БРЕВНО В ШАЛАШЕ

К. ОСИПЕНКО, А. СПИВАК, В. ТИХОМИРОВ

Каков цилиндр максимального объема, который можно вписать в данный конус?[1] Этот вопрос можно найти во многих учебниках алгебры и математического анализа. В статье "Кеплер и винные бочки — австрийские и рейнские" ("Квант", №6 за 2000 год) он был сформулирован в качестве упражнения: *"В данный конус впишите цилиндр максимального объема, ось которого совпадает с осью конуса".*

Зачем нужны слова "ось которого совпадает с осью конуса"? Нельзя ли их вычеркнуть? Другими словами, верно ли, что ось цилиндра максимального объема, который можно разместить внутри данного конуса, параллельна оси конуса? Скорее всего, верно. Но доказывать это мы не умеем: задача о произвольном (наклонно расположенном) цилиндре оказалась неожиданно сложной, и решить ее мы не смогли. А вот разобраться с цилиндром, ось которого параллельна основанию конуса, удалось. Решение и ответ этой задачи оказались несколько громоздкими, но поучительными. При этом потребовалось вычислить расстояние от точки, лежащей на оси симметрии гиперболы, до самой этой гиперболы.

А где гипербола, там и эллипс, и парабола. Так эта статья , начав с вопроса, можно ли сэкономить слова "ось которого совпадает с осью конуса", несколько разрослась. Разумеется, можно было бы изложить решение задачи о "лежачем" цилиндре максимального объема и без таких больших отступлений в сторону. Но мы надеемся, что всякий, кто имеет склонность к математике, будет рад познакомиться с классическими понятиями и результатами, которые в изобилии встретятся на нашем пути. Вы научитесь вычислять расстояния от точки до параболы, эллипса, гиперболы, узнаете , как связаны астроида и эллипс, парабола и полукубическая парабола.

Эта статья может быть интересна даже одиннадцатикласснику-абитуриенту, которому не интересно ничего на свете, кроме экзаменов в вуз, выбранный им и еще не выбравший его. Ведь в конце концов задача о максицилиндре (и похожая на нее задача о миниконусе, которая тоже будет решена нами) — это "задача с параметром", правда довольно сложная.

[1] *Цилиндры и конусы в этой статье — прямые круговые*

“Стоячий” и “лежачий” максицилиндры

“Стоячий” цилиндр

Пусть $OA = R$ и $OS = H$ — радиус основания и высота прямого кругового, $OL = x$ и $LM = y$ — радиус основания и высота вписанного цилиндра (рис. 1).

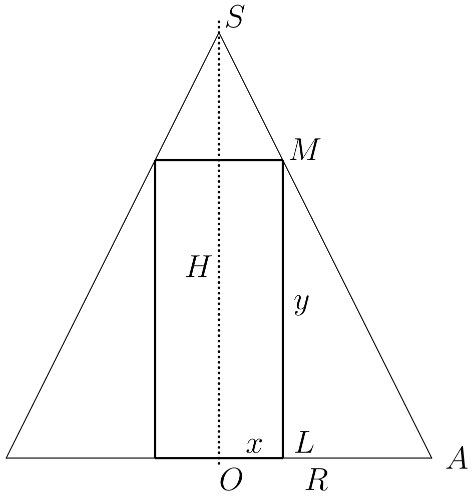

Рис. 1

Тогда в силу подобия треугольников получаем: $\dfrac{y}{H} = \dfrac{AM}{AS}$ и $\dfrac{x}{R} = \dfrac{MS}{AS}$, так что

$$\frac{y}{H} + \frac{x}{R} = \frac{AM}{AS} + \frac{MS}{AS} = 1.$$

Объем цилиндра равен

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 H \left(1 - \frac{x}{R}\right) = \frac{\pi H}{R}(x^2 R - x^3).$$

Мы свели задачу к нахождению максимума функции

$$f(x) = x^2 R - x^3$$

на интервале $(0, R)$. Эта функция обращается в ноль на концах отрезка $0, R$, а производная

$$f'(x) = 2xR - 3x^2$$

на интервале $(0, R)$ равна нулю лишь в точке $x = 2R/3$. (График функции f изображен на рисунке 2.)

Значит, максимальный объем “стоячего” цилиндра равен

$$V = \frac{\pi H}{R} f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

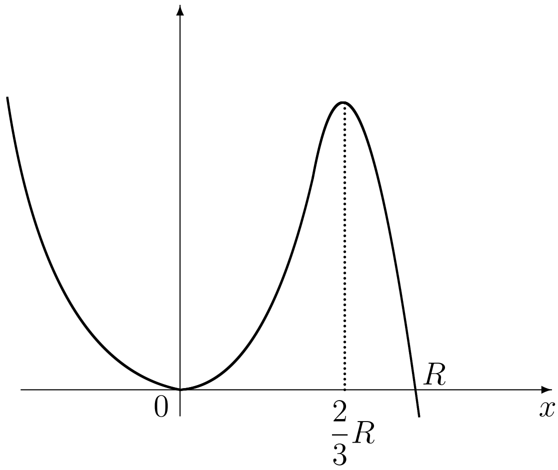

Рис. 2

“Лежачий” цилиндр

На первый взгляд кажется, что задача о “лежачем” цилиндре столь же проста. Ведь если r и $2h$ — радиус основания и высота вписанного в конус “лежачего” цилиндра, ось которого параллельна основанию конуса (на рисунке 3 изображено осевое сечение), то

$$\frac{h}{R} + \frac{2r}{H} = \frac{SK}{SA} + \frac{KA}{SA} = 1,$$

откуда $h = R\left(1 - \dfrac{2r}{H}\right)$.

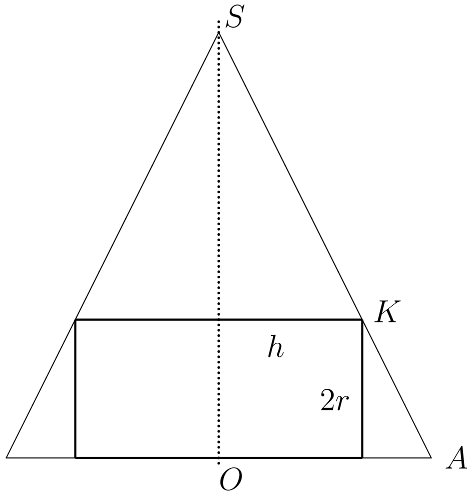

Рис. 3

Объем цилиндра равен

$$2\pi h r^2 = 2\pi r^2 R \left(1 - \frac{2r}{H}\right) = \frac{2\pi R}{H}\left(r^2 H - 2r^3\right).$$

Как и для “стоячего” цилиндра, рассмотрим функцию

$$g(r) = r^2 H - 2r^3$$

и продифференцируем ее:

$$g'(r) = 2rH - 6r^2.$$

Функция g обращается в ноль в концах отрезка $[0, H/2]$, а ее производная на интервале $(0, H/2)$ обращается в ноль при $r = H/3$. (График функции g изображен на рисунке 4.)

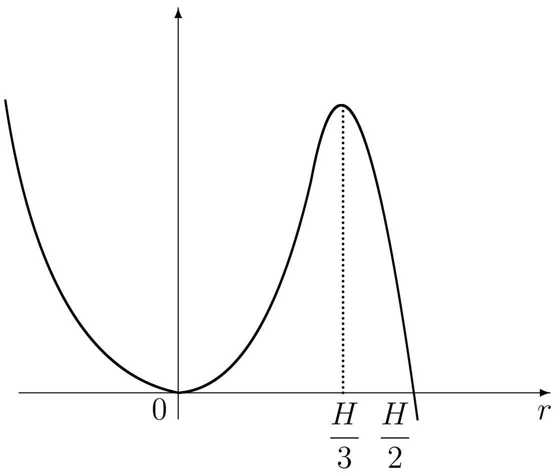

Рис. 4

Значит, максимальное значение на интервале $(0, H/2)$ функция принимает при $r = H/3$. Этому значению соответствует величина

$$h = R\left(1 - \frac{2H/3}{H}\right) = \frac{R}{3};$$

следовательно, максимальный объем “лежачего” цилиндра равен

$$2\pi r^2 h = \frac{2\pi}{27} H^2 R.$$

Например, при $R = 1$ и $H = 9$ объем ‘лежачего” цилиндра равен 6π.

