О НАИЛУЧШИХ МЕТОДАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА КЛАССАХ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Ю. Осипенко (Москва)

Пусть $Э_c$ — эллипс с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c. Обозначим через A_c класс аналитических в эллипсе $Э_c$ и ограниченных там по модулю единицей функций. Рассматривается задача приближенного вычисления интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)p(x)\,dx,$$

где $p(x)$ — некоторый неотрицательный вес, по значениям функции $f \in A_c$ в некоторой фиксированной системе

$$X = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix}$$

узлов $x_1, \dots, x_n$ на отрезке $[-1, 1]$ с кратностями $\nu_1, \dots, \nu_n$. Обозначим через $N = \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_j$. Погрешностью наилучшего метода приближения называется величина

$$(1)\quad r(c,p,X) = \inf_S \sup_{f \in A_c} \big| I(f) - S(f(x_1), \dots, f^{(\nu_1 - 1)}(x_1), \dots, f(x_n), \dots, f^{(\nu_n - 1)}(x_n) \big|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $S\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$. Метод S_0, на котором достигается нижняя грань в равенстве (1), называется наилучшим. Для случая, когда $\nu_1, \dots, \nu_n$ — четные, строится наилучший метод.

При $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_j = \cos \dfrac{2j-1}{2n}\pi$, $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$, наилучшим методом является квадратурная формула

$$I(f) \approx \pi \frac{1 - d_n(c)}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

где $d_n(c)$ выражается через эллиптические функции, а для ее погрешности справедливо равенство

$$r(c,p,X) = 2\pi c^{-2n} + O\left(c^{-6n}\right).$$

Литература

1. Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек. — Мат. заметки, 1976, 19, № 1, с.29–40.
2. Bojanov B.D. Best quadrature formula for a certain class of analytic functions. — Zast. Math., 1974, v. 14, p. 441–447.