УДК 517.5

ЗАДАЧА КАРАТЕОДОРИ–ФЕЙЕРА И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. Задача Каратеодори–Фейера в пространствах Харди H_p сведена к решению систем определенного вида. Через решение систем того же типа выражен оптимальный метод восстановления производной любого порядка функции из H_p по ее значениям в некотором наборе точек. Аналогичная задача восстановления рассмотрена в пространстве ограниченных гармонических функций h_∞.

Введение

Пространством Харди H_p называется совокупность всех функций $f(z)$, аналитических внутри единичного круга $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, таких, что

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала

$$L_\xi^\lambda f := \sum_{j=\nu}^{\nu+m} \frac{\lambda_j}{j!} f^{(j)}(\xi),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_{\nu+m} \ne 0$, $\nu \ge 0$, на множестве функций из единичного шара пространства Харди $BH_p := \{f \in H_p : \|f\|_{H_p} \le 1\}$ по значениям информационного оператора

$$If := \bigl\{f(\xi), \dots, f^{(\nu-1)}(\xi), f(z_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(z_n)\bigr\},$$

где $\xi, z_1, \dots, z_n$ — различные точки из D. Под погрешностью оптимального восстановления понимается величина

$$e(\xi, \lambda, I, BH_p) := \inf_{S\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}} \sup_{f\in BH_p} |L_\xi^\lambda f - S(If)|,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

$N := \nu + \sum_{j=1}^{n} \nu_j$, а оптимальным методом восстановления называется метод, на котором достигается нижняя грань.

Из общих результатов относительно задач восстановления (см. [1],[2]) вытекает существование в рассматриваемом случае линейного оптимального метода восстановления и равенство

$$e(\xi, \lambda, I, BH_p) = \sup_{\substack{f \in BH_p \\ If=0}} |L_\xi^\lambda f|. \tag{1}$$

Всякая функция $f \in BH_p$, удовлетворяющая условию $If = 0$, может быть представлена в виде

$$f(z) = W_1(z)g(z),$$

где

$$W_1(z) := \left(\frac{z-\xi}{1-\bar{\xi}z}\right)^\nu W(z), \quad W(z) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z-z_j}{1-\overline{z}_j z}\right)^{\nu_j},$$

а $g \in BH_p$. Тем самым экстремальная задача (1) сводится к экстремальной задаче без ограничений

$$\sup_{g \in BH_p} |L_\xi^\mu g|, \tag{2}$$

где $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m)$, а μ_j выражаются через элементы вектора $\lambda = (\lambda_\nu, \dots, \lambda_{\nu+m})$ и производные функции W_1 в точке ξ.

Экстремальным задачам (1), (2) и их обобщениям посвящено много работ, начиная с классической работы Ландау [3] ($p = \infty$, $\xi = 0$, $\mu = (1, \dots, 1)$) (подробнее см. [4]–[7]). Если говорить о задачах восстановления в пространствах H_p, то они стали рассматриваться сравнительно недавно в работах [8], [1] ($p = \infty$, $\nu = m = 0$), [2] ($p = \infty$, $\lambda = (0, 1)$), [9] ($1 \le p < \infty$, $\nu = m = 0$), [10] ($p = 2$, $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$, $n = 1$, $z_1 = 0$), [11] ($1 \le p \le \infty$, $\lambda = (\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$).

Здесь мы рассматриваем общий случай восстановления функционала $L_\xi^\lambda f$ и сводим его фактически к задаче Каратеодори–Фейера, решение которой удается описать через решения систем определенного вида. Рассмотрена также аналогичная задача на единичном шаре из пространства h_∞, являющегося совокупностью гармонических в D функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{h_\infty} := \sup_{z \in D} |u(z)| < \infty.$$

1. Задача Каратеодори–Фейера

В 1911 г. Каратеодори и Фейер [12] исследовали задачу о нахождении среди всех функций

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m + \ldots,$$

аналитических в единичном круге D, при фиксированных коэффициентах $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ той, которая имеет наименьший максимум модуля в D. Рассмотрим задачу такого же типа о нахождении величины

$$\inf \|f\|_{H_p}$$

на множестве функций из H_p, удовлетворяющих условиям

$$f^{(j)}(\xi) = j!c_j, \quad j = 0, \dots, m, \tag{3}$$

где $\xi \in D$, а $c_0, \dots, c_m$ — фиксированные комплексные числа.

Известно (см. [4], [5], [13]), что при всех $1 \le p \le \infty$ среди функций, удовлетворяющих условию (3), существует единственная функция вида

$$f_0(z) = C(1-\overline{\xi}z)^{-2(m+1)/p} \prod_{j=1}^{k} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1-\overline{\alpha}_j z)^{2/p}, \tag{4}$$

где C — некоторая константа, $0 \le k \le m$, $|\alpha_j| < 1$, $j = 1, \dots, k$, и $|\alpha_j| \le 1$, $j = k+1, \dots, m$. Кроме того, эта функция и только она является решением задачи Каратеодори–Фейера с условием (3). (При $p = \infty$ все выражения с p понимаются как предельные значения при $p \to \infty$.)