А объем конуса, в который этот цилиндр вписан, равен

$$\frac{\pi}{3} R^2 H = 3\pi.$$

Внутри одного тела (конуса) удалось расположить другое тело (цилиндр) вдвое большего объема! Представляете, какое значение для практики может иметь наша конструкция?!

В чем ошибка?

Чудес не бывает; конечно же, мы ошиблись. При малых r вписанный цилиндр касается боковой поверхности конуса двумя своими точками (рис. 5), а при возрастании r высота h вписанного цилиндра уменьшается, и в некоторый момент происходит “раздвоение” каждой из точек касания.

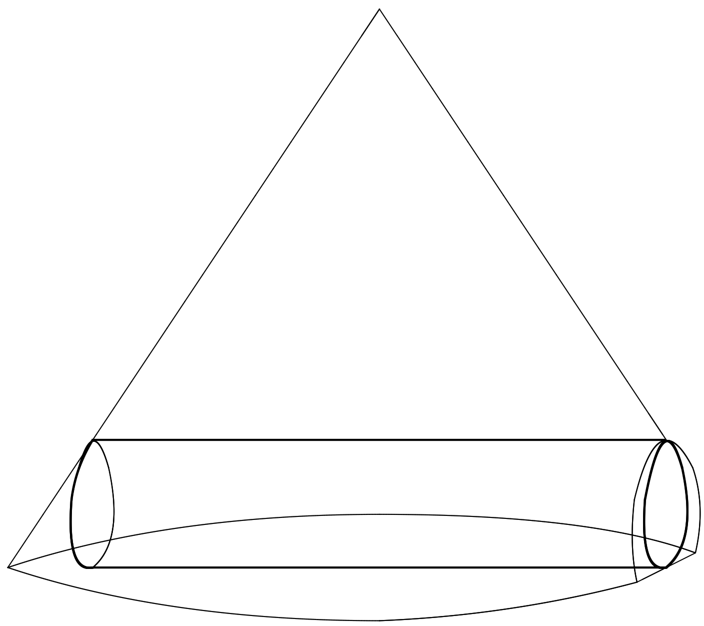

Рис. 5

С этого момента рисунок 3 не соответствует действительности: цилиндр касается поверхности боковой конуса не двумя, а четырьмя точками (рис. 6).

Правильный ответ

Необходимость разбора двух разных случаев касания значительно усложняет решение задачи. Тем не менее, мы сможем ее решить и получим следующий ответ: при $R \geq H$ максимальный объем “лежачего” цилиндра, вписанного в конус с высотой H и радиусом основания R, равен

$$V = \frac{2}{27}\pi R H^2,$$

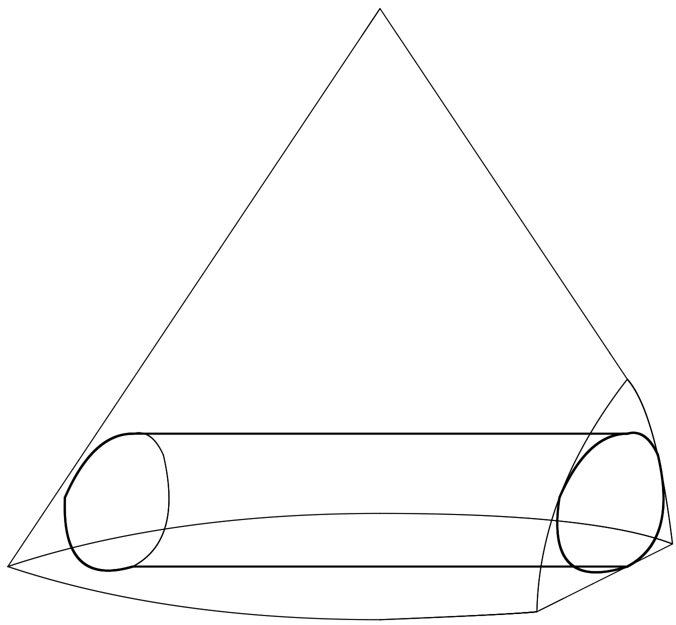

Рис. 6

а при $R \le H$ максимальный объем равен

$$\frac{\pi R^3\sqrt{2}\left(\sqrt{12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}-3R\sqrt{2}\right)^2}{9H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

(При $R = H$, между прочим, можно пользоваться обеими формулами. В самом деле, подставив $H = R$ во вторую формулу, получим $V = \frac{2}{27}\pi R^3$. Убедитесь в этом!)

Мы не будем сразу рассказывать решение задачи о лежачем максицилиндре, а потренируемся — разберем более простые (и, на наш взгляд, более важные и интересные) задачи. Читателю, владеющему математическим анализом, можно пропустить несколько следующих разделов статьи. А менее опытным читателям, надеемся, эта тренировка поможет благополучно во всем разобраться.

Расстояние от точки до параболы, эллипса, гиперболы

Как известно, сечение конуса вертикальной плоскостью — гипербола. (А если вы еще не знаете этого, не огорчайтесь: все, что нам нужно, мы докажем!) Поэтому в решении задачи о лежачем цилиндре мы будем использовать формулы для расстояния от точки до гиперболы. Но для тренировки мы сначала рассмотрим вместо гиперболы параболу $y = kx^2$. (Никакой существенной разницы нет, просто для многих школьников парабола привычнее гиперболы.) И точку пока рассмотрим не произвольную, а лежащую на оси симметрии параболы.

Итак, *найдем расстояние от данной точки $A(0;b)$ до параболы, заданной уравнением $y = kx^2$, где $k > 0$.* Что такое расстояние от точки до параболы? Это наименьшее из расстояний AM, где $M(x, kx^2)$ — точка параболы, т.е. это наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (b - kx^2)^2}.$$

Обозначив $t = x^2$, имеем

$$f^2(x) = k^2 t + (1 - 2kb)t + b^2.$$

Квадратичная функция принимает свое минимальное значение в точке $t_0 = \dfrac{2kb - 1}{2k^2}$. При этом, как легко посчитать,

$$f^2\left(\sqrt{\frac{2kb-1}{2k^2}}\right) = \frac{b}{k} - \frac{1}{4k^2}.$$

Впрочем, надо помнить о том, что $t = x^2 \geq 0$: если $2kb - 1 < 0$, то минимальное значение функция $f(x)$ принимает при $x = 0$. Итак,

$$\min f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{b}{k} - \dfrac{1}{4k^2}}, & \text{если } b > \dfrac{1}{2k}, \\ |b|, & \text{если } b \leq \dfrac{1}{2k}. \end{cases}$$

Зависимость $\min f$ от b изображена на рисунке 7

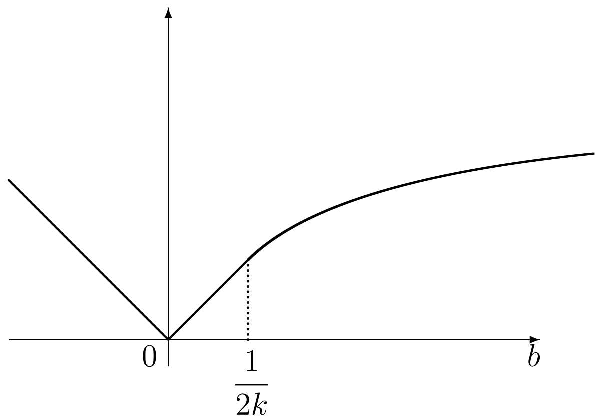

Рис. 7

Расстояние от точки (a, a) до гиперболы $xy = 1$

Продолжим тренировку. Рассмотрим гиперболу. Но не ту,что нам понадобиться в задаче о лежачем цилиндре, а более привычную, заданную уравнением $xy = 1$. Очевидно, при $0 < a < 1$ расстояние r от точки $A(a; a)$ до гиперболы равно $(1 - a)\sqrt{2}$.

При $a > 1$ ответ более сложен. До тех пор, пока окружность с центром A и радиусом AK имеет с гиперболой только одну общую точку (рис. 8), расстояние равно $AK = (a-1)\sqrt{2}$.

