МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АВИАЦИОННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

На правах рукописи

ОСИПЕНКО КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01. - математический анализ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва — 1993

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Под влиянием идей А.Н. Колмогорова в теории приближения наряду с аппроксимацией классов функций фиксированными методами (алгебраическими и тригонометрическими полиномами, отрезками рядов Фурье, рациональными функциями, сплайнами и т.д.) стали изучаться задачи нахождения оптимальных методов аппроксимации. Одной из характерных задач такого типа является задача об оптимальной интерполяции, в которой требуется восстановить значение функции из некоторого класса в фиксированной точке из области определения по ее значениям в конечной системе других точек. При этом на сам метод восстановления заранее не накладывается каких-либо ограничений. Вместо значения функции в точке может рассматриваться восстановление производных или интеграла от функции, а в более общем случае — произвольного линейного функционала.

Первые задачи об оптимальном восстановлении линейных функционалов появились в середине шестидесятых — начале семидесятых годов. В 1965 г. С.А. Смоляком **[62]** была поставлена задача об оптимальном восстановлении линейного функционала x' на некотором множестве W из линейного пространства X по значениям линейных функционалов $x'_1, \ldots, x'_n$ на этом множестве. Под погрешностью оптимального восстановления понималась величина

$$e(x', x'_1, \ldots, x'_n, W) := \inf_{S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{x \in W} |\langle x', x\rangle - S(\langle x'_1 x\rangle, \ldots, \langle x'_n x\rangle)|.$$

где нижняя грань берется по любым отображениям S из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, а метод S_0, на котором достигалась нижняя грань, назывался оптимальным.

С.А. Смоляком было доказано, что в случае, когда W — выпуклое множество, среди оптимальных методов есть аффинный, а когда W — выпуклое уравновешенное множество, среди оптимальных методов существует линейный метод. Результат С.А. Смоляка, опубликованный лишь в его диссертации, стал широко доступен в 1971 г., когда был приведен в работе Н.С. Бахвалова **[7]**, где с его помощью доказывалось отсутствие преимущества у адаптивных методов интегрирования по сравнению с неадаптивными методами на выпуклых уравновешенных классах функций.

Сама постановка задачи оптимального восстановления, неоднократно обобщавшаяся в дальнейшем, имеет глубокие корни, идущие от работ А.Н. Колмогорова, связанных с понятием n-поперечника, а также от работ А. Сарда [**125**] и С.М. Никольского [**42**], связанных с квадратурными формулами. В процессе осмысления более общих задач оптимального восстановления оказалось, что в терминах восстановления могут быть сформулированы многие задачи теории приближения и, в частности, задачи об n-поперечниках.

В 1967 г. С.Б. Стечкин [**63**] поставил задачу о приближении неограниченного оператора ограниченным, которая также укладывается в общую схему оптимального восстановления. Дальнейшие исследования, проведенные В.Н. Габушиным [**10**] и В.В. Арестовым [**3**], показали тесную ее связь с задачами восстановления по информации, заданной с погрешностью.

Последующее развитие теории оптимального восстановления можно условно разделить на несколько направлений: общие результаты о восстановлении и оптимальное восстановление на конкретных классах функций, среди которых можно выделить классы гладких и аналитических функций. Исследованию задач восстановления на классах гладких функций посвящено, по-видимому, большая часть работ из этой тематики, познакомиться с которыми можно по обзорным статьям Ч. Мичелли, Т. Ривлина [**108**], [**109**], В.М. Тихомирова [**67**], монографиям Дж. Трауба, Г. Вожьняковского [**69**]], Н.П. Корнейчука [**31**] и цитируемой там литературе.

Одним из распространенных приемов при изучении задач восстановления, оптимальных квадратурных формул и n-поперечников на классах гладких функций является исследование осцилляционных свойств ядер, с помощью которых задаются классы. А. Пинкусом [**116**], [**117**] и Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [**39**], [**40**] получены некоторые общие результаты в этом направлении для классов функций, представимых в виде свертки с вполне положительными или не повышающими осцилляции ядрами. Для классов аналитических функций понятие “осцилляция” (или “число перемен знака”) пока не нашло своего эквивалента. Тем не менее, в задачах, которые удается решить, просматриваются определенные параллели с гладким случаем.

Настоящая работа посвящена ряду вопросов общей теории оптимального восстановления, а также задачам восстановления на классах аналитических функций. Одним из общих вопросов, которые мы исследуем, является вопрос о необходимых и достаточных условиях на класс функций и информационный оператор для существования среди оптимальных методов аффинного или линейного метода. Мы используем некоторый универсальный подход к построению оптимальных методов восстановления, основанный на специальном интегральном представлении погрешности восстановления и применяемый в дальнейшем на конкретных классах аналитических функций. Спектр задач, рассматриваемых на этих классах, содержит в себе задачи оптимальной интерполяции, восстановления производных, восстановления по бесконечной информации, построения оптимальных квадратурных формул, задачи восстановления по неточной информации, нахождение точных значений n-поперечников.

Рассмотрим содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена общим вопросам оптимального восстановления и задачам восстановления по неточным данным в абстрактных пространствах L_p. Задача оптимального восстановления в наиболее общей постановке может быть сведена к восстановлению некоторого многозначного отображения однозначным (впервые это было замечено В.А. Арестовым [**3**]). В §§1–3 изучаются задачи такого типа. При этом основными результатами являются критерии существования среди оптимальных методов восстановления аффинных и линейных в алгебраическом и топологическом случаях.

Пусть X — линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $A \subset X$ — непустое множество и $\Phi\colon A \to K$ — многозначное отображение (м. о.) с графиком $\operatorname{gr}\Phi$. Положим

$$E(\Phi,\varphi) := \sup_{(x,z)\in\operatorname{gr}\Phi} |z-\varphi(x)|,$$
$$E(\Phi) := \inf_{\varphi} E(\Phi,\varphi),$$

где нижняя грань берется по всевозможным однозначным отображениям $\varphi\colon A \to K$. Величину

$$R(\Phi) := \sup_{x\in A}\inf_{c\in K}\sup_{z\in\Phi(x)} |z-c|,$$

являющуюся максимальным чебышевским радиусом множества $\Phi(x)$, назовем радиусом многозначности м. о. Φ.

Для множества Ω из линейного пространства Y через $\operatorname{co}\Omega$ и $\operatorname{bco}\Omega$ будем обозначать выпуклую и выпуклую уравновешенную оболочки Ω. При $\xi \in Y$ выпуклую уравновешенную относительно точки ξ оболочку множества Ω обозначим через

$$\operatorname{bco}_\xi\Omega := \operatorname{bco}(\Omega-\xi)+\xi.$$

Определим м. о. $\operatorname{co}\Phi$ и $\operatorname{bco}_\xi\Phi$ следующими равенствами

$$\operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi := \operatorname{co}\operatorname{gr}\Phi, \quad \operatorname{gr}\operatorname{bco}_\xi\Phi := \operatorname{bco}_\xi\operatorname{gr}\Phi$$

(при $\xi = 0$ пишем просто $\operatorname{bco}\Phi$). Через $\operatorname{Aff}(X)$ обозначим множество аффинных функционалов, т.е. функционалов вида $a(x) = \langle x', x\rangle + c$, где $x' \in X'$, а $c \in K$.

Теорема 1.1.4. *Для существования $a \in \operatorname{Aff} X$ такого, что*

$$E(\Phi, a) = E(\Phi), \tag{1}$$

необходимо и достаточно существования $\xi \in X \times K$ такого, что

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco}_\xi \Phi).$$

При $K = \mathbb{R}$ условие (1) эквивалентно равенству

$$R(\Phi) = R(\operatorname{co} \Phi). \tag{2}$$

Для существования $x' \in X'$ такого, что

$$E(\Phi, x') = E(\Phi),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco} \Phi).$$

Отметим, что в комплексном случае условия (1) и (2) не эквивалентны. Соответствующий пример построен в §1.

§2 посвящен задачам, связанным с выражением оптимального метода восстановления через субдифференциал огибающей м. о. Φ.

Если X — локально выпуклое пространство, то через X^* обозначим топологически сопряженное пространство. Исследованию топологического случая посвящен §3. Здесь в отличие от алгебраического случая может не существовать линейный или аффинный оптимальный метод. Однако, при некоторых дополнительных условиях может быть получен аналог сформулированного критерия. Если не касаться вопроса существования, то критерий совпадения величины $E(\Phi)$ с величинами

$$E^*(\Phi) = \inf_{x^* \in X^*} E(\Phi, x^*), \quad E^a(\Phi) = \inf_{a \in \operatorname{Aff}^*(X)} E(\Phi, a),$$

где $\operatorname{Aff}^*(X)$ — множество функционалов вида $a(x) = \langle x^*, x \rangle + c$, $x^* \in X^*$, $c \in K$, имеет следующий вид.

Теорема 1.3.5. *Равенство*

$$E^a(\Phi) = E(\Phi)$$

имеет место в том и только в том случае, когда существует $\xi \in X \times K$, для которого

$$R(\Phi) = R(\operatorname{cl} \operatorname{bco}_\xi \Phi).$$

Равенство

$$E^*(\Phi) = E(\Phi)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$R(\Phi) = R(\operatorname{cl} \operatorname{bco} \Phi).$$

Вернемся к общей постановке задачи оптимального восстановления функционалов, рассматриваемой в §4. Пусть X и Y — линейные пространства над полем K, $W \subset X$, $f\colon W \to K$ и $F\colon W \to Y$ — м. о. Ставится задача восстановления значений функционала f на множестве W по информации о значениях на этом множестве м. о. F. Многозначность отображения F означает, что информация об элементах W задана, вообще говоря, неточно. Если F — однозначное отображение, то говорят о задаче восстановления по точным данным. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon Y \to K$ называется величина

$$e(f, F, \varphi) := \sup_{(x,y)\in \operatorname{gr} F} |f(x) - \varphi(y)|.$$

Величина

$$e(f, F) := \inf_{\varphi\colon Y\to K} e(f, F, \varphi)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а всякий метод, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным. Введем также величину

$$r(f, F) := \sup_{y\in F(W)} \inf_{c\in K} \sup_{x\in F^{-1}(y)} |f(x) - c|,$$

называемую радиусом информации.

Теорема 1.4.1. *Если* $f \in \operatorname{Aff}(X)$*, то для существования* $a \in \operatorname{Aff}(Y)$ *такого, что*

$$e(f, F, a) = e(f, F), \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $z \in X \times Y$*, для которой*

$$r(f, F) = r(f, \operatorname{bco}_z F).$$

При $K = \mathbb{R}$ *условие* (3) *эквивалентно равенству*

$$r(f, F) = r(f, \operatorname{co} F).$$

Если $f \in X'$*, то для существования* $y' \in Y'$ *такого, что*

$$e(f, F, y') = e(f, F),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$r(f, F) = r(f, \operatorname{bco} F).$$

Рассмотрим случай, когда м. о. F имеет вид

$$F(x) = Ix + U,$$

где $I\colon W \to Y$ — линейный оператор, а $U \subset Y$ — некоторое множество. Величину $e(f, F)$ будем обозначать в этом случае через $e(f, I, W, U)$. Если Y — линейное нормированное пространство, а $U = U_\delta := \delta BY$, где $BY := \{y \in Y : \|y\| \le 1\}$ — единичный шар, то говорят о восстановлении по значениям оператора I, заданного с погрешностью δ. В этом случае положим

$$e(f, I, W, \delta) := e(f, I, W, U_\delta).$$

Если W и U — выпуклые уравновешенные множества, то из теоремы 1.4.1 вытекает существование оптимального линейного метода. Кроме того, доказывается, что имеет место равенство

$$e(x', I, W, U) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle|,$$

которое для $U = U_\delta$ принимает вид

$$e(x', I, W, \delta) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\| \le \delta}} |\langle x', x \rangle|. \tag{4}$$

Элемент $x_0 \in W$ такой, что $Ix_0 \in U$ и

$$\sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x \rangle| = \langle x', x_0 \rangle,$$

будем называть экстремальным.

Теорема 1.4.3. *Пусть W и U — выпуклые уравновешенные множества. Тогда $x_0 \in W$ — экстремальный элемент, а $y_0' \in Y'$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если выполнены условия*

1) $\sup\limits_{x \in W} |\langle x' - I^* y_0', x \rangle| = \langle x' - I^* y_0', x_0 \rangle$,
2) $\sup\limits_{y \in U} |\langle y_0', y \rangle| = \langle y_0', I x_0 \rangle$,
3) $I x_0 \in U$,

где I^* — оператор, сопряженный к I.

Теорема 1.4.3 остается в силе и в топологическом случае. В частности, если $U = U_\delta$, то условия 2) и 3) заменяются на условия

2) $\langle y_0^*, I x_0 \rangle = \delta \|y_0^*\|$,
3) $\|I x_0\| \le \delta$.

В §5 изучаются задачи оптимального восстановления линейных функционалов в абстрактных пространствах $L_p(S, \Sigma, \mu)$ (или, короче, $L_p(S)$), являющихся совокупностью всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty := \operatorname*{vraisup}_{s \in S} |x(s)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Положим

$$(x, y)_S := \int_S x(s) \overline{y(s)} \, d\mu.$$

Рассматривается задача оптимального восстановления линейного функционала $(x,f)_S$, $f \in L_{p'}(S)$, $1/p+1/p'=1$, на множестве $BL_p(S)$ по значениям м. о. $F(x) := Ix+\delta BY$, где $I\colon L_p(S)\to Y$ — линейный оператор, а Y — линейное нормированное пространство. Положим при $1\le p<\infty$ и $a\in\mathbb{C}$

$$a_{(p)} := \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a\neq 0,\\ 0, & a=0.\end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $Y=L_q(\Omega)$. Оказывается, что имеется некоторые значения погрешности δ, являющиеся в определенном смысле точками переключения. Пусть

$$\delta_1 := \frac{\|If_{(p')}\|_q}{\|f\|_{p'}^{p'-1}}$$

и для $y^*\in L_{q'}(\Omega)$, $1/q+1/q'=1$,

$$\delta_0 := \|y^*\|_{q'}^{q'-1} \inf_{\substack{z\in L_{q'}(\Omega)\\ (y^*_{(q')},z)_\Omega\neq 0}} \frac{\|I^*z\|_{p'}}{|(y^*_{(q')},z)_\Omega|}.$$

Теорема 1.5.1. *Пусть $I\colon L_p(S)\to L_q(\Omega)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда*

1) *для $1<p\le\infty$ и $1\le q\le\infty$ при $\delta\ge\delta_1$ $y_0^*=0$ — оптимальный метод восстановления,*
2) *для $1\le p<\infty$, $1<q<\infty$ и $f=I^*y^*$, $y^*\in L_{q'}(\Omega)$ при $0\le\delta\le\delta_0$ $y_0^*=y^*$ — оптимальный метод восстановления,*
3) *для $1<p,q<\infty$ при $f\in I^*L_{q'}(\Omega)$ и $\delta_0<\delta<\delta_1$ или при $f\notin I^*L_{q'}(\Omega)$ и $0\le\delta<\delta_1$, для того чтобы $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ являлся оптимальным методом восстановления, необходимо, чтобы выполнялось равенство*
$$\frac{I(f-I^*y_0^*)_{(p')}}{\|f-I^*y_0^*\|_{p'}^{p'-1}} = \delta\frac{(y_0^*)_{(q')}}{\|y_0^*\|_{q'}^{q'-1}}, \tag{5}$$
4) *если $1<p,q\le\infty$ и, кроме того, $I^*y_0^*\in L_1(S)$ при $p=\infty$, то выполнения равенства (5) достаточно, для того чтобы $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ являлся оптимальным методом восстановления,*
5) *если $1\le p,q\le\infty$, $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ — оптимальный метод восстановления и, кроме того, $I^*y_0^*\in L_1(S)$ при $p=\infty$, то*
$$e(f,I,BL_p(S),\delta) = \|f-I^*y_0^*\|_{p'}+\|y_0^*\|_{q'}.$$

Одним из основных способов получения оптимальных методов восстановления в дальнейших исследованиях является использование специального интегрального представления для погрешности восстановления. Пусть Y — произвольное линейное пространство.

Вместо $BL_p(S)$ будем рассматривать множество BX_p, где X_p — некоторое линейное подпространство $L_p(S)$ (такая ситуация является типичной для восстановления аналитических или гармонических функций).

Теорема 1.5.3. *Пусть $g \in X_p$, $g \neq 0$, $g_0 := g/\|g\|_p$, $\|Ig_0\| \leq \delta$, $y_0^* \in Y^*$, $\langle y_0^*, Ig_0\rangle = \delta\|y_0^*\|$ и при всех $x \in X_p$ имеет место равенство*

$$(x,f)_S - \langle y_0^*, Ix\rangle = \begin{cases}\alpha(x, g_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty,\\ (x, \varphi g)_S, & p = \infty,\end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha > 0$, $\varphi \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|g(s)| = 1$ почти всюду. Тогда y_0^* — оптимальный метод, g_0 — экстремальная функция и

$$e(f, BX_p, I, \delta) = (g_0, f)_S = \begin{cases}\alpha\|g\|_p^{p-1} + \delta\|y_0^*\|, & 1 \leq p < \infty,\\ \|\varphi\|_1 + \delta\|y_0^*\|, & p = \infty.\end{cases}$$

Как доказывается в теореме 1.5.4, интегральное представление (6) является не только достаточным условием для экстремальности функции g_0, но также и необходимым условием при некоторых дополнительных требованиях.

В §6 рассматривается задача восстановления линейного функционала $(x, f)_X$, $f \in X$, на единичном шаре гильбертова пространства X по значениям линейного ограниченного оператора $I\colon X \to L_q(\Omega)$, заданного с погрешностью δ, для $q = \infty, 1$. В качестве приложения полученных результатов решаются задачи восстановления по приближенным коэффициентам Фурье. Приведем один из подобных результатов.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве X (не обязательно полная и не обязательно бесконечная). Для $x \in X$ через $x_j = (x, e_j)_X$ будем обозначать коэффициенты Фурье элемента x по отношению к этой системе. Рассмотрим задачу восстановления функционала $(x, f)_X$, $f \neq 0$, по значениям $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots)$ таким, что

$$|x_j - \widetilde{x}_j| \leq \delta\lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda_j \geq 0$. Предположим, что

$$0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-1} < \lambda_j, \quad j \geq m,$$
$$|f_m| > 0, \quad |f_m|\lambda_m^{-1} \geq |f_{m+1}|\lambda_{m+1}^{-1} \geq \ldots.$$

Положим $s := \sup\{j : |f_j| > 0,\ j \geq m\}$,

$$\mu_k := \frac{|f_k|\lambda_k^{-1}}{\sqrt{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^k |f_j|^2 + |f_k|^2\lambda_k^{-2}\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^2}}, \quad m \leq k \leq s$$

(если $s=\infty$, то полагаем $\mu_\infty := \lim\limits_{k\to\infty}\mu_k$), $\Delta_{m-1} := (\mu_m, +\infty)$, $\Delta_k := (\mu_{k+1}, \mu_k]$, $m \le k < s$, $\Delta_s := [0, \mu_s]$.

Теорема 1.6.2. *Пусть* $f \in X$, $\sum\limits_{j=1}^{s} |f_j| < \infty$. *Тогда*

1) *если* $\delta \in \Delta_k$, $m-1 \le k \le s$ *и при* $k=s$ $f \ne \sum\limits_{j=1}^{s} f_j e_j$, *то*

$$(x,f)_X \approx \sum_{j=1}^{k} \left[|f_j| - \delta\lambda_j \sqrt{\frac{\|f\|_X^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j|^2}{1-\delta^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^2}} \right] (\overline{f}_j)_{(1)} \widetilde{x}_j$$

— *оптимальный метод восстановления, а*

$$e(f, I, BX, \delta) = \sqrt{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^{k} |f_j|^2} \sqrt{1-\delta^2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2} + \delta \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |f_j|.$$

2) *если* $\delta \in \Delta_s$ *и* $f = \sum\limits_{j=1}^{s} f_j e_j$, *то метод*

$$(x,f)_X \approx \sum_{j=1}^{s} \overline{f}_j \widetilde{x}_j$$

является оптимальным методом восстановления, а

$$e(f, I, BX, \delta) = \delta \sum_{j=1}^{s} \lambda_j |f_j|.$$

Характерной особенностью задач восстановления по неточной информации, хорошо видной на примере теоремы 1.6.2, является наличие “лишней” информации при больших значениях погрешности. Так, например, при $\delta \in \Delta_k$, $k < s$, информация о приближенных значениях коэффициентов Фурье $\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2}, \ldots$ не используется в оптимальном методе.

Глава II посвящена задачам восстановления аналитических и гармонических функций, а также их производных по информации о точных значениях этих функций в некоторой конечной или бесконечной системе точек. Кроме того, здесь получен ряд результатов, касающихся точных значений колмогоровских, линейных и гельфандовских n-поперечников.

В §1 решена задача оптимального восстановления функционала

$$L_\xi^\lambda f := \sum_{j=\nu}^{\nu+m} \frac{\lambda_j}{j!} f^{(j)}(\xi), \tag{7}$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_{\nu+m} \neq 0$, $\nu \geq 0$, на единичном шаре пространства Харди H_p по значениям информационного оператора

$$If := \left\{f(\xi), \ldots, f^{(\nu-1)}(\xi), f(z_1), \ldots, f^{(\nu_1-1)}(z_1), \ldots, \right.$$
$$\left. f(z_n), \ldots, f^{(\nu_n-1)}(z_n)\right\}, \tag{8}$$

где $\xi, z_1, \ldots, z_n$ — различные точки из единичного круга $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| <\}$.

Частные случаи этой задачи рассматривались в работах автора [**45**] ($p = \infty$, $\nu = m = 0$), Ч. Мичелли и Т. Ривлина [**108**] ($p = \infty$, $\lambda = (0, 1)$), С. Фишера и Ч. Мичелли [**89**] ($1 \leq p < \infty$, $\nu = m = 0$), автора и М.И. Стесина [**56**] ($1 \leq p \leq \infty$, $\lambda = (\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$). Здесь мы рассматриваем общий случай и сводим его к решению задачи Каратеодори–Фейера, которое удается описать конструктивным образом.

Из описания решения задачи Каратеодори–Фейера вытекает, что при всех $1 \leq p \leq \infty$ и $m \in \mathbb{N}$ для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{C}$ существует $0 \leq k \leq m$, для которого система

$$\sum_{j=1}^{k} (\bar{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2(p-1)}{p} \sum_{j=1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

будет иметь решение, удовлетворяющее условию

$$|b_j| \leq 1,\ j = 1, \ldots, k, \quad |b_j| < 1,\ j = k+1, \ldots, m. \tag{10}$$

(При $p = \infty$ все выражения с p понимаются как предельные значения при $p \to \infty$).

Положим $d_j := \lambda_{\nu+m}^{-1} \lambda_{\nu+m-j}$, $j = 1, \ldots, m$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{d_1}{2} & \dfrac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d_{m-1}}{m} & \dfrac{d_{m-2}}{m} & \ldots & \dfrac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad \rho := A^{-1} d;$$

здесь $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)^T$, $d = (d_1, \ldots, d_m)^T$. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — решения системы (9), удовлетворяющие условиям (10), для

$$\gamma_s := (-1)^s \left[\left(m + \nu - 1 + \frac{2}{p} \right) \bar{\xi}^s \right.$$
$$\left. - \sum_{l=1}^{s} (-1)^l C_s^l \bar{\xi}^{s-l} (1 - |\xi|^2)^l \left(\frac{y^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} + \rho_l \right) \right],$$

где $y(z) := W^{-1}(z)W'(z)$, а

$$W(z) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right)^{\nu_j}.$$

Введем следующие обозначения:

$$W_1(z) := \left(\frac{z-\xi}{1-\overline{\xi}z} \right)^{\nu} W(z), \quad \omega_j(z) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(\frac{z - z_l}{1 - \overline{z}_l z} \right)^{\nu_l},$$

$$\alpha_j := \frac{\overline{b}_j + \xi}{1 + \overline{\xi}\,\overline{b}_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad r := (m+1)\frac{p-2}{p} - \nu,$$

$$\Psi(z) := \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)^{2(p-1)/p},$$

$$C(\xi) := \frac{\lambda_{\nu+m} W(\xi)(1 - |\xi|^2)^r}{\Psi(\xi)},$$

$$g(z) := e^{-i \arg C(\xi)} W_1(z)(1 - \overline{\xi}z)^{-2(m+1)/p} \prod_{j=k+1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)^{2/p}.$$

Через $e(\xi, \lambda, I, BH_p)$ обозначим погрешность оптимального восстановления. Аналогичные обозначения будем использовать при восстановлении функционала L_ξ^λ на других классах.