Будем считать, что $c_0 \ne 0$, так как в противном случае с помощью представления функции f в виде

$$f(z) = \frac{z-\xi}{1-\overline{\xi}z} g(z)$$

задача сводится к аналогичной, но с меньшим числом параметров.

Введем следующие обозначения: $d_j := c_0^{-1} c_j$, $j = 0, \dots, m$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{d_1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{d_{m-1}}{m} & \dfrac{d_{m-2}}{m} & \dots & \dfrac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad \rho := A^{-1} d, \tag{5}$$

$$\gamma_s := (-1)^{s+1} \left[\frac{2}{p} \overline{\xi}^s + \sum_{j=1}^{s} (-1)^j C_s^j \overline{\xi}^{s-j} (1-|\xi|^2)^j \rho_j \right], \quad s = 1, \dots, m;$$

здесь $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$, $d = (d_1, \dots, d_m)^T$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Для того, чтобы функция* (4) *была решением задачи Каратеодори–Фейера с условием* (3) *и* $c_0 \ne 0$, *необходимо и достаточно, чтобы числа*

$$b_j = \frac{\overline{\alpha}_j - \overline{\xi}}{1-\xi\overline{\alpha}_j} \tag{6}$$

являлись решением системы

$$\sum_{j=1}^{k} (\overline{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2}{p} \sum_{j=1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{7}$$

таким, что

$$
(8)\qquad \begin{aligned} &|b_j|<1, \quad j=1,\dots,k,\\ &|b_j|\le 1, \quad j=k+1,\dots,m, \end{aligned} \qquad 0\le k\le m,
$$

а

$$
(9)\qquad C=c_0(1-|\xi|^2)^{2(m+1)/p}\prod_{j=1}^{k}\frac{1-\overline{\alpha}_j\xi}{\xi-\alpha_j}\prod_{j=1}^{m}(1-\overline{\alpha}_j\xi)^{-2/p}.
$$

Доказательство. Пусть функция f_0 вида (4) является решением задачи Каратеодори–Фейера. Равенство (9) вытекает из того, что $f_0(\xi)=c_0$. Докажем, что имеют место равенства (7) для b_j, определенных в (6). Положим

$$
(10)\quad x(z):=\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{z-\alpha_j}+\frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_jz}\right)-\frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_jz} + (m+1)\frac{2}{p}\frac{\overline{\xi}}{1-\overline{\xi}z}.
$$

Из определения $x(z)$ получаем

$$
(11)\qquad f_0^{(r+1)}(\xi)=\sum_{j=0}^{r}C_r^jf_0^{(r-j)}(\xi)x^{(j)}(\xi)
$$

или, учитывая равенства (3),

$$
\frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r}d_{r-j}\frac{x^{(j)}(\xi)}{j!}=d_{r+1}, \quad r=0,\dots,m-1.
$$

Тем самым

$$
\frac{x^{(j)}(\xi)}{j!}=\rho_{j+1}, \quad j=0,\dots,m-1.
$$

С другой стороны, из (10) имеем

$$
\frac{x^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!}=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{(-1)^{r-1}}{(\xi-\alpha_j)^r}+\frac{\overline{\alpha}_j^r}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^r}\right)-\frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\alpha}_j^r}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^r} + (m+1)\frac{2}{p}\frac{\overline{\xi}^r}{(1-|\xi|^2)^r}.
$$

В силу равенства (6)

$$
\frac{1}{\xi-\alpha_j}=-\frac{\overline{b}_j^{-1}+\overline{\xi}}{1-|\xi|^2}, \quad \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j\xi}=\frac{b_j+\overline{\xi}}{1-|\xi|^2},
$$

и, кроме того, имеют место соотношения (8), так как они выполнены для $\alpha_1,\dots,\alpha_m$. Таким образом, для $b_1,\dots,b_m$ справедливы равенства

$$\omega_r := \sum_{j=1}^{k} \left[(\overline{b}_j^{\,-1} + \overline{\xi})^r - (b_j + \overline{\xi})^r \right] + \frac{2}{p} \sum_{j=1}^{m} (b_j + \overline{\xi})^r$$

$$= (m+1)\frac{2}{p}\overline{\xi}^r - (1 - |\xi|^2)^r \rho_r, \quad r = 1, \ldots, m.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{k} (\overline{b}_j^{\,-s} - b_j^s) + \frac{2}{p} \sum_{j=1}^{m} b_j^s = \sum_{j=1}^{k} \left[(\overline{b}_j^{\,-1} + \overline{\xi} - \overline{\xi})^s - (b_j + \overline{\xi} - \overline{\xi})^s \right]$$
$$+ \frac{2}{p} \sum_{j=1}^{m} (b_j + \overline{\xi} - \overline{\xi})^s = \sum_{r=1}^{s} C_s^r (-\overline{\xi})^{s-r} \omega_r + m\frac{2}{p}(-\overline{\xi})^s = \gamma_s. \tag{12}$$