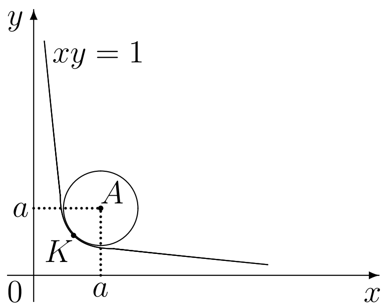

Рис. 8

Но при достаточно больших a гипербола имеет с такой окружностью не одну, а три общие точки (рис. 9).

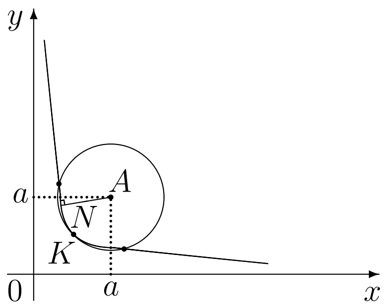

Рис. 9

Расстояние от точки A до гиперболы в таком случае равно $AN < AK$.

Узнаем, при каких a точка пересечения одна, а при каких — три. Уравнение окружности с центром A и радиусом $(a-1)\sqrt{2}$ записать легко:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2(a-1)^2.$$

Чтобы узнать, в скольких точках заданная этим уравнением окружность пересекает гиперболу, выясним, сколько решений имеет уравнение

$$(x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 = 2(a-1)^2.$$

Раскрыв скобки, запишем уравнение в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4a = 2.$$

Обозначим $t = x + \dfrac{1}{x}$. Поскольку $t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$, исследуемое уравнение превращается в квадратное:

$$t^2 - 2at + 4a - 2 = 0.$$

Как известно, $t \geq 2$, причем значению $t = 2$ соответствует единственное значение $x = 1$, а любому $t > 2$ соответствуют два взаимно обратных значения x. Таким образом, мы должны выяснить, при каких $a > 1$ уравнение $t^2 - 2at + 4a - 2 = 0$ имеет единственное решение $t \geq 2$, а при каких — два решения.

Нам поможет то,что окружность проходит через точку K и поэтому $t = 2$ — корень уравнения. По теореме Виета, сумма корней равна $2a$, и поэтому отличный от $t = 2$ корень равен $2a - 2$. Решив неравенство

$$2a - 2 \geq 2,$$

получаем ответ: при $a > 2$ окружность и гипербола имеют три общие точки, а при $1 < a \leq 2$ — лишь одну.

Итак, при $1 < a \leq 2$ расстояние от точки A до гиперболы равно $AK = (a-1)\sqrt{2}$. А при $a > 2$ это расстояние меньше длины отрезка AK. На сколько меньше? На этот вопрос наше рассуждение ответа не дает.

Считали, считали, а расстояние r так и не нашли. Почему? Похоже, мы делали не то, что нужно. Да. Простите нас, уважаемые читатели! Мы это так, понарошку заблудились. Вернемся же на путь истинный.

Для вычисления величины r рассмотрим расстояние от точки $A(a; a)$ до точки $M\left(x; \dfrac{1}{x}\right)$:

$$\rho(x) = \sqrt{(a-x)^2 + \left(a - \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Очевидно, r — это минимальное значение функции $\rho(x)$. Поэтому мы возведем ρ в квадрат и продифференцируем:

$$\left(\rho^2(x)\right)' = 2(x-a) + 2\left(a - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Приравняем производную нулю:

$$x - a + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0,$$
$$x^4 - ax^3 + ax - 1 = 0,$$
$$(x^2-1)(x^2 - ax + 1) = 0.$$

Значения $x = \pm 1$ соответствуют точкам $(1; 1)$ и $(-1; -1)$ гиперболы. Для нахождения r осталось решить квадратное уравнение $x^2 - ax +$

$1 = 0$ по стандартной формуле: $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2a}$. Значит, при $|a| < 2$ решений нет, и r — это расстояние от точки A до ближайшей из точек $(1;1)$ и $(-1;-1)$. А при $|a| \geq 2$ величину r можно найти, подставив значение x в формулу для $\rho(x)$.

Впрочем, вычисления можно упростить. А именно,

$$r = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + a^2 - \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2}}$$
$$= \sqrt{2a^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}.$$

Разделив обе части уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$ на x, находим

$$x + \frac{1}{x} = a,$$

откуда

$$r = \sqrt{2a^2 - 2a^2 + a^2 - 2} = \sqrt{a^2-2}.$$

Есть и другой способ. Запишем уравнение окружности с центром $A(a;a)$ и радиусом r:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2.$$

Подставив $y = 1/x$, раскрыв скобки и выполнив замену $t = x + \dfrac{1}{x}$, получим

$$t^2 - 2at + 2a^2 - 2 - r^2 = 0.$$

Мы должны выяснить, при каких $a > 1$ величину r можно выбрать так, чтобы было выполнено неравенство $r < (a-1)\sqrt{2}$ и квадратное уравнение $t^2 - 2at + 2a^2 - 2 = r^2$ имело на луче $(2;+\infty)$ единственный корень t.

Это — типичная “задача с параметром”. Не будем расписывать подробно ее решение, отметим только главное: должен равняться нулю дискриминант, т.е.

$$4a^2 - 4(2a^2 - 2 - r^2) = 0,$$

откуда $r = \sqrt{a^2-2}$. При этом значении r имеем $t = a$. А поскольку $t = x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, то должно быть выполнено неравенство $a \geq 2$. Итак, расстояние r от точки $A(a;a)$ до гиперболы равно $|a-1|\sqrt{2}$ при $0 < a \leq 2$ и равно $\sqrt{a^2-2}$ при $a \geq 2$. (График функции $r(a)$ изображен на рисунке 10.)

Упражнения

1. Пусть a и k — положительные числа. Найти расстояние от точки а) $(a;a)$; б) $(a;-a)$ до гиперболы, заданной уравнением $xy = k$.

2. Найдите $\min\limits_{x^2-y^2=h^2} \left((a-x)^2 + y^2\right)$, где $a \geq h > 0$.

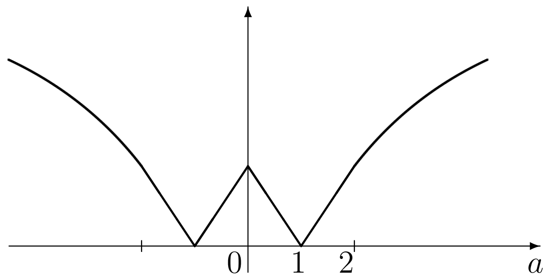

Рис. 10

3. Найдите расстояние от начала координат до множества точек, заданного уравнением $x^2 - axy + y^2 = 1$, где a — данное число. (*Замечание.* При $|a| < 2$ уравнение $x^2 - axy + y^2 = 1$ задает эллипс, при $|a| = 2$ — пару параллельных прямых, а при $|a| > 2$ — гиперболу.)

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Перпендикуляр, опущенный из точки на параболу

Расстояние от точки до прямой, как известно, измеряется по перпендикуляру. Для расстояния от точки до кривой это не всегда так: перпендикуляр[2] не всегда единственен (рис. 11), он не всегда является кратчайшим из отрезков, соединяющих данную точку с точками кривой — бывает даже, что перпендикуляр является наидлиннейшим из таких отрезков (рис. 12).

Как вы помните, мы решили задачу о расстоянии от точки $(0; b)$ до параболы $y = kx^2$. Если точка $(0; b)$ лежит достаточно низко (точнее, если $b \leq 1/)2k)$), то ближайшая к ней точка параболы — начало координат. Если же $b > 1/(2k)$, то это не так: окружность радиусом b с центром $(0; b)$ пересекает параболу более чем в одной точке (рис. 13); из точки $(0; b)$ можно опустить на параболу не один, а три перпендикуляра.