Теорема 2.1.2. *При всех $1 \le p \le \infty$ метод*

$$L_\xi^\lambda f \approx \sum_{l=0}^{\nu-1} c_l(\xi) f^{(l)}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} c_{jl}(\xi) f^{(l)}(z_j),$$

где

$$c_l(\xi) := -\frac{C(\xi)}{l!(\nu+m-l)!} \left[\frac{\Psi(z)}{W(z)(1-\overline{\xi}z)^r} \right]^{(\nu+m-l)} \Bigg|_{z=\xi},$$

$$c_{jl}(\xi) := -\frac{C(\xi)}{l!(\nu_j - l - 1)!} \left[\frac{\Psi(z)(1 - \overline{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1-\overline{\xi}z)^r (z-\xi)^{\nu+m+1}} \right]^{(\nu_j - l - 1)} \Bigg|_{z=z_j},$$

является оптимальным методом восстановления, функция $g_0 := g/\|g\|_{H_p}$ *— экстремальная и*

$$e(\xi,\lambda,I,BH_p) = L_\xi^\lambda g_0$$
$$= |C(\xi)| \left(\frac{1}{m!} \left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi} z)^{m+1}} \right]^{(m)} \Bigg|_{z=\xi} \right)^{(p-1)/p}.$$

В §2 рассматриваются задачи восстановления голоморфных функций многих переменных. Пусть B — единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Для мультииндекса $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ положим

$$D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

Рассматривается задача оптимального восстановления значения функции из единичного шара пространства Харди H_p в некоторой точке $a \in B$ по значениям следов функций $D^\alpha f$, $|\alpha| = 0,\ldots,r-1$, на аффинном подмножестве $\mathbb{C}^n$ вида

$$A := \{\, z \in B : z_{n-k+1} = c_{n-k+1},\ldots,z_n = c_n \,\},$$

где $c = (0,\ldots,0,c_{n-k+1},\ldots,c_n) \in B$. Тем самым информационным оператором является оператор

$$I_A^r f := \left\{\, D^\alpha f_{|_A} \,\right\}, \quad |\alpha| = 0,\ldots,r-1.$$

Ответ дается в терминах специальной функции $\Phi_n(\rho,u)$, которая может быть записана в виде

$$\Phi_n(\rho,u) = \frac{\Gamma(n+\rho/2)}{\Gamma(\rho/2)}(1-u)^{-n} Q_n(\rho,u),$$

где

$$Q_n(\rho,u) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m+\rho/2} C_{n-1}^m u^m.$$

Для $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $1 \le k \le n$ положим

$$z_k' := (z_1,\ldots,z_{n-k},0,\ldots,0), \quad z_k'' := z - z_k',$$
$$\langle z,w\rangle := \sum_{m=1}^n z_m \overline{w}_m,\ z,w \in \mathbb{C}^n, \quad |z|^2 := \langle z,z\rangle,$$
$$s_k(z,w) := \frac{\langle z,w_k''\rangle}{1-\langle z,w_k'\rangle}.$$

Обозначим через

$$\Delta_{nk}(p) := \left\{\, z \in B : |z_k''|^2 < \lambda_n^2(p)(1-|z_k'|^2) \,\right\}, \quad \Delta_{nk}(\infty) := B,$$

где

$$\lambda_n(\rho) := \min\{\, |u| : Q_n(\rho,u) = 0 \,\}.$$

Ограничимся для простоты случаем, когда $A = A_k := \{\, z \in B : z_{n-k+1} = \ldots = z_n = 0 \,\}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $1 \le k \le n$. Для всех $a \in \Delta_{nk}(rp)$ метод*

$$f(a) \approx \begin{cases} \chi^{(2-p)/p}(a) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\chi^{(p-2)/p}(z) f(z) \right)\Big|_{z=a'_k}, & 1 \le p < \infty, \\ (1-|a|^2) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\frac{f(z)}{1-\langle z, a\rangle} \right)\Big|_{z=a'_k}, & p = \infty, \end{cases}$$

где $dz = a''_k$, а

$$\chi(z) := \frac{\Phi_n\left(rp, s_k(z,a)\right)}{(n-1)!\left(1-\langle z, a'_k\rangle\right)^{n+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p по информации $I^r_{A_k}$. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I^r_{A_k}, BH_p) = \begin{cases} \chi^{1/p}(a)|a''_k|^r, & 1 \le p < \infty, \\ |a''_k|^r \left(1-|a'_k|^2\right)^{-r/2}, & p = \infty. \end{cases}$$

При $a \in \Delta_{nk}(rp) \setminus A_k$ экстремальная функция имеет вид

$$g_0(z) = \begin{cases} \chi^{-1/p}(a)|a''_k|^{-r}\chi^{2/p}(z)(\langle z, a''_k\rangle)^r, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{\sqrt{1-|a'_k|^2}}{|a''_k|} \dfrac{\langle z, a''_k\rangle}{1-\langle z, a'_k\rangle} \right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

Интересно, что при всех $1 \le p < \infty$ и $1 \le n \le 5$ $\Delta_{nk}(p) = B$, а при любом $n \ge 6$ существуют $p \ge 1$, для которых $B \setminus \Delta_{nk}(p) \ne \emptyset$. Таким образом, рассматриваемая задача при $1 \le n \le 5$ решена полностью, а при $n \ge 6$ существует область $B \setminus \Delta_{nk}(p)$, где экстремальная функция имеет более сложный вид. В одномерном случае подобный эффект разбиения области на некоторые подобласти, в которых экстремальная функция имеет различное число нулей, встречался при восстановлении производных.

Отметим еще одно следствие из полученной теоремы, являющееся обобщением леммы Шварца.

Следствие 2.2.1. *При всех $1 \le p < \infty$ для $a \in B$ таких, что $|a| < \lambda_n(rp)$, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in BH_p \\ (D^\alpha f)(0)=0,\, |\alpha| \le r-1}} |f(a)| = \frac{|a|^r}{(1-|a|^2)^{n/p}} \left[\frac{\Gamma(n+rp/2)}{\Gamma(n)\Gamma(rp/2)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m+rp/2} C^m_{n-1} |a|^{2m} \right]^{1/p}.$$

Ряд аналогичных результатов получен для восстановления в пространствах Бергмана $A_p(B)$.

В §3 рассмотрены задачи восстановления на классах гармонических функций, аналогичные тем, которые рассматривались в §1. Обозначим через h_p пространство гармонических в единичном круге D функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{h_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|u\|_{h_\infty} := \sup_{z \in D} |u(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

На классе Bh_∞ решена задача восстановления функционала (7) по информационному оператору (8) при $\xi, z_1, \ldots, z_n \in (-1, 1)$ и $m \le (2\nu - 1)_+$, а также при $\nu = 0$, $m = 1$. Кроме того, получены оптимальные методы восстановления на классах Bh_2 и Ba_2 (последний является аналогом класса Бергмана для гармонических функций).

В §4 исследуются задачи оптимального выбора информационного оператора и тесно связанные с ними задачи о нахождении n-поперечников. При этом центральным местом является решение одной экстремальной задачи для эллиптических функций, с помощью которой удается найти оптимальные узлы интерполяции, некоторые точные значения n-поперечников, а также построить оптимальные квадратурные формулы, изучаемые в гл. IV.

Положим

$$\Lambda_s := \{ \theta : \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s), \quad 0 \le \theta_1 \le \ldots \le \theta_s < 2\pi \},$$
$$\kappa(x) = 4x^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{m(m+1)} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2} \right)^{-2}.$$

Через $\| \cdot \|_q$ будем обозначать норму в пространстве $L_q[0, 2\pi]$.

Теорема 2.4.2. *Пусть φ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, определенная на $[0, 1]$, такая, что φ' положительна и возрастает в интервале $(0, 1)$. Тогда при всех $k \in (0, 1)$ и $s \in \mathbb{N}$*

$$\inf_{\theta \in \Lambda_s} \left\| \varphi \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left| k^{s/2} \prod_{j=1}^{s} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} (\cdot - \theta_j) \right) \right| \right) \right\|_q$$
$$= \begin{cases} \left(\dfrac{2\pi}{\Lambda} \displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi^q \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{\lambda} t) \right) dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} \right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \varphi \left(\dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda} \right), & q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-\pi K'/K}\right)$, *а* K, K' *и* Λ *— полные эллиптические интегралы первого рода для модулей* k, $k' = \sqrt{1-k^2}$ *и* λ, *соответственно. Причем, если для* $\theta^* \in \Lambda_s$ *достигается инфимум, то* $\theta^*_{j+1} - \theta^*_j = 2\pi/s$, $j = 1, \dots, s-1$.

Обозначим через $H_\infty(G)$ класс аналитических в области $G \in \mathbb{C}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_\infty(G)} := \sup_{z\in G} |f(z)| < \infty.$$

Аналогичное обозначение $h_\infty(G)$ будем использовать для гармонических функций. Пусть $D_H := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < H\}$ и $\widetilde{H}_\infty(D_H)$ — множество 2π-периодических функций из $H_\infty(D_H)$. Положим

$$e_n([0,2\pi), B\widetilde{H}_\infty(D_H)) := \inf_{t_j\in[0,2\pi)} \sup_{t\in[0,2\pi)} e(t, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H)),$$

где $I_\tau f = \{f(t_1), \dots, f(t_n)\}$.

Теорема 2.4.4. *Пусть* $k = \kappa(e^{-2H})$, *а* $\lambda = \kappa(e^{-2Hn})$. *Тогда*

1) *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$e_n([0,2\pi), B\widetilde{H}_\infty(D_H)) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}, & n = 2s, \\ \sqrt{k\lambda}, & n = 2s-1, \end{cases}$$

причем единственными с точностью до сдвига оптимальными узлами являются узлы $t^*_j = (j-1)2\pi/n$, $j = 1, \dots, n$;

2) *метод*

$$f(t) \approx \frac{K}{n\Lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{n\Lambda}{\pi}t, \lambda\right) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j c_n\left(\frac{K}{\pi}t - j\frac{2K}{n}\right) f\left(j\frac{2\pi}{n}\right),$$

в котором

$$c_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{sn}(x,k)} + i\mu, & n = 2s, \\ \dfrac{\operatorname{dn}^2(x,k)}{\operatorname{sn}(x,k)}, & n = 2s-1, \end{cases}$$

а μ *— произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию* $|\mu| \le 1-k$, *является оптимальным методом восстановления на классе* $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$.

Вторая часть §4 посвящена нахождению точных значений колмогоровских, линейных и гельфандовских n-поперечников, которые обозначаются через d_n, λ_n и d^n, соответственно. Приведем некоторые из полученных результатов.

Пусть A_H — класс функций, вещественных на вещественной оси, 2π-периодических, аналитически продолжаемых в полосу D_H

и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re} f(z)| \le 1$. Множество функций из $\widetilde{H}_\infty(D_H)$, вещественных на вещественной оси, обозначим через $\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H)$. Положим

$$I_{q0}(\lambda) := \int_0^1 \frac{t^q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}},$$

$$I_{q1}(\lambda) := \int_0^1 \frac{\arctan^q(\sqrt{\lambda}t)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}.$$

Теорема 2.4.8. *При всех* $1 \le q < \infty$

$$d_{2n}(A_H, L_q) = \lambda_{2n}(A_H, L_q) = d^{2n}(A_H, L_q) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} I_{q1}(\lambda)\right)^{1/q}$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} + O\left(e^{-5Hn}\right),$$

где $\lambda = \kappa(e^{-4Hn})$.

Теорема 2.4.9. *При всех* $1 \le q \le \infty$

$$d_{2n}(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q) = \lambda_{2n}(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q) = d^{2n}(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\lambda}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda} I_{q0}(\lambda)\right)^{1/q} = 2\left(2\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} \\ \qquad\qquad + O\left(e^{-5Hn}\right), & 1 \le q < \infty, \\ \sqrt{\lambda} = 2e^{-Hn} + O\left(e^{-5Hn}\right), & q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa(e^{-4Hn})$.

В §5 мы доказываем теорему, двойственную к теореме Р.С.-Исмагилова **[27]**, и с помощью этого результата находим некоторые точные значения гельфандовских и линейных поперечников для многомерных классов Харди и Бергмана.

Пусть H — гильбертово пространство, S — компакт, μ — неотрицательная мера на нем, удовлетворяющая условию $\mu(S) = 1$, и $T\colon H \to C(S)$ — линейный ограниченный оператор. Рассматривая оператор T как оператор из H в $L_2(S,\mu)$, предположим, что

$$T^*T\phi_j = \lambda_j\phi_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\lambda_1 \ge \lambda_{\ge} \ldots > 0$, а $\phi_1, \phi_2, \ldots$ образуют полную ортонормированную систему в образе оператора T^*T (для выполнения этих условий достаточно, например, компактности оператора T).

Теорема 2.5.1. *Имеют место соотношения*

$$\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}\lambda_j} \le d^N(T(BH),C(S)) = \lambda_N(T(BH),C(S)) \le \sup_{z\in S}\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}|(T\phi_j)(z)|^2}.$$

Пусть функция $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, разлагается в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}c_\alpha z^\alpha. \tag{11}$$

Обозначим через $F_s(z)$ сумму членов $c_\alpha z^\alpha$ степенного ряда, у которых $|\alpha|=s$. Тогда степенной ряд (11), записанный в виде

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}F_s(z), \tag{12}$$

называется однородным разложением функции f. Радиальная производная порядка r для функции, имеющей однородное разложение (12), определяется равенством

$$\mathcal{R}^r f(z) := \sum_{s=r}^{\infty}\frac{s!}{(s-r)!}F_s(z).$$

Обозначим через $H\mathcal{R}_2^r(B_n)$ класс функций f, голоморфных в $B_n := \{z\in\mathbb{C}^n : |z|<1\}$, для которых $\mathcal{R}^r f \in BH_2(B_n)$. Через $A\mathcal{R}_2^r(B_n)$ будем обозначать класс функций f, голоморфных в B_n, для которых $\mathcal{R}^r f\in BA_2(B_n)$.

Положим

$$S_\rho := \{\, z\in\mathbb{C}^n : |z|=\rho\,\}, \quad C_\rho = C(S_\rho), \quad N_m := \sum_{s=0}^{m-1}C_{n+s-1}^{n-1}.$$

Число N_m равно размерности пространства полиномов от n переменных степени не выше $m-1$.

Теорема 2.5.2. *При всех* $0<\rho<1$ *и* $m\ge r\ge 0$

$$d^{N_m}\left(H\mathcal{R}_2^r(B_n),C_\rho\right) = \lambda_{N_m}\left(H\mathcal{R}_2^r(B_n),C_\rho\right) = \rho^m\left(\frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{((m-r+s)!)^2(n+m-1+s)!}{((m+s)!)^3}\rho^{2s}\right)^{1/2}.$$

При всех $0 < \rho < 1$ *и* $m \geq r \geq 1$

$$d^{N_m}\left(A\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) = \lambda_{N_m}\left(A\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right)$$
$$= \rho^m\left(\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{((m-r+s)!)^2(n+m+s)!}{((m+s)!)^3}\rho^{2s}\right)^{1/2}.$$

При всех

$$0 < \rho \leq \left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{1}{2m}}$$

$$d^{N_m}\left(BA_2(B_n), C_\rho\right) = \lambda_{N_m}\left(BA_2(B_n), C_\rho\right)$$
$$= \rho^m\left(\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+m+s)!}{(m+s)!}\rho^{2s}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{\rho^m}{(1-\rho^2)^{(n+1)/2}}\left(C_{n+m}^n\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{1+s/m}C_n^s\rho^{2s}\right)^{1/2}.$$

Аналогичные результаты получены для классов Харди и Бергмана в единичном поликруге.

В §6 исследуются задачи восстановления, подобные задачам, рассмотренным в §§1 и 3, по информации о значениях функции в бесконечных системах точек $\{z_j\}_1^\infty$ и $\{z_j\}_\infty^\infty$. С помощью этих результатов найдены в явном виде оптимальные методы в одной задаче, поставленной Сунь Юн-Шеном [**130**].

Пусть W — некоторый класс функций, определенных на всей вещественной оси. Обозначим через $\widetilde{\Theta}_\tau$, $\tau > 0$, системы узлов $\{\xi_j\}_{-\infty}^\infty$, для каждой из которых

1) существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$-n\tau \leq \xi_{-n} < \xi_{-n+1} < \ldots < \xi_{n-1} < n\tau,$$

2) $\xi_{j+2n} = 2n\tau + \xi_j$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$e(\tau, W) := \inf_{\xi\in\widetilde{\Theta}_\tau}\sup_{x\in\mathbb{R}}\inf_{S\colon I_\xi(W)\to\mathbb{R}}\sup_{f\in W}|f(x) - S(I_\xi f)|,$$

где

$$I_\xi f := \{f(\xi_j)\}_{-\infty}^\infty.$$

Систему узлов, на которой достигается нижняя грань, будем называть оптимальной.

Теорема 2.6.1. *Имеют место равенства*

$$e(\tau, BH_\infty(D_H)) = \left(\kappa(\exp(-4\pi H/\tau))\right)^{1/2},$$

$$e(\tau, Bh_\infty(D_H)) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)\dfrac{\pi H}{\tau}\right]}. \tag{13}$$

Система $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ является оптимальной в обоих случаях, а соответствующие этой системе оптимальные методы имеют вид

$$f(x) \approx \frac{\pi}{K'} \operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{f(j\tau)}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2H}(x - j\tau)\right]},$$

$$u(x) \approx \frac{\pi}{K'} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)}{1 + k \operatorname{sn}^2\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{u(j\tau)}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2H}(x - j\tau)\right]},$$

где $k = \kappa(\exp(-4\pi H/\tau))$.

Равенство (13) и оптимальность узлов $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ для класса $Bh_\infty(D_H)$ были получены ранее Сунь Юн-Шеном [**131**], [**133**].

В третьей главе рассмотрены задачи оптимального восстановления ограниченных аналитических функций и их производных по неточно заданной информации.

Пусть $D_k := \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/\sqrt{k}\right\}$. Если в оптимальном методе восстановления на классе $BH_\infty(D_k)$ по точным значениям в системе узлов $\tau := (t_1, \dots, t_n)$, $t_j \in (-1, 1)$, использовать приближенные значения функции в этих узлах, заданные с погрешностью в норме пространства l_q^n, то оценка погрешности такого метода выражается через величину

$$L_n(\tau, p, k) := \max_{t \in [-1,1]} \|D(t)\|_p,$$

где $D(t) := (D_1(t), \dots, D_n(t))$, $1/p + 1/q = 1$, $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве l_p^n,

$$D_j(t) := \frac{\omega_j(t)}{\omega_j(t_j)}\left(1 - kW_j^2(t)\right), \quad \omega_j(t) := \prod_{m \neq j} W_m(t),$$

$$W_j(t) = \frac{t - t_j}{1 - kt_j t}.$$

При $k = 0$ величина $L_n(\tau, p, 0)$ совпадает с хорошо известной в теории приближения величиной $\Lambda_n(\tau, p)$, носящей название константы Лебега и возникающей в различных задачах, связанных с приближениями интерполяционными многочленами Лагранжа.

В §1 исследуется поведение величины $L_n(\tau, p, k)$ для системы узлов

$$Z := \left\{\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1\right)K, k\right]\right\}_1^n,$$

являющейся аналогом чебышевской системы

$$T := \left\{\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right\}_1^n.$$

В силу равенства $L_n(Z,p,0) = \Lambda_n(T,p)$ полученные результаты обобщают ряд известных результатов относительно величин $\Lambda_n(T,p)$.

Теорема 3.1.3. *При выполнении неравенства*

$$n \geq \frac{8k}{(1-k)^2} + 1$$

имеет место равенство

$$L_n(Z,1,k) = \frac{2}{\pi}\log n + A(k) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{a_s}{n^{2s}}\left[B_{2s}\left(2^{2s-1}-1\right) - 4sH_{2s-1}(k)\right] + \frac{a_m}{n^{2m}}\rho_m(n,k) - h^{2n}\left[\frac{8}{\pi}\log n + B(k)\right]\theta_n(k),$$

где

$$A(k) := \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \log\frac{4}{(1+k)K}\right),$$

$\gamma = 0.5772\ldots$ — *постоянная Эйлера,* B_{2s} — *числа Бернулли,*

$$a_s := 4\frac{|B_{2s}|\left(2^{2s-1}-1\right)\pi^{2s-1}}{2^{2s}s(2s)!},$$

$$H_s(k) := \sum_{r=1}^{\infty}\frac{h^{2r-1}}{1+h^{2r-1}}(2r-1)^s, \quad h := e^{-\frac{\pi K'}{2K}},$$

$$-2\pi m H_{2m}(k) \leq (-1)^{m+1}\rho_m(n,k) \leq 2\pi m H_{2m}(k) + |B_{2m}|\left(2^{2m-1}-1\right),$$

$$B(k) := 4A(k) + \frac{2}{3}\pi^2 H_2(k) + \frac{\pi}{18}, \quad 0 \leq \theta_n(k) \leq 1.$$

В §2 изучается задача оптимального восстановления функции из класса BH_∞ в точке $z_0 \in D$ по значениям информационного оператора

$$If := f\big|_E, \quad E \subset D,$$

заданного с погрешностью δ в норме пространства $C(E)$. Из общих результатов (см. (4)) вытекает следующее равенство для погрешности оптимального восстановления

$$e(z_0,E,\delta) = \sup_{\substack{f\in BH_\infty \\ |f(z)|\leq\delta,\ z\in E}} |f(z_0)|. \tag{14}$$

Экстремальная задача (14) для $E = (-1,0)$ известна как задача Мию, для $E = \{z \in D : |z| \leq r\}$ — как задача Уолша и для $E = [a,b] \subset (-1,1)$ — как задача Хейнса. Более общие задачи подобного типа изучались С. Я. Хавинсоном [**74**].

Для задачи (14) характерным является эффект “очистки”, когда решение совпадает с решением аналогичной задачи для множества $E_1 \subset E$, состоящем из конечного или дискретного множества точек. С точки зрения восстановления этот эффект означает, что из всех значений восстанавливаемой функции на E достаточно знать ее значения на E_1, а информация о значениях в точках множества $E \setminus E_1$ является лишней.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество таких $E_1 \subset E$, для которых решение задачи (14) для E и E_1 совпадают. Порядком информативности множества E при заданных z_0 и δ будем называть величину

$$\operatorname{In}(z_0, E, \delta) := \inf_{E_1 \subset \mathcal{E}} \operatorname{card} E_1,$$

а множества, на которых достигается эта нижняя грань, назовем полными информативными системами.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $E \subset (-1, 1)$ *— замкнутое множество,* $0 < \delta < 1$ *и* $z_0 \in (-1, 1) \setminus E$. *Тогда*

1) *экстремальная функция в задаче* (14), *нормированная условием* $f^*(z_0) > 0$, *существует, единственна и имеет вид*

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1), \quad \lambda = 1 \text{ или } 1; \qquad (15)$$

2) *функция* (15), *нормированная условием* $f^*(z_0) > 0$, *является экстремальной в задаче* (14) *тогда и только тогда, когда при всех* $z \in E$ $|f^*(z)| \le \delta$ *и найдутся точки* $x_1 < \ldots < x_m$, $x_j \in E$, *такие, что*

$$f^*(x_j) = \begin{cases} (-1)^{p+j}\delta, & j = 1, \ldots, p, \\ (-1)^{p+j+1}\delta, & j = p+1, \ldots, m, \end{cases}$$

где $0 \le p \le m$ *таково, что* $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$ $(x_0 := -1,\ x_{m+1} := 1)$, *а* $\lambda = (-1)^{p+m}$. *При этом* $\operatorname{In}(z_0, E, \delta) = m$, *а точки* $x_1, \ldots, x_m$ *являются полной информативной системой.*

В этом же параграфе строится оптимальный метод восстановления и указывается алгоритм нахождения полной информативной системы.

В §3 исследуется зависимость порядка информативности от величины погрешности δ. Положим

$$\delta_n(E) := \inf_{B \in \mathcal{B}_n} \|B\|_{C(E)},$$

где $\mathcal{B}_n$ — множество произведений Бляшке порядка не выше n.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $E \subset (-1, 1)$ *— замкнутое множество и* $z_0 \in (-1, 1) \setminus E$. *Тогда*

1) *при* $\delta_n(E) \le \delta < \delta_{n-1}(E)$ $(\delta_0(E) := 1)$ *справедливы неравенства*

$$n \le \operatorname{In}(z_0, E, \delta) \le n + 1,$$

причем, если $z_0 \in (-1, 1) \setminus \operatorname{co} E$, *то*

$$\operatorname{In}(z_0, E, \delta) = n;$$

2) *при всех* $\delta \in (0,1)$

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \geq c(E) \log \frac{1}{\delta},$$

кроме того,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathrm{In}(z_0, E, \delta)}{\log \dfrac{1}{\delta}} = c(E),$$

где $c(E)$ *— емкость конденсатора* $(E, \mathbb{C} \setminus D)$.

В §4 рассматриваются задачи восстановления для случаев, когда $E = [-l, 0]$ $(l \in (0,1))$, $(-1,0)$ и $z_0 \in (0,1)$. Исследуется также задача об оптимальной интерполяции, под которой понимается задача о нахождении величины

$$e_n(E, \delta) := \inf_{\substack{F \subset E \\ \mathrm{card}\, F \leq n}} \sup_{z_0 \in E} e(z_0, E, \delta)$$

и множества F_0, на котором достигается нижняя грань.

§5 посвящен восстановлению производных ограниченных аналитических и гармонических функций по неточным данным.

Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и $E \subset \Omega$. Положим

$$e^{(k)}(z_0, E, \delta, W) := \inf_{S\colon C(E) \to \mathbb{C}} \sup_{f \in W} \sup_{\substack{y \in C(E) \\ \|f - y\|_{C(E)} \leq \delta}} |f^{(k)}(z_0) - S(y)|.$$

Теорема 3.5.1. *Для всех* $0 < \delta < 1$ *и* $z_0 \in (-1,1)$ *метод*

$$f'(z_0) \approx \frac{2\pi}{D'(1-\delta^4)(1-z_0^2)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\mathrm{sh}^2\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{D'}\right)} \widetilde{f}(z_j),$$

где

$$z_j = \frac{\mathrm{th}\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{2D'}\right) + z_0}{1 + z_0 \,\mathrm{th}\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{2D'}\right)},$$

D *и* D' *— полные эллиптические интегралы первого рода для модулей* δ^2 *и* $\sqrt{1-\delta^4}$*, соответственно, является оптимальным методом восстановления на классе* BH_∞ *по значениям, заданным на множестве* $(-1,1)$ *с погрешностью* δ*, и*

$$e'(z_0, (-1,1), \delta, BH_\infty) = \frac{2\delta D'}{\pi(1-z_0^2)} = \frac{4}{\pi(1-z_0^2)} \delta \log \frac{2}{\delta} + O\left(\delta^5 \log \frac{2}{\delta}\right).$$

С помощью конформного отображения полосы D_H на единичный круг D из этого результата получаем

$$e'(z_0, \mathbb{R}, \delta, BH_\infty(D_H)) = \frac{\delta D'}{2H}.$$

Из последнего равенства и общего соотношения (4) следует точное неравенство колмогоровского типа для производных функций $f \in BH_\infty(D_H)$

$$\|f'\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{2H}\|f\|_{C(\mathbb{R})}\|f\|^2_{H_\infty(D_H)} \times \int_0^{\pi/2} \left(\|f\|^4_{H_\infty(D_H)}\cos^2 t + \|f\|^4_{C(\mathbb{R})}\sin^2 t\right)^{-1/2} dt.$$

Задача восстановления второй производной несколько отличается от рассмотренной задачи. Оказывается, что здесь существует некоторое значение $\delta_0 \in (0,1)$ такое, что характер поведения экстремальной функции качественно меняется в зависимости от того, какому из множеств $(0,\delta_0]$ или $(\delta_0,1)$ принадлежит величина погрешности задания исходных данных δ. Значение δ_0 является решением уравнения

$$C(\delta) := \frac{8}{3}\left[\frac{1-5\delta^4}{2}\left(\frac{D'}{\pi}\right)^2 - 1\right] = 0$$

(вычисления показывают, что $\delta_0 = 0,2145\ldots$).

Положим

$$F(x) := \frac{4}{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\pi D}{D'}x\right)} \times \left[1 - \frac{D'}{2\pi}\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi D}{D'}x\right)\frac{\operatorname{cn}(Dx,\delta^2)(1+\delta^4\operatorname{sn}^2(Dx,\delta^2))}{\operatorname{sn}(Dx,\delta^2)\operatorname{dn}(Dx,\delta^2)}\right].$$

Можно показать, что при любом $\delta \in (\delta_0,1)$ существует $\gamma \in (0,1)$, для которого $F(\gamma) = 0$.