Если теперь $b_1, \ldots, b_m$ — решения системы (7), удовлетворяющие условиям (8), то, определив α_j из равенств (6) и рассмотрев функцию вида (4), проводя рассуждения в обратном порядке, получим из (11)

$$\frac{f_0^{(j)}(\xi)}{f_0(\xi)} = d_j = \frac{c_j}{c_0}, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Выбрав C так, чтобы $f_0(\xi) = c_0$ (это означает, что C определено равенством (9)), получим выполненными условия (3). Теорема доказана. □

Следствие 1. *При всех $1 \le p \le \infty$ и любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{C}$ найдется $0 \le k \le m$, при котором система* (7) *имеет решение, удовлетворяющее условиям* (8). *При этом функция*

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{z - \overline{b}_j}{1 - b_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - b_j z)^{2/p}$$

является решением задачи Каратеодори–Фейера с условиями

$$f^{(j)}(0) = j! d_j f(0), \quad j = 0, \ldots, m,$$

где $d_0 = 1$, а $d_r = -r^{-1} \sum_{j=1}^{r} d_{r-j}\gamma_j$, $r = 1, \ldots, m$.

2. Оптимальное восстановление производных на классе BH_p

Положим $d_j := \lambda_{\nu+m}^{-1} \lambda_{\nu+m-j}$, $j = 1, \ldots, m$, $y(z) := W^{-1}(z) W'(z)$,

$$\gamma_s := (-1)^s \left[\left(m + \nu - 1 + \frac{2}{p} \right) \overline{\xi}^s - \sum_{r=1}^{s} (-1)^r C_s^r \overline{\xi}^{s-r} \right.$$
$$\left. \times (1 - |\xi|^2)^r \left(\frac{y^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!} + \rho_r \right) \right], \quad s = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

где вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$ определен равенствами (5) для вновь определенных $d_1, \dots, d_m$. Заменив в следствии 1 p на сопряженный показатель $1 - p^{-1}$, получим существование $b_1, \dots, b_m$, удовлетворяющих равенствам

$$\sum_{j=1}^{k}(\overline{b}_j^{\,-s} - b_j^s) + \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{14}$$

При $p = 1$ (для системы (7) — $p = \infty$) и $k < m$ доопределим $b_1, \dots, b_k$ произвольными числами $b_{k+1}, \dots, b_m$ такими, что $|b_j| = 1$, $j = k+1, \dots, m$.

Нам удобно считать, что

$$\begin{aligned} &|b_j| \le 1, \quad j = 1, \dots, k,\\ &|b_j| < 1, \quad j = k+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{15}$$

Это всегда возможно сделать, так как при $|b_j| = 1$ $\overline{b}_j^{\,-s} - b_j^s = 0$ (тем самым при $p = 1$ $k = m$). Для так определенных $b_1, \dots, b_m$ положим

$$\alpha_j := \frac{\overline{b}_j + \xi}{1 + \overline{\xi}\overline{b}_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sigma := (m+1)\frac{p-2}{p} - \nu,$$

$$\Psi(z) := \prod_{j=1}^{k}\frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}\prod_{j=1}^{m}(1 - \overline{\alpha}_j z)^{2(p-1)/p},$$

$$C(\xi) := \frac{\lambda_{\nu+m} W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\sigma}}{\Psi(\xi)},$$

$$g(z) := e^{-i\arg C(\xi)} W_1(z)(1 - \overline{\xi}z)^{-2(m+1)/p}\prod_{j=k+1}^{m}\frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}\prod_{j=1}^{m}(1 - \overline{\alpha}_j z)^{2/p}.$$

Теорема 2. *При всех $1 \le p \le \infty$ метод*

$$L_\xi^\lambda f \approx \sum_{r=0}^{\nu-1} c_r(\xi) f^{(r)}(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\nu_j-1} c_{jr}(\xi) f^{(r)}(z_j),$$

где

$$c_r(\xi) := -\frac{C(\xi)}{r!(\nu+m-r)!}\left[\frac{\Psi(z)}{W(z)(1 - \overline{\xi}z)^{\sigma}}\right]^{(\nu+m-r)}\Bigg|_{z=\xi}, \tag{16}$$

$$c_{jr}(\xi) := -\frac{C(\xi)}{r!(\nu_j - r - 1)!}\left[\frac{\Psi(z)(1 - \overline{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1 - \overline{\xi}z)^{\sigma}(z - \xi)^{\nu+m+1}}\right]^{(\nu_j-r-1)}\Bigg|_{z=z_j},$$

$$\omega_j(z) := \prod_{\substack{r=1\\ r\ne j}}^{n}\left(\frac{z - z_r}{1 - \overline{z}_r z}\right)^{\nu_r},$$