Полукубическая парабола — эволюта параболы

Теперь выясним, из каких точек сколько перпендикуляров можно провести к параболе $y = x^2$. (Читатель, если пожелает,легко проведет вычисления для параболы $y = kx^2$.) Для этого рассмотрим квадрат расстояния от точки $(a; b)$ до точки $(x; x^2)$ — функцию

$$f^2(x) = (x-a)^2 + (x^2 - b)^2 = x^4 + (1-2b)x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

[2] *Перпендикуляр (иначе говоря, нормаль) к кривой в данной точке — это прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная касательной, проведенной в данной точке.*

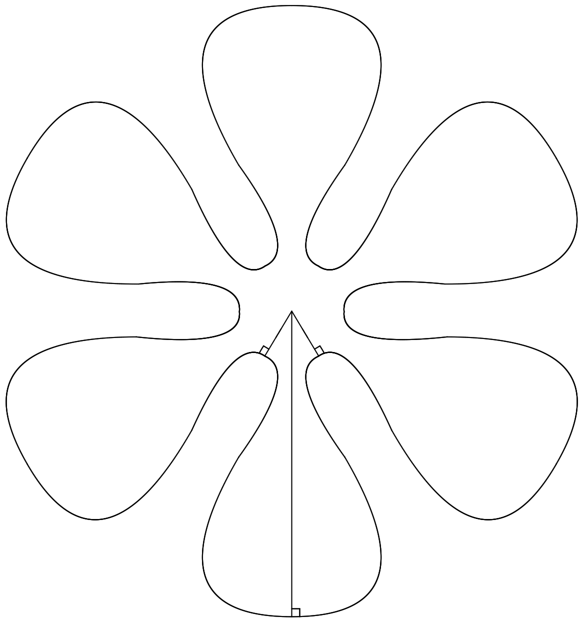

Рис. 11

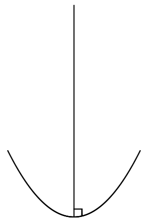

Рис. 12

и продифференцируем ее

$$\big(f^2(x)\big)' = 4x^3 + 2(1-2b)x - 2a.$$

Минимальное значение функция $f^2(x)$ принимает в одной из точек, где производная обращается в ноль. Если уравнение

$$4x^3 + 2(1-2b)x - 2a = 0$$

имеет единственное решение, то это и есть точка минимума, а перпендикуляр единственен. Если же решений больше одного, то перпендикуляров из точки $(a;b)$ на параболу можно опустить не один, а два или три.

Интересно, когда перпедикуляр один, когда их два, а когда три? Ответить на этот вопрос нетрудно. Если $1-2b \geq 0$, то функция

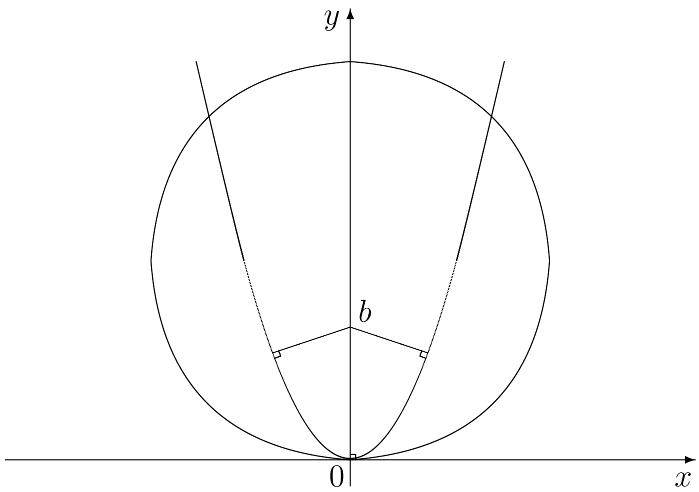

Рис. 13

$4x^3 + 2(1-2b)x$ является возрастающей и каждое свое значение принимает один раз. Если же $1-2b<0$, то график функции $4x^3 + 2(1-2b)x$ выглядит примерно так, как показано на рисунке 14.

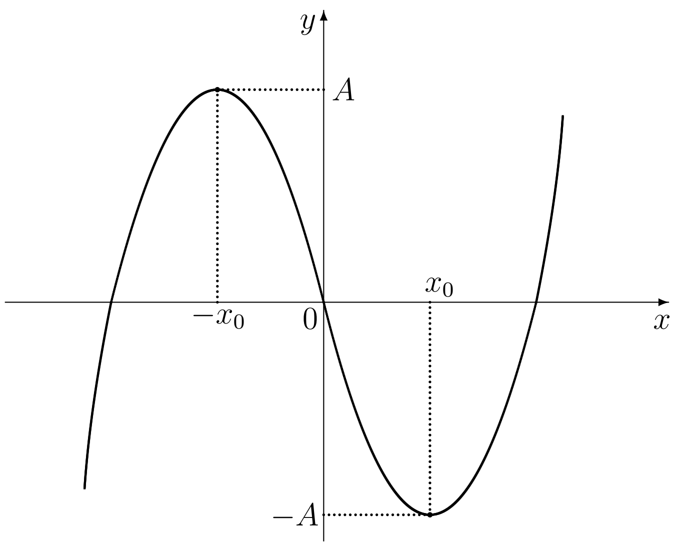

Рис. 14

Найти точки локального максимума и минимума этой функции легко: ее производная равна

$$(4x^3 + 2(1-2b)x)' = 12x^2 + 2(1-2b)$$

и обращается в ноль в точках $\pm x_0 = \pm\sqrt{(2b-1)/6}$. Вычислив

$$4x_0^3 + 2(1-2b)x_0 = \mp\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(2b-1)^{3/2}$$

и обозначив для краткости $A = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(2b-1)^{3/2}$, мы получаем ответ: из точки $(a;b)$, где $b > 1/2$, на параболу $y = x^2$ можно опустить:

- один перпендикуляр, если $|a| > A$;
- два перпендикуляра, если $a = \pm A$;
- три перпендикуляра, если $|a| < A$;

Чтобы сделать этот ответ наглядным, рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$x^2 = \frac{8}{27}(2y-1)^3$$

— так называемую полукубическую параболу (рис. 15).

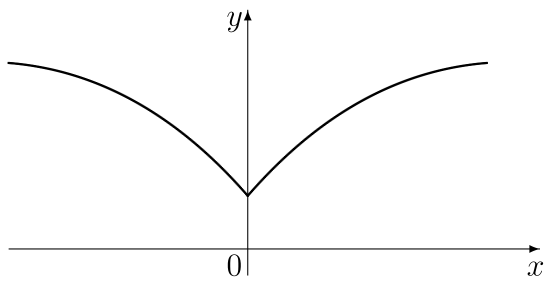

Рис. 15

Тогда из точек, расположенных выше этой кривой, на параболу $y = x^2$ можно опустить три перпендикуляра, из точек самой этой кривой, кроме ее “клюва” $(0;1/2)$ — два, а из клюва и из точек, лежащих ниже полукубической параболы — один перпендикуляр.

Такую полукубическую параболу называют *эволютой* параболы, а саму параболу — *эвольвентой* этой полукубической параболы. Эти термины ввел в 1673 году Христиан Гюйгенс (1629–1695). Мы не хотим отвлекаться на эти (хотя и весьма интересные!) объекты. Ограничимся тем, что если ветвь полукубической параболы изготовить из жесткого материала и в одной из ее точек забить гвоздь, на котором закрепить нить такой длины, что конец ее при обтекании полукубической параболы достигнет вершины исходной параболы, то конец натянутой нити при обратном движении будет описывать исходную параболу (рис. 16).

Упражнение 5. а) От каждой точки параболы $y = x^2$ отложим во внешнюю сторону по перпендикулярному отрезку единичной длины. Является ли полученная таким образом кривая параболой?

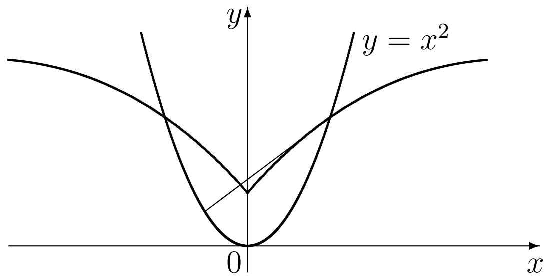

Рис. 16

б) От каждой точки параболы $y = x^2$ отложим во внутреннюю сторону по перпендикуляру отрезок длины $1/2$. Убедитесь (не обязательно строго доказывать это, а хотя бы на интуитивном уровне), что полученная таким образом кривая не гладкая в точке $(0; 0)$, а имеет "острие" в этой точке.

в) От каждой точки параболы $y = x^2$ отложим во внутреннюю сторону по перпендикуляру отрезок длины 2. Нарисуйте эскиз полученной кривой.