Теорема 3.5.3. *При всех* $0 < \delta < 1$ *метод* $f''(0) \approx S_2(\delta)\widetilde{I}f$, *где при* $0 < \delta \le \delta_0$

$$S_2(\delta)\widetilde{I}f := -C(\delta)\widetilde{f}(0) + 8\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\ne 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D}{D'}\right)}\widetilde{f}\left(\operatorname{th}\left(j\frac{\pi D}{D'}\right)\right),$$

а при $\delta_0 < \delta < 1$

$$S_2(\delta)\widetilde{I}f := \frac{4\pi}{D'} \frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{sn}(D\gamma,\delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{2D'}\right)\operatorname{dn}^2(D\gamma,\delta^2)}$$

$$\times \sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq 0}}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D}{D'}\right)}{\operatorname{sh}^2\left((2j-\gamma)\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{sh}^2\left((2j+\gamma)\dfrac{\pi D}{D'}\right)} \widetilde{f}(x_j),$$

$$x_j := \sqrt{\operatorname{th}\left((2j-\gamma)\frac{\pi D}{2D'}\right)\operatorname{th}\left((2j+\gamma)\frac{\pi D}{2D'}\right)}\operatorname{sign} j,$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞ *по значениям, заданным на множестве* $(-1,1)$ *с погрешностью* δ, *и*

$$e''(0,(-1,1),\delta,BH_\infty) = \begin{cases} \delta(1-\delta^4)\left(\dfrac{2D'}{\pi}\right)^2, & 0 < \delta \le \delta_0,\\ \dfrac{4D'}{\pi}\dfrac{\delta(1-\delta^4)\operatorname{sn}(D\gamma,\delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{dn}(D\gamma,\delta^2)}, & \delta_0 < \delta < 1. \end{cases}$$

Ряд аналогичных результатов получен также для класса Bh_∞.

Глава IV посвящена задачам построения наилучших и оптимальных квадратурных формул. Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей интервал вещественной оси (a,b). Рассматривается задача оптимального восстановления функционала

$$Lf := \int_a^b f(x)p(x)\,dx$$

для функций $f \in W$ по точным значениям информационного оператора

$$If := \left\{ f(x_1),\dots,f^{(\nu_1-1)}(x_1),\dots,f(x_n),\dots,f^{(\nu_n-1)}(x_n) \right\},$$

где p — весовая функция, а $x_1,\dots,x_n$ — различные точки из множества $\mathbb{R}\cap\Omega$.

Положим для $\nu := (\nu_1,\dots,\nu_n)$

$$\tau_\nu := \begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n\\ \nu_1,\dots,\nu_n \end{pmatrix},$$

$$e(\tau_\nu,W,p) := e(L,I,W,0).$$

Из общей теории следует, что среди оптимальных методов восстановления существует линейный, т.е. квадратурная формула. Ее мы и называем наилучшей для данной системы узлов τ_ν.

В §1 находятся наилучшие квадратурные формулы при четных кратностях $\nu_1, \dots, \nu_n$ для классов BH_∞ и Bh_∞.

Положим

$$e(\nu, W, p) := \inf_{\substack{x_1 < \dots < x_n \\ x_j \in \Omega \cap \mathbb{R}}} e(\tau_\nu, W, p).$$

Точки, на которых достигается нижняя грань назовем оптимальными узлами. Наилучшую квадратурную формулу для оптимальных узлов будем называть оптимальной.

В §3 с помощью ряда вспомогательных результатов, полученных в §2, доказывается существование оптимальных квадратурных формул для любых кратностей на классах BH_∞ и Bh_∞. В общем случае оптимальные узлы могут быть не единственны. Соответствующий пример приведен в §2. Однако, если зафиксировать отрезок интегрирования, то для достаточно больших областей аналитичности (или гармоничности) единственность имеет место.

Теорема 4.3.2. *Пусть $[a, b] = [-1, 1]$ и для весовой функции p (быть может, зависящей от k) при всех $k \in (0, k_0)$, $0 < k_0 \le 1$, выполнено условие*

$$\frac{\inf\limits_{t_j} \displaystyle\int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{N} (t - t_j)^2 p(t)\, dt}{\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\, dt} \ge \gamma_N > 0.$$

Тогда для всех $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ таких, что $\sum_{j=1}^{n} [(\mu_j + 1)/2] \le N$ и всех

$$0 < k \le \min \left\{ k_0, \frac{2r - 1}{18r - 7 + N 4^{N+1} \gamma_N^{-1}} \right\},$$

где $r := \min\limits_{1 \le j \le n} [(\mu_j + 1)/2]$, оптимальные узлы для классов $BH_\infty(D_k)$ и $BH_\infty(D_k)$ единственны.

Для чебышевского веса $p_0(t) := \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$, $[a, b] = [-1, 1]$ на классах $BH_\infty(Э_c)$ и $Bh_\infty(Э_c)$, где $Э_c$ — внутренность эллипса с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей $c > 1$, удается точно решить задачу об оптимальной квадратурной формуле. Положим

$$I_{q2}(\lambda) := \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{\lambda} t)^q\, dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \lambda^2 t^2)}}.$$

Теорема 4.3.3. *Пусть q — четное число. Тогда для любого $c > 1$ при всех $q-1 \le \nu_j \le q$ имеют место равенства*

$$e(\nu, BH_\infty(Э_c), p_0) = \frac{\pi}{\Lambda}\lambda^{q/2} I_{q0}(\lambda) = 2^{q/2}\pi\frac{(q-1)!!}{(q/2)!}c^{-qn} + O\left(c^{-(q+4)n}\right),$$

$$e(\nu, Bh_\infty(Э_c), p_0) = \frac{4}{\Lambda} I_{q2}(\lambda) = 2^{q/2+2}\frac{(q-1)!!}{(q/2)!}c^{-qn} + O\left(c^{-(q+4)n}\right),$$

где $\lambda = \kappa(c^{-4n})$, а единственными оптимальными узлами являются чебышевские узлы

$$x_j := \cos\frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В §3 изучается также задача оптимального интегрирования по приближенным значениям функций. Рассмотрим величину $e(L, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta)$, когда

$$Lf = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt,$$

$I_\tau f = (f(t_1), \ldots, f(t_n))$, $t_j \in [0, 2\pi)$ — различные точки, а погрешность измеряется в норме l_q^n, $1 \le q \le \infty$. Положим в этом случае

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta) := \inf_{t_j \in [0,2\pi)} e(L, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta). \tag{16}$$

Узлы, на которых достигается нижняя грань будем называть оптимальными.

Таким образом, задача (15) является задачей о нахождении оптимального метода интегрирования функции $f \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$, использующего n приближенных значений $\widetilde{f}(t_1), \ldots, \widetilde{f}(t_n)$ таких, что

$$\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{f}(t_j) - f(t_j)|^q\right)^{1/q} \le \delta \quad \text{при} \quad 1 \le q < \infty$$

или

$$\max_{1 \le j \le n} |\widetilde{f}(t_j) - f(t_j)| \le \delta \quad \text{при} \quad q = \infty.$$

Положим

$$J_r(\lambda, \Delta) := \int_0^1 \left(\frac{\lambda t^2 + \Delta}{1 + \Delta\lambda t^2}\right)^{r/2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}.$$

Теорема 4.3.4. *Пусть $1 \le q \le \infty$ и $0 \le \delta < n^{1/q}$. Тогда*

1) *квадратурная формула*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \approx \frac{2\pi}{n}(1-\Delta^2)^{-1}\left(1 - \Lambda^{-1}J_4(\lambda, \Delta)\right)\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{f}\left(j\frac{2\pi}{n}\right),$$

в которой $\Delta = \delta n^{-1/q}$, а $\lambda = \kappa(e^{-2Hn})$, является оптимальным методом интегрирования на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ по значениям, заданным с погрешностью δ в норме l_q^n;

2) *имеет место равенство*

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta) = 2\pi\Lambda^{-1}J_2(\lambda,\delta n^{-1/q}) = 2\pi\delta n^{-1/q}$$
$$+\,4\pi(1-\delta^2 n^{-2/q})e^{-Hn} + 4\pi\delta(4-3\delta^2 n^{-2/q})n^{-1/q}e^{-2Hn} + O\left(e^{-3Hn}\right);$$

3) *узлы* $t_j^* = (j-1)\dfrac{2\pi}{n}$, $j=1,\ldots,n$, *— единственные с точностью до сдвига оптимальные узлы.*

Аналогичная задача решена для класса $BH_\infty(Э_c)$, $[a,b]=[-1,1]$ и чебышевского веса p_0.

Содержание диссертации отражено в публикациях [**37**], [**46**]–[**57**], [**112**]–[**115**]. Главы диссертации докладывались на XI Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (1986 г., Челябинск), Международном симпозиуме по оптимальным алгоритмам (1989 г., Варна), VIII конференции по теоретическим основам и конструированию численных алгоритмов решения задач математической физики (1990 г., Красновидово), I Межвузовской конференции по теории функций и аппроксимации (1991 г., Симферополь), а также на семинарах Математического института им. В.А. Стеклова и Московского государственного университета.

Глава 1

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ

§1. Критерий существования линейных и аффинных оптимальных методов восстановления многозначных отображений в алгебраическом случае

Пусть заданы непустое множество A, метрическое пространство (Z, ρ) и многозначное отображение (м. о.) $\Phi\colon A \to Z$, т.е. каждому $x \in A$ ставится в соответствие непустое множество $\Phi(x) \subset Z$. Множество

$$\operatorname{gr}\Phi := \{\, (x, z) \in X \times Z : x \in A,\ z \in \Phi(x) \,\}$$

называется графиком м. о. Φ. Рассмотрим задачу восстановления м. о. Φ однозначным отображением $\varphi\colon A \to Z$ (в дальнейшем будем отмечать лишь многозначность отображения).

Величину

$$E(\Phi, \varphi) := \sup_{(x,z) \in \operatorname{gr}\Phi} \rho(z, \varphi(x))$$

назовем погрешностью восстановления м. о. Φ отображением φ. Величину

$$E(\Phi) := \inf_{\varphi} E(\Phi, \varphi), \tag{1.1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям $\varphi\colon A \to Z$, будем называть погрешностью оптимального восстановления, а всякое отображение φ, на котором достигается нижняя грань в (1.1), — оптимальным методом восстановления.

С задачей (1.1) тесно связана следующая величина

$$R(\Phi) := \sup_{x \in A} \inf_{c \in Z} \sup_{z \in \Phi(x)} \rho(z, c),$$

называемая радиусом многозначности м. о. Φ.

Лемма 1.1.

$$E(\Phi) = R(\Phi). \tag{1.2}$$

Это утверждение в той или иной степени общности доказывалось многими авторами [**93**], [**23**], [**2**], [**108**], [**9**], [**109**], [**69**], [**3**]. В том виде, в котором оно сформулировано здесь, его можно найти в работе [**3**].

В дальнейшем будем рассматривать непустые множества $A \subset X$, где X — линейные пространства над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если в некотором утверждении о линейных пространствах поле явно не указано, то считается, что утверждение относится к обоим случаям.

Через X' обозначим алгебраически сопряженное пространство к X, т.е. пространство всех линейных функционалов на X. Если $X_0 \subset X$ — линейное подпространство, то аннулятором называется множество

$$X_0^{\perp} := \{\, x' \in X' : \langle x', x\rangle = 0 \ \forall x \in X \,\}\,.$$

Через $\operatorname{co} A$ и $\operatorname{bco} A$ будем обозначать выпуклую и выпуклую уравновешенную оболочки A. Если $a \in X$, то $\operatorname{bco}_a A := \operatorname{bco}(A-a)+a$.

Для линейных пространств X, Z, множества $A \subset X$ и м. о. $\Phi\colon A \to Z$ через $\operatorname{co}\Phi$ и $\operatorname{bco}_\xi \Phi$ обозначаем м. о., определенные равенствами

$$\operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi := \operatorname{co}\operatorname{gr}\Phi, \quad \operatorname{gr}\operatorname{bco}_\xi\Phi := \operatorname{bco}_\xi \operatorname{gr}\Phi,$$

где $\xi \in X \times Z$ (при $\xi = 0$ пишем просто $\operatorname{bco}\Phi$). М. о. Φ_ξ определим равенством

$$\operatorname{gr}\Phi_\xi := \operatorname{gr}\Phi - \xi.$$

Очевидно, что

$$R(\Phi_\xi) = R(\Phi). \tag{1.3}$$

Тем самым, поскольку

$$\operatorname{bco}_\xi \Phi = (\operatorname{bco}\Phi_\xi)_{-\xi} \tag{1.4}$$

имеем

$$R(\operatorname{bco}_\xi \Phi) = R(\operatorname{bco}\Phi_\xi). \tag{1.5}$$

М. о. будем называть выпуклым, если $\operatorname{co}\Phi = \Phi$, и выпуклым уравновешенным относительно $\xi \in X \times Z$, если $\operatorname{bco}\xi\Phi = \Phi$ (при $\xi = 0$ такое м. о. называем просто выпуклым уравновешенным).

Лемма 1.2. *Пусть X — линейное пространство, $X_0 \subset X$ — линейное подпространство, $A \subset X$ — непустое множество и $x_0' \in X'$. Тогда*

$$\inf_{x' \in X_0^{\perp}} \sup_{x \in A} |\langle x_0' - x', x\rangle| = \sup_{x \in \operatorname{bco} A \cap X_0} |\langle x_0', x\rangle|$$

и нижняя грань достигается.

Доказательство. 1. Оценка снизу. Пусть $x \in \operatorname{bco} A$ и $x' \in X'$. Тогда $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, $x_j \in A$, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \le 1$ и

$$|\langle x', x\rangle| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x', x_j\rangle\right| \le \max_{1\le j\le n} |\langle x', x_j\rangle| \le \sup_{x\in A} |\langle x', x\rangle|.$$

Отсюда

$$\sup_{x\in A} |\langle x', x\rangle| \ge \sup_{x \in \operatorname{bco} A} |\langle x', x\rangle|,$$

а в силу очевидного обратного неравенства получаем, что для любого $x' \in X'$

$$\sup_{x \in A} |\langle x', x\rangle| = \sup_{x \in \operatorname{bco} A} |\langle x', x\rangle|. \tag{1.6}$$

Пусть $x' \in X_0^{\perp}$. Тогда

$$\sup_{x \in A} |\langle x_0' - x', x\rangle| = \sup_{x \in \operatorname{bco} A} |\langle x_0' - x', x\rangle| \geq \sup_{x \in \operatorname{bco} A \cap X_0} |\langle x_0' - x', x\rangle|$$
$$= \sup_{x \in \operatorname{bco} A \cap X_0} |\langle x_0', x\rangle| := \rho.$$

2. Оценка сверху. При $\rho = \infty$ утверждение леммы вытекает из 1. Пусть $\rho < \infty$. Обозначим через $\mu(x) := \inf\{t > 0 : x- \in t \operatorname{bco} A\}$ — функционал Минковского множества $\operatorname{bco} A$ и положим

$$p(x) := \begin{cases} \infty, & \mu(x) = \infty, \\ \rho\mu(x), & \mu(x) < \infty. \end{cases}$$

Покажем, что при всех $x \in X_0$

$$|\langle x_0', x\rangle| \leq p(x). \tag{1.7}$$

При $\mu(x) = \infty$ (1.7) очевидно. Если $x \in X_0$ и $\mu(x) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ $x_0 := \dfrac{x}{\mu(x) + \varepsilon} \in \operatorname{bco} A \cap X_0$, т.к. $\mu(x_0) < 1$. Следовательно,

$$|\langle x_0', x\rangle| = |\langle x_0', x_0\rangle|(\mu(x) + \varepsilon) \leq \rho(\mu(x) + \varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ (1.7) доказано. Продолжим по теореме Хана–Банаха x_0' до $x' \in X'$, для которого при всех $x \in X$

$$|\langle x', x\rangle| \leq p(x).$$

Положим $\widehat{x}' := x_0' - x' \in X_0^{\perp}$. Тогда при всех $x \in \operatorname{bco} A$

$$|\langle x_0' - \widehat{x}', x\rangle| = |\langle x', x\rangle| \leq p(x) = \rho\mu(x) \leq \rho.$$

Отсюда

$$\sup_{x \in A} |\langle x_0' - \widehat{x}', x\rangle| \leq \rho.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.2 хорошо известна в топологическом случае для непрерывного линейного функционала x_0' и уравновешенного множества A такого, что $0 \in \operatorname{int} A$ (через $\operatorname{int} A$ обозначается внутренность множества A). Начиная с работы С.М. Никольского [**41**], она часто используется в задачах приближения (см. [**74**], [**25**], [**26**], [**29**], [**31**]). Докажем аналог этой леммы для многозначных отображений. В дальнейшем рассматриваются м. о. $\Phi\colon A \to K$, где $A \subset X$, а X — линейное пространство.

Теорема 1.1. *Пусть $X_0 \subset X$ — линейное подпространство. Тогда*

$$\inf_{x' \in X_0^\perp} E(\Phi, x') = \sup_{(x,\alpha) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco} \Phi \cap (X_0 \times K)} |\alpha|$$

и нижняя грань достигается.

Доказательство. Положим $\widetilde{X} := X \times K$, $\widetilde{X}_0 := X_0 \times K$. Определим $\widetilde{x}'_0 \in \widetilde{X}'$ равенством $\langle \widetilde{x}'_0, (x,\alpha) \rangle := \alpha$, $x \in X$, $\alpha \in K$. Отметим, что для любого $\widetilde{x}' \in \widetilde{X}'$ имеет место представление $\langle \widetilde{x}', (x,\alpha) \rangle = \langle x', x \rangle + \gamma\alpha$, где $\gamma \in K$, $x' \in X'$. Поэтому для $\widetilde{x}' \in \widetilde{X}_0^\perp$ $\gamma = 0$, а $x' \in X_0^\perp$. Применяя лемму 1.2, получаем

$$\inf_{x' \in X_0^\perp} E(\Phi, x') = \inf_{\widetilde{x}' \in \widetilde{X}_0^\perp} \sup_{(x,\alpha) \in \operatorname{gr} \Phi} |\langle \widetilde{x}'_0 - \widetilde{x}', (x,\alpha) \rangle|$$
$$= \sup_{(x,\alpha) \in \operatorname{bco} \operatorname{gr} \Phi \cap \widetilde{X}_0} |\langle \widetilde{x}'_0, (x,\alpha) \rangle| = \sup_{(x,\alpha) \in \operatorname{bco} \operatorname{gr} \Phi \cap (X_0 \times K)} |\alpha|.$$

Из леммы 1.2 также следует, что нижние грани в этих равенствах достигаются. Теорема доказана. □

Положив в теореме 1.1 $X_0 = \{0\}$, получаем

Следствие 1.1.

$$\inf_{x' \in X'} E(\Phi, x') = \sup_{\alpha \in \operatorname{bco} \Phi(0)} |\alpha| \tag{1.8}$$

и нижняя грань достигается.

Через $\operatorname{bco} \Phi(0)$ мы обозначаем значение м. о. $\operatorname{bco} \Phi$ в точке $x = 0$ (не путать с $\operatorname{bco}(\Phi(0))$!).

Отметим, что из доказательства теоремы 1.1 и (1.6) следует, что для любого $x' \in X'$

$$E(\Phi, x') = E(\operatorname{bco} \Phi, x'). \tag{1.9}$$

Обозначим через $\operatorname{Aff}(X)$ множество аффинных функционалов, т.е. функционалов вида $a(x) = \langle x', x \rangle + c$, где $x' \in X'$, а $c \in K$.

Теорема 1.2.

$$\inf_{a \in \operatorname{Aff}(X)} E(\Phi, a) = \inf_{c \in K} \sup_{\alpha \in \operatorname{gr} \operatorname{bco}(\Phi - c)(0)} |\alpha| \tag{1.10}$$

и нижние грани в обеих частях равенства достигаются.

Доказательство. Имеем

$$\inf_{a \in \operatorname{Aff}(X)} E(\Phi, a) = \inf_{c \in K} \inf_{x' \in X'} E(\Phi, \langle x', \cdot \rangle + c) = \inf_{c \in K} \inf_{x' \in X'} E(\Phi - c, x').$$

Из (1.6) получаем, что для любого $c \in K$

$$\inf_{x' \in X'} E(\Phi - c, x') = \sup_{\alpha \in \operatorname{bco}(\Phi - c)(0)} |\alpha|.$$

Отсюда следует равенство (1.10) и то, что достаточно доказать существование нижней грани лишь в одной из частей этого равенства.

Пусть $\xi = (y, c) \in X \times K$ и $a(x) = \langle x', x\rangle + b \in \mathrm{Aff}(X)$. Тогда легко убедиться, что

$$E(\Phi, a) = E(\Phi_\xi, a_1), \tag{1.11}$$

где $a_1(x) = a(x) + \langle x', y\rangle - c$. Если $\xi \in \mathrm{gr}\,\Phi$, то $0 \in \mathrm{gr}\,\Phi_\xi$, поэтому в силу (1.1) достаточно доказать существование нижней грани в левой части (1.10) (обозначим ее для краткости через ρ) при условии $0 \in \Phi(0)$. В этом случае при всех $c \in K$

$$r(c) := \inf_{x' \in X'} \sup_{(x,\alpha) \in \mathrm{gr}\,\Phi} |\alpha - \langle x', x\rangle - c| \geq |c|.$$

Следовательно,

$$\rho = \inf_{|c| \leq \rho} r(c).$$

Остается заметить, что функция $r(c)$ непрерывна. Действительно,

$$r(c_1) = \inf_{x' \in X'} \sup_{(x,\alpha) \in \mathrm{gr}\,\Phi} |\alpha - \langle x', x\rangle - c_2 + c_2 - c_1| \leq r(c_2) + |c_2 - c_1|.$$

Так как c_1 и c_2 можно поменять местами, имеем

$$|r(c_2) - r(c_1)| \leq |c_2 - c_1|.$$

Теорема доказана. □

Соотношения двойственности (1.8) и (1.10) могут быть записаны в терминах радиусов многозначности отображений.

Теорема 1.3.

$$\inf_{x' \in X'} E(\Phi, x') = R(\mathrm{bco}\,\Phi), \tag{1.12}$$

$$\inf_{a \in \mathrm{Aff}(X)} E(\Phi, a) = \inf_{c \in K} R(\mathrm{bco}(\Phi - c)). \tag{1.13}$$

При $K = \mathbb{R}$

$$\inf_{a \in \mathrm{Aff}(X)} E(\Phi, a) = R(\mathrm{co}\,\Phi). \tag{1.14}$$

Нижние грани во всех равенствах достигаются.

Доказательство. Из (1.2), (1.8) и уравновешенности множества $\mathrm{bco}\,\Phi(0)$ получаем

$$R(\mathrm{bco}\,\Phi) = E(\mathrm{bco}\,\Phi) \leq \inf_{x' \in X'} E(\mathrm{bco}\,\Phi, x') = \sup_{\alpha \in \mathrm{bco}\,\Phi(0)} |\alpha| \leq R(\mathrm{bco}\,\Phi).$$

Отсюда

$$\sup_{\alpha \in \mathrm{bco}\,\Phi(0)} |\alpha| = R(\mathrm{bco}\,\Phi), \tag{1.15}$$

что вместе с (1.8), (1.10) доказывает равенства (1.12), (1.13).

Пусть $K = \mathbb{R}$. Определим м. о. Φ_0 равенством

$$\mathrm{gr}\,\Phi_0 := \mathrm{gr}\,\mathrm{co}\,\Phi - \mathrm{gr}\,\mathrm{co}\,\Phi.$$

Очевидно, что $\operatorname{bco}\Phi_0 = \Phi_0$, поэтому из следствия 1.1 вытекает существование $x' \in X'$ такого, что

$$E(\Phi_0, x') = \sup_{\alpha\in\Phi_0(0)} |\alpha| = \sup_{(x,\alpha_1),(x,\alpha_2)\in\operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi} (\alpha_1 - \alpha_2) = 2R(\operatorname{co}\Phi).$$

Таким образом, при всех $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in \operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi$

$$|\alpha_1 - \alpha_2 - \langle x', x_1 - x_2\rangle| \le 2R(\operatorname{co}\Phi).$$

Следовательно,

$$\alpha_1 - \langle x', x_1\rangle - R(\operatorname{co}\Phi) \le \alpha_2 - \langle x', x_2\rangle + R(\operatorname{co}\Phi).$$

Нетрудно понять, что существует такое $c \in \mathbb{R}$, что при всех $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in \operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi$

$$\alpha_1 - \langle x', x_1\rangle - R(\operatorname{co}\Phi) \le c \le \alpha_2 - \langle x', x_2\rangle + R(\operatorname{co}\Phi).$$

Это означает, что

$$\sup_{(x,\alpha)\in\operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi} |\alpha - \langle x', x\rangle - c| \le R(\operatorname{co}\Phi). \tag{1.16}$$

Из (1.2) и (1.16) имеем

$$R(\operatorname{co}\Phi) = E(\operatorname{co}\Phi) \le \inf_{a\in\operatorname{Aff}(X)} E(\operatorname{co}\Phi, a) \le R(\operatorname{co}\Phi).$$

Тем самым, учитывая, что правая часть равенства (1.13) не меняется при замене Φ на $\operatorname{co}\Phi$, получаем

$$\inf_{a\in\operatorname{Aff}(X)} E(\Phi, a) = \inf_{a\in\operatorname{Aff}(X)} E(\operatorname{co}\Phi, a) = R(\operatorname{co}\Phi).$$

Достижимость нижних граней вытекает из следствия 1.1 и теоремы 1.2. Теорема доказана. □

Докажем теперь следующий критерий существования линейного и аффинного оптимальных методов восстановления.

Теорема 1.4. *Для существования $a \in \operatorname{Aff} X$ такого, что*

$$E(\Phi, a) = E(\Phi), \tag{1.17}$$

необходимо и достаточно существования $\xi \in X \times K$ такого, что

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco}_\xi \Phi). \tag{1.18}$$

При $K = \mathbb{R}$ условие (1.17) *эквивалентно равенству*

$$R(\Phi) = R(\operatorname{co}\Phi). \tag{1.19}$$

Для существования $x' \in X'$ такого, что

$$E(\Phi, x') = E(\Phi), \tag{1.20}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco}\Phi). \tag{1.21}$$

Доказательство. Эквивалентность условий (1.20) и (1.21), а также условий (1.19) и (1.17) непосредственно следует из (1.2) и теоремы 1.3. Докажем эквивалентность условий (1.17) и (1.18). Если имеет место (1.17), то

$$R(\Phi) = E(\Phi) = E(\Phi, a) = \inf_{a \in \mathrm{Aff}(X)} E(\Phi, a) = \inf_{c \in K} R(\mathrm{bco}(\Phi - c)) \\ = R(\mathrm{bco}(\Phi - c)) = R(\mathrm{bco}_{(0,c)} \Phi).$$

Пусть теперь выполнено условие (1.18). Тогда из (1.15), теоремы 1.3 и (1.11) имеем

$$E(\Phi) = R(\Phi) = R(\mathrm{bco}_\xi \Phi) = R(\mathrm{bco}\, \Phi_\xi) = \inf_{x' \in X'} E(\Phi_\xi, x') \\ = E(\Phi_\xi, x') = E(\Phi, a).$$

Теорема доказана. □

Следствие 1.2. *Если Φ — выпуклое уравновешенное относительно некоторого $\xi \in X \times K$ м. о. или $K = \mathbb{R}$ и Φ — выпуклое м. о., то существует аффинный оптимальный метод восстановления. Если Φ — выпуклое уравновешенное м. о., то существует линейный оптимальный метод восстановления.*

Вторая часть этого следствия для вещественного случая была доказана в работе [**3**]. Теорема 1.4 является уточнением результата, полученного в работе [**37**].