является оптимальным методом восстановления, функция $g_0 := g/\|g\|_{H_p}$ *— экстремальная и*

$$e(\xi, \lambda, I, BH_p) = L_\xi^\lambda g_0$$
$$= |C(\xi)| \left(\frac{1}{m!} \left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi}z)^{m+1}} \right]^{(m)} \Bigg|_{z=\xi} \right)^{(p-1)/p}.$$

Доказательство. Пусть $1 \le p < \infty$ и f — произвольная функция из H_p. Положим

$$Jf := |C(\xi)| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} |g(e^{i\theta})|^{p-2} f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Из определения функции g, хорошо известного свойства: при всех $|z| = 1$ и $u \in D$

$$\overline{\frac{z-u}{1-\overline{u}z}} = \frac{1-\overline{u}z}{z-u},$$

а также теоремы Коши о вычетах имеем

$$Jf = C(\xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\Psi(z) f(z)\, dz}{W(z)(1-\overline{\xi}z)^\sigma (z-\xi)^{\nu+m+1}}$$
$$= -\sum_{r=0}^{\nu+m} c_r(\xi) f^{(r)}(\xi) - \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^{\nu_j - 1} c_{jr}(\xi) f^{(r)}(z_j),$$

где $c_r(\xi)$ определены равенством (16) при всех $r = 0, \dots, \nu + m$. Докажем, что

$$c_r(\xi) = -\frac{\lambda_r}{r!}, \quad r = \nu, \dots, \nu + m.$$

Положим $h(z) := \Psi(z) W^{-1}(z)(1-\overline{\xi}z)^{-\sigma}$ и

$$x(z) := \frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{z-\alpha_j} + \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j z} \right) - \frac{2(p-1)}{p} \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j z}$$
$$- y(z) + \sigma \frac{\overline{\xi}}{1-\overline{\xi}z}.$$

Следовательно,

$$\frac{x^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{(-1)^{r-1}}{(\xi-\alpha_j)^r} + \frac{\overline{\alpha}_j^r}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^r} \right) - \frac{2(p-1)}{p} \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\alpha}_j^r}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^r}$$
$$- \frac{y^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!} + \sigma \frac{\overline{\xi}^r}{(1-|\xi|^2)^r}.$$

Подставив в эти равенства выражения α_j через b_j, получим

$$(1-|\xi|^2)^r \frac{x^{(r-1)}(\xi)}{r-1)!} = -\omega_r - \frac{y^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!}(1-|\xi|^2)^r + \sigma\overline{\xi}^r,$$

где

$$\omega_r := \sum_{j=1}^{k}\left[(\overline{b}_j^{-1}+\overline{\xi})^r - (b_j+\overline{\xi})^r\right] + \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m}(b_j+\overline{\xi})^r.$$

Аналогично равенствам (12) получаем

$$\sum_{j=1}^{k}(\overline{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m} b_j^s = \sum_{r=1}^{s} C_s^r(-\overline{\xi})^{s-r}\omega_r + m\frac{2(p-1)}{p}(-\overline{\xi})^s.$$

Учитывая равенства (14), имеем систему для определения $\omega_1,\dots,\omega_m$

$$\sum_{r=1}^{s} C_s^r(-\overline{\xi})^{s-r}\omega_r = \gamma_s - m\frac{2(p-1)}{p}(-\overline{\xi})^s. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что рассматриваемая система имеет единственное решение

$$\omega_r = \sigma\overline{\xi}^r - (1-|\xi|^2)^r\left(\frac{y^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!}+\rho_r\right)$$

(для этого в силу единственности достаточно подставить выписанное решение в (17)). Тем самым

$$\frac{x^{(r-1)}(\xi)}{(r-1)!} = \rho_r, \quad r=1,\dots,m.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} h^{(r+1)}(\xi) = (x(z)h(z))^{(r)}_{|z=\xi} &= \sum_{j=0}^{r} C_r^j x^{(j)}(\xi)h^{(r-j)}(\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{(r-j)!}\rho_{j+1}h^{(r-j)}(\xi), \quad r=0,\dots,m-1. \end{aligned}$$

Из равенства $A\rho = d$ следует, что

$$\frac{h^{(r)}(\xi)}{r!} = d_r h(\xi) = \frac{\lambda_{\nu+m-r}}{\lambda_{\nu+m}}h(\xi).$$