Семейства прямых и огибающие

В каждой точке параболы $y = x^2$ восставим пепендикуляр. Получим семейство прямых (рис. 17).

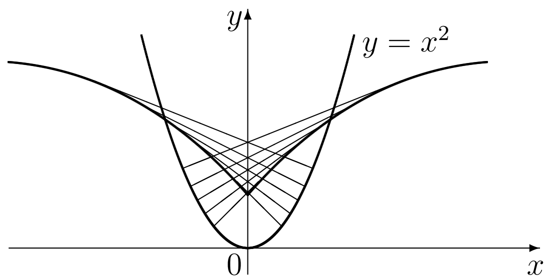

Рис. 17

Оказывается, все эти прямые касаются полукубической параболы, только что найденной нами.

Если вместо параболы рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и восставим перпендикуляры во всех его точках, то получим семейство прямых, которые касаются красивой кривой с четырьмя остриями — астроиды (рис. 18), уравнение которой мы вскоре найдем. (А пока выписывать его не будем.)

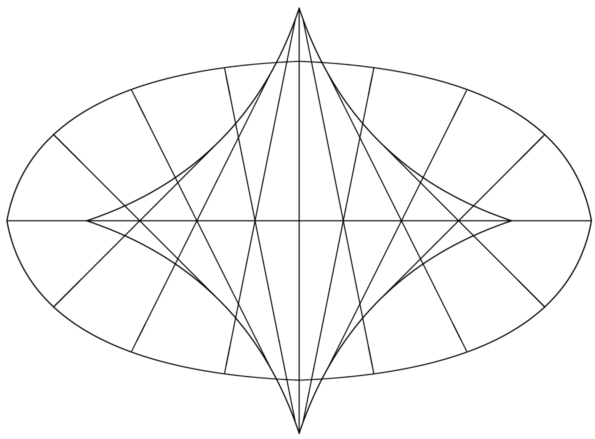

Рис. 18

Вообще, давайте научимся находить огибающие для разных семейств прямых. На рисунке 19 изображена гладкая кривая.

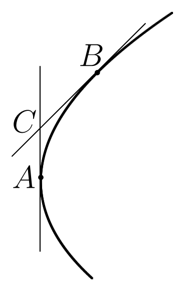

Рис. 19

Точки A и B лежат на кривой, а точка C является пересечением касательных, проведенных в точках A и B. Если точка B будет двигаться по кривой к точке A, то C будет тоже стремиться к точке A. (Разумеется, не следует относиться к вышесказанному, как к точной теореме. Но надеемся, что идею вы уловили. А "строгость навести" будет несложно, когда изучите курс математического анализа.)

Начнем с перпендикуляров к параболе. Поскольку

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

и поскольку произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно -1, то угловой коэффициент перпендикуляра, восстановленного к параболе в точке $(a; a^2)$, равен

$-1/(2a)$. Значит, этот перпендикуляр задан уравнением

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2,$$

которое можно записать в виде

$$2ay = -x + a + 2a^3.$$

Чтобы найти огибающую, рассмотрим аналогичное уравнение, в котором параметр a заменен на $a + \varepsilon$, причем в дальнейшем мы устремим ε к нулю. (Хорошенько обдумайте эту идею! Чтобы найти огибающую, мы рассматриваем "близкие" прямые, находим точку их пересечения и переходим к пределу, превращая "близкие" прямые в, если позволено так выразиться, "бесконечно близкие".) Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2ay = -x + a + 2a^3, \\ 2(a+\varepsilon)y = -x + a + \varepsilon + 2(a+\varepsilon)^3. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$2\varepsilon y = \varepsilon + 6a^2\varepsilon + 6a\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3,$$

откуда $y = \frac{1}{2} + 3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2$. Устремив ε к нулю, находим

$$y = \frac{1}{2} + 3a^2.$$

Подставив это значение в первое уравнение системы, имеем

$$a + 6a^3 = -x + a + 2a^3,$$

Откуда

$$x = -4a^3.$$

Итак, $(x; y) = \left(-4a^3; \frac{1}{2} + 3a^2\right)$. Мы нашли огибающую для семейства нормалей (т.е. перпендикуляров) к параболе.

Упражнения

6. Убедитесь, что найденная огибающая — та самая полукубическая парабола $x^2 = \frac{8}{27}(2y-1)^3$.

7. Прямая, заданная уравнением $2ay = -x + a + 2a^3$, где $a \neq 0$, касается в точке $\left(-4a^3; \frac{1}{2} + 3a^2\right)$ кривой, заданной уравнением $y = \frac{3}{4}x^{2/3} + \frac{1}{2}$. Докажите это.

8. Найдите уравнение огибающей семейства нормалей параболы $y = kx^2$, где $k > 0$.

Астроида

Одна из самых запоминающихся огибающих получается, если спросить какое множество точек заметает отрезок данной длины, концы которого движутся по сторонам данного прямого угла (рис. 20).

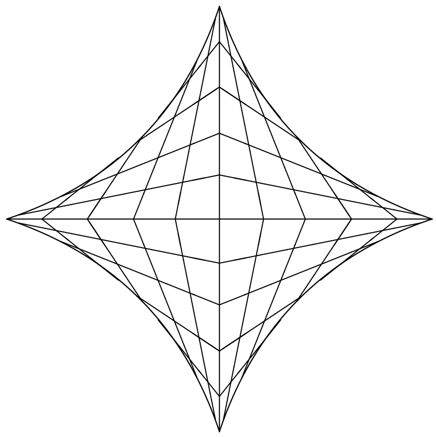

Рис. 20

Рассмотрим отрезок AB единичной длины, концы которого лежат на осях координат (рис. 21).

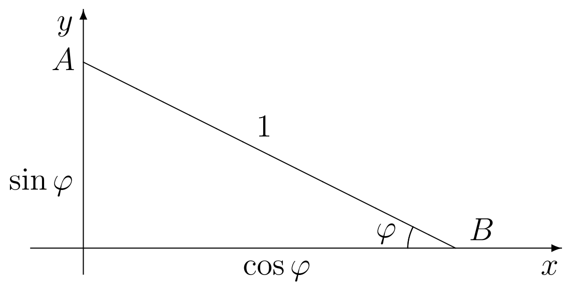

Рис. 21

Уравнение прямой AB написать легко: кто-то наизусть помнит так называемое "уравнение прямой в отрезках"

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = 1,$$

кто-то напишет уравнение в виде

$$y = \sin\varphi - x\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Рассмотрим "близкую" прямую, заданную уравнением

$$y = \sin\psi - x\,\mathrm{tg}\,\psi.$$

(Вскоре мы устремим ψ к φ, а пока $\psi \neq \varphi$.) Найдем точку пересечения этих двух прямых:

$$\sin\varphi - x\operatorname{tg}\varphi = \sin\psi - x\operatorname{tg}\psi,$$

откуда

$$x = \frac{\sin\psi - \sin\varphi}{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sin\psi - \sin\varphi}{\psi - \varphi} : \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{\psi - \varphi}.$$

Вспомнив производные синуса и тангенса, получаем: при $\psi \to \varphi$ величина x стремиться к $\cos^3\varphi$. Зная x, легко найти

$$y = \sin\varphi - \cos^3\varphi\operatorname{tg}\varphi = \sin^3\varphi.$$

Итак, $(x, y) = \big(\cos^3\varphi, \sin^3\varphi\big)$. Мы получили параметрическим образом заданную кривую, у которой есть название: *астроида*. Очевидно,

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

(Окончание следует)

В предыдущем номере журнала течение этой статьи прервалось в том месте, где было выведено уравнение астроиды:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1.$$

Вот несколько упражнений.

Упражнения

9. Найдите длину кратчайшего отрезка с концами на осях координат, проходящего через точку $(a; b)$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$

10. Канал, берега которого — параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причем до поворота его ширина равна a, после поворота — b (рис. 22). При каких d через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины d?