Отметим, что в комплексном случае условия (1.19) и (1.17) не эквивалентны, т.к. равенство (1.14), вообще говоря, не имеет места. Это показывает следующий пример.

Рассмотрим $X = \mathbb{C}$ и м. о. Φ, определенное на отрезке $[-1, a] \subset X$, $a > 1$, своим графиком в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, отождествленным с $\mathbb{R}^3$, следующим образом: $\mathrm{gr}\, \Phi$ — пирамида, в основании которой лежит квадрат с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1, 0)$, а вершина пирамиды находится в точке $(a, 0, b)$, $1 < b \le \sqrt{a}$.

При всех $x \in [-1, 1]$ $\Phi(x)$ — множество точек, лежащих в трапеции с основаниями, равными 2, $2\dfrac{a - x}{a + 1}$ и высотой $b\dfrac{x + 1}{a + 1}$. Нетрудно убедиться, что при всех $x \in [-1, 1]$

$$\inf_{c \in \mathbb{C}} \sup_{\alpha \in \Phi(x)} |\alpha - c| = 1. \tag{1.22}$$

Причем чебышевский центр (т.е. точка, на которой достигается нижняя грань) $c = 0$ (в $\mathbb{R}^3$ — это точка $(x, 0, 0)$). Если же $x \in (1, a]$, то $\Phi(x)$ — также трапеция и $\Phi(x) - b\dfrac{x - 1}{a - 1} \subset \Phi(1)$. Поэтому величина, стоящая в левой части (1.22) не превосходит 1 для $x \in (1, a]$. Итак,

$$R(\Phi) = 1. \tag{1.23}$$

Предположим, что $a(x) = \alpha x + c$, $\alpha, c \in \mathbb{C}$, — аффинный функционал, на котором достигается нижняя грань в левой части (1.13) (обозначим ее для краткости через ρ). Если $c \neq 0$, то для $x = 0$ будем иметь

$$\rho \geq \max\{|c-1|, |c+1|\} > 1.$$

Пусть $c = 0$ и $\alpha \neq 0$. Тогда для $x = 1$

$$\rho \geq \max\{|\alpha-1|, |\alpha+1|\} > 1.$$

Наконец, если $c = \alpha = 0$, то при $x = a$ получаем $\rho \geq b > 1$. Тем самым, учитывая (1.23) и то, что $\Phi = \operatorname{co}\Phi$, получаем

$$\inf_{a \in \operatorname{Aff}(X)} E(\Phi, a) > 1 = R(\Phi) = R(\operatorname{co}\Phi). \tag{1.24}$$

Если добавить к рассматриваемой пирамиде симметричную ей относительно центра, мы получим график отображения, являющийся выпуклым центрально-симметричным множеством (но не выпуклым уравновешенным), для которого останутся в силе соотношения (1.24).

§2. Связь субдифференциала огибающей многозначного отображения с оптимальными методами восстановления

Займемся описанием всех линейных и аффинных оптимальных методов восстановления для заданного м. о. $\Phi\colon A \to K$, где по-прежнему $A \subset X$, X — линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Будем говорить, что м. о. Φ имеет максимальное сечение в точке $y \in A$, если

$$\inf_{d \in X} \sup_{\alpha \in \Phi(y)} |\alpha - d| = R(\Phi). \tag{2.1}$$

Точка c, для которой в (2.1) достигается нижняя грань, называется чебышевским центром множества $\Phi(y)$. Хорошо известно, что в рассматриваемой ситуации при $R(\Phi) < \infty$ чебышевский центр существует и единственен (общие результаты о чебышевском центре можно найти в работе [**12**]). В дальнейшем мы предполагаем, что $R(\Phi) < \infty$, т.к. иначе любой метод оптимальный. Из (1.15), в частности, следует, что всякое выпуклое уравновешенное относительно точки (y, c) м. о. имеет максимальное сечение в точке y.

Лемма 2.1. *М. о. Φ имеет максимальное сечение в точке y в том и только в том случае, если для любого оптимального метода φ $\varphi(y) = c$, где c — чебышевский центр множества $\Phi(y)$.*

Доказательство. Если φ — оптимальный метод, то

$$\sup_{\alpha \in \Phi(y)} |\alpha - \varphi(y)| \leq E(\Phi) = R(\Phi).$$

В силу единственности чебышевского центра множества $\Phi(y)$ $\varphi(y) = c$. Пусть теперь для любого оптимального метода $\varphi(y) = c$. Предположим, что сечение в точке y не является максимальным. Тогда

$$\sup_{\alpha\in\Phi(y)} |\alpha - c| = \rho < R(\Phi).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\rho + \varepsilon < R(\Phi)$. Рассмотрим метод

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq y, \\ c + \varepsilon, & x = y. \end{cases}$$

Метод $\widetilde{\varphi}$ является также оптимальным, т.к.

$$\sup_{\alpha\in\Phi(y)} |\alpha - \widetilde{\varphi}(y)| \leq \sup_{\alpha\in\Phi(y)} |\alpha - c| + \varepsilon = \rho + \varepsilon < R(\Phi) = E(\Phi),$$

а в остальных точках он совпадает с φ. Приходим к противоречию в силу того, что $\widetilde{\varphi}(y) \neq c$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2.1. *Если Φ — выпуклое уравновешенное относительно некоторой точки (y, c) м. о., то для любого оптимального метода φ $\varphi(y) = c$.*

Для вещественной функции φ, определенной на линейном пространстве X и принимающей значения из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, через $\partial\varphi(y)$ будем обозначать ее субдифференциал в точке $y \in X$

$$\partial\varphi(y) := \{\, x' \in X' : \varphi(x) \geq \varphi(y) + \operatorname{Re}\langle x', x - y\rangle \ \forall x \in X \,\}.$$

Под огибающей м. о. $\Phi\colon A \to K$ будем понимать функцию

$$f(x, \Phi) := \begin{cases} \inf\limits_{\alpha\in\Phi(x)} \operatorname{Re}\alpha, & x \in A, \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

Теорема 2.1. *Если Φ — выпуклое уравновешенное относительно точки $\xi = (y, c) \in X \times K$ м. о., то для того чтобы $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b \in \operatorname{Aff}(X)$ являлся оптимальным методом, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $x' \in \partial f(y, \Phi)$,
2) $b = c - \langle x', y\rangle$.

Доказательство. Условие 1) означает выполнение при всех $x \in A$ неравенства

$$\inf_{\alpha\in\Phi(x)} \operatorname{Re}\alpha \geq \inf_{\alpha\in\Phi(y)} \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\langle x', x - y\rangle.$$

Поскольку $(x, \alpha) \in \operatorname{gr}\Phi$ тогда и только тогда, когда $(x - y, \alpha - c) \in \operatorname{gr}\Phi_\xi$, то это неравенство эквивалентно неравенству

$$\inf_{\beta\in\Phi_\xi(z)} \operatorname{Re}\beta - \operatorname{Re}\langle x', z\rangle \geq \inf_{\beta\in\Phi_\xi(0)} \operatorname{Re}\beta$$

для $z = x - y \in A - y$. В силу уравновешенности множеств $\operatorname{gr}\Phi_\xi$, $\Phi_\xi(0)$ и равенства (1.15) последнее неравенство эквивалентно следующим соотношениям

$$\sup_{(z,\beta)\in\operatorname{gr}\Phi_\xi} |\beta - \langle x', z\rangle| \le \sup_{\beta\in\Phi_\xi(0)} |\beta| = R(\Phi_\xi) = E(\Phi_\xi).$$

Тем самым доказано, что условие 1) эквивалентно условию: $x' \in X'$ — оптимальный метод восстановления м. о. Φ_ξ. Из равенств (1.2), (1.3) и (1.11) следует, что $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b$ является оптимальным методом восстановления м. о. Φ в том и только в том случае, если $a_1(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b - c + \langle x', y\rangle$ является оптимальным методом восстановления м. о. Φ_ξ. Применение леммы 2.1 завершает доказательство теоремы. □

Лемма 2.2. *Пусть $a \in \operatorname{Aff}(X)$. Тогда*

$$E(\Phi, a) = E(\operatorname{co}\Phi, a)$$

и при всех $\xi = (y, a(y)) \in X \times K$

$$E(\Phi, a) = E(\operatorname{bco}_\xi \Phi, a). \tag{2.2}$$

Доказательство. Из (1.11), (1.9) и (1.4) имеем

$$E(\Phi, a) = E(\Phi_\xi, x') = E(\operatorname{bco}_\xi \Phi, a).$$

Кроме того, в силу доказанного

$$E(\Phi, a) \le E(\operatorname{co}\Phi, a) \le E(\operatorname{bco}_\xi \Phi, a) \le E(\Phi, a).$$

□

Теорема 2.2. *Аффинный функционал $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b$ является оптимальным методом восстановления м. о. Φ тогда и только тогда, когда существует $\xi = (y, c) \in X \times K$, для которого*

1) $R(\Phi) = R(\operatorname{bco}_\xi \Phi)$,
2) $x' \in \partial f(y, \operatorname{bco}_\xi \Phi)$,
3) $b = c - \langle x', y\rangle$.

Для того чтобы $x' \in X'$ был оптимальным методом восстановления м. о. Φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2) для $\xi = 0$.

Доказательство. Пусть $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b \in \operatorname{Aff}(X)$ — оптимальный метод восстановления м. о. Φ. Тогда при всех $\xi = (y, a(y))$ из (1.2) и (2.2) имеем

$$R(\Phi) \le R(\operatorname{bco}_\xi \Phi) \le E(\operatorname{bco}_\xi \Phi, a) = E(\Phi, a) = E(\Phi) = R(\Phi). \tag{2.3}$$

Отсюда следует условие 1), а также то, что a является оптимальным методом восстановления выпуклого и уравновешенного относительно ξ м. о. $\operatorname{bco}_\xi \Phi$. Следовательно, по теореме 2.1 выполнены условия 2) и 3).

Если выполнены условия 1)–3), то по теореме 2.1 $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b$ является оптимальным методом восстановления м. о. $\mathrm{bco}_\xi \Phi$ и, следовательно, учитывая (2.2) и (1.2), получаем

$$E(\Phi, a) = E(\mathrm{bco}_\xi \Phi, a) = E(\mathrm{bco}_\xi \Phi) = R(\mathrm{bco}_\xi \Phi) = R(\Phi) = E(\Phi).$$

Вторая часть теоремы доказывается по той же схеме. □

Теорема 2.3. *Пусть м. о. Φ имеет максимальное сечение в точке y. Тогда для того чтобы аффинный функционал $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b$ являлся оптимальным методом восстановления м. о. Φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1)–3) *теоремы* 2.2 *для $\xi = (y, c)$, где c — чебышевский центр множества* $\Phi(y)$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2.2. Докажем необходимость. Пусть $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b \in \mathrm{Aff}(X)$ — оптимальный метод восстановления м. о. Φ. Тогда из леммы 2.1 следует, что $a(y) = c$. Далее, выписав соотношения (2.3), повторяются рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 2.2. Теорема доказана. □

Из теорем 1.4 и 2.3 вытекают следующие следствия.

Следствие 2.2. *Пусть м. о. Φ — имеет максимальное сечение в точке y. Тогда для существования оптимального аффинного метода восстановления м. о. Φ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Phi) = R(\mathrm{bco}_\xi \Phi) \tag{2.4}$$

для $\xi = (y, c)$, где c — чебышевский центр множества $\Phi(y)$.

Следствие 2.3. *Пусть $K = \mathbb{R}$ и Φ — выпуклое м. о., имеющее максимальное сечение в точке y. Тогда имеет место равенство* (2.4) *для $\xi = (y, c)$, где*

$$c = \frac{1}{2}\left(\sup_{\alpha\in\Phi(y)} \alpha + \inf_{\alpha\in\Phi(y)} \alpha\right).$$

Связь задач нахождения линейных оптимальных методов восстановления с исследованием огибающей графика м. о. изучалась в работах [**44**], [**45**], [**108**], [**109**], [**126**], [**3**]. При этом, как правило, рассматривался топологический случай, к исследованию которого мы переходим.

§3. Топологический случай

Теперь мы рассмотрим задачи, исследованные в §§1, 2, для отделимых локально выпуклых линейных топологических пространств, которые для краткости будем называть локально выпуклыми пространствами. Если X — локально выпуклое пространство, то через

X^* обозначим топологически сопряженное пространство, т.е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на X. Если $X_0 \subset X$ — линейное подпространство, то теперь положим

$$X_0^{\perp} := \{\, x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \ \forall x \in X_0 \,\}$$

$$\operatorname{Aff}^* X := \{\, a\colon X \to K : a(\cdot) = \langle x^*, x\rangle + c,\ x^* \in X^*,\ c \in K \,\}.$$

Из равенства (1.6) и леммы 1.1 работы [**74**] вытекает

Лемма 3.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство, $X_0 \subset X$ — линейное подпространство, $A \subset X$ — некоторое множество,* $\operatorname{int}\operatorname{bco} A \neq \emptyset$ *и $x_0^* \in X^*$. Тогда*

$$\inf_{x^* \in X_0^{\perp}} \sup_{x \in A} |\langle x_0^* - x^*, x\rangle| = \sup_{x \in \operatorname{bco} A \cap X_0} |\langle x_0^*, x\rangle|$$

и нижняя грань достигается.

Из этой леммы, используя ту же схему рассуждений, что и в §1 можно получить аналоги соответствующих теорем в топологическом случае относительно восстановления м. о. Φ при условии непустоты внутренности $\operatorname{gr}\Phi$ (это условие можно несколько ослабить, требуя непустоту внутренности $\operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi$ или $\operatorname{gr}\operatorname{bco}\Phi$).

Тем не менее, доказав простую лемму, можно воспользоваться уже полученными в §1 результатами. При этом условия на м. о. Φ, при которых будут иметь место аналоги соответствующих теорем, окажутся менее ограничительными.

В дальнейшем мы рассматриваем м. о. $\Phi\colon A \to K$, где $A \subset X$, а X — локально выпуклое пространство. Если A — выпуклое множество, то через $\operatorname{ri} A$ обозначим относительную внутренность A, т.е. совокупность внутренних точек A, если это множество рассматривать как подмножество его аффинной оболочки.

Положим

$$E^*(\Phi) := \inf_{x^* \in X^*} E(\Phi, x^*), \quad E^a(\Phi) := \inf_{a \in \operatorname{Aff}^*(X)} E(\Phi, a).$$

Лемма 3.2. *Пусть $a(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + c \in \operatorname{Aff}(X)$ и $E(\Phi, a) < \infty$.*

1. *Если*

$$\exists\ \zeta = (x_0, c_0) \in X \times K \ : \ \operatorname{int}(\operatorname{bco}_\zeta \Phi)^{-1}(c_0) \neq \emptyset, \tag{3.1}$$

то $x' \in X^*$.

2. *Если*

$$E^*(\Phi) < \infty \quad \text{и} \quad \operatorname{ri}\operatorname{co} A \neq \emptyset, \tag{3.2}$$

то существует $x^* \in X^*$ такой, что $\langle x^*, x\rangle = \langle x', x\rangle$ для всех $x \in A$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [**28**, стр. 165]), что для доказательства непрерывности x' достаточно доказать его ограниченность на некотором открытом множестве. Пусть выполнено условие (3.1) и $U \subset (\operatorname{bco}_\zeta \Phi)^{-1}(c_0)$ — открытое множество. Тогда, положив $a_1(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + c_0 - \langle x', x_0\rangle$, из (2.2) будем иметь

$$\begin{aligned}\sup_{x\in U} |\langle x', x\rangle| &\le \sup_{x\in(\operatorname{bco}_\zeta\Phi)^{-1}(c_0)} |\langle x', x\rangle| \le \sup_{(x,c)\in\operatorname{gr}\operatorname{bco}_\zeta\Phi} |c - \langle x', x\rangle - c_0| \\ &= \sup_{(x,c)\in\operatorname{gr}\operatorname{bco}_\zeta\Phi} |c - a_1(x) + \langle x', x_0\rangle| \le E(\operatorname{bco}_\zeta\Phi, a_1) + |\langle x', x_0\rangle| \\ &= E(\Phi, a_1) + |\langle x', x_0\rangle| \le E(\Phi, a) + |a(x_0) - c_0| + |\langle x', x_0\rangle| < \infty.\end{aligned}$$

Пусть теперь выполнены условия (3.2) и $a \in \operatorname{ri}\operatorname{co} A$. Тогда аффинную оболочку $\operatorname{co} A$ ($\operatorname{aff}\operatorname{co} A$) можно представить в виде $\operatorname{aff}\operatorname{co} A = a + L$, где $L \subset X$ — некоторое линейное подпространство. В силу условия (3.2) существует такая окрестность нуля U и $x_1^* \in X^*$, что $E(\Phi, x^*) < \infty$, $\rho := \sup\limits_{x\in U} |\langle x_1^*, x\rangle| < \infty$ и $a + U_1 \in \operatorname{co} A$, где $U_1 := U \cap L$. Имеем, учитывая лемму 2.2,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in U_1} |\langle x', x\rangle| &\le \sup_{x\in U_1} |a(x) - \langle x_1^*, x\rangle| + \sup_{x\in U_1} |\langle x_1^*, x\rangle| + |c| \le E(\operatorname{co}\Phi, a) \\ &+ E(\operatorname{co}\Phi, x_1^*) + \rho + |c| = E(\Phi, a) + E(\Phi, x_1^*) + \rho + |c| < \infty.\end{aligned}$$

Тем самым линейный функционал x' непрерывен на линейном подпространстве L, а следовательно, и на линейном подпространстве, порожденном L и a. Обозначив его непрерывное линейное продолжение через x^* (существование такого продолжения вытекает из теоремы Хана–Банаха), получаем утверждение леммы. □

Из доказанной леммы и теоремы 1.4 получаем

Теорема 3.1. *Пусть выполнено одно из условий* (3.1) *или* (3.2). *Тогда для существования непрерывного аффинного оптимального метода восстановления м. о.* Φ *необходимо и достаточно, чтобы существовала точка* $\xi \in X \times K$, *для которой выполняется равенство* (1.18) *или при* $K = \mathbb{R}$, *чтобы выполнялось равенство* (1.19). *Для существования непрерывного линейного оптимального метода восстановления м. о.* Φ *необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* (1.21).

Для вещественной функции φ, определенной на локально выпуклом пространстве X со значениями из $\overline{\mathbb{R}}$, через $\partial^*\varphi(y)$ будем обозначать $\partial\varphi(y) \cap X^*$. Ряд результатов §2 непосредственно могут быть перенесены на топологический случай. Сформулируем лишь аналог теоремы 2.2.

Теорема 3.2. *Для того чтобы* $a(\cdot) = \langle x^*, \cdot\rangle + b \in \operatorname{Aff}^*(X)$ *являлся оптимальным методом восстановления м. о.* Φ *необходимо и достаточно, чтобы существовала точка* $\xi = (y, c) \in X \times K$, *для которой*

1) $R(\Phi) = R(\operatorname{bco}_\xi \Phi)$,
2) $x^* \in \partial^* f(y, \operatorname{bco}_\xi \Phi)$,

3) $b = c - \langle x^*, y\rangle$.

Для того чтобы $x^* \in X^*$ *был оптимальным методом восстановления м. о.* Φ, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1) *и* 2) *для* $\xi = 0$.

Займемся теперь исследованием тех условий, при которых справедливо равенство $E(\Phi) = E^*(\Phi)$ или $E(\Phi) = E^a(\Phi)$. В отличие от алгебраического случая в топологическом случае из этих равенств, вообще говоря, не следует существования линейного или аффинного оптимального метода восстановления.

Для множества M топологического пространства через $\operatorname{cl} M$ будем обозначать замыкание этого множества, а через $\operatorname{cl}\Phi$ — м. о., определенное равенством

$$\operatorname{gr}\operatorname{cl}\Phi := \operatorname{cl}\operatorname{gr}\Phi.$$

Теорема 3.3.

$$E^*(\Phi) = \sup_{\alpha\in\operatorname{cl}\operatorname{bco}\Phi(0)} |\alpha|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим $\widetilde{X} = X \times K$ и для $x^* \in X^*$ определим $\widetilde{x}^* \in \widetilde{X}^*$ равенством $\langle \widetilde{x}^*, (x,\alpha)\rangle := \alpha - \langle x^*, x\rangle$. Тогда в силу равенства (1.6) и непрерывности $\widetilde{x}^*$ имеем

$$E(\Phi, x^*) = \sup_{\xi\in\operatorname{gr}\Phi} |\langle \widetilde{x}^*, \xi\rangle| = \sup_{\xi\in\operatorname{bco}\operatorname{gr}\Phi} |\langle \widetilde{x}^*, \xi\rangle| = \sup_{\xi\in\operatorname{cl}\operatorname{bco}\operatorname{gr}\Phi} |\langle \widetilde{x}^*, \xi\rangle| = E(\operatorname{cl}\operatorname{bco}\Phi, x^*).$$

Тем самым достаточно доказать равенство (3.3) для случая, когда $\Phi = \operatorname{cl}\operatorname{bco}\Phi$. Для любого $x^* \in X^*$ имеем

$$E(\Phi, x^*) \geq \sup_{\alpha\in\Phi(0)} |\alpha| := \rho.$$

Если $\rho = \infty$, то отсюда следует равенство (3.1). Проведем оценку снизу в предположении, что $\rho < \infty$. Рассмотрим точку $\xi_0 = (0, \rho + \varepsilon) \in \widetilde{X}$, $\varepsilon > 0$. Так как $\xi_0 \notin \operatorname{gr}\Phi$, а $\operatorname{gr}\Phi$ — замкнутое выпуклое уравновешенное множество, то по теореме Мазура (см., например, [**24**, стр. 156]) существует $\widetilde{x}_0^* \in \widetilde{X}^*$ такой, что

$$\langle \widetilde{x}_0^*, \xi_0\rangle > 1 \quad \text{и} \quad |\langle \widetilde{x}_0^*, \xi\rangle| \leq 1 \ \forall\, \xi \in \operatorname{gr}\Phi. \tag{3.4}$$

Поскольку $\widetilde{x}_0^*$ можно представить в виде

$$\langle \widetilde{x}_0^*, (x,\alpha)\rangle = \gamma\alpha - \langle x_0^*, x\rangle,$$

где $\gamma \in K$, а $x_0^* \in X^*$, то из (3.4) имеем

$$\gamma(\rho + \varepsilon) > 1 \quad \text{и} \quad |\gamma\alpha - \langle x_0^*, x\rangle| \leq 1 \ \forall\, (x,\alpha) \in \operatorname{gr}\Phi.$$

Положив $y_0^* = \dfrac{1}{\gamma} x_0^*$, будем иметь при всех $(x,\alpha) \in \operatorname{gr}\Phi$

$$|\alpha - \langle y_0^*, x\rangle| \le \frac{1}{\gamma} < \rho + \varepsilon.$$

Отсюда

$$E^*(\Phi) \le \rho + \varepsilon,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ оценка сверху доказана. Теорема доказана. □

Заметим, что в отличие от аналогичных результатов, полученных в §1, и теоремы 3.1 здесь не утверждается существование $x^* \in X^*$, на котором достигается равенство (3.3).

Теорема 3.4.

$$E^*(\Phi) = R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}\Phi), \tag{3.5}$$

$$E^a(\Phi) = \inf_{c\in K} R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}(\Phi - c)). \tag{3.6}$$

Нижняя грань в равенстве (3.6) *достигается.*

Доказательство. Равенство (3.5) вытекает из (3.3) и (1.15). Пользуясь равенством (3.5), получаем

$$E^a(\Phi) = \inf_{\substack{c\in K\\ x^*\in X^*}} E(\Phi, \langle x^*, \cdot\rangle + c) = \inf_{c\in K} E^*(\Phi - c) = \inf_{c\in K} R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}(\Phi - c)).$$

Для доказательства существования нижней грани в (3.6) применяются те же рассуждения, что и при доказательстве аналогичного факта в теореме 1.2. Теорема доказана. □

Теорема 3.5. *Равенство*

$$E^a(\Phi) = E(\Phi) \tag{3.7}$$

имеет место в том и только в том случае, когда существует $\xi \in X \times K$, *для которого*

$$R(\Phi) = R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}_\xi \Phi). \tag{3.8}$$

Равенство

$$E^*(\Phi) = E(\Phi) \tag{3.9}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$R(\Phi) = R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}\Phi). \tag{3.10}$$

Доказательство. Эквивалентность равенств (3.9) и (3.10) непосредственно вытекает из (1.2) и (3.5). Докажем эквивалентность условий (3.7) и (3.8). Пусть выполнено равенство (3.7). Тогда из (1.2), теоремы 3.4 и равенства (1.5) имеем

$$\begin{aligned} R(\Phi) = E(\Phi) = E^a(\Phi) &= \inf_{c\in K} R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}(\Phi - c)) \\ &= R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}(\Phi - c)) = R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}_{(0,c)} \Phi). \end{aligned}$$

Пусть имеет место (3.8). Тогда из (1.2), (1.5), (3.5) и (1.11) получаем

$$E(\Phi) = R(\Phi) = R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}_\xi \Phi) = R(\operatorname{cl}\operatorname{bco}\Phi_\xi) = E^*(\Phi_\xi) \geq E^a(\Phi) \\ \geq E(\Phi).$$

Теорема доказана. □

Из (1.5) и (1.15) следуют равенства

$$R(\operatorname{bco}_\xi \Phi) = R(\operatorname{bco}\Phi_\xi) = \sup_{\alpha\in\operatorname{bco}\Phi_\xi(0)} |\alpha| = \sup_{\alpha\in\operatorname{bco}\Phi_\xi(y)} |\alpha - c|. \tag{3.11}$$

В силу этих равенств из теоремы 3.5 вытекает ряд следствий.

Следствие 3.1. *Если Φ — выпуклое уравновешенное относительно $\xi = (y, c) \in X \times K$ м. о., то для выполнения равенства* (3.7) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\alpha\in\Phi(y)} |\alpha - c| = \sup_{\alpha\in\operatorname{cl}\Phi(y)} |\alpha - c|.$$

Следствие 3.2. *Если Φ — выпуклое уравновешенное м. о., то для выполнения равенства* (3.9) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\alpha\in\Phi(0)} |\alpha| = \sup_{\alpha\in\operatorname{cl}\Phi(0)} |\alpha|.$$

Следствие 3.2 и теорема 3.3 для выпуклого уравновешенного м. о. Φ доказывались в работе **[3]** для вещественного случая спомощью теории двойственности выпуклых функций. Хотя переход к комплексному случаю от результатов, доказанных для вещественных пространств, часто не требует большого труда, методы, использованные здесь, позволили не разделять эти случаи. В то же время пример, приведенный в конце §1, показывает, что между вещественным и комплексным случаями могут быть существенные различия.