Имеем

$$c_r(\xi) = -\frac{C(\xi)}{r!(\nu+m-r)!}h^{(\nu+m-r)}(\xi) = -\frac{C(\xi)}{r!}\frac{\lambda_r}{\lambda_{\nu+m}}h(\xi) = -\frac{\lambda_r}{r!}.$$

Итак, доказано, что

$$
\begin{aligned}
(18)\quad L_\xi^\lambda f - \sum_{r=0}^{\nu-1} c_r(\xi) f^{(r)}(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\nu_j-1} c_{jr}(\xi) f^{(r)}(z_j) \\
= |C(\xi)| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})}|g(e^{i\theta})|^{p-2} f(e^{i\theta})\, d\theta.
\end{aligned}
$$

Из теоремы 1 работы [11] следует, что при $1 \le p < \infty$ выполнение равенства (18) вместе с равенством $Ig = 0$ достаточно для оптимальности рассматриваемого метода и экстремальности функции $g/\|g\|_{H_p}$. Остается найти $\|g\|_{H_p}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{H_p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^m |1-\overline{\alpha}_j e^{i\theta}|^2}{|1-\overline{\xi} e^{i\theta}|^{2(m+1)}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi} z)^{m+1}(z-\xi)^{m+1}}\, dz \\
&= \frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi} z)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=\xi}.
\end{aligned}
$$

При $p = \infty$ положим

$$
\varphi(z) := |C(\xi)| \frac{z\prod_{j=1}^m (z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_j z)}{(z-\xi)^{m+1}(1-\overline{\xi} z)^{m+1}}.
$$

В силу того, что при всех $|\alpha| \le 1$ и $|z| = 1$

$$
\frac{(z-\alpha)(1-\overline{\alpha} z)}{z} \ge 0
$$

$\varphi(e^{i\theta}) \ge 0$. Поэтому, проверив аналогичные случаю $1 \le p < \infty$ равенства

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})}\varphi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\, d\theta = L_\xi^\lambda f - \sum_{r=0}^{\nu-1} c_r(\xi) f^{(r)}(\xi) \\
- \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\nu_j-1} c_{jr}(\xi) f^{(r)}(z_j),
\end{aligned}
$$

$$
\|\varphi\|_{H_1} = |C(\xi)| \frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi} z)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=\xi},
$$

из этого же результата работы [11] для $p = \infty$ получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что при $p = 1$ задача оптимального восстановления допускает эффективное решение, так как такое решение допускает классическая задача Каратеодори–Фейера в пространстве H_∞ (см., например, [14, с. 477]).

В общем случае оптимальный метод восстановления можно построить, предварительно решая систему (14) при $k=0,1,\dots,m$ и находя то ее решение, которое удовлетворяет условиям (15). При этом у экстремальной функции появляется $m-k$ дополнительных нулей (кроме постоянно присутствующих нулей функции W_1, связанных с заданным информационным оператором). Для фиксированного информационного оператора это дополнительное число нулей будет зависеть от расположения точки ξ.

Из замечания, сделанного перед формулировкой теоремы 2, вытекает при $p=1$ существование экстремальной функции, не имеющей дополнительных нулей в D. Тем самым при $1<p\le\infty$ весь круг D разбивается, вообще говоря, на $m+1$ множество $D_0, D_1,\dots,D_m$ (некоторые из них могут быть и пусты), каждое из которых обладает тем свойством, что при $\xi\in D_j$ у экстремальной функции имеется ровно j дополнительных нулей с учетом кратности, т.е. при $\xi\in D_j$ $k=m-j$. Определение множеств D_j корректно в силу единственности экстремальной функции для $1<p\le\infty$ (см., например, [5]).

Впервые, по-видимому, эта особенность была обнаружена Дьедонне [15], который, решая экстремальную задачу

$$\sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ f(0)=0}} |f'(\xi)|,$$

получил, что при $|\xi|\le\sqrt{2}-1$ (но не в большей области) экстремальной является функция $g_0(z)=\lambda z$, $|\lambda|=1$. Таким образом, в этой задаче $D_0=\{z\in D : |z|\le\sqrt{2}-1\}$ и $D_1=D\setminus D_0$. Этот результат был обобщен Г.М. Голузиным [14, с. 499], который решая экстремальную задачу

$$\sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ f(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0}} |f^{(m)}(\xi)|, \tag{19}$$

нашел, что экстремальной при $|\xi|\le 2^{\frac{1}{2m+1}}-1$, но не в большей области, является функция $g_0(z)=\lambda z^m$, $|\lambda|=1$, т.е. в наших обозначениях

$$D_0=\{\,z\in D : |z|\le 2^{\frac{1}{2m+1}}-1\,\}.$$

Полное описание областей D_0 и D_1 для $m=1$, $1\le p\le\infty$ в общей задаче восстановления было получено в работе [11].