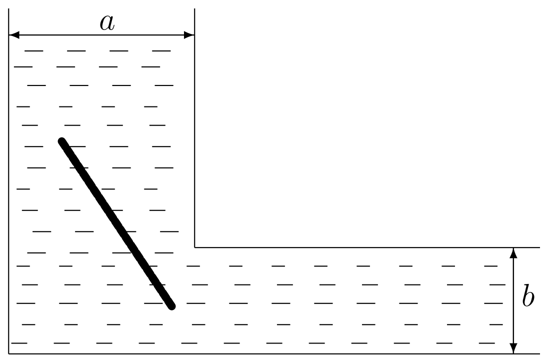

Рис. 22

11. Рассмотрим круг диаметром 1, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2. Нарисуем траекторию какой-то точки катящейся окружности (рис. 23). Докажите, что получится астроида.

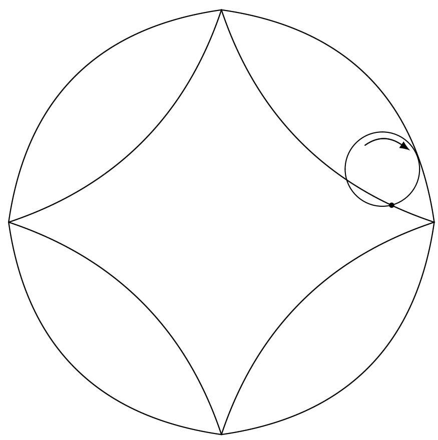

Рис. 23

12. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в круг диаметра 3, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2 (рис. 24). Докажите, что точки A, B и C движутся по одной и той же кривой — астроиде.

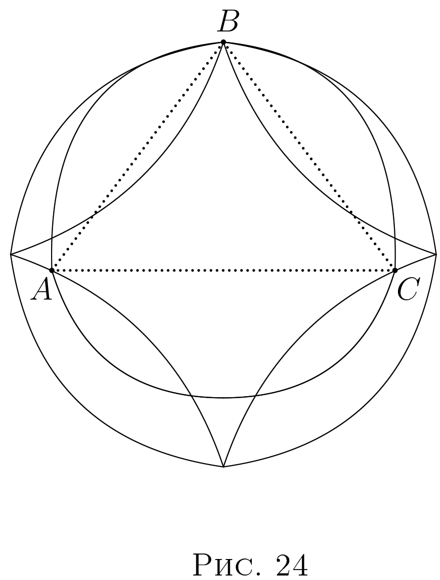

Рис. 24

Нормали к эллипсу

Очень красива огибающая для семейства нормалей к эллипсу. Эллипс, как известно, можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нормаль к эллипсу найти легко, если эллипс задать параметрически:

$$(x;y)=(a\cos\varphi;b\sin\varphi).$$

(Это аналогично тому, как единичную окружность можно задать и уравнением $x^2+y^2=1$, и параметрически: $(x;y)=(\cos\varphi;\sin\varphi)$. Обдумайте это, если вы не встречались с этим раньше!)

Итак, x и y — функции параметра φ). Вычислим производные: $(x';y')=(-a\sin\varphi;b\cos\varphi)$. Если отложить вектор с такими координатами от точки $(x;y)$, то получим вектор, касающийся эллипса. (Как всякий вектор скорости, сказал бы физик.)

Легко проверить, что если вектор $(\alpha;\beta)$ отличен от нулевого вектора и перпендикулярен прямой l, проходящей через точку с координатами $(m;n)$, то прямую l можно задать уравнением $\alpha x+\beta y=\alpha m+\beta n$. (Докажите это!)

Поэтому уравнение нормали можно записать в виде

$$yb\cos\varphi-xa\sin\varphi=(b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Теперь мы рассмотрим близкую к φ величину ψ (чтобы в конце концов перейти к пределу $\psi\to\varphi$) и составим систему уравнений

$$\begin{cases}yb\cos\varphi-xa\sin\varphi=(b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi,\\ yb\cos\psi-xa\sin\psi=(b^2-a^2)\sin\psi\cos\psi.\end{cases}$$

Домножив первое уравнение на $\sin\psi$, второе — на $\sin\varphi$ и вычтя первое уравнение из второго, получим

$$\begin{aligned}&yb(\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi)\\&\qquad=(a^2-b^2)(\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi-\sin\psi\cos\psi\sin\varphi),\end{aligned}$$

откуда

$$yb\sin(\varphi-\psi)=(a^2-b^2)\sin\varphi\sin\psi(\cos\varphi-\cos\psi).$$

Чтобы удобнее было перейти к пределу, перепишем это равенство следующим образом:

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin\varphi\sin\psi\frac{\cos\varphi-\cos\psi}{\varphi-\psi}\cdot\frac{\varphi-\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Последний множитель стремится к 1 (это так называемый первый замечательный предел). Предпоследний множитель стремится к производной косинуса в точке φ. Значит, в пределе (при $\psi \to \varphi$)) получаем

$$y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^2 \varphi(-\sin \varphi),$$

т.е. $y = \dfrac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi$. Аналогично, $x = \dfrac{b^2 - a^2}{b} \cos^3 \varphi$. (Проверьте это!)

Итак, мы нашли огибающую:

$$(x; y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{b} \cos^3 \varphi; \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi\right).$$

Легко убедиться, что кривая, заданная этим параметрическим уравнением, может быть задана уравнением без параметра:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (b^2 - a^2)^{2/3}.$$

Эту кривую тоже называют астроидой.

Упражнения

13. Докажите, что прямая, заданная уравнением $yb \cos \varphi - xa \sin \varphi = (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi$, касается в точке

$$\left(\frac{b^2 - a^2}{b} \cos^3 \varphi; \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi\right)$$

кривой, заданной уравнением $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (b^2 - a^2)^{2/3}$.

14. Если $a^2 \neq b^2$, то из точек астроиды $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (b^2 - a^2)^{2/3}$, кроме вершин четырех ее “клювов”, к эллипсу можно провести три перпендикуляра, из точек внешней области и из вершин “клювов” — два, а из точек внутренней области — четыре перпендикуляра. Докажите это.

15. Нарисуйте, как выглядит огибающая семейства нормалей к гиперболе, заданной уравнением $xy = 1$.

16. Огибающей для семейства нормалей к циклоиде — кривой, заданной параметрически формулами $x = \pi rt - r \sin t$ и $y = r - r \cos t$, где $r > 0$, — является циклоида, сдвинутая на $2r$ вниз и на πr вправо. Докажите это.

Вишенка в бокале

Завершит подготовку к решению задачи о максицилиндре задача, которую в 1994 году предложил Н.Б.Васильев одиннадцатиклассникам — участникам Московской математической олимпиады:

Задача. *Вишенка имеет форму шара радиуса r. Внутренняя поверхность бокала получена вращением кривой $z = x^4$ вокруг оси аппликат. Найдите наибольшее возможное r, при котором вишенка может лежать в бокале и касаться его поверхности в начале координат.*

Решение. Рассмотрим плоскую задачу. Запишем уравнение окружности радиуса r с центром в точке $(0;r)$:

$$x^2+(y-r)^2=r^2,$$

т.е. $x^2-2ry+y^2=0$. Эта окружность и график $y=x^4$ должны иметь лишь одну общую точку — начало координат. Подставим значение y в уравнение:

$$x^2-2rx^4+x^8=0.$$

Значит, $x=0$ или

$$x^6-2rx^2+1=0.$$

Значению $x=0$ соответствует начало координат. Чтобы вишенка касалась дна бокала, последнее уравнение не должно иметь корней. (Разберитесь в этом самостоятельно!) Записав его в виде

$$r=\frac{x^6+1}{2x^2}$$

и построив график функции $y=\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{2x^2}$ (рис. 25), видим, что задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции.