§4. Восстановление линейных и аффинных функционалов по неточно заданной информации

Общая задача восстановления по неточно заданной информации может быть поставлена следующим образом. Пусть даны множества W, Y, метрическое пространство (Z, ρ), отображение $f\colon W \to Z$ и м. о. $F\colon W \to Y$. Пусть $\varphi\colon Y \to Z$ — некоторое отображение (метод восстановления). Тогда погрешностью этого метода назовем величину

$$e(f, F, \varphi) := \sup_{(x,y)\in\operatorname{gr} F} \rho(f(x), \varphi(y)).$$

Величину

$$e(f, F) := \inf_{\varphi\colon Y\to Z} e(f, F, \varphi) \tag{4.1}$$

будем называть погрешностью оптимального восстановления, а всякий метод, на котором достигается нижняя грань в (4.1), назовем оптимальным.

Многозначность отображения F означает, что информация об элементах W задана, вообще говоря, неточно. Если F — однозначное отображение, то говорят о задаче восстановления по точным данным. Часто в задачах восстановления рассматривают отображения вида $F(x) = Ix+U$, где $I\colon W \to Y$ — однозначное отображение, а $U \subset Y$ — некоторое фиксированное множество. Например, если Y — нормированное пространство, то в качестве U рассматривают шар радиуса $\delta > 0$ $U := \{y \in Y : \|y\| \le \delta\}$. При этом говорят, что информация задается с погрешностью δ.

Задачу (4.1) можно свести к задаче восстановления многозначного отображения однозначным (1.1). Действительно, для любого метода $\varphi\colon Y \to Z$ имеем

$$e(f, F, \varphi) = \sup_{(y,x)\in \operatorname{gr} F^{-1}} \rho(f(x), \varphi(y)) \\ = \sup_{(y,z)\in \operatorname{gr} f\circ F^{-1}} \rho(z, \varphi(y)) = E(f \circ F^{-1}, \varphi). \quad (4.2)$$

Таким образом,

$$e(f, F) = E(f \circ F^{-1}). \quad (4.3)$$

С задачей (4.1) свяжем следующую величину

$$r(f, F) := \sup_{y\in F(W)} \inf_{c\in Z} \sup_{x\in F^{-1}(y)} \rho(f(x), c),$$

называемую радиусом информации. Нетрудно убедиться, что

$$r(f, F) = R(f \circ F^{-1}).$$

Из этих равенств и леммы 1.1 получаем

Лемма 4.1.

$$e(f, F) = r(f, F). \quad (4.4)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $W \subset X$, X и Y — линейные пространства над полем K, а $Z = K$ ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Лемма 4.2. *Пусть $W \subset Y$, $\Phi\colon W \to X$ — м. о., $f \in \operatorname{Aff}(X)$, $\xi = (y_0, x_0) \in Y \times X$, $\xi' = (x_0, y_0) \in X \times Y$ и $\zeta = (y_0, f(x_0)) \in Y \times K$. Имеют место следующие равенства*

$$\operatorname{co} f \circ \Phi = f \circ \operatorname{co} \Phi, \quad \operatorname{co} \Phi^{-1} = (\operatorname{co} \Phi)^{-1}, \quad (4.5)$$

$$(\operatorname{bco}_\xi \Phi)^{-1} = \operatorname{bco}_{\xi'} \Phi^{-1}, \quad (4.6)$$

$$\operatorname{bco}_\zeta (f \circ \Phi) = f \circ \operatorname{bco}_\xi \Phi. \quad (4.7)$$

Доказательство. Докажем равенство (4.7). Пусть

$$(y, \alpha) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco}_\zeta (f \circ \Phi) = (y_0, f(x_0)) + \operatorname{bco} (\operatorname{gr} f \circ \Phi - (y_0, f(x_0))) .$$

Это означает, что существуют $(y_j, x_j) \in \operatorname{gr} \Phi$ и $\lambda_j \in K$, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = 1$, для которых

$$\begin{aligned}(y, \alpha) &= (y_0, f(x_0)) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[(y_j, f(x_j)) - (y_0, f(x_0))\right] \\ &= \left(y_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y_j - y_0), f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_j - x_0)\right)\right) \in \operatorname{gr}(f \circ \operatorname{bco}_\xi \Phi).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Пусть теперь $(y, \alpha) \in \operatorname{gr}(f \circ \operatorname{bco}_\xi \Phi)$. Это означает, что $(y, \alpha) = (y, f(x))$, где

$$(y, x) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco}_\xi \Phi = (y_0, x_0) + \operatorname{bco} (\operatorname{gr} \Phi - (y_0, x_0)) .$$

Следовательно, существуют $(y_j, x_j) \in \operatorname{gr} \Phi$ и $\lambda_j \in K$, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = 1$, для которых

$$(y, x) = (y_0, x_0) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[(y_j, x_j) - (y_0, x_0)\right] .$$

Тогда

$$(y, \alpha) = (y, f(x)) = \left(y_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y_j - y_0), f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_j - x_0)\right)\right).$$

Пользуясь равенством из (4.8), получаем, что $(y, \alpha) \in \operatorname{gr} \operatorname{bco}_\zeta (f \circ \Phi)$. Тем самым доказано, что

$$\operatorname{gr} \operatorname{bco}_\zeta (f \circ \Phi) = \operatorname{gr}(f \circ \operatorname{bco}_\xi \Phi),$$

а следовательно, и равенство (4.7). Остальные равенства леммы доказываются по аналогичной схеме. Лемма доказана. □

Положив в лемме 4.2 $(y_0, x_0) = 0$, получим

Следствие 4.1.

$$(\operatorname{bco} \Phi)^{-1} = \operatorname{bco} \Phi^{-1},$$
$$\operatorname{bco}(x' \circ \Phi) = x' \circ \operatorname{bco} \Phi, \quad x' \in X'.$$

Теорема 4.1. *Если $f \in \operatorname{Aff}(X)$, то для существования $a \in \operatorname{Aff}(Y)$ такого, что*

$$e(f, F, a) = e(f, F), \tag{4.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $z \in X \times Y$*, для которой*

$$r(f,F) = r(f, \operatorname{bco}_z F). \tag{4.10}$$

При $K = \mathbb{R}$ *условие* (4.9) *эквивалентно равенству*

$$r(f,F) = r(f, \operatorname{co} F). \tag{4.11}$$

Если $f \in X'$*, то для существования* $y' \in Y'$ *такого, что*

$$e(f,F,y') = e(f,F), \tag{4.12}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$r(f,F) = r(f, \operatorname{bco} F). \tag{4.13}$$

Доказательство. Пусть $f(\cdot) = \langle x', \cdot\rangle + b$, $x' \in X'$, $b \in K$. В силу (4.3), (4.4) и теоремы 1.4 для доказательства эквивалентности условий (4.9) и (4.10) достаточно доказать, что существование $\xi \in Y \times K$, для которого

$$R(\operatorname{bco}_\xi(f \circ F^{-1})) = R(f \circ F^{-1}),$$

эквивалентно существованию $z \in X \times Y$, для которого

$$R(f \circ (\operatorname{bco}_z F)^{-1}) = R(f \circ F^{-1}).$$

Если $x' = 0$, то эта эквивалентность очевидна, а при $x' \neq 0$ она следует из равенств (4.6) и (4.7). Аналогично доказанному эквивалентность условий (4.9) и (4.11) вытекает из равенств (4.5), а условий (4.12) и (4.13) — из следствия 4.1. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь случай, когда м. о. F имеет вид

$$F(x) = Ix + U, \tag{4.14}$$

где $I\colon W \to Y$ — линейный оператор, а $U \subset Y$ — некоторое множество. Положим в этом случае

$$e(f,I,W,U,\varphi) := e(f,F,\varphi), \quad e(f,I,W,U) := e(f,F).$$

Следствие 4.2. *Если* X, Y — *вещественные линейные пространства,* $f \in \operatorname{Aff}(X)$*, а* W *и* U — *выпуклые множества, то существует аффинный оптимальный метод восстановления.*

Теорема 4.2. *Пусть* $x' \in X'$*, а* W *и* U — *выпуклые уравновешенные множества. Тогда существует линейный оптимальный метод восстановления и имеют место равенства*

$$\begin{aligned} e(x', I, W, U) &= \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x\rangle| \\ &= \inf_{y' \in Y'} \left(\sup_{x \in W} |\langle x' - I^* y', x\rangle| + \sup_{y \in U} |\langle y', y\rangle| \right), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где I^* — *оператор, сопряженный к* I*. Кроме того,* $y' \in Y'$ — *оптимальный метод восстановления тогда и только тогда, когда на нем достигается нижняя грань в* (4.15).

Доказательство. Существование линейного оптимального метода восстановления вытекает из теоремы 4.1, т.к. при сделанных предположениях м. о. F, определенное равенством (4.14), является выпуклым уравновешенным м. о. Имеем

$$e(x', I, W, U) = R(x' \circ F^{-1}) = \sup_{\alpha \in x' \circ F^{-1}(0)} |\alpha| \\ = \sup_{x \in F^{-1}(0)} |\langle x', x\rangle| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x\rangle|.$$

С другой стороны,

$$e(x', I, W, U) = \inf_{y' \in Y'} \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x\rangle - \langle y', Ix + y\rangle| \\ = \inf_{y' \in Y'} \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x' - I^* y', x\rangle - \langle y' y\rangle| \\ = \inf_{y' \in Y'} \left(\sup_{x \in W} |\langle x' - I^* y', x\rangle| + \sup_{y \in U} |\langle y', y\rangle| \right).$$

Последнее равенство получено в силу уравновешенности множеств W и U. Из последних равенств вытекает также совпадение множества линейных оптимальных методов с множеством, на котором достигается нижняя грань в (4.15). Теорема доказана. □

Элемент $x_0 \in W$ такой, что $Ix_0 \in U$ и

$$\sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x\rangle| = |\langle x', x_0\rangle|,$$

будем называть экстремальным. Если W и U — уравновешенные множества, то экстремальный элемент определен с точностью до множителя $\lambda|, |\lambda| = 1$. Нормируем экстремальный элемент в этом случае так, чтобы

$$\sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x\rangle| = \langle x', x_0\rangle.$$

Теорема 4.3. *Пусть W и U — выпуклые уравновешенные множества. Тогда $x_0 \in W$ — экстремальный элемент, а $y'_0 \in Y'$ — оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если выполнены условия*

$$\begin{aligned} &1) \quad \sup_{x \in W} |\langle x' - I^* y'_0, x\rangle| = \langle x' - I^* y'_0, x_0\rangle, \\ &2) \quad \sup_{y \in U} |\langle y'_0, y\rangle| = \langle y'_0, Ix_0\rangle, \\ &3) \quad Ix_0 \in U, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где I^* — оператор, сопряженный к I.

Доказательство. Пусть x_0 — экстремальный элемент, а $y'_0 \in Y'$ — оптимальный метод восстановления. Учитывая (4.15), имеем

$$\langle x', x_0\rangle = \langle x' - I^* y'_0, x_0\rangle + \langle I^* y'_0, x_0\rangle \le |\langle x' - I^* y'_0, x_0\rangle| + |\langle y'_0, Ix_0\rangle| \\ \le \sup_{x\in W} |\langle x' - I^* y'_0, x\rangle| + \sup_{y\in U} |\langle y'_0, y\rangle| = \sup_{\substack{x\in W\\ Ix\in U}} |\langle x', x\rangle|. \quad (4.17)$$

В силу экстремальности x_0 в соотношениях (4.17) имеют место равенства. Следовательно, справедливы равенства (4.16).

Если выполнены равенства (4.16), то из тех же соотношений (4.15) получаем

$$\sup_{\substack{x\in W\\ Ix\in U}} |\langle x', x\rangle| \le \sup_{x\in W} |\langle x' - I^* y'_0, x\rangle| + \sup_{y\in U} |\langle y'_0, y\rangle| \\ = \langle x' - I^* y'_0, x_0\rangle + \langle I^* y'_0, x_0\rangle = \langle x', x_0\rangle. \quad (4.18)$$

Отсюда следует экстремальность элемента x_0, а следовательно, в соотношениях (4.18) всюду равенства, и на y'_0 достигается нижняя грань в (4.15). Из теоремы 4.2 вытекает, что y'_0 тогда является оптимальным методом восстановления. Теорема доказана. □

Перейдем к топологическому случаю.

Положим

$$e^*(f, F) := \inf_{y^* \in Y^*} e((f, F, y^*).$$

Теорема 4.4. *Пусть существует точка $z_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, для которой*

$$\operatorname{int} \operatorname{bco}_{z_0} F(x_0) \ne \emptyset$$

или $e^*(f, F) < \infty$ и $\operatorname{ri} \operatorname{co} F(W) \ne \emptyset$. Тогда для того чтобы существовал непрерывный аффинный оптимальный метод восстановления функционала $f \in \operatorname{Aff}(X)$ по информации F, необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $z \in X \times K$, для которой выполняется равенство (4.10), *или при $K = \mathbb{R}$, чтобы выполнялось равенство* (4.11). *Для существования непрерывного линейного оптимального метода восстановления функционала $f \in X'$ по информации F необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* (4.13).

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 4.1. Докажем достаточность. Если $e(f, F) = \infty$, то утверждение очевидно, т.к. любой метод — оптимальный. Пусть $e(f, F) < \infty$. Предположим, что имеет место (4.10). Тогда по теореме 4.1 существует оптимальный аффинный метод восстановления $a \in \operatorname{Aff}(Y)$, для которого

$$e(f, F) = e(f, F, a) = E(f \circ F^{-1}, a) < \infty.$$

Если $\operatorname{int}\operatorname{bco}_{z_0} F(x_0) \neq \emptyset$, то для $\zeta = (y_0, c_0)$, где $c_0 = f(x_0)$, и $\xi = (y_0, x_0)$ имеем, учитывая лемму 4.2,

$$\left(\operatorname{bco}_\zeta f \circ F^{-1}\right)^{-1}(c_0) = \left(f \circ \operatorname{bco}_\xi F^{-1}\right)^{-1}(c_0) \supset (\operatorname{bco}_{z_0} F)(x_0).$$

Поэтому

$$\left(\operatorname{bco}_\zeta f \circ F^{-1}\right)^{-1}(c_0) \neq \emptyset,$$

а следовательно, по лемме 3.2 $a \in \operatorname{Aff}^*(Y)$. Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы. Теорема доказана. $\square$

Вернемся теперь к тому случаю, когда м. о. F задается равенством (4.14). Положим для такого F

$$e^*(f, I, W, U) := e^*(f, F).$$

Следствие 4.3. *Если X, Y — вещественные линейные пространства, $f \in \operatorname{Aff}(X)$, W, U — выпуклые множества и выполнены условия*

$$\operatorname{int} U \neq \emptyset \tag{4.19}$$

или

$$e(f, I, W, U) < \infty, \quad \operatorname{ri}(IW + U) \neq \emptyset, \tag{4.20}$$

то существует непрерывный аффинный оптимальный метод восстановления.

Из теорем 4.4 и 4.2 вытекает

Следствие 4.4. *Пусть $x' \in X'$, W, U — выпуклые уравновешенные множества и выполнено одно из условий (4.19) или (4.20) для $f = x'$. Тогда существует непрерывный линейный оптимальный метод восстановления и имеют место равенства*

$$\begin{aligned} e(x', I, W, U) &= \sup_{\substack{x \in W \\ Ix \in U}} |\langle x', x\rangle| \\ &= \inf_{y^* \in Y^*} \left(\sup_{x \in W} |\langle x' - I^* y^*, x\rangle| + \sup_{y \in U} |\langle y^*, y\rangle| \right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Кроме того, $y^* \in Y^*$ — оптимальный метод восстановления тогда и только тогда, когда на нем достигается нижняя грань в (4.21).

Теорема 4.3 переносится на топологический случай без изменений.

Рассмотрим наиболее распространенный случай в задачах оптимального восстановления по неточной информации, когда Y — нормированное пространство и $U = U_\delta := \{y \in Y : \|y\| \leq \delta\}$, $\delta \geq 0$. Положим

$$e(x', I, W, \delta) := e(x', I, W, U_\delta), \quad e^*(x', I, W, \delta) := e^*(x', I, W, U_\delta).$$

Следствие 4.5. *Пусть* $x' \in X'$, W *— выпуклое уравновешенное множество,* $U = U_\delta$ *и выполнено одно из условий*

$$1) \quad \delta > 0,$$

$$2) \quad \delta = 0, \quad e(x', I, W, 0) < \infty, \quad \operatorname{ri} IW \neq \emptyset.$$

Тогда существует непрерывный линейный оптимальный метод восстановления и имеют место равенства

$$e(x', I, W, \delta) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\| \le \delta}} |\langle x', x \rangle|$$

$$= \inf_{y^* \in Y^*} \left(\sup_{x \in W} |\langle x' - I^* y^*, x \rangle| + \delta \|y^*\| \right). \quad (4.22)$$

Кроме того, $y^* \in Y^*$ *— оптимальный метод восстановления тогда и только тогда, когда на нем достигается нижняя грань в* (4.22).

Следствие 4.6. *Пусть* $x' \in X'$, W *— выпуклое уравновешенное множество,* $U = U_\delta$, $\delta \geq 0$. *Тогда* $x_0 \in W$ *— экстремальный элемент, а* $y_0^* \in Y^*$ *— оптимальный метод восстановления в том и только в том случае, если*

$$1) \quad \sup_{x \in W} |\langle x' - I^* y_0^*, x \rangle| = \langle x' - I^* y_0^*, x_0 \rangle,$$

$$2) \quad \langle y_0^*, Ix_0 \rangle = \delta \|y_0^*\|,$$

$$3) \quad \|Ix_0\| \le \delta.$$

Утверждение следствия 4.5 было получено в работе [**108**] (см. также [**126**]). Теорема 4.2 для $U = \{0\}$ доказана в [**38**]. Следствие 4.2 для конечномерного пространства Y было доказано в [**129**]. Ряд утверждений, содержащихся в следствии 4.6 был получен в работе [**108**]. Однако, уже в работе С.Я. Хавинсона [**74**] в связи с рассмотрением некоторых экстремальных задач на классах аналитических функций появилось второе из равенств (4.15) и критерий (4.16) для топологического случая (при более ограничительных условиях), хотя в явном виде задача об оптимальном восстановлении не обсуждалась.

Укажем еще на связь задачи оптимального восстановления линейного функционала x' с задачей, поставленной С.Б. Стечкиным [**63**], о приближении функционала x' с помощью ограниченных линейных функционалов. Положим

$$e_N(x', I, W) := \inf_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\| \le N}} \sup_{x \in W} |\langle x', x \rangle - \langle y^*, Ix \rangle|.$$

Из (4.22) вытекает, что

$$e(x', I, W, \delta) = \inf_{N > 0} \left(e_N(x', I, W) + \delta N \right).$$

Справедливо также равенство

$$e_N(x', I, W) = \sup_{\delta>0} \left(e(x', I, W, \delta) - N\delta\right),$$

доказанное В.Н. Габушиным [**10**] и в более общей ситуации В.В. Арестовым [**3**].

Задача С.Б. Стечкина тесно связана с задачей А.Н. Колмогорова о неравенствах для производных, которую можно также рассматривать как задачу о восстановлении производной функции, когда сама функция задана с некоторой погрешностью (подробнее см. [**66**]–[**68**], [**105**]). Мы рассмотрим подобные задачи для ограниченных аналитических и гармонических функций в §5 гл. III.

§5. Оптимальное восстановление линейных функционалов в пространствах $L_p(S,\Sigma,\mu)$

Пусть S — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества S и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(S,\Sigma,\mu)$ (или, короче, $L_p(S)$) обозначается совокупность всех σ-измеримых функций со значениями в $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, \quad 1\le p<\infty,$$
$$\|x\|_\infty := \operatorname*{vraisup}_{s\in S}|x(s)| < \infty, \quad p=\infty.$$

В частности, когда $S=\{1,2,\dots\}$ и $\mu(\{j\})=\mu_j>0$, пространство $L_p(S)$ совпадает с пространством $l_p(\mu)$, представляющим из себя множество векторов $x=(x_1,x_2,\dots)$ таких, что

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j|x_j|^p\right)^{1/p} < \infty, \quad 1\le p<\infty,$$
$$\|x\|_\infty := \sup_j |x_j| < \infty, \quad p=\infty.$$

Если $S=\{1,2,\dots,n\}$ и $\mu(\{j\})=\mu_j>0$, то соответствующее пространство $L_p(S)$ обозначим через $l_p^n(\mu)$. Если $\mu_j\equiv 1$, будем писать l_p и l_p^n.

При $1<p<\infty$ через p' обозначим число, удовлетворяющее равенству $1/p+1/p'=1$. Для $p=1,\infty$ полагаем $p'=\infty,1$, соответственно. Положим

$$(x,y)_S := \int_S x(s)\overline{y(s)}\,d\mu.$$

и для $a\in K$, $1\le p<\infty$

$$a_{(p)} := \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a\ne 0,\\ 0, & a=0.\end{cases}$$

Если X — линейное нормированное пространство, то через BX обозначим единичный шар в нем: $BX := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

Пусть $f \in L_{p'}(S)$, $f \ne 0$. Рассмотрим задачу восстановления линейного функционала $(x,f)_S$ на множестве $BL_p(S)$ по значениям м. о. $F(x) := Ix + \delta BY$, где $I\colon L_p(S) \to Y$ — линейный оператор, Y — линейное нормированное пространство, а $\delta \ge 0$. Иными словами, рассматривается задача нахождения величины

$$e(f, I, BL_p(S), \delta) = \inf_{T\colon Y \to K} \sup_{x \in BL_p(S)} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|Ix - y\| \le \delta}} |(x,f)_S - Ty| \qquad (5.1)$$

и оптимального метода восстановления (метода, на котором достигается нижняя грань в (5.1)).

Из следствия 4.6 получаем

Предложение 5.1. *Если $1 \le p \le \infty$, то для того, чтобы $x_0 \in BL_p(S)$ являлся экстремальным элементом, а $y_0^* \in Y^*$ — оптимальным методом восстановления, достаточно, а если $1 \le p < \infty$, I — ограниченный линейный оператор, то и необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{aligned} &1) \quad I^* y_0^* \in L_{p'}(S), \\ &2) \quad \|f - I^* y_0^*\|_{p'} = (x_0, f - I^* y_0^*)_S, \\ &3) \quad \langle y_0^*, I x_0 \rangle = \delta \|y_0^*\|, \\ &4) \quad \|I x_0\| \le \delta. \end{aligned}$$

Если $p = \infty$, x_0 — экстремальный элемент, y_0^* — оптимальный метод восстановления и $I^* y_0^* \in L_1(S)$, то имеют место равенства 2) *и* 3).

Оказывается, что при достаточно большой погрешности δ оптимальный метод восстановления не использует информации о значениях м. о. F. Это вполне согласуется с естественным представлением о бесполезности слишком зашумленной информации. Точная нижняя граница таких погрешностей находится в следующем утверждении.

Предложение 5.2. *При $1 < p \le \infty$, для того чтобы $y_0^* = 0$ являлся оптимальным методом восстановления, достаточно, а если $1 < p < \infty$ и I — ограниченный линейный оператор, то и необходимо, чтобы*

$$\delta \ge \delta_1 := \frac{\|I f_{(p')}\|}{\|f\|_{p'}^{p'-1}}.$$

Доказательство. Пусть $1 < p \le \infty$ и $\delta \ge \delta_1$. Тогда $y_0^* = 0$ и

$$x_0 := \frac{f_{(p')}}{\|f\|_{p'}^{p'-1}} \in BL_p(S)$$

удовлетворяют условиям 1)–4) предложения 5.1, и, следовательно, y_0^* — оптимальный метод восстановления.

Пусть $1 < p < \infty$ и I — ограниченный линейный оператор. Тогда в силу слабой компактности шара $BL_p(S)$ существует экстремальный элемент $x_0 \in BL_p(S)$. Если $y_0^* = 0$ — оптимальный метод восстановления, то из условия 2) предложения 5.1 имеем

$$(x_0, f)_S = \|f\|_{p'}.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{f_{(p')}}{\|f\|_{p'}^{p'-1}}.$$

Следовательно, $\delta \ge \|Ix_0\| = \delta_1$. Предложение доказано. □

Предложение 5.3. *Пусть $I\colon L_p(S) \to L_q(\Omega)$ — ограниченный линейный оператор, $1 < q < \infty$ и $f = I^*y^*$, где $y^* \in L_{q'}(\Omega)$. Тогда при $1 \le p < \infty$, для того чтобы y^* являлся оптимальным методом восстановления, достаточно, а при $1 < p < \infty$ и необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$0 \le \delta \le \delta_0 := \|y^*\|_{q'}^{q'-1} \inf_{\substack{z \in L_{q'}(\Omega) \\ (y^*_{(q')}, z)_\Omega \ne 0}} \frac{\|I^*z\|_{p'}}{|(y^*_{(q')}, z)_\Omega|}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Предположим, что $1 < p < \infty$ и y^* — оптимальный метод восстановления. Тогда для экстремального элемента $x_0 \in BL_p(S)$ имеем

$$\langle y^*, Ix_0 \rangle = (Ix_0, y^*)_\Omega = \delta \|y^*\|_{q'}. \tag{5.3}$$

Если $\delta = 0$, то условие (5.2) очевидным образом выполнено. При $\delta > 0$ поскольку $\|Ix_0\| \le \delta$ из (5.3) следует, что

$$Ix_0 = \delta \frac{y^*_{(q')}}{\|y^*\|_{q'}^{q'-1}}.$$

Отсюда для любого $z \in L_{q'}(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} |(y^*_{(q')}, z)_\Omega| &= |(Ix_0, z)_\Omega| \frac{\|y^*\|_{q'}^{q'-1}}{\delta} \\ &= |(x_0, I^*z)_S| \frac{\|y^*\|_{q'}^{q'-1}}{\delta} \le \frac{\|I^*z\|_{p'} \|y^*\|_{q'}^{q'-1}}{\delta}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $|(y^*_{(q')}, z)_\Omega| \ne 0$, то

$$\delta \le \delta_0 := \|y^*\|_{q'}^{q'-1} \inf_{\substack{z \in L_{q'}(\Omega) \\ (y^*_{(q')}, z)_\Omega \ne 0}} \frac{\|I^*z\|_{p'}}{|(y^*_{(q')}, z)_\Omega|}.$$

В силу произвольности $z \in L_{q'}(\Omega)$ условие (5.3) доказано.