Опишем область D_m. Для этой области система (14) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^m b_j^s=\frac{p}{2(p-1)}\gamma_s,\qquad s=1,\dots,m.$$

Учитывая следствие 1, получаем

Теорема 3. *Пусть $1 < p \le \infty$. Экстремальная функция в задаче (1) имеет m дополнительных нулей, лежащих в D, в том и только в том случае, если все нули полинома*

$$P_m(z) = \sum_{r=0}^{m} a_r z^{m-r},$$

где $a_0 = 1$, $a_r = -r^{-1}\dfrac{p}{2(p-1)}\sum_{s=1}^{r} a_{r-s}\gamma_s$, $r = 1, \dots, m$, а γ_s определены равенствами (13), лежат внутри круга D. При этом, если $b_1, \dots, b_m$ — нули $P_m(z)$, то для дополнительных нулей имеет место равенство

$$\alpha_j = \frac{\overline{b}_j + \xi}{1 + \overline{\xi}\overline{b}_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Из этой теоремы, в частности, для задачи (19) при $m = 2$ можно найти оставшиеся множества

$$D_1 = \{\, z \in D : r_0 < |z| \le r_1 \,\} \quad \text{и} \quad D_2 = \{\, z \in D : |z| > r_1 \,\},$$

где $r_0 = \sqrt[3]{2} - 1 = 0.2599\ldots$, а $r_1 = 0.8423\ldots$ — единственный вещественный корень уравнения $3t^3 + 4t^2 + 4t - 8 = 0$.

3. Восстановление производных ограниченных гармонических функций

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления линейного функционала

$$L_x^{\lambda} u := \sum_{j=\nu}^{\nu+m} \frac{\lambda_j}{j!} u^{(j)}(x),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_{\nu+m} \ne 0$, $\nu \ge 0$, на классе функций из $Bh_\infty := \{u \in h_\infty : \|u\|_{h_\infty} \le 1\}$ по значениям информационного оператора

$$Iu := \big\{u(x), \dots, u^{(\nu-1)}(x), u(x_1), \dots, u^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, \\ u(x_n), \dots, u^{(\nu_n-1)}(x_n)\big\},$$

где $x, x_1, \dots, x_n$ — различные точки из интервала $(-1, 1)$, а через $u^{(j)}$ обозначены частные производные $\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j}$.

При $m \le 1$ эта задача решена в работе [16]. Оказывается, что при $m \le 2\nu - 1$ рассматриваемая задача может быть сведена к задаче Каратеодори–Фейера для пространства H_1.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Для любых $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ найдется $0 \le k \le m$, при котором существует решение системы*

$$\sum_{j=1}^{k} (\overline{b}_j^{\,-s} - b_j^s) + 2\sum_{j=k+1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{20}$$

удовлетворяющее условиям (15). *При этом полиномы*

$$\prod_{j=1}^{m}(z-\bar b_j)(1-b_jz),\quad \prod_{j=k+1}^{m}(1-b_jz),\quad \prod_{j=k+1}^{m}(z-\bar b_j) \tag{21}$$

вещественны на вещественной оси.

Доказательство. Первая часть леммы вытекает из следствия 1, так как те из b_j, для которых $|b_j|=1$, в силу равенства $\bar b_j^{-1}=b_j$ можно отнести как в первую группу ($j=1,\dots,k$), так и во вторую ($j=k+1,\dots,m$). Здесь нам удобнее считать, что $|b_j|<1$, $j=k+1,\dots,m$. Докажем вещественность полиномов (21). Из следствия 1 вытекает, что полином

$$P_{2m}(z):=C\prod_{j=1}^{k}(z-\bar b_j)(1-b_jz)\prod_{j=k+1}^{m}(1-b_jz)^2, \tag{22}$$

где C выбрано из условия $P_{2m}(0)=1$, является решением задачи Каратеодори–Фейера в пространстве H_1 с условиями

$$f^{(j)}(0)=c_j,\quad j=0,\dots,m, \tag{23}$$

где числа c_j определяются через $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ (см. следствие 1) и вещественны при вещественных $\gamma_1,\dots,\gamma_m$. В силу единственности полиномов вида (22), удовлетворяющих равенствам (23) (см. [14, с. 489]), полином $P_{2m}(z)$ имеет вещественные коэффициенты. Следовательно, каждому корню полинома $P_{2m}(z)$ некоторой кратности соответствует сопряженный корень той же кратности. Отсюда следует, что полиномы (21) имеют вещественные коэффициенты. Лемма доказана. □

Введем обозначения, аналогичные обозначениям п.1:

$$W_1(z):=\left(\frac{z-x}{1-xz}\right)^{\nu}W(z),\quad W(z):=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-x_j}{1-x_jz}\right)^{\nu_j},$$

$$d_j:=\lambda_{\nu+m}^{-1}\lambda_{\nu+m-j},\quad j=1,\dots,m,\quad y(z):=W^{-1}(z)W'(z),$$

$$\gamma_s:=(-1)^s\Bigg[(m+\nu-1)x^s-\sum_{r=1}^{s}(-1)^rC_s^rx^{s-r}(1-x^2)^r \times\left(\frac{y^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}+\rho_r\right)\Bigg],$$

где вектор $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_m)^T$ определен равенствами (5).

