [22] Traub J. F., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H. *Information-Based Complexity*. N. Y.: Acad. Press, 1988.
- [23] Арестов В. В. О точных константах и неравенствах между нормами функций и их производных, *Acta Sci. Math.*, 1972, 33, 3–4, 243–267.
- [24] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, 1989, 189, 3–20.
- [25] Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи, *Успехи мат. наук*, 1996, 51, 6, 89–124.
- [26] Ахизер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации*. М.: Наука, 1965.
- [27] Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. *Неравенства для производных и их приложения*. Киев: Наукова Думка, 2003.

- [28] Габушин В. Н. Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p . Матем. заметки, 1967, 1, 3, 291–298.
- [29] Габушин В. Н. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой, Матем. заметки, 1969, 6, 5, 573–582.
- [30] Ильин В. А., Позняка Э. Г. Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1973.
- [31] Калябин Г. А. Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина), Функци. анализ и его прил., 2004, 38, 3, 29–38.
- [32] Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, Уч. зап. МГУ, 1939, 30, 3–16.
- [33] Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, 11, 561–566.
- [34] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [35] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- [36] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным, Мат. заметки, 1991, 50, 6, 85–93.
- [37] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой, Матем. сб., 2002, 193, 3, 79–100.
- [38] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных, Функци. анализ и его прил., 2003, 37, 3, 51–64.
- [39] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям, Матем. сб., 2009, 200, 5, 37–54.
- [40] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру, Функци. анализ и его прил., 2010, 44, 3, 76–79.
- [41] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций, Фундамент. и прикл. матем., 2013, 18, 5, 155–174.
- [42] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления, Пробл. передачи информ., 2003, 39, 118–133.
- [43] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Изд. 5-е, доп. М.: ЛЕНАНД. 2020.
- [44] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ. Теория и приложения. М.: МГУ. 2024.
- [45] Мальцев А. И. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, 11, 566–568.
- [46] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, 1975, Мат. заметки, 17, 3, 359–368.
- [47] Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, 10, 3, 207–256.
- [48] Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, Успехи мат. наук, 1950, 5, 2, 165–177.
- [49] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций, Мат. заметки, 1972, 12, 4, 465–476.
- [50] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек, 1976, Мат. заметки, 19, 1, 29–40.
- [51] Осипенко К. Ю. Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций, Матем. сб., 1991, 182, 5, 723–745.
- [52] Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления, СПб.: Лань, 2022.
- [53] Осипенко К. Ю. Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди-Соболева, Матем. сб., 2001, 192, 2, 67–86.
- [54] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным, Владикавказский мат. журн., 2004, 6, 4, 55–62.
- [55] Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках, Матем. сб., 2014, 2056 10, 77–106.
- [56] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана, Мат. заметки, 1991, 49, 4, 95–104.
- [57] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — МГУ, М., 1965.
- [58] Софман Л. Б. Поперечники октаэдров, Матем. заметки, 1969, 5, 4, 429–436.

-
- [59] Стесин М. И. Александровские поперечники множеств и классов гладких функций, ДАН СССР, 1975, 220, 6, 1278–1281.
- [60] Стечкин С. Б. О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, Успехи мат. наук, 1954, 9, 1, 133–134.
- [61] Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций, Матем. заметки, 1967, 1, 2, 155–162.
- [62] Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования, Матем. заметки, 1968, 4, 2, 233–238.
- [63] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. УМН, 1960, 15, 3, 81–120.
- [64] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений, ДАН СССР, 1965, 160, 4, 774–777.
- [65] Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$, Матем. сб., 1969, 122, 2, 290–304.
- [66] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
- [67] Тихомиров В. М. Теория приближений, Анализ–2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 14, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [68] Трауб Дж., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
- [69] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Наука, 1966.
- [70] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. СПб.: Лань, 2016.
- [71] Хавинсон С. Я. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, Успехи мат. наук, 1963, 18, 2, 25–98.
- [72] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Поля Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [73] Чебышёв П. Л. О функциях, мало уклоняющихся от нуля при некоторых величинах переменной. Приложение к XL тому Записок Имп. Акад. Наук, 1881, 3. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва, изд. Акад. Наук СССР, том III, стр. 108–127, 1944–1951.