Пусть теперь $1 \le p < \infty$ и $0 \le \delta \le \delta_0$. Если $\delta = 0$, то для $y_0^* = y^*$ и $x_0 = 0$ условия 1)–4) предложения 5.1 выполнены и, следовательно, y^* — оптимальный метод восстановления. Пусть $0<\delta\le\delta_0$ и $z\in L_{q'}(\Omega)$. Имеем

$$\|y^*\|_{q'}^{q'}=(y^*_{(q')},z)_\Omega+(y^*_{(q')},y^*-z)_\Omega\le|(y^*_{(q')},z)_\Omega|+\|y^*\|_{q'}^{q'-1}\|y^*-z\|_{q'}.$$

Учитывая, что $0<\delta\le\delta_0$, получаем

$$\|y^*\|_{q'}^{q'}\le\|y^*\|_{q'}^{q'-1}\frac{\|I^*z\|_{p'}}{\delta}+\|y^*\|_{q'}^{q'-1}\|y^*-z\|_{q'}.$$

Тем самым

$$\delta\|y^*\|_{q'}\le\|I^*z\|_{p'}+\delta\|y^*-z\|_{q'}.$$

Положив $z=y^*-u$, где u — произвольная функция из $L_{q'}(\Omega)$, будем иметь

$$\delta\|y^*\|_{q'}\le\|f-I^*u\|_{p'}+\delta\|u\|_{q'}.$$

Таким образом,

$$\inf_{u\in L_{q'}(\Omega)}(\|f-I^*u\|_{p'}+\delta\|u\|_{q'})=\delta\|y^*\|_{q'},$$

и нижняя грань достигается для $u=y^*$. Из следствия 4.5 вытекает, что y^* — оптимальный метод восстановления. Предложение доказано. □

Теорема 5.1. *Пусть $I\colon L_p(S)\to L_q(\Omega)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда*

1) *для $1<p\le\infty$ и $1\le q\le\infty$ при $\delta\ge\delta_1$ $y_0^*=0$ — оптимальный метод восстановления,*
2) *для $1\le p<\infty$, $1<q<\infty$ и $f=I^*y^*$, $y^*\in L_{q'}(\Omega)$ при $0\le\delta\le\delta_0$ $y_0^*=y^*$ — оптимальный метод восстановления,*
3) *для $1<p,q<\infty$ при $f\in I^*L_{q'}(\Omega)$ и $\delta_0<\delta<\delta_1$ или при $f\notin I^*L_{q'}(\Omega)$ и $0\le\delta<\delta_1$, для того чтобы $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ являлся оптимальным методом восстановления, необходимо, чтобы выполнялось равенство*
$$\frac{I(f-I^*y_0^*)_{(p')}}{\|f-I^*y_0^*\|_{p'}^{p'-1}}=\delta\frac{(y_0^*)_{(q')}}{\|y_0^*\|_{q'}^{q'-1}},\tag{5.4}$$
4) *если $1<p,q\le\infty$ и, кроме того, $I^*y_0^*\in L_1(S)$ при $p=\infty$, то выполнения равенства (5.4) достаточно, для того чтобы $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ являлся оптимальным методом восстановления,*
5) *если $1\le p,q\le\infty$, $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ — оптимальный метод восстановления и, кроме того, $I^*y_0^*\in L_1(S)$ при $p=\infty$, то*
$$e(f,I,BL_p(S),\delta)=\|f-I^*y_0^*\|_{p'}+\|y_0^*\|_{q'}.$$

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из предложений 5.2 и 5.3. Пусть $y_0^*\in L_{q'}(\Omega)$ — оптимальный метод и выполнены условия из 3). Тогда из предложения 5.3 следует, что

$f - I^*y_0^* \neq 0$, а из предложения 5.1 получаем выражение для экстремального элемента

$$x_0 = \frac{(f - I^*y_0^*)_{(p')}}{\|f - I^*y_0^*\|_{p'}^{p'-1}}. \tag{5.5}$$

Если $\delta = 0$, то равенство (5.4) вытекает из 4) предложения 5.1. Если же $\delta > 0$, то из равенства 3) того же предложения, учитывая, что $y_0^* \neq 0$ в силу предложения 5.2, получаем

$$Ix_0 = \delta \frac{(y_0^*)_{(q')}}{\|y_0^*\|_{q'}^{q'-1}},$$

что и означает справедливость (5.4).

Пусть теперь выполнены условия утверждения 4). Тогда, определив x_0 равенством (5.5), легко убедиться в справедливости условий 1)–4) предложения 5.1. Отсюда следует, что y_0^* — оптимальный метод восстановления. Утверждение 5) вытекает из теоремы 4.2. Теорема доказана. □

В силу того, что для любого гильбертова пространства существует изометрически изоморфное ему пространство $L_2(S,\Sigma,\mu)$ (см. [**24**, стр. 129]), теорема 5.1 справедлива для случая, когда одно или оба из пространств $L_p(S)$ и $L_q(\Omega)$ являются гильбертовыми. Случай, когда оба пространства гильбертовы рассматривался в работе [**108**], а затем в более общей ситуации (для восстановления линейных операторов) в работе [**105**].

Рассмотрим некоторые случаи точного решения уравнения (5.4).

Следствие 5.1. *Пусть X, Y — гильбертовы пространства, $I\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор и $II^*If = If$. Положим*

$$\delta_1 := \frac{\|If\|_Y}{\|f\|_X}.$$

Тогда

$$y_0^* = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\delta}{\delta_1}\sqrt{\dfrac{1-\delta_1^2}{1-\delta^2}}\right) If, & 0 \le \delta < \delta_1, \\ 0, & \delta > \delta_1, \end{cases}$$

— оптимальный метод восстановления, а

$$e(f,I,BX,\delta) = \begin{cases} \|f\|_X \left(\sqrt{1-\delta^2}\sqrt{1-\delta_1^2} + \delta\delta_1\right), & 0 \le \delta < \delta_1, \\ \|f\|_X, & \delta \ge \delta_1. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $\delta \ge \delta_1$ непосредственно вытекает из п.п. 1), 5) теоремы 5.1. В силу равенства $II^*If = If$ имеем

$$0 \le \|f - I^*If\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \|If\|_Y^2.$$

Поэтому $\delta_1 \le 1$, причем $\delta_1 = 1$ в том и только в том случае, если $f = I^*If$. Предположим, что $0 \le \delta < \delta_1 < 1$. Тогда легко проверить, что для y_0^* выполнено равенство (5.4), а следовательно, y_0^* — оптимальный метод.

Если $0 \le \delta < \delta_1 = 1$, то $f = I^*If$. Докажем, что в этом случае $\delta_0 = 1$, где δ_0 определено в (5.2). Для любого $z \in Y$ имеем

$$\begin{aligned}|(If,z)_Y| = |(II^*If,z)_Y| = |(I^*If,I^*z)_X| \le \|I^*If\|_X\|I^*z\|_X \\ = \|If\|_Y\|I^*z\|_X.\end{aligned}$$

Следовательно, при всех $z \in Y$ таких, что $(If,z)_Y \ne 0$

$$\|If\|_Y \frac{\|I^*z\|_X}{|(If,z)_Y|} \ge 1.$$

Так как для $z = If$ последнее неравенство обращается в равенство, имеем

$$\delta_0 = \|If\|_Y \inf_{\substack{z\in Y\\ (If,z)_Y\ne 0}} \frac{\|I^*z\|_X}{|(If,z)_Y|} = 1.$$

Теперь утверждение следствия вытекает из 2) и 5) теоремы 5.1. Следствие доказано. $\square$

Пусть E — некоторое непустое измеримое подмножество множества S. Рассмотрим в качестве $L_q(\Omega)$ пространство $L_q(E)$. Нормы в пространствах $L_p(S)$ и $L_p(E)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{p,S}$ и $\|\cdot\|_{p,E}$, соответственно. Положим $Ix = x_{|E}$, где $x_{|E}$ — след функции x на множестве E. Таким образом, исследуется задача о восстановлении линейного функционала $(x,f)_S$, $f \ne 0$, $f \in L_{p'}(S)$, на функциях $x \in BL_p(S)$ по их следу на множестве E, заданному с ошибкой. Величину (5.1) для рассматриваемого случая будем обозначать через $e_p(f,S,E,\delta)$.

Теорема 5.2. *Пусть $1 \le p \le \infty$. Положим*

$$\alpha := \frac{\|f\|_{p',E}}{\|f\|_{p',S}}, \quad \delta_1 := \begin{cases}\alpha^{p'-1}, & 1 < p \le \infty,\\ 1, & \alpha = 1,\ p = 1,\\ 0, & \alpha < 1,\ p = 1.\end{cases}$$

Тогда

1) *если $\delta \ge \delta_1$, то $y_0^* = 0$ — оптимальный метод восстановления, а $e_p(f,S,E,\delta) = \|f\|_{p',S}$,*
2) *если $0 \le \delta < \delta_1$, то*

$$y_0^* = \begin{cases}\left(1 - \dfrac{\delta^p}{(1-\delta^p)^{(p-1)/p}} \dfrac{\|f\|_{p',S\setminus E}}{\|f\|_{p',E}}\right) f_{|E}, & 1 \le p < \infty,\\ f_{|E}, & p = \infty,\end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления, а

$$e_p(f,S,E,\delta)=\begin{cases}(1-\delta^p)^{1/p}\|f\|_{p',S\setminus E}+\delta\|f\|_{p',E}, & 1\le p<\infty,\\ \|f\|_{p',S\setminus E}+\delta\|f\|_{p',E}, & p=\infty.\end{cases}$$

Доказательство. Если $z\in L_{p'}(E)$, то легко проверить, что

$$I^*z=z^0:=\begin{cases}z(s), & s\in E,\\ 0, & s\notin E.\end{cases}$$

Из теоремы 4.2 вытекает, что если $y_0^*\in L_{p'}(E)$ — оптимальный метод, то

$$e_p(f,S,E,\delta)=\|f-(y_0^*)^0\|_{p',S}+\delta\|f\|_{p',E}. \tag{5.6}$$

Поэтому утверждения теоремы для $1<p<\infty$ и $f=f^0$, а также для $1<p<\infty$, $f\neq f^0$ и $\delta\ge\delta_1$ следуют из 1), 2) теоремы 5.1 и равенства (5.6).

Пусть $1<p<\infty$, $f\neq f^0$ и $0\le\delta<\delta_1$. Тогда оптимальный метод y_0^* удовлетворяет равенству (5.4), которое может быть записано в виде

$$\big(f_{|E}-y_0^*\big)_{(p')}=\lambda\delta(y_0^*)_{p'}, \tag{5.7}$$

где

$$\lambda^p=\frac{\|f-y_0^*\|_{p',S}^{p'}}{\|y_0^*\|_{p',E}^{p'}}. \tag{5.8}$$

Из уравнения (5.7) получаем

$$y_0^*=\frac{f_{|E}}{1+(\lambda\delta)^{p-1}}.$$

Подставляя это представление для y_0^* в (5.8), получаем для λ уравнение

$$\lambda^p=(\lambda\delta)^p+\big(1+(\lambda\delta)^{p-1}\big)^{p'}\left(\frac{\|f\|_{p',S\setminus E}}{\|f\|_{p',E}}\right)^{p'}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1+(\lambda\delta)^{p-1}}=1-\frac{\delta^p}{(1-\delta^p)^{(p-1)/p}}\frac{\|f\|_{p',S\setminus E}}{\|f\|_{p',E}}.$$

Выражение для $e_p(f,S,E,\delta)$ находим из (5.6).

Осталось рассматреть случаи, когда $p=1,\infty$. Пусть $p=\infty$ и $0\le\delta<1$. Тогда для функции $y_0^*=f_{|E}$ и

$$x_0(s)=\begin{cases}\delta(f(s))_{(1)}, & s\in E,\\ (f(s))_{(1)}, & s\notin E,\end{cases}$$

выполнены условия 1)–4) предложения 5.1, а следовательно, y_0^* — оптимальный метод восстановления. При $\delta\ge 1$ надо рассмотреть $y_0^*=f_{|E}$ и $x_0=f_{(1)}$. Погрешность восстановления в том и другом случае находится из равенства (5.6).

Пусть теперь $p = 1$. По определению существенных верхних граней для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримые множества $A \subset E$ и $B \subset S \setminus E$ положительной меры, для которых

$$|f(s)| > \|f\|_{\infty,E} - \varepsilon,\ s \in A,$$
$$|f(s)| > \|f\|_{\infty,S\setminus E} - \varepsilon,\ s \in B.$$

Предположим, что $\alpha = 1$ (т.е. $\|f\|_{\infty,E} = \|f\|_{\infty,S}$) и $0 \le \delta < 1$. Положим

$$x_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & s \notin A \cup B, \\ \dfrac{\delta}{\mu(A)}(f(s))_{(1)}, & s \in A, \\ \dfrac{1-\delta}{\mu(B)}(f(s))_{(1)}, & s \in B, \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\|x_\varepsilon\|_{1,S} = 1$, $\|x_\varepsilon\|_{1,E} = \delta$. Следовательно,

$$e_1(f,S,E,\delta) = \sup_{\substack{x \in BL_1(S) \\ \|x\|_{1,E} \le \delta}} |(x,f)_S| \ge |(x_\varepsilon,f)_S|$$
$$\ge (1-\delta)\|f\|_{\infty,S\setminus E} + \delta\|f\|_{\infty,E} - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$e_1(f,S,E,\delta) \ge (1-\delta)\|f\|_{\infty,S\setminus E} + \delta\|f\|_{\infty,E}.$$

Положив

$$y_0^* = \left(1 - \frac{\|f\|_{\infty,S\setminus E}}{\|f\|_{\infty,E}}\right) f_{|E},$$

из равенства (4.22) получаем

$$e_1(f,S,E,\delta) \le \|f-(y_0^*)^0\|_{\infty,S} + \delta\|y_0^*\|_{\infty,E} = (1-\delta)\|f\|_{\infty,S\setminus E} + \delta\|f\|_{\infty,E}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы в рассматриваемом случае. Если $\delta \ge 1$, то

$$e_1(f,S,E,\delta) = \sup_{x \in BL_1(S)} |(x,f)_S| \ge \|f\|_{\infty,S},$$

а с помощью следствия 4.5 легко убедиться, что $y_0^* = 0$ — оптимальный метод восстановления.

Пусть, наконец, $\alpha < 1$ и $\delta \ge 0$. Положим

$$x_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & s \notin B, \\ \dfrac{1}{\mu(B)}(f(s))_{(1)}, & s \in B. \end{cases}$$

Тогда, поскольку $x_\varepsilon \in BL_1(S)$ и $\|x_\varepsilon\|_{1,E} = 0$, то

$$e_1(f,S,E,\delta) \ge |(x_\varepsilon,f)_S| \ge \|f\|_{\infty,S\setminus E} - \varepsilon = \|f\|_{\infty,S} - \varepsilon.$$

Так как погрешность метода $y_0^* = 0$ равна $\|f\|_{\infty,S}$, то утверждение теоремы доказано и в этом случае. Теорема доказана. □

Отметим, что в случае, когда $L_p(S)=l_p(\mu)$, и $L_p(E)=l_p^n(\mu)$, мы решили задачу об оптимальном восстановлении линейного функционала $\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j x_j \overline{f}_j$, $f\in l_{p'}(\mu)$, на единичном шаре $Bl_p(\mu)$ по значениям векторов $(x_1,\dots,x_n)$, заданным с погрешностью δ в норме пространства $l_p^n(\mu)$.

Рассмотрим теперь задачу (5.1), когда вместо множества $BL_p(S)$ берется множество BX_p, где X_p — некоторое линейное подпространство $L_p(S)$ (такая ситуация является типичной для восстановления аналитических или гармонических функций). В силу соотношений двойственности, полученных в §4, эта задача тесно связана с экстремальной задачей о нахождении величины

$$\sup_{\substack{x\in BX_p\\ \|Ix\|\le\delta}} |(x,f)_S|. \tag{5.9}$$

Экстремальная функция в (5.9) (т.е. функция x_0, на которой достигается верхняя грань в (5.9) и нормированная условием $(x_0,f)_S>0$) в некоторых случаях хорошо известна (во всяком случае ее вид). Нашей целью здесь является дальнейшее исследование связи экстремальной функции с оптимальным методом восстановления.

Теорема 5.3. *Пусть $g\in X_p$, $g\neq 0$, $g_0:=g/\|g\|_p$, $\|Ig_0\|\le\delta$, $y_0^*\in Y^*$, $\langle y_0^*, Ig_0\rangle=\delta\|y_0^*\|$ и при всех $x\in X_p$ имеет место равенство*

$$(x,f)_S-\langle y_0^*, Ix\rangle=\begin{cases}\alpha(x,g_{(p)})_S, & 1\le p<\infty,\\ (x,\varphi g)_S, & p=\infty,\end{cases} \tag{5.10}$$

где $\alpha>0$, $\varphi\in L_1(S)$, $\varphi(s)\ge 0$ почти всюду и при $p=\infty$ $|g(s)|=1$ почти всюду. Тогда y_0^* — оптимальный метод, g_0 — экстремальная функция и

$$e(f,BX_p,I,\delta)=(g_0,f)_S=\begin{cases}\alpha\|g\|_p^{p-1}+\delta\|y_0^*\|, & 1\le p<\infty,\\ \|\varphi\|_1+\delta\|y_0^*\|, & p=\infty.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $1\le p<\infty$. Тогда из (5.10) и неравенства Гельдера имеем

$$\sup_{x\in BX_p}|(x,f)_S-\langle y_0^*, Ix\rangle|=\alpha\sup_{x\in BX_p}|(x,g_{(p)})_S|\le\alpha\|g_{(p)}\|_{p'}=\alpha\|g\|_p^{p-1}.$$

С другой стороны,

$$\sup_{x\in BX_p}|(x,f)_S-\langle y_0^*, Ix\rangle|\ge\alpha|(g_0,g_{(p)})_S|=\alpha\|g\|_p^{p-1}.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in BX_p}|(x,f)_S-\langle y_0^*, Ix\rangle|=(g_0,f)_S-\langle y_0^*, Ig_0\rangle. \tag{5.11}$$

Аналогично доказывается равенство (5.11) для $p=\infty$. Из следствия 4.6 вытекает, что y_0^* — оптимальный метод, а g_0 — экстремальная функция. Выражение для $e(f,I,BX_p,\delta)$ находится из теоремы 4.2 Теорема доказана. □

Интегральное представление погрешности восстановления (5.10) является не только достаточным условием для экстремальности функции g_0, но также и необходимым условием при некоторых дополнительных требованиях.

Теорема 5.4. *Пусть $1\le p<\infty$, I — ограниченный линейный оператор, $f\notin I^*Y^*+X_p^\perp$, g — экстремальная функция и при $p=1$ $|g(s)|>0$ почти всюду. Тогда для того, чтобы $y_0^*\in Y^*$ являлся оптимальным методом восстановления, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\alpha>0$ для всех $x\in X_p$ имело место равенство*

$$(x,f)_S-\langle y_0^*,Ix\rangle=\alpha(x,g_{(p)})_S. \tag{5.12}$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $y_0^*\in Y^*$ — оптимальный метод. Тогда из следствия 4.6 получаем, что должно быть выполнено равенство

$$\sup_{x\in BX_p}|(x,f-I^*y_0^*)_S|=(g,f-I^*y_0^*)_S.$$

В силу леммы 3.1 существует $x^*\in X_p^\perp$, для которого

$$\sup_{x\in BX_p}|(x,f-I^*y_0^*)_S|=\sup_{x\in BL_p}|(x,f-I^*y_0^*-x^*)_S|=\|f-I^*y_0^*-x^*\|_{p'}.$$

Тем самым, учитывая, что $(g,x^*)_S=0$, имеем

$$\|f-I^*y_0^*-x^*\|_{p'}=(g,f-I^*y_0^*-x^*)_S.$$

Поскольку $g\in BX_p\subset BL_p$, $f\ne I^*y_0^*+x^*$, а при p=1 $|g(s)|>0$ почти всюду, то

$$\frac{f-I^*y_0^*-x^*}{\|f-I^*y_0^*-x^*\|_{p'}}=g_{(p)}.$$

Положив $\alpha:=\|f-I^*y_0^*-x^*\|_{p'}$, будем иметь при всех $x\in X_p$

$$(x,f)_S-\langle y_0^*,Ix\rangle=(x,f-I^*y_0^*)_S=(x,f-I^*y_0^*-x^*)_S=\alpha(x,g_{(p)})_S.$$

2. Достаточность. Пусть при некотором $\alpha_1>0$ и $y^*\in Y^*$ имеет место равенство

$$(x,f)_S-\langle y_0^*,Ix\rangle=\alpha_1(x,g_{(p)})_S. \tag{5.13}$$

Пусть $\delta>0$. Из следствия 4.5 вытекает, что существует оптимальный метод восстановления $y_0^*\in Y^*$. В силу доказанного в п.1 справедливо представление (5.12). Предположим, что $\alpha\ne\alpha_1$. Тогда из (5.12) и (5.13) имеем при всех $x\in X_p$

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_1}\right)(x,f)_S-\left\langle\frac{1}{\alpha}y_0^*-\frac{1}{\alpha_1}y^*,Ix\right\rangle=0.$$

Таким образом,

$$(x, f - I^*z)_S = 0,$$

где

$$z = \frac{\alpha\alpha_1}{\alpha-\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha}y_0^* - \frac{1}{\alpha_1}y^*\right) \in Y^*.$$

Следовательно, $f - I^*z \in X_p^{\perp}$, что противоречит предположению $f \notin I^*Y^* + X_p^{\perp}$. Отсюда следует совпадение α и α_1 и равенство

$$\langle y_0^*, Ix\rangle = \langle y^*, Ix\rangle,$$

справедливое при всех $x \in X_p$, которое и означает оптимальность метода y^*.

В силу равенства (5.13) и того, что $f \notin I^*Y^* + X_p^{\perp}$, $g \neq 0$. Поэтому при $\delta = 0$ для функции g выполнены условия теоремы 5.3, и, следовательно, y^* — оптимальный метод. Теорема доказана. □

Напомним, что система $x_1, \dots, x_n \in X_p$ называется биортогональной к $f_1, \dots, f_n \in X_p'$, если

$$\langle x_j, f_k\rangle = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Известно (см., например, [**35**, стр. 210]), что для любой линейно независимой системы $f_1, \dots, f_n \in X_p'$ существует биортогональная ей система $x_1, \dots, x_n \in X_p$.

Для $f_1, \dots, f_n \in L_p'(S)$ определим оператор $I\colon X_p \to Y$ равенством

$$Ix := \{(x, f_1)_S, \dots, (x, f_n)_S\}; \tag{5.14}$$

здесь $Y = K$ ($K = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) с какой-либо нормой при $\delta > 0$.

Следствие 5.2. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $f, f_1, \dots, f_n$ — линейно независимая система в X_p', оператор I определен равенствами* (5.14)*, g — экстремальная функция и при $p = 1$ $|g(s)| > 0$ почти всюду. Тогда линейный оптимальный метод восстановления существует, единственен и имеет вид*

$$\langle y_0^*, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \quad y = (y_1, \dots, y_n), \tag{5.15}$$

где

$$\lambda_j = \left(x_j, f - \frac{(g,f)_S}{\|g\|^p} g_{(p)}\right)_S, \quad j = 1, \dots, n, \tag{5.16}$$

а $x_1, \dots, x_n \in X_p$ — произвольная система, биортогональная к $f_1, \dots, f_n$.

Доказательство. Существование линейного оптимального метода восстановления следует из теоремы 4.2. В силу конечномерности Y всякий такой метод непрерывен и имеет вид (5.15). Из теоремы 5.4 получаем, что существует $\alpha > 0$ такое, что при всех $x \in X_p$ имеет место равенство

$$(x, f)_S - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x, f_j)_S = \alpha (x, g_{(p)})_S. \tag{5.17}$$

Вследствие линейной независимости $f, f_1, \ldots, f_n$ как элементов X'_p $g \neq 0$. Подставляя в (5.17) $x = g$, получаем

$$(x, f)_S = \alpha \|g\|_p^p \tag{5.18}$$

(по определению для экстремальной функции $Ig = 0$). Пусть $x_1, \ldots, x_n \in X_p$ — произвольная система, биортогональная к $f_1, \ldots, f_n$. Тогда

$$(x_j, f)_S - \lambda_j = \alpha (x_j, g_{(p)})_S.$$

Отсюда, учитывая (5.18), получаем равенства (5.16), а следовательно, и единственность оптимального метода восстановления. Следствие доказано. □

§6. Оптимальное восстановление в гильбертовых пространствах. Восстановление по приближенным значениям коэффициентов Фурье и оптимальное суммирование степенных рядов

Пусть X — гильбертово пространство, $I\colon X \to L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ — линейный ограниченный оператор, $\delta(s)$ — неотрицательная измеримая функция на Ω и

$$U_\delta := \{\, y \in L_\infty(\Omega) : |y(s) \le \delta(s) \text{ почти всюду} \,\}.$$

Рассмотрим задачу восстановления линейного функционала $(x, f)_X$, $f \in X$, $f \neq 0$, на элементах $x \in BX$ по значениям м. о. $F(x) = Ix + U_\delta$, т.е. задачу о нахождении величины

$$e(f, I, BX, \delta) = \inf_{T\colon L_\infty(\Omega) \to K} \sup_{x \in BX} \sup_{\substack{y \in L_\infty(\Omega) \\ Ix - y \in U_\delta}} |(x, f)_X - Ty|$$

и соответствующего оптимального метода восстановления (в отличие от предыдущего, здесь δ — функция погрешности).

Положим для $a \in \mathbb{R}$

$$a_+ := \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \le 0. \end{cases}$$

Теорема 6.1. *Пусть $g := If \in L_1(\Omega)$ и для любой функции $y \in L_\infty(\Omega)$ $II^* yg = yg$. Положим $\Omega_0 := \{s \in \Omega : |g(s)| > 0\}$. Тогда*

1) *если* $f = I^*g$ *и* $\displaystyle\int_{\Omega_0} \delta^2(s)\,d\mu \le 1$, *то* $y_0^* = g$ — *оптимальный метод и*

$$e(f, I, BX, \delta) = \int_\Omega \delta(s)|g(s)|\,d\mu.$$

2) *если* $f \ne I^*g$ *или* $f = I^*g$, *но* $\displaystyle\int_{\Omega_0} \delta^2(s)\,d\mu > 1$, *то метод*

$$y_0(s) = (|g(s)| - \lambda\delta(s))_+ (g(s))_{(1)} \tag{6.1}$$

является оптимальным методом восстановления, а

$$e(f, I, BX, \delta) = \lambda + \int_\Omega \delta(s)\,(|g(s)| - \lambda\delta(s))_+\,d\mu,$$

где $\lambda \in (0, \|f\|_X]$ — *решение уравнения*

$$\|f\|_X^2 - \int_\Omega \left(|g(s)|^2 - \lambda^2\delta^2(s)\right)_+\,d\mu - \lambda^2 = 0. \tag{6.2}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия 1). Тогда из (4.15) для метода g имеем

$$e(f, I, BX, \delta) \le \sup_{\substack{y \in L_\infty(\Omega)\\ |y(s)| \le \delta(s)}} \left|\int_\Omega y(s)\overline{g(s)}\,d\mu\right| \le \int_\Omega \delta(s)|g(s)|\,d\mu. \tag{6.3}$$

Положим

$$\left(\frac{\delta(s)}{|g(s)|}\right)_n := \begin{cases} \dfrac{\delta(s)}{|g(s)|}, & \delta(s) < n|g(s)|,\\ n, & \delta(s) \ge n|g(s)|, \end{cases}$$

$$x_n := I^*\left(\frac{\delta}{|g|}\right)_n g.$$

Поскольку

$$|(Ix_n)(s)| = \left(\frac{\delta(s)}{|g(s)|}\right)_n |g(s)| \le \delta(s),$$

и

$$\|x_n\|_X^2 = \int_\Omega \left(\frac{\delta(s)}{|g(s)|}\right)_n^2 |g(s)|^2\,d\mu \le \int_{\Omega_0} \delta^2(s)\,d\mu \le 1,$$

то, учитывая, что $f = I^*g$, получаем

$$e(f, I, BX, \delta) \ge |(x_n, f)_X| = \int_\Omega \left(\frac{\delta(s)}{|g(s)|}\right)_n |g(s)|^2\,d\mu.$$

В силу теоремы Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{\delta(s)}{|g(s)|}\right)_n |g(s)|^2\,d\mu \to \int_\Omega \delta(s)|g(s)|\,d\mu,$$

что вместе с неравенством (6.3) доказывает утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Прежде всего покажем, что уравнение (6.2) имеет в этом случае решение $\lambda \in (0, \|f\|_X]$. Обозначим функцию, стоящую в левой части (6.2), через $\varphi(\lambda)$. Эта функция непрерывна при всех $\lambda \geq 0$ и, кроме того, при $f \neq I^* g$

$$\varphi(0) = \|f\|_X^2 - \int_\Omega |g(s)|^2 \, d\mu = \|f - I^* g\|_X^2 > 0.$$

Если $f = I^* g$ и

$$\int_{\Omega_0} \delta^2(s) \, d\mu > 1, \tag{6.4}$$

то, положив $\Omega_\lambda := \{s \in \Omega : |g(s)| > \lambda\delta(s)\}$, будем иметь

$$\varphi(\lambda) = \int_\Omega |g(s)|^2 - \big(|g(s)|^2 - \lambda^2\delta^2(s)\big)_+ \, d\mu - \lambda^2$$
$$= \int_{\Omega \setminus \Omega_\lambda} |g(s)|^2 \, d\mu + \lambda^2 \bigg(\int_{\Omega_\lambda} \delta^2(s) \, d\mu - 1 \bigg).$$

Отсюда следует, что в силу условия (6.4) при достаточно малых λ $\varphi(\lambda) > 0$. С другой стороны, $\varphi\left(\|f\|_X\right) \leq 0$. Тем самым в том и в другом случае существует $\lambda \in (0, \|f\|_X]$, являющееся решением уравнения (6.2).