Пусть $b_1, \dots, b_m$ — решение системы (20), удовлетворяющее условиям (15), существование которого утверждается в лемме 1. Положим

$$\alpha_j := \frac{\bar{b}_j + x}{1 + x\bar{b}_j}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\Psi(z) := \prod_{j=1}^{k}(z - \alpha_j)(1 - \overline{\alpha}_j z) \prod_{j=k+1}^{m}(1 - \overline{\alpha}_j z)^2,$$

$$g(z) := W_1(z) \prod_{j=k+1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}, \quad C(x) := \frac{\lambda_{\nu+m} W(x)(1 - x^2)^{m+1-\nu}}{\Psi(x)(1 + g^2(x))}.$$

Теорема 4. *При всех $m \le 2\nu - 1$ метод*

$$L_x^\lambda u \approx S_0 I u = \sum_{r=0}^{\nu-1} c_r(x) u^{(r)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{\nu_j - 1} c_{jr}(x) u^{(r)}(x_j),$$

где

(24)

$$c_r(x) := -\frac{C(x)}{r!(\nu + m - r)!} \left[\frac{\Psi(z)(1 + g^2(z))}{W(z)(1 - xz)^{m+1-\nu}} \right]^{(\nu+m-r)} \Bigg|_{z=x},$$

$$c_{jr}(x) := -\frac{C(x)}{r!(\nu_j - r - 1)!} \left[\frac{\Psi(z)(1 - x_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1 - xz)^{m+1-\nu}(z - x)^{\nu+m+1}} \right]^{(\nu_j - r - 1)} \Bigg|_{z=x_j},$$

$$\omega_j(z) := \prod_{\substack{r=1 \\ r \ne j}}^{n} \left(\frac{z - x_r}{1 - x_r z} \right)^{\nu_r},$$

является оптимальным методом восстановления, функция

$$u_0(z) := \operatorname{sign}(C(x)) \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} g(z)$$

— экстремальная, и

$$e(x, \lambda, I, Bh_\infty) = \frac{4}{\pi} |C(x)| \frac{1}{m!} \left[\frac{\prod_{j=1}^{m}(1 - \overline{\alpha}_j z)(z - \alpha_j)}{(1 - xz)^{m+1}} \right]^{(m)} \Bigg|_{z=x}.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(z) := \frac{z \prod_{j=1}^{m}(z - \alpha_j)(1 - \overline{\alpha}_j z)}{(z - x)^{m+1}(1 - xz)^{m+1}},$$

$$Jf := C(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) 2 \operatorname{Re} g(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Поскольку при $|z|=1$ $\overline{g(z)}=g^{-1}(z)$, то для любой функции $f\in H_p$, $1\le p\le\infty$, по теореме о вычетах получаем

$$\begin{aligned}Jf&=C(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\varphi(z)\frac{1+g^2(z)}{g(z)}f(z)\frac{dz}{z}\\&=C(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\Psi(z)(1+g^2(z))f(z)\,dz}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}(z-x)^{m+1-\nu}}\\&=-\sum_{r=0}^{\nu+m}c_r(x)f^{(r)}(x)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\nu_j-1}c_{jr}(x)f^{(r)}(x_j),\end{aligned}$$

где $c_r(x)$ определены равенством (24) при всех $r=0,\dots,\nu+m$. Для $r\ge\nu>0$ в силу того, что $m\le 2\nu-1$, имеем

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\Psi(z)g^2(z)}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}}\right]^{(\nu+m-r)}\Bigg|_{z=x}\\&=\left[\frac{(z-x)^{2\nu}W(z)}{(1-xz)^{m+1+\nu}}\prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_jz)\prod_{j=k+1}^{m}(z-\alpha_j)^2\right]^{(\nu+m-r)}\Bigg|_{z=x}=0.\end{aligned}$$

Тем самым

$$c_r(x)=-\frac{C(x)}{r!(\nu+m-r)!}\left[\frac{\Psi(z)}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}}\right]^{(\nu+m-r)}\Bigg|_{z=x},\qquad r=\nu,\dots,\nu+m.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 находим

$$c_r(x)=-\frac{\lambda_r}{r!},\quad r=\nu,\dots,\nu+m.$$

Таким образом, получаем

$$Jf=L_x^\lambda f-\sum_{r=0}^{\nu-1}c_r(x)f^{(r)}(x)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\nu_j-1}c_{jr}(x)f^{(r)}(x_j).$$