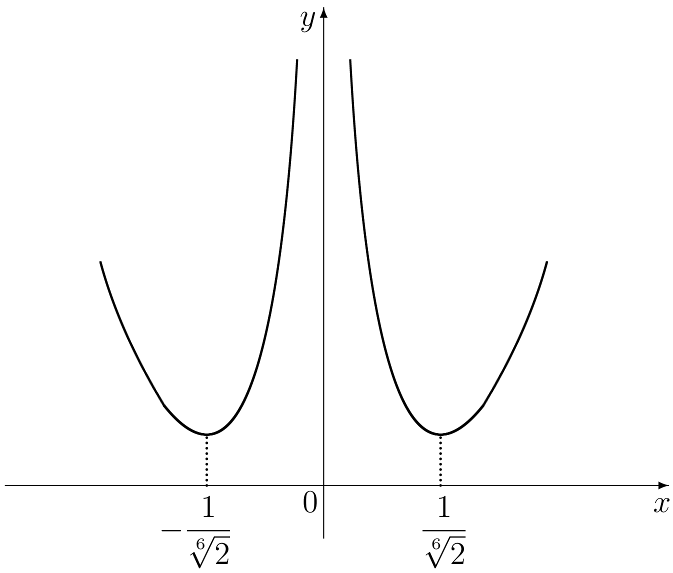

Рис. 25

Дифференцируем:

$$\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2x^2}\right)'=2x^3-\frac{1}{x^3},$$

так что производная обращается в ноль в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$; наименьшее значение функции равно

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^6 + 1}{2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Это и есть максимальный радиус вишенки.

Есть и другой способ решения задачи о вишенки. Для положительного числа r рассмотрим квадрат расстояния от точки $(0; r)$ до точки $(x; x^4)$ и продифференцируем полученную функцию:

$$f(x) = x^2 + (x^4 - r)^2,$$
$$f'(x) = 2x + 8x^3(x^4 - r).$$

Производная равна нулю, если $r = 0$ или

$$4x^6 - 4rx^2 + 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$r = x^4 + \frac{1}{4x^2}.$$

Чтобы вишенка помещалась в бокал, должно быть выполнено неравенство

$$f(x) \geq r^2,$$

т.е.

$$x^2 + \left(x^4 - \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)\right)^2 \geq \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)^2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + \frac{1}{16x^4} \geq x^8 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16x^4},$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} \geq x^8.$$

Значит, $|x| \leq \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$. Дальнейшие рассуждения (при желании) читатель легко проведет самостоятельно. (Полезно рассмотреть график функции $y = x^4 + \frac{1}{4x^2}$, найти точку минимума $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и понять, что значениям $x \geq 1/\sqrt{2}$ соответствуют точки локального минимума, а значениям $x < 1/\sqrt{2}$ — точки локального максимума функции $f(x)$.)

Решение задачи о лежачем цилиндре

Тренировка закончена. Пора заняться давно обещанным делом — в данный конус (шалаш) радиуса R и высоты H вписать лежачий цилиндр (бревно) максимального объема. Поместим начало координат в центр основания конуса, а ось Oz направим в вершину конуса. Тогда для любой точки $(x; y; z)$ боковой поверхности конуса имеем:

$$\frac{H}{R} = \frac{H - z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Обозначив $k = H/R$, получаем

$$k(x^2 + y^2) = (H - z)^2.$$

Несложно записать и уравнение окружности радиуса r с центром $(x; 0; r)$, которая ограничивает основание “лежачего” цилиндра:

$$y^2 + (z - r)^2 = r^2,$$

т.е. $y^2 = 2rz - z^2$. Значит, координаты точки пересечения этой окружности с боковой поверхностью конуса удовлетворяют уравнению

$$k(x^2 + 2rz - z^2) = (H - z)^2.$$

Как помните, есть два случая: при достаточно больших x величина r маленькая и окружность касается боковой поверхности в точке $(x; 0; k(R - x))$, а при маленьких x касание происходит не в одной точке, а в двух. Рассмотрим эти случаи по очереди.

В первом случае $2r = k(R - x)$ и

$$V = \pi \cdot 2x \cdot \left(\frac{k(R - x)}{2}\right)^2 = \pi k^2 x(R - x)^2/2.$$

Производную функции $f(x) = x(R - x)^2$ мы уже вычисляли. И нулю ее уже приравнивали. Поэтому мы знаем, что функция f на интервале $(0, R)$ имеет максимум в точке $R/3$. Если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в одной точке, то *среди всех лежачих цилиндров* максимальный объем имеет тот, высота которого равна $2x = 2R/3$, радиус основания равен $r = H/3$, а объем равен

$$V = 2\pi H^2 R/27.$$

Обратите особое внимание на слова “среди всех лежачих цилиндров”. Не среди “всех цилиндров первого случая”, а среди всех! Дело в том, что и в первом, и во втором случае $r \geq k(R - x)/2$ и поэтому $V \leq \pi k^2 x(R - x)^2/2$. (Обдумайте это!)

А если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, то мы вынуждены разбирать второй случай. Уравнение

$$k(x^2 + 2rz - z^2) = (H - z)^2$$

можно записать в виде

$$z^2(1+k^2) - 2(H + rk^2)z + (H^2 - k^2x^2) = 0.$$

Окружность касается боковой поверхности, когда это квадратное уравнение имеет кратный корень, т.е. когда его дискриминант D равен нулю. (Продумайте, почему!) Итак,

$$\frac{D}{4} = (kR + k^2r)^2 - (1+k^2)(k^2R^2 - k^2x^2) = 0,$$

откуда

$$(R + kr)^2 = (1+k^2)(R^2 - x^2)$$

и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R}{k}.$$

Если дискриминант уравнения равен нулю, то найти его корень легко: $z = (H + rk^2)/(1+k^2)$. Разумеется, должно быть выполнено неравенство $0 \le y^2 = 2rz - z^2$, т.е. $z \le 2r$. Подставив в это неравенство только что найденные значения z и r и поупражнявшись в алгебраических преобразованиях, получим в конце концов

$$x \le \frac{k^2R}{2+k^2}.$$

Обозначив для краткости $d = k^2R/(2+k^2)$, мы видим, что при $x \in [d, R)$ окружность касается боковой поверхности конуса одной точкой, а при $x \in (0, d)$ — двумя. Неравенство

$$d \le \frac{R}{3}$$

выполнено, как легко проверить, при $k \le 1$. Поэтому мы уже нашли ответ ($V = 2\pi H^2R/27$) при $k \le 1$ (т.е. при $H \le R$).

Осталось разобрать случай $k > 1$. Когда окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, объем цилиндра равен

$$V = 2\pi x \left(\frac{\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R}{k}\right)^2.$$

Продифференцируем функцию

$$f(x) = x\left(\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R\right)^2$$

и приравняем производную к нулю:

$$\left(\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R\right)^2 - 2\frac{x^2(1+k^2)}{\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)}}\left(\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R\right) = 0,$$

откуда

$$(1+k^2)(R^2-x^2) - R\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} = 2x^2(1+k^2),$$

$$(1+k^2)(R^2-3x^2) = R\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)}, \qquad (*)$$

$$(1+k^2)(R^2-3x^2)^2 = R^2(R^2-x^2),$$

$$9(k^2+1)x^4 - (6k^2R^2+5R^2)x^2 + k^2R^4 = 0,$$

$$x^2 = R^2\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)}.$$

Если в последней формуле взять знак плюс, то вследствие неравенства $\dfrac{6k^2+5+\sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)} > \dfrac{1}{3}$ получаем, что в правой части формулы $(*)$ стоит отрицательное число, а в левой — положительное. Значит, надо брать знак минус.

Как выглядит график функции $V(x)$? Поскольку функция $r(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $(0, R)$, в том числе в точке $x = d$, то функция $V(x)$ тоже всюду дифференцируема на интервале $(0, R)$. Легко понять, что функция не может иметь график вроде изображенного на рисунке 26, а имеет единственную точку максимума (рис. 27).

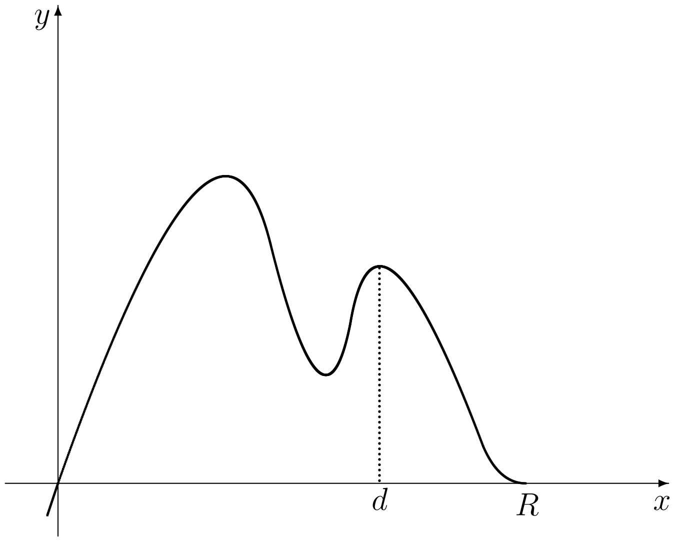

Рис. 26

(Впрочем, можно обойтись и без апелляции к рисункам 26 и 27 и дифференцируемости функции $V(x)$. А именно, при $k > 1$ имеем $\dfrac{R}{3} < d$ и, как можно доказать, $R\sqrt{\dfrac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)}} < d$. Поэтому функция $V(x)$ на $(0, d)$ имеет единственную точку максимума, а на $d, R)$ монотонно убывает.)