Для такого λ рассмотрим метод y_0^*, определенный равенством (6.1). Легко проверить, что $\|f - I^* y_0^*\|_X = \lambda$. Из (4.15) будем иметь

$$e(f, I, BX, \delta) \leq \|f - I^* y_0^*\|_X + \sup_{\substack{y \in L_\infty(\Omega) \\ |y(s)| \leq \delta(s)}} \left| \int_\Omega y(s) \overline{y_0^*(s)} \, d\mu \right|$$
$$\leq \lambda + \int_\Omega \delta(s) \left(|g(s)| - \lambda\delta(s)\right)_+ \, d\mu. \tag{6.5}$$

Положим

$$x_0 := \frac{f - I^* y_0^*}{\|f - I^* y_0^*\|_X} = \lambda^{-1}(f - I^* y_0^*).$$

Тогда

$$|(I x_0)(s)| = \lambda^{-1} |g(s) - y_0^*(s)| = \lambda^{-1} \left(|g(s)| - \left(|g(s)| - \lambda\delta(s)\right)_+ \right).$$

Отсюда при $|g(s)| > \lambda\delta(s)$ $|(I x_0)(s)| = \delta(s)$, а при $|g(s)| \leq \lambda\delta(s)$ $|(I x_0)(s)| = \lambda^{-1}|g(s)| \leq \delta(s)$. Таким образом,

$$e(f, I, BX, \delta) \geq |(x_0, f)_X|$$
$$= \lambda^{-1} \bigg(\|f\|_X^2 - \int_\Omega \left(|g(s)| - \lambda\delta(s)\right)_+ |g(s)| \, d\mu \bigg)$$
$$= \lambda + \int_\Omega \delta(s) \left(|g(s)| - \lambda\delta(s)\right)_+ \, d\mu,$$

что вместе с (6.5) завершает доказательство случая 2). Теорема доказана. □

Следствие 6.1. *Если выполнены условия теоремы* 6.1 *и почти всюду*

$$\delta(s) \geq \frac{|g(s)|}{\|f\|_X}, \tag{6.6}$$

то $y_0^* = 0$ *— оптимальный метод восстановления и* $e(f, I, BX, \delta) = \|f\|_X$.

Для доказательства этого следствия достаточно заметить, что при выполнении условия (6.6) $\lambda = \|f\|_X$ является решением уравнения (6.2), а

$$(|g(s)| - \|f\|_X \delta(s))_+ = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\delta(s) \equiv \delta \geq 0$. Обозначив $c := \lambda\delta$, уравнение (6.2) при $\delta > 0$ можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{c^2}{\|f\|_X^2 - \int_\Omega \left(|g(s)|^2 - c^2\right)_+ d\mu} = \delta^2. \tag{6.7}$$

Если же $\delta = 0$, то единственным решением уравнения (6.7) является $c = 0$, при этом

$$\lambda^2 = \|f\|_X^2 - \int_\Omega |g(s)|^2\, d\mu.$$

Таким образом, из теоремы 6.1 и следствия 6.1 получаем

Следствие 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1 *и* $\delta(s) \equiv \delta \geq 0$. *Положим*

$$\delta_0 := \begin{cases} (\mu(\Omega_0))^{-1/2}, & \mu(\Omega_0) < \infty, \\ 0, & \mu(\Omega_0) = \infty, \end{cases} \qquad \delta_1 := \frac{\|g\|_\infty}{\|f\|_X}.$$

Тогда

1) *если* $\delta \geq \delta_1$, *то* $y_0^* = 0$ *— оптимальный метод восстановления и* $e(f, I, BX, \delta) = \|f\|_X$,
2) *если* $f = I^*g$ *и* $0 \leq \delta \leq \delta_0$, *то* $y_0^* = g$ *— оптимальный метод восстановления и* $e(f, I, BX, \delta) = \delta\|g\|_1$,
3) *в остальных случаях (т.е. если* $f \neq I^*g$ *и* $0 \leq \delta \leq \delta_1$ *или* $f = I^*g$ *и* $\delta_0 < \delta < \delta_1$

$$y_0^* = (|g(s)| - c)_+ (g(s))_{(1)}$$

— оптимальный метод восстановления и

$$e(f, I, BX, \delta) = \sqrt{\|f\|_X^2 - \int_\Omega (|g(s)|^2 - c^2)_+\, d\mu} + \delta \int_\Omega (|g(s)| - c)_+\, d\mu,$$

где c *— решение уравнения* (6.7), *удовлетворяющее условию* $0 \leq c < \|g\|_\infty$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве X (не обязательно полная и не обязательно бесконечная). Для $x \in X$ через $x_j = (x, e_j)_X$ обозначим коэффициенты Фурье элемента x по отношению к этой системе. Применим теорему 6.1 к задаче восстановления линейного функционала $(x, f)_X$, $f \neq 0$, по приближенным значениям коэффициентов Фурье $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots)$ таких, что

$$|x_j - \widetilde{x}_j| \leq \delta\lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{6.8}$$

где $\lambda_j \geq 0$.

Рассмотрим в качестве $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ пространство l_∞ (т.е. $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, $\mu(\{j\}) = 1$) и положим $Ix = (x_1, x_2, \ldots)$. Нетрудно убедиться в том, что для $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots) \in l_1$ $I^*y^* = \sum\limits_{j\in\tau} y_j^* e_j$, где $\tau\{1, 2, \ldots\}$ или $\tau\{1, 2, \ldots, N\}$, если ортонормированная система конечна. Следовательно, $II^*y^* = y^*$ при всех $y^* \in l_1$.

Предположим, что

$$\begin{gathered} 0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-1} < \lambda_j, \quad j \geq m, \\ |f_m| > 0, \quad |f_m|\lambda_m^{-1} \geq |f_{m+1}|\lambda_{m+1}^{-1} \geq \ldots. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Положим $s := \sup\{j : |f_j| > 0,\ j \geq m\}$,

$$\mu_k := \frac{|f_k|\lambda_k^{-1}}{\sqrt{\|f\|_X^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j|^2 + |f_k|^2\lambda_k^{-2}\sum\limits_{j=1}^{k} |\lambda_j|^2}}, \quad m \leq k \leq s \tag{6.10}$$

(если $s = \infty$, то полагаем $\mu_\infty := \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k$), $\Delta_{m-1} := (\mu_m, +\infty)$, $\Delta_k := (\mu_{k+1}, \mu_k]$, $m \leq k < s$, $\Delta_s := [0, \mu_s]$. Отметим, что некоторые из Δ_k могут быть пустыми множествами (при $\mu_{k+1} = \mu_k$), а при $\mu_s = 0$ $\Delta_s = \{0\}$.

Теорема 6.2. *Пусть* $f \in X$, $\sum\limits_{j=1}^{s} |f_j| < \infty$ *и* $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots)$ — *приближенные значения коэффициентов Фурье элемента* $x \in BX$, *удовлетворяющие условиям* (6.8). *Пусть, кроме того, выполнены условия* (6.9). *Тогда*

1) *если* $\delta \in \Delta_k$, $m - 1 \leq k \leq s$ *и при* $k = s$ $f \neq \sum\limits_{j=1}^{s} f_j e_j$, *то*

$$(x, f)_X \approx \sum_{j=1}^{k} \left[|f_j| - \delta\lambda_j \sqrt{\frac{\|f\|_X^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j|^2}{1 - \delta^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^2}} \right] (\overline{f}_j)_{(1)} \widetilde{x}_j$$

— *оптимальный метод восстановления, а*

$$e(f,I,BX,\delta)=\sqrt{\|f\|_X^2-\sum_{j=1}^{k}|f_j|^2}\sqrt{1-\delta^2\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^2}+\delta\sum_{j=1}^{k}\lambda_j|f_j|.$$

2) *если* $\delta\in\Delta_s$ *и* $f=\sum\limits_{j=1}^{s}f_je_j$, *то метод*

$$(x,f)_X\approx\sum_{j=1}^{s}\overline{f}_j\widetilde{x}_j$$

является оптимальным методом восстановления, а

$$e(f,I,BX,\delta)=\delta\sum_{j=1}^{s}\lambda_j|f_j|.$$

Доказательство. Предположим, что $f=I^*If$, т.е. $f=\sum\limits_{j=1}^{s}f_je_j$. Нетрудно убедиться, что условие 1) теоремы 6.1 в принятых здесь обозначениях имеет вид

$$\delta^2\sum_{j=1}^{s}\lambda_j^2\le 1.$$

Это условие эквивалентно тому, что $\delta\in\Delta_s$. Теперь утверждение 2) доказываемой теоремы непосредственно вытекает из теоремы 6.1.

Пусть $f\ne\sum\limits_{j=1}^{s}f_je_j$ или $f=\sum\limits_{j=1}^{s}f_je_j$ и $\delta>\mu_s$. Уравнение (6.2) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\|f\|_X^2-\sum_{j=1}^{s}\left(|f_j|^2-\lambda^2\delta^2\lambda_j^2\right)_+=\lambda^2. \tag{6.11}$$

При $\delta=0$ решение этого уравнения очевидно и утверждение 1) легко проверяется. Если $\delta>0$, то, положив $c:=\lambda\delta$, получим уравнение

$$\varphi(c):=\frac{c^2}{\|f\|_X^2-\sum\limits_{j=1}^{s}\left(|f_j|^2-c^2\lambda_j^2\right)_+}=\delta^2, \tag{6.12}$$

эквивалентное (6.11). Пусть при некотором $m-1\le k<s$

$$|f_{k+1}|\lambda_{k+1}^{-1}<|f_k|\lambda_k^{-1}.$$

Тогда функция $\varphi(c)$ при $c\in\left[|f_{k+1}|\lambda_{k+1}^{-1},|f_k|\lambda_k^{-1}\right]$ монотонно возрастает от μ_{k+1} до μ_k. Следовательно, при $\delta\in\Delta_k$ для решения уравнения (6.12) имеем

$$c = \delta \sqrt{\frac{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^{k} |f_j|^2}{1 - \delta^2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2}}. \tag{6.13}$$

Предположим, что $\delta \in \Delta_s$ и $f \neq \sum_{j=1}^{s} f_j e_j$. Если $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j^2 = \infty$, то в силу неравенства

$$\mu_k < \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 \right)^{-1/2},$$

справедливого при всех $k < s$, $\mu_s = 0$. Так как случай $\delta = 0$ уже разобран, будем считать, что $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j^2 < \infty$. Пусть

$$\rho_s := \begin{cases} \dfrac{|f_s|}{\lambda_s}, & s < \infty, \\ \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{|f_k|}{\lambda_k}, & s = \infty \end{cases}$$

(предел существует в силу условия (6.9)). Тогда при $0 \le c \le \rho_s$ $\varphi(c)$ монотонно возрастает от 0 до μ_s. Поэтому для всех $0 < \delta \le \mu_s$ решение уравнения (6.12) дается той же формулой (6.13) при $k = s$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из формул для оптимального метода восстановления и его погрешности, полученных в теореме 6.1. Теорема доказана. □

Ряд других случаев (например, когда $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-1} < \lambda_j$, $j \ge m$, $f_m = f_{m+1} = \ldots = 0$) могут быть рассмотрены по аналогичной схеме.

Пример 6.1. Пространством Харди H_2 называется совокупность функций $x(z)$, аналитических внутри единичного круга $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, таких, что

$$\|x\|_{H_2} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2} < \infty.$$

Хорошо известно ([**17**], [**15**], [**84**]), что функции из H_2 имеют почти всюду граничные значения и H_2 становится гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение

$$(x, f)_{H_2} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})} \, d\theta.$$

Система функций $1, z, z^2, \ldots$ является полной ортонормированной системой в H_2. Таким образом, если функцию $x(z) \in H_2$ разложить в ряд Тейлора

$$x(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \tag{6.14}$$

то он же является и рядом Фурье.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции (6.14) из класса BH_2 в некоторой точке $\xi \in D$ по приближенным значениям $(\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots)$ таким, что

$$|a_j - \widetilde{a}_j| \le \delta, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{6.15}$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу оптимального суммирования степенных рядов (6.14), удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \le 1,$$

по информации о значениях коэффициентов этих рядов, заданных с погрешностью. Погрешность оптимального восстановления (или суммирования) обозначим через $e(\xi, H_2, \delta)$.

В силу формулы Коши имеем

$$x(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{x(z)}{z - \xi}\, dz = (x, f)_{H_2},$$

где $f(z) = (1 - \overline{\xi} z)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\xi}^j z^j$, и $\|f\|_{H_2} = (1 - |\xi|^2)^{-1}$. Условия (6.9) для $f_j = \overline{\xi}^j$ и $\lambda_j = 1$ очевидным образом выполнены. Предположим, что $\xi \ne 0$ и $\delta > 0$ (случаи $\xi = 0$ или $\delta = 0$ являются элементарными). Следуя обозначениям (6.9), получаем

$$\mu_k = \sqrt{\frac{1 - |\xi|^2}{k(1 - |\xi|^2) + 1}}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Положим $\Delta_{-1} := (\mu_0, +\infty)$ и $\Delta_k := (\mu_{k+1}, \mu_k]$, $k = 0, 1, \ldots$. Нетрудно убедиться, что $\delta \in \Delta_{k-1}$, $k \ge 1$, в том и только в том случае, если

$$k = \left[\delta^{-2} - \frac{|\xi|^2}{1 - |\xi|^2}\right]$$

($[\cdot]$ — целая часть).

Тем самым из теоремы 6.2 получаем, что для всех $\delta > 0$ метод

$$x(\xi) \approx \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{1 - k\delta^2}} \frac{|\xi|^{k-j}}{\sqrt{1 - |\xi|^2}}\right) \widetilde{a}_j \xi^j,$$

где

$$k = \begin{cases} \left[\delta^{-2} - \dfrac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\right], & 0 < \delta \le \sqrt{1-|\xi|^2}, \\ 0, & \delta > \sqrt{1-|\xi|^2}, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления (или суммирования), а

$$e(\xi, H_2, \delta) = \frac{|\xi|^k}{1-|\xi|^2}\sqrt{1-k\delta^2} + \delta\frac{1-|\xi|^k}{1-|\xi|}.$$

Пример 6.2. Рассмотрим аналогичную задачу об оптимальном суммировании степенных рядов для пространства Бергмана A_2, являющимся совокупностью функций $x(z)$, аналитических в D и таких, что

$$\|x\|_{A_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_D |x(z)|^2\,d\sigma\right)^{1/2} < \infty,$$

где σ — плоская мера Лебега. Пространство A_2 — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(x, f)_{A_2} := \frac{1}{\pi}\int_D x(z)\overline{f(z)}\,d\sigma.$$

Система функций $1, \sqrt{2}z, \ldots, \sqrt{n+1}z, \ldots$ является полной ортонормированной системой в A_2. Таким образом, если $x \in A_2$ и

$$x(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

то $(j+1)^{-1/2}a_j$ — коэффициенты Фурье функции x, а

$$\|x\|_{A_2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{-1}|a_j|^2.$$

Функция $f(z) = (1-\overline{\xi}z)^{-2}$ — воспроизводящее ядро в A_2, т.е. для любой точки $\xi \in D$ $x(\xi) = (x, f)_{A_2}$. Будем по-прежнему считать выполнеными условия (6.15), которые можно записать в эквивалентном виде

$$\left|\frac{a_j}{\sqrt{j+1}} - \frac{\widetilde{a}_j}{\sqrt{j+1}}\right| \le \frac{\delta}{\sqrt{j+1}}.$$

Пользуясь обозначениями из (6.8), имеем $\lambda_j = (j+1)^{-1/2}$, а в силу равенства

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\overline{\xi}_j z^j$$

$f_j = \sqrt{j+1}\,\overline{\xi}^j$ и $\|f\|_{A_2}^2 = (1-|\xi|^2)^{-1}$.

Условие (6.9) здесь выполнено лишь при $|\xi| \le 1/2$. Однако, если $1/2 < |\xi| < 1$, то, начиная с некоторого j (а именно, для

$j \geq \dfrac{2|\xi|-1}{1-|\xi|}$), величины $|f_j|\lambda_j^{-1}$ монотонно убывают. Это приводит к некоторой любопытной ситуации, когда при больших погрешностях и точках ξ, близких к границе единичного круга, информативными оказываются коэффициенты при степенях $j \approx \dfrac{2|\xi|-1}{1-|\xi|}$, а остальные не несут полезной информации.

Если, например,

$$\frac{k}{k+1} < |\xi| < \frac{k+1}{k+2},$$

то для

$$\delta < \mu_0 := (k+1)|\xi|^k(1-|\xi|^2),$$

когда δ достаточно близко к μ_0, метод

$$x(\xi) \approx \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{k+1-\delta^2}} \frac{\sqrt{1-(k+1)|\xi|^{2k}(1-|\xi|^2)^2}}{\sqrt{k+1}|\xi|^k(1-|\xi|^2)}\right) \widetilde{a}_k \xi^k$$

является оптимальным методом восстановления.

Оценим количество коэффициентов, используемых в оптимальном методе восстановлении при фиксированном $\xi \neq 0$ и $\delta \to 0$. Для величин, определенных в (6.10) при $k > \dfrac{2|\xi|-1}{1-|\xi|}$ имеем

$$\mu_k = \left(\frac{k(1-|\xi|^2)+1}{(k+1)^2(1-|\xi|^2)^2} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\right)^{-1/2}.$$

В оптимальном методе используется k коэффициентов в том и только в том случае, если $\mu_{k+1} \leq \delta < \mu_k$. Пользуясь известным равенством

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = \log k + \gamma + o(1),$$

где $\gamma = 0.5772\ldots$ — константа Эйлера, получаем

$$k = \gamma_0 \exp(1/\delta^2)(1+o(1)),$$

где $\gamma_0 = \exp(-\gamma) = 0.5614\ldots$.

Вернемся к задаче оптимального восстановления линейного функционала $(x,f)_X$, $f \in X$, $f \neq 0$, на элементах $x \in BX$, но теперь уже по приближенным значениям линейного ограниченного оператора $I\colon X \to L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Теорема 6.3. *Пусть λ — положительная измеримая функция. Предположим, что $\lambda g \in L_\infty(\Omega)$, где $g := If$, и для любой* *функции* $y \in L_\infty(\Omega)$ $II^*\lambda yg = yg$. *Положим*

$$\Omega_1 := \{\, s \in \Omega : \lambda(s)|g(s)| = \|\lambda g\|_\infty \,\}, \quad \delta_0 := \left(\int_{\Omega_1} \lambda^{-1}(s)\, d\mu\right)^{1/2},$$

$$\delta_1 := \frac{\|g\|_1}{\|f\|_X}.$$

Тогда

1) *если* $\delta \ge \delta_1$, *то* $y_0^* = 0$ — *оптимальный метод восстановления и* $e(f, I, BX, \delta) = \|f\|_X$,
2) *если* $f = I^*(\lambda g)$ *и* $0 \le \delta \le \delta_0$, *то* $y_0^* = \lambda g$ — *оптимальный метод восстановления и* $e(f, I, BX, \delta) = \delta\|\lambda g\|_\infty$,
3) *в остальных случаях (т.е. если* $f \ne I^*(\lambda g)$ *и* $0 \le \delta \le \delta_1$ *или* $f = I^*(\lambda g)$ *и* $\delta_0 < \delta < \delta_1$ *метод*

$$y_0^* = \begin{cases} \lambda(s)g(s), & \lambda(s)|g(s)| < c, \\ c(g(s))_{(1)}, & \lambda(s)|g(s)| \ge c, \end{cases} \tag{6.16}$$

является оптимальным и

$$e(f, I, BX, \delta) = \sqrt{\|f\|_X^2 - \|\lambda g^2\|_1^2 + \int_\Omega \left(\lambda(s)|g(s)| - c\right)_+^2 \lambda^{-1}(s)\, d\mu} + \delta c,$$

где $c \in [0, \|\lambda g\|_\infty)$ *и является решением уравнения*

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\lambda(s)|g(s)| - c\right)_+ \lambda^{-1}(s)\, d\mu}{\sqrt{\|f\|_X^2 - \|\lambda g^2\|_1^2 + \displaystyle\int_\Omega \left(\lambda(s)|g(s)| - c\right)_+^2 \lambda^{-1}(s)\, d\mu}} = \delta. \tag{6.17}$$

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из предложения 5.2. Пусть выполнены условия 2). Если $\delta_0 = 0$, то утверждение непосредственно вытекает из предложения 5.1, в котором следует положить $x_0 = 0$ и $y_0^* = \lambda g$. Пусть $\delta_0 > 0$. В силу того, что $f \ne 0$, $\|\lambda g\|_\infty > 0$. Положим

$$y(s) := \begin{cases} 0, & s \notin \Omega_1, \\ \dfrac{\delta\delta_0^{-2}}{\|\lambda g\|_\infty}, & s \in \Omega_1, \end{cases} \quad x_0 := I^*\lambda yg.$$

Имеем

$$\|x_0\|_X^2 = (\lambda yg, II^*(\lambda yg))_\Omega = (\lambda yg, yg)_\Omega = \delta^2\delta_0^{-4} \int_{\Omega_1} \lambda^{-1}(s)\, d\mu$$
$$= \delta^2\delta_0^{-2} \le 1.$$

Тем самым $x_0 \in BX$. Кроме того,

$$(Ix_0, \lambda g)_\Omega = (yg, \lambda g)_\Omega = \delta\delta_0^{-2}\|\lambda g\|_\infty \int_{\Omega_1} \lambda^{-1}(s)\, d\mu = \delta\|\lambda g\|_\infty,$$

$$\|Ix_0\|_1 = \int_\Omega |y(s)g(s)|\, d\mu = \delta\delta_0^{-2} \int_{\Omega_1} \lambda^{-1}(s)\, d\mu = \delta.$$

Таким образом, выполнены условия 3) и 4) предложения 5.1, а условие 2) того же предложения выполнено, так как $f = I^* y_0^*$. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Прежде всего покажем, что уравнение (6.17) имеет в рассматриваемом случае решение $c \in [0, \|\lambda g\|_\infty)$. Обозначим функцию, стоящую в левой части (6.17), через $\varphi(c)$. Эта функция непрерывна при всех $c \in [0, \|\lambda g\|_\infty)$ и $\varphi(0) = \delta_1$. Если $f \neq I^*(\lambda g)$, то

$$0 < \|f - I^*(\lambda g)\|_X^2 = \|f\|_X^2 - \|\lambda g^2\|_1^2.$$

Поэтому $\varphi(c)$ непрерывна на отрезке $[0, \|\lambda g\|_\infty]$ и $\varphi(\|\lambda g\|_\infty) = 0$. Если же $f = I^*(\lambda g)$, то

$$\varphi(c) = \frac{\displaystyle\int_\Omega (\lambda(s)|g(s)| - c)_+ \, \lambda^{-1}(s)\, d\mu}{\sqrt{\displaystyle\int_\Omega (\lambda(s)|g(s)| - c)_+^2 \, \lambda^{-1}(s)\, d\mu}}.$$

Положим $c_\varepsilon := \|\lambda g\|_\infty - \varepsilon$, $\Omega_\varepsilon := \{s \in \Omega : \lambda(s)|g(s)| > c_\varepsilon\}$. Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\varphi(c_\varepsilon) \le \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^{-1}(s)\, d\mu \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что для любого $\delta > \delta_0$ при достаточно малых ε $\varphi(c_\varepsilon) < \delta$. Тем самым доказано, что в том и другом случае уравнение (6.17) имеет решение $c \in [0, \|\lambda g\|_\infty)$.

Для такого c рассмотрим метод, определенный равенством (6.16). Положим

$$y(s) := \begin{cases} 1, & \lambda(s)|g(s)| < c, \\ \dfrac{c}{\lambda(s)|g(s)|}, & \lambda(s)|g(s)| \ge c. \end{cases}$$

Очевидно $y \in L_\infty(\Omega)$ и $y_0^* = \lambda y g$. Поэтому $II^* y_0^* = yg$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|f - I^* y_0^*\|_X^2 &= \|f\|_X^2 - 2\,\mathrm{Re}(f, I^*(\lambda y g))_X + (I^*(\lambda y g), I^*(\lambda y g))_X \\ &= \|f\|_X^2 - 2(g, \lambda y g)_\Omega + (\lambda y g, y g)_\Omega = \|f\|_X^2 - \|\lambda g^2\|_1^2 \\ &\qquad + \int_\Omega (\lambda(s)|g(s)| - c)_+^2 \, \lambda^{-1}(s)\, d\mu > 0. \end{aligned}$$

Положим

$$x_0 := \frac{f - I^* y_0^*}{\|f - I^* y_0^*\|_X}.$$

Тогда $x_0 \in BX$ и, кроме того,

$$\|Ix_0\|_1 = \|f - I^* y_0^*\|_X^{-1} \int_\Omega (\lambda(s)|g(s)| - c)_+ \lambda^{-1}(s)\, d\mu = \delta,$$

$$(Ix_0, y_0^*)_\Omega = \|f - I^* y_0^*\|_X^{-1} \int_\Omega (1 - y(s))\lambda(s) y(s)|g(s)|^2\, d\mu$$
$$= \|f - I^* y_0^*\|_X^{-1} \int_\Omega (1 - y(s)) c|g(s)|\, d\mu = \delta \|y_0^*\|_\infty.$$

Из предложения 5.1 вытекает оптимальность метода y_0^*. Величина $e(f, I, BX, \delta)$ во всех случаях 1)–3) находится из утверждения 5) теоремы 5.1. Теорема доказана. □

Применим теорему 6.3 к задаче оптимального восстановления линейного функционала $(x, f)_X$ для $x \in BX$ по приближенным значениям коэффициентов Фурье элемента x, когда погрешность измеряется в норме пространства $l_1(\mu)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, $\mu_j > 0$. Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированная система в X. Если она конечная, то через n обозначим число ее элементов (для бесконечной системы полагаем $n = \infty$).