Из вещественности полиномов (21) следует вещественность полиномов

$$\prod_{j=1}^{m}(z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_jz),\quad\prod_{j=k+1}^{m}(1-\overline{\alpha}_jz),\quad\prod_{j=k+1}^{m}(z-\alpha_j).$$

Следовательно, все коэффициенты $c_r(x)$ и $c_{jr}(x)$ вещественные. Обозначив через $u:=\operatorname{Re}f$, будем иметь

$$\operatorname{Re}Jf=L_x^\lambda u-S_0Iu.$$

С другой стороны, поскольку почти всюду

$$u_0(e^{i\theta})=\operatorname{sign}(C(x)\operatorname{Re}g(e^{i\theta})),$$

то, положив $\varphi_1(z) := 2|C(x)\operatorname{Re} g(z)|\varphi(z)$, получаем

$$\operatorname{Re} Jf = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\theta})u_0(e^{i\theta})u(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Если $u \in h_\infty \subset h_2$, то сопряженная функция $v \in h_2$ (см. [14, с. 380]), где h_2 — пространство гармонических в D функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{h_2} := \sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, $u + iv \in H_2$. Таким образом, равенство

$$L_x^\lambda u - S_0 I u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\theta})u_0(e^{i\theta})u(e^{i\theta})\,d\theta$$

справедливо при всех $u \in h_\infty$. Так как $\varphi_1(e^{i\theta}) \geq 0$, $u_0 \in Bh_\infty$, $|u_0(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду и, кроме того, $Iu_0 = 0$, то из теоремы 1 работы [11] следует оптимальность метода S_0, экстремальность функции u_0 и равенство

$$e(x,\lambda,I,Bh_\infty) = L_x^\lambda u_0.$$

Пользуясь тем, что функция $g(z)$ вещественна на вещественной оси, получаем

$$L_x^\lambda u_0 = L_x^\lambda g^* = Jg*,$$

где

$$g^*(z) := \operatorname{sign}(C(x))\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} g(z) = \operatorname{sign}(C(x))\left(\frac{4}{\pi}g(z) + g^3(z)w(z)\right),$$

а $w(z) \in H_2$. Тем самым, учитывая условие $2\nu > m$, будем иметь

$$\begin{aligned} e(x,\lambda,I,Bh_\infty) &= Jg* \\ &= |C(x)|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \varphi(z)(1+g^2(z))\left(\frac{4}{\pi} + g^2(z)w(z)\right)\frac{dz}{z} \\ &= \frac{4}{\pi}|C(x)|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\varphi(z)\frac{dz}{z} \\ &= \frac{4}{\pi}|C(x)|\frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-xz)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=x}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] *Осипенко К.Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Матем. заметки. 1976. Т. 19, №1. С. 29–40.

[2] *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* A survey of optimal recovery. Optimal estimation in approximation theory. N.Y.: Plenum Press, 1977.

[3] *Landau E.* Abschätzung der Koeffizientensumme einer Poenzreihe // Arch. Math. Phys. 1913. V. 21. P. 42-50, 250–255.

[4] *Macintyre A., Rogosinski W.* Extremum problems in the theory of analytic functions // Acta Math. 1950. V. 82. P. 275–325.

[5] *Rogosinski W.W., Shapiro H.S.* On certain extremum problems for analytic functions // Acta Math. 1953. V. 90. P. 287–318.

[6] *Хавинсон С.Я.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области // УМН. 1963. Т. 18. №2. С. 25–98.

[7] *Duren P.L.* Theory of H^p spaces. N.Y.: Acad. Press, 1970.

[8] *Осипенко К.Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Матем. заметки. 1972. Т. 12. №4. С. 465–476.

[9] *Fisher S.D., Micchelli C.A.* The n-width of sets of analityc functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. №4. P. 789–801.

[10] *Певный А.Б.* Об оптимальности некоторых сплайновых алгоритмов // Изв. вузов. Математика. 1986. №5. С. 43–49.

[11] *Осипенко К.Ю., Стесин М.И.* О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №4. С. 95–104.

[12] *Carathwodory C., Fejer L.* Über den Zusammenhung der extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Landu'schen Satz // Rend. Cir. Mat. di Palermo. 1911. №32. P. 218–239.

[13] *Хавинсон С.Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций с дополнительными условиями. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1981.

[14] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[15] *Dieudonné J.* Recherches sur quelques problems ralatifs aux polinomes et aux fonctions bornées dúne variable complexe // Ann. Ecole Norm. sup. 1931. V. 3. №48. P. 247–358.

[16] *Осипенко К.Ю.* Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций // Матем. сб. 1991. Т. 182. №5. С. 723–745.

Московский авиационный
технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Поступила в редакцию
10.11.1992