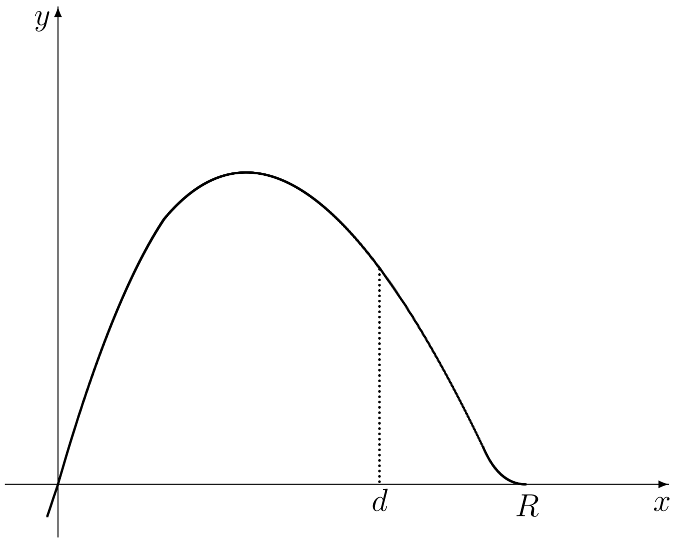

Рис. 27

Таким образом, при $k \geq 1$ максимум объема достигается при

$$x = R\sqrt{\frac{6k^2 + 5 - \sqrt{25 + 24k^2}}{18(k^2+1)}}.$$

Теперь легко выписать ответ. При $H \leq R$ максимальный объем лежачего цилиндра равен $\dfrac{2}{27}\pi R H^2$, а при $R \leq H$ максимальный объем V равен

$$\frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{12H^2 + 13R^2 + R\sqrt{24H^2+25R^2}} - 3\sqrt{2}R\right)^2}{9H\sqrt{6H^2 + 5R^2 + R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Поскольку

$$12H^2 + 13R^2 + R\sqrt{24H^2+25R^2} = \frac{\left(\sqrt{24H^2+25R^2} + R\right)^2}{2},$$

последнюю формулу можно упростить:

$$V = \frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{24H^2+25R^2} - 5R\right)^2}{18H\sqrt{6H^2 + 5R^2 + R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Задача о лежачем цилиндре решена!

Упражнение 17. Найдите максимально возможный объем, высоту и радиус основания лежачего цилиндра, вписанного в данный стоячий цилиндр, если радиус основания стоячего цилиндра равен R, а высота не меньше $2R\sqrt{2/3}$.

Что лучше — лежать или стоять?

Впишем в данный конус лежачий и стоячий цилиндры максимально возможных объемов. Интересно, какой будет больше?

При $H \leq R$ ответ на этот вопрос получить легко:

$$\frac{2}{27}\pi RH^2 \leq \frac{2}{27}\pi RrH = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{27}\pi R^2 H,$$

так что объем лежачего бревна как минимум вдвое меньше объема максимального стоячего бревна.

При $H \geq R$ отношение объемов равно

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\left(\sqrt{24k^2+25}-5\right)^2}{k^2\sqrt{6k^2+5+\sqrt{24k^2+25}}},$$

где $k = H/R$.

Упражнение 18. Докажите, что при $H \geq R$ отношение максимальных объемов лежачего и стоячего цилиндров не превосходит $2\sqrt{2}/3$, причем значение $2\sqrt{2}/3$ достигается при $k = \sqrt{6}$.

Не бревно для шалаша, а шалаш для бревна

Интересно, а если не в шалаш засовывать максимальное бревно, а наоборот, строить шалаш для бревна? Другими словами, поставим задачу: *описать конус вокруг цилиндра высоты $2h$ и радиуса основания r так, чтобы образующая цилиндра была параллельна плоскости основания конуса, а объем конуса был минимальным.*

Мы приведем только краткий набросок решения, оставив часть вычислений и обоснований читателю. Вспомним выведенные выше формулы, не забыв заменить k на H/R и x на h. Имеем:

$$2r = H(R-h)/R$$

при $h \in [d, R]$, т.е. при

$$h \geq \frac{RH^2}{2R^2+H^2};$$

далее,

$$\left(R + \frac{H}{R} \cdot r\right)^2 = \left(1 + \frac{H^2}{R^2}\right)(R^2 - h^2)$$

при $h \leq RH^2/(2R^2+H^2)$.

В случае равенства $h = d$ имеем

$$2r = \frac{H(R-h)}{R} = H\left(1 - \frac{h}{R}\right) = H\left(1 - \frac{H^2}{2R^2+H^2}\right) = \frac{2HR}{2R^2+H^2};$$

значит,

$$\frac{h}{R} = \frac{HR^2}{RH^2} = \frac{H}{R},$$

так что $R = H \cdot \dfrac{h}{R}$. Тогда, поскольку $h = d$, находим

$$h = \frac{RH^2}{2R^2 + H^2} = \frac{H \cdot \dfrac{r}{h} \cdot H^2}{2H^2 \cdot \dfrac{r^2}{h^2} + H^2} = \frac{Hrh}{2r^2 + h^2},$$

откуда

$$H = \frac{2r^2 + h^2}{r} = 2r + \frac{h^2}{r}.$$

Итак,

$$R = \begin{cases} \dfrac{hH}{H - 2r}, & \text{если } 2r < H \le 2r + \dfrac{h^2}{r}; \\ \dfrac{H\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{H^2 - 2rH - h^2}}, & \text{если } H \ge 2r + \dfrac{h^2}{r}. \end{cases}$$

Утроенный объем конуса равен

$$3V(H) = HR^2.$$

Поэтому надо рассмотреть две функции: $f(H) = \dfrac{H^3h^2}{(H - 2r)^2}$ и $g(H) = \dfrac{H^2(r^2 + h^2)}{H^2 - 2rH - h^2}$. Производная первой из них равна нулю при $H = 3r$. А производная второй обращается в ноль, если

$$H^2 - 4rH - 3h^2 = 0.$$

На основании этого можно получить ответ: минимальный объем конуса равен

$$\frac{9\pi rh^2}{2} \text{ при } h \ge 2r$$

и

$$\frac{\pi(r^2 + h^2)\left(2r + \sqrt{4r^2 + 3h^2}\right)^3}{6\left((h^2 + 2r^2 + r\sqrt{4r^2 + 3h^2}\right)} \text{ при } h \le 2r.$$

Упражнение 19. Рассмотрим конус и впишем в него а) стоячий; б) лежачий цилиндр максимального объема. Верно ли, что для полученного цилиндра исходный конус будет конусом минимального объема (из всех конусов с той же осью и той же плоскостью основания)?

Задачи для размышления

Задача о минимальном объеме конуса решена. Тем не менее, остался ряд нерешенных задач. Если вам удастся решить одну из следующих (или аналогичных им) задач — сообщите об этом в редакцию журнала!

1. Цилиндр объема V расположен в конусе объема W. Верно ли, что $V/W \le 2/9$?

2. Дан “лежащий на боку” цилиндр, радиус основания которого равен r, а высота — h. Найдите описанный “стоячий” конус, площадь боковой поверхности которого минимальная из возможных.

3. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в цилиндре, радиус основания которого равен r, а высота — h.

4. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в конусе, радиус основания которого равен r, а высота — h, если требуется, чтобы а) вершина внутреннего конуса лежала в центре основания внешнего конуса; б) одна из образующих внутреннего конуса лежала на основании внешнего конуса.

5. Найдите наибольший радиус круга, который можно разместить в конусе с радиусом основания R и высотой H.