Положим $Ix = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_j = (x, e_j)_X$. При условии $\sum_{j=1}^n \mu_j^2 < \infty$ оператор $I\colon X \to l_1^n(\mu)$ является линейным ограниченным оператором. При этом для $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots) \in l_\infty^n$ $I^* y^* = \sum_{j=1}^n \mu_j y_j^* e_j$. Обозначим через $\gamma_j := |f_j|\mu_j^{-1}$ и предположим, что

$$\sup_j \gamma_j < \infty. \tag{6.18}$$

Тогда при всех $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_\infty^n$ для $y^* = (\mu_1^{-1} y_1 f_1, \mu_2^{-1} y_2 f_2, \dots)$ имеем

$$II^* y^* = (y_1 f_1, y_2 f_2, \dots). \tag{6.19}$$

Тем самым выполнены условия теоремы 6.3 для $\lambda = (\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots)$. Будем считать, что

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_{r-1} > \gamma_r \ge \gamma_{r+1} \ge \ldots. \tag{6.20}$$

Введем следующие обозначения: $s := \sup\{j : |f_j| > 0\}$,

$$\rho_k := \frac{\sum_{j=1}^{k-1}(\gamma_j - \gamma_k)\mu_j^2}{\sqrt{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^{s}|f_j|^2 + \sum_{j=1}^{k-1}(\gamma_j - \gamma_k)^2\mu_j^2}}, \quad r \le k \le s$$

(если $s = \infty$, то $\gamma_\infty := \lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j$), $\Delta_{r-1} := [0, \rho_r]$, $\Delta_k := (\rho_k, \rho_{k+1}]$, $r \le k < s$, $\Delta_s := (\rho_s, \delta_1)$,

$$\delta_1 := \frac{\sum_{j=1}^{s}\gamma_j\mu_j^2}{\|f\|_X}, \quad m_k := \sum_{j=1}^{k}\mu_j^2, \quad F_k := m_k^{-1}\sum_{j=1}^{k}\gamma_j.$$

Отметим, что здесь так же, как и в теореме 6.2, некоторые из Δ_k могут быть пустыми множествами (при $\gamma_k = \gamma_{k+1}$). Кроме того, если $s = \infty$ и $\gamma_\infty = 0$, то $\rho_\infty = \delta_1$ и $\Delta_s = \emptyset$.

Теорема 6.4. *Пусть $f \in X$, $\sum_{j=1}^{n}\mu_j^2 < \infty$ и выполнены условия (6.18) и (6.20). Пусть, кроме того, $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots)$ — приближенные значения коэффициентов Фурье элемента $x \in BX$ такие, что*

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j - \widetilde{x}_j|\mu_j \le \delta.$$

Тогда

1) *если $\delta \ge \delta_1$, то $(x, f)_X \approx 0$ — оптимальный метод и $e(f, I, BX, \delta) = \|f\|_X$,*
2) *если $f = \sum_{j=1}^{s} f_j e_j$ и $0 \le \delta \le \rho_r$, то*

$$(x, f)_X \approx \sum_{j=1}^{s}\widetilde{x}_j\overline{f}_j$$

— оптимальный метод и $e(f, I, BX, \delta) = \delta\gamma_1$,

3) *если $\delta \in \Delta_k$, $r \le k \le s$ и при $k = r$ $f \ne \sum_{j=1}^{s} f_j e_j$, то метод*

$$(x, f)_X \approx c_k(\delta)\sum_{j=k}^{s}\widetilde{x}_j\left(\overline{f}_j\right)_{(1)}\mu_j + \sum_{j=k+1}^{s}\widetilde{x}_j\overline{f}_j,$$

где

$$c_k(\delta) := F_k - \frac{\delta}{\rho_k}(F_k - \gamma_{k+1})\sqrt{\frac{m_k - \rho_k^2}{m_k - \delta^2}}, \tag{6.21}$$

является оптимальным, а

$$e(f, I, BX, \delta) = \sqrt{m_k - \delta^2}\left(\frac{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^{s}|f_j|^2}{m_k} - F_k^2\right)^{1/2} + \delta F_k.$$

Доказательство. Из условий теоремы и равенства (6.19) вытекает возможность применения теоремы 6.3, из которой непосредственно следуют утверждения 1) и 2). Для доказательства утверждения 3) рассмотрим решение уравнения (6.17). При $\gamma_{k+1} \le c < \gamma_k$, $r \le k < s$, это уравнение будет иметь вид

$$\varphi(c) := \frac{\sum_{j=1}^{k}(\gamma_j - c)\mu_j^2}{\sqrt{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^{s}|f_j|^2 + \sum_{j=1}^{k}(\gamma_j - c)^2\mu_j^2}} = \delta. \tag{6.22}$$

При этом легко убедиться, что функция $\varphi(c)$ монотонно убывает при $c \in [\gamma_{k+1}, \gamma_k)$ и $\varphi(\gamma_{k+1}) = \rho_{k+1}$, а $\varphi(\gamma_k) = \rho_k$. Таким образом, для $\delta \in \Delta_k$ уравнение (6.22) имеет единственное решение. Непосредственные вычисления показывают, что это решение можно записать в виде (6.21). Если $f \ne \sum_{j=1}^{s} f_j e_j$, то при $\gamma_r \le c \le \gamma_{r-1}$ $\varphi(c)$ монотонно убывает от ρ_r до нуля, а решение уравнения (6.22) записывается в том же виде (6.21) для $k = r - 1$. Аналогично рассматривается случай $\delta \in \Delta_s$ (для этого надо рассмотреть изменение c в промежутке $0 < c \le \gamma_s$). Теорема доказана. $\square$

Глава 2

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

§1. Задача Каратеодори–Фейера и оптимальное восстановление в пространстве H_p

Пространством Харди H_p называется совокупность всех функций $f(z)$, аналитических внутри единичного круга D, таких, что

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Функции из H_p имеют почти всюду граничные значения $f(e^{i\theta})$ и могут рассматриваться как элементы линейного подпространства $L_p(S)$ для $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и $d\mu(e^{i\theta}) = \dfrac{d\theta}{2\pi}$ (подробные сведения о свойствах функций из H_p можно найти в монографиях [**17**], [**15**], [**84**]).

С задачами оптимального восстановления в пространствах H_p тесно связаны классические экстремальные задачи, являвшиеся предметом многих исследований. В 1911 г. Каратеодори и Фейер [**82**] исследовали задачу о нахождении среди всех функций

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m + \ldots,$$

аналитических в единичном круге D, при фиксированных коэффициентах $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ той, которая имеет наименьший максимум модуля в D. Рассмотрим задачу такого же типа о нахождении величины

$$\inf \|f\|_{H_p}$$

на множестве функций из H_p, удовлетворяющих условиям

$$f^{(j)}(\xi) = j! c_j, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{1.1}$$

где $\xi \in D$, а $c_0, \ldots, c_m$ — фиксированные комплексные числа. Эту задачу иногда называют задачей Какейа [**99**] (см. [**34**, стр. 459]). Более общие задачи этого типа и ссылки на многочисленную литературу по этим вопросам можно найти в работах [**15**], [**34**] и [**76**].

Известно (см. [**102**], [**123**], [**76**]), что при всех $1 \le p \le \infty$ среди функций, удовлетворяющих условию (1.1), существует единственная функция вида

$$f_0(z) = C(1-\overline{\xi}z)^{-2(m+1)/p} \prod_{j=1}^{k} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1-\overline{\alpha}_j z)^{2/p}, \tag{1.2}$$

где C — некоторая константа, $0 \le k \le m$, $|\alpha_j| < 1$, $j = 1, \dots, k$, и $|\alpha_j| \le 1$, $j = k+1, \dots, m$. Кроме того, эта функция и только она является решением задачи Каратеодори–Фейера с условием (1.1). (При $p = \infty$ все выражения с p понимаются как предельные значения при $p \to \infty$.)

Будем считать, что $c_0 \ne 0$, так как в противном случае с помощью представления функции f в виде

$$f(z) = \frac{z-\xi}{1-\overline{\xi}z} g(z)$$

задача сводится к аналогичной, но с меньшим числом параметров.

Введем следующие обозначения: $d_j := c_0^{-1} c_j$, $j = 0, \dots, m$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{d_1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{d_{m-1}}{m} & \dfrac{d_{m-2}}{m} & \dots & \dfrac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad \rho := A^{-1} d, \tag{1.3}$$

$$\gamma_s := (-1)^{s+1} \left[\frac{2}{p} \overline{\xi}^s + \sum_{j=1}^{s} (-1)^j C_s^j \overline{\xi}^{s-j} (1-|\xi|^2)^j \rho_j \right], \quad s = 1, \dots, m;$$

здесь $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$, $d = (d_1, \dots, d_m)^T$.

Теорема 1.1. *Пусть $1 \le p \le \infty$. Для того, чтобы функция* (1.2) *была решением задачи Каратеодори–Фейера с условием* (1.1) *и $c_0 \ne 0$, необходимо и достаточно, чтобы числа*

$$b_j = \frac{\overline{\alpha}_j - \overline{\xi}}{1-\xi\overline{\alpha}_j} \tag{1.4}$$

являлись решением системы

$$\sum_{j=1}^{k} (\overline{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2}{p} \sum_{j=1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{1.5}$$

таким, что

$$|b_j| < 1,\ j = 1, \dots, k, \quad |b_j| \le 1,\ j = k+1, \dots, m, \quad 0 \le k \le m, \tag{1.6}$$

а

$$C = c_0 (1-|\xi|^2)^{2(m+1)/p} \prod_{j=1}^{k} \frac{1-\overline{\alpha}_j \xi}{\xi - \alpha_j} \prod_{j=1}^{m} (1-\overline{\alpha}_j \xi)^{-2/p}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть функция f_0 вида (1.2) является решением задачи Каратеодори–Фейера. Равенство (1.7) вытекает из того, что $f_0(\xi) = c_0$. Докажем, что имеют место равенства (1.5) для b_j, определенных в (1.4). Положим

$$x(z) := \frac{f_0'(z)}{f_0(z)} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{z-\alpha_j} + \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j z}\right) - \frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j z} + (m+1)\frac{2}{p}\frac{\overline{\xi}}{1-\overline{\xi}z}. \quad (1.8)$$

Из определения $x(z)$ получаем

$$f_0^{(l+1)}(\xi) = \sum_{j=0}^{l} C_l^j f_0^{(l-j)}(\xi) x^{(j)}(\xi) \quad (1.9)$$

или, учитывая равенства (1.1),

$$\frac{1}{l+1}\sum_{j=0}^{l} d_{l-j}\frac{x^{(j)}(\xi)}{j!} = d_{r+1}, \quad l = 0,\dots,m-1.$$

Тем самым

$$\frac{x^{(j)}(\xi)}{j!} = \rho_{j+1}, \quad j = 0,\dots,m-1.$$

С другой стороны, из (1.8) имеем

$$\frac{x^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{(-1)^{l-1}}{(\xi-\alpha_j)^l} + \frac{\overline{\alpha}_j^l}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^l}\right) - \frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\alpha}_j^l}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^l} + (m+1)\frac{2}{p}\frac{\overline{\xi}^l}{(1-|\xi|^2)^l}.$$

В силу равенства (1.4)

$$\frac{1}{\xi-\alpha_j} = -\frac{\overline{b}_j^{-1}+\overline{\xi}}{1-|\xi|^2}, \quad \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j\xi} = \frac{b_j+\overline{\xi}}{1-|\xi|^2},$$

и, кроме того, имеют место соотношения (1.6), так как они выполнены для $\alpha_1,\dots,\alpha_m$. Таким образом, для $b_1,\dots,b_m$ справедливы равенства

$$\omega_l := \sum_{j=1}^{k}\left[(\overline{b}_j^{-1}+\overline{\xi})^l - (b_j+\overline{\xi})^l\right] + \frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m}(b_j+\overline{\xi})^l = (m+1)\frac{2}{p}\overline{\xi}^l - (1-|\xi|^2)^l\rho_l, \quad l = 1,\dots,m.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{k}(\bar{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m} b_j^s = \sum_{j=1}^{k}\left[(\bar{b}_j^{-1} + \bar{\xi} - \bar{\xi})^s - (b_j + \bar{\xi} - \bar{\xi})^s\right]$$
$$+ \frac{2}{p}\sum_{j=1}^{m}(b_j + \bar{\xi} - \bar{\xi})^s = \sum_{l=1}^{s} C_s^l(-\bar{\xi})^{s-l}\omega_l + m\frac{2}{p}(-\bar{\xi})^s = \gamma_s. \quad (1.10)$$

Если теперь $b_1, \ldots, b_m$ — решения системы (1.5), удовлетворяющие условиям (1.6), то, определив α_j из равенств (1.4) и рассмотрев функцию вида (1.2), проводя рассуждения в обратном порядке, получим из (1.9)

$$\frac{f_0^{(j)}(\xi)}{f_0(\xi)} = d_j = \frac{c_j}{c_0}, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Выбрав C так, чтобы $f_0(\xi) = c_0$ (это означает, что C определено равенством (1.7)), получим выполненными условия (1.1). Теорема доказана. □

Следствие 1.1. *При всех* $1 \le p \le \infty$ *и любых* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{C}$ *найдется* $0 \le k \le m$, *при котором система* (1.5) *имеет решение, удовлетворяющее условиям* (1.6). *При этом функция*

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{z - \bar{b}_j}{1 - b_j z}\prod_{j=1}^{m}(1 - b_j z)^{2/p}$$

является решением задачи Каратеодори–Фейера с условиями

$$f^{(j)}(0) = j! d_j f(0), \quad j = 0, \ldots, m,$$

где $d_0 = 1$, *а* $d_l = -l^{-1}\sum_{j=1}^{l} d_{l-j}\gamma_j$, $l = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления функционала

$$L_\xi^\lambda f := \sum_{j=\nu}^{\nu+m}\frac{\lambda_j}{j!}f^{(j)}(\xi),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_{\nu+m} \ne 0$, $\nu \ge 0$, на множестве функций из BH_p по значениям информационного оператора

$$If := \bigl\{f(\xi), \ldots, f^{(\nu-1)}(\xi), f(z_1), \ldots, f^{(\nu_1-1)}(z_1), \ldots,$$
$$f(z_n), \ldots, f^{(\nu_n-1)}(z_n)\bigr\},$$

где $\xi, z_1, \ldots, z_n$ — различные точки из D.

Из теоремы 4.2 гл. I вытекает существование линейного оптимального метода восстановления и равенство

$$e(\xi, \lambda, I, BH_p) := e(L_\xi^\lambda, I, BH_p, 0) = \sup_{\substack{f \in BH_p \\ If=0}} |L_\xi^\lambda f|. \tag{1.11}$$

Всякая функция $f \in BH_p$, удовлетворяющая условию $If = 0$, может быть представлена в виде

$$f(z) = W_1(z)g(z),$$

где

$$W_1(z) := \left(\frac{z-\xi}{1-\bar{\xi}z}\right)^\nu W(z), \quad W(z) := \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\right)^{\nu_j},$$

а $g \in BH_p$. Тем самым экстремальная задача (1.11) сводится к экстремальной задаче без ограничений

$$\sup_{g \in BH_p} |L_\xi^\mu g|, \tag{1.12}$$

где $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m)$, а μ_j выражаются через элементы вектора $\lambda = (\lambda_\nu, \dots, \lambda_{\nu+m})$ и производные функции W_1 в точке ξ.

Экстремальным задачам (1.11), (1.12) и их обобщениям посвящено много работ, начиная с классической работы Ландау [**101**] ($p = \infty$, $\xi = 0$, $\mu = (1, \dots, 1)$) (подробнее см. [**102**], [**123**], [**74**], [**84**]). Если говорить о задачах восстановления в пространствах H_p, то они стали рассматриваться сравнительно недавно в работах [**44**], [**45**] ($p = \infty$, $\nu = m = 0$), [**108**] ($p = \infty$, $\lambda = (0,1)$), [**89**], [**120**] ($1 \le p < \infty$, $\nu = m = 0$), [**59**] ($p = 2$, $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$, $n = 1$, $z_1 = 0$), [**56**] ($1 \le p \le \infty$, $\lambda = (\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$).

Здесь мы рассматриваем общий случай восстановления функционала $L_\xi^\lambda f$ и сводим его к решению системы вида (1.5), т.е. фактически к задаче Каратеодори–Фейера.

Положим $d_j := \lambda_{\nu+m}^{-1}\lambda_{\nu+m-j}$, $j = 1, \dots, m$, $y(z) := W^{-1}(z)W'(z)$,

$$\gamma_s := (-1)^s \left[\left(m + \nu - 1 + \frac{2}{p}\right) \bar{\xi}^s - \sum_{l=1}^s (-1)^l C_s^l \bar{\xi}^{s-l} \right.$$
$$\left. \times (1 - |\xi|^2)^l \left(\frac{y^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} + \rho_l\right)\right], \quad s = 1, \dots, m, \tag{1.13}$$

где вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$ определен равенствами (1.3) для вновь определенных $d_1, \dots, d_m$. Заменив в следствии 1.1 p на сопряженный показатель $1 - p^{-1}$, получим существование $b_1, \dots, b_m$, удовлетворяющих равенствам

$$\sum_{j=1}^k (\bar{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2(p-1)}{p} \sum_{j=1}^m b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{1.14}$$

При $p = 1$ (для системы (1.5) — $p = \infty$) и $k < m$ доопределим $b_1, \dots, b_k$ произвольными числами $b_{k+1}, \dots, b_m$ такими, что $|b_j| = 1$, $j = k+1, \dots, m$.

Нам удобно считать, что

$$|b_j| \le 1,\ j = 1, \dots, k, \quad |b_j| < 1,\ j = k+1, \dots, m. \tag{1.15}$$

Это всегда возможно сделать, так как при $|b_j| = 1$ $\overline{b}_j^{\,-s} - b_j^s = 0$ (тем самым при $p = 1$ $k = m$). Для так определенных $b_1, \dots, b_m$ положим

$$\alpha_j := \frac{\overline{b}_j + \xi}{1 + \bar{\xi}\,\overline{b}_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad r := (m+1)\frac{p-2}{p} - \nu,$$

$$\Psi(z) := \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)^{2(p-1)/p},$$

$$C(\xi) := \frac{\lambda_{\nu+m} W(\xi)(1 - |\xi|^2)^r}{\Psi(\xi)},$$

$$g(z) := e^{-i \arg C(\xi)} W_1(z)(1 - \overline{\xi} z)^{-2(m+1)/p} \prod_{j=k+1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)^{2/p}.$$

Теорема 1.2. *При всех $1 \le p \le \infty$ метод*

$$L_\xi^\lambda f \approx \sum_{l=0}^{\nu-1} c_l(\xi) f^{(l)}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} c_{jl}(\xi) f^{(l)}(z_j),$$

где

$$c_l(\xi) := -\frac{C(\xi)}{l!(\nu + m - l)!} \left[\frac{\Psi(z)}{W(z)(1 - \overline{\xi} z)^r}\right]^{(\nu+m-l)}_{\Big|_{z=\xi}}, \tag{1.16}$$

$$c_{jl}(\xi) := -\frac{C(\xi)}{l!(\nu_j - l - 1)!} \left[\frac{\Psi(z)(1 - \overline{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1 - \overline{\xi} z)^r (z - \xi)^{\nu+m+1}}\right]^{(\nu_j - l - 1)}_{\Big|_{z=z_j}},$$

$$\omega_j(z) := \prod_{\substack{l=1\\ l \ne j}}^{n} \left(\frac{z - z_l}{1 - \overline{z}_l z}\right)^{\nu_l},$$

является оптимальным методом восстановления, функция $g_0 := g/\|g\|_{H_p}$ — экстремальная и

$$e(\xi, \lambda, I, BH_p) = L_\xi^\lambda g_0$$

$$= |C(\xi)| \left(\frac{1}{m!} \left[\frac{\prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)(z - \alpha_j)}{(1 - \overline{\xi} z)^{m+1}}\right]^{(m)}_{\Big|_{z=\xi}}\right)^{(p-1)/p}.$$

Доказательство. Пусть $1 \le p < \infty$ и f — произвольная функция из H_p. Положим

$$Jf := |C(\xi)| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\overline{g(e^{i\theta})}\right)_{(p)} f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Из определения функции g, хорошо известного свойства: при всех $|z| = 1$ и $u \in D$

$$\overline{\frac{z-u}{1-\overline{u}z}} = \frac{1-\overline{u}z}{z-u},$$

а также теоремы Коши о вычетах имеем

$$\begin{aligned} Jf = C(\xi)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\Psi(z)f(z)\,dz}{W(z)(1-\overline{\xi}z)^r(z-\xi)^{\nu+m+1}} \\ = -\sum_{l=0}^{\nu+m} c_l(\xi) f^{(l)}(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl}(\xi) f^{(l)}(z_j), \end{aligned}$$

где $c_l(\xi)$ определены равенством (1.16) при всех $l = 0, \dots, \nu + m$. Докажем, что

$$c_l(\xi) = -\frac{\lambda_l}{l!}, \quad l = \nu, \dots, \nu + m.$$

Положим $h(z) := \Psi(z) W^{-1}(z)(1-\overline{\xi}z)^{-r}$ и

$$\begin{aligned} x(z) := \frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{z-\alpha_j} + \frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j z}\right) - \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\alpha}_j}{1-\overline{\alpha}_j z} \\ - y(z) + r\frac{\overline{\xi}}{1-\overline{\xi}z}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{x^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{(-1)^{l-1}}{(\xi-\alpha_j)^l} + \frac{\overline{\alpha}_j^l}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^l}\right) - \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\alpha}_j^l}{(1-\overline{\alpha}_j\xi)^l} \\ - \frac{y^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} + r\frac{\overline{\xi}^l}{(1-|\xi|^2)^l}. \end{aligned}$$

Подставив в эти равенства выражения α_j через b_j, получим

$$(1-|\xi|^2)^l \frac{x^{(l-1)}(\xi)}{l-1)!} = -\omega_l - \frac{y^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!}(1-|\xi|^2)^l + r\overline{\xi}^l,$$

где

$$\omega_l := \sum_{j=1}^{k}\left[(\overline{b}_j^{-1} + \overline{\xi})^l - (b_j + \overline{\xi})^l\right] + \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m}(b_j + \overline{\xi})^l.$$

Аналогично равенствам (1.10) получаем

$$\sum_{j=1}^{k}(\bar{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2(p-1)}{p}\sum_{j=1}^{m} b_j^s = \sum_{l=1}^{s} C_s^l(-\bar{\xi})^{s-l}\omega_l + m\frac{2(p-1)}{p}(-\bar{\xi})^s.$$

Учитывая равенства (1.14), имеем систему для определения $\omega_1, \ldots, \omega_m$

$$\sum_{l=1}^{s} C_s^l(-\bar{\xi})^{s-l}\omega_l = \gamma_s - m\frac{2(p-1)}{p}(-\bar{\xi})^s. \tag{1.17}$$

Нетрудно убедиться, что рассматриваемая система имеет единственное решение

$$\omega_l = r\bar{\xi}^l - (1-|\xi|^2)^l\left(\frac{y^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} + \rho_l\right)$$

(для этого в силу единственности достаточно подставить выписанное решение в (1.17)). Тем самым

$$\frac{x^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} = \rho_l, \quad l = 1, \ldots, m.$$

Таким образом,

$$h^{(l+1)}(\xi) = (x(z)h(z))^{(l)}_{|z=\xi} = \sum_{j=0}^{l} C_l^j x^{(j)}(\xi)h^{(l-j)}(\xi)$$
$$= \sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{(l-j)!}\rho_{j+1}h^{(l-j)}(\xi), \quad l = 0, \ldots, m-1.$$

Из равенства $A\rho = d$ следует, что

$$\frac{h^{(l)}(\xi)}{l!} = d_l h(\xi) = \frac{\lambda_{\nu+m-l}}{\lambda_{\nu+m}}h(\xi).$$

Имеем

$$c_l(\xi) = -\frac{C(\xi)}{l!(\nu+m-l)!}h^{(\nu+m-l)}(\xi) = -\frac{C(\xi)}{l!}\frac{\lambda_l}{\lambda_{\nu+m}}h(\xi) = -\frac{\lambda_l}{l!}.$$

Итак, доказано, что

$$L_\xi^\lambda f - \sum_{l=0}^{\nu-1} c_l(\xi)f^{(l)}(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl}(\xi)f^{(l)}(z_j)$$
$$= |C(\xi)|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\overline{g(e^{i\theta})}\right)_{(p)} f(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Кроме того, $Ig = 0$. Теперь утверждение теоремы для $1 \le p < \infty$ следует из теоремы 5.3 гл. I. Остается лишь найти $\|g\|_{H_p}$. Имеем

$$\|g\|_{H_p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^m |1-\overline{\alpha}_j e^{i\theta}|^2}{|1-\overline{\xi}e^{i\theta}|^{2(m+1)}}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi}z)^{m+1}(z-\xi)^{m+1}}\,dz$$
$$= \frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi}z)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=\xi}.$$

При $p = \infty$ положим

$$\varphi(z) := |C(\xi)|\frac{z\prod_{j=1}^m (z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_j z)}{(z-\xi)^{m+1}(1-\overline{\xi}z)^{m+1}}.$$

В силу того, что при всех $|\alpha| \le 1$ и $|z| = 1$

$$\frac{(z-\alpha)(1-\overline{\alpha}z)}{z} \ge 0$$

$\varphi(e^{i\theta}) \ge 0$. Поэтому, проверив аналогичные случаю $1 \le p < \infty$ равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})}\varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta = L_\xi^\lambda f - \sum_{l=0}^{\nu-1} c_l(\xi)f^{(l)}(\xi)$$
$$- \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl}(\xi)f^{(l)}(z_j),$$

$$\|\varphi\|_{H_1} = |C(\xi)|\frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^m (1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi}z)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=\xi},$$

из теоремы 5.3 гл. I получаем утверждение теоремы при $p = \infty$. Теорема доказана. □

В теореме 1.2 мы фактически свели задачу об оптимальном восстановлении в пространстве H_p (и, в частности, обобщенную задачу Ландау) к экстремальной задаче типа Каратеодори–Фейера в пространстве H_q, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. В работе **[76]** исследование вида экстремальных функций в задаче Каратеодори–Фейера, наоборот, сводилось к виду экстремальных функций в обобщенной задаче Ландау для пространств с сопряженным показателем.

Отметим, что тем самым при $p = 1$ задача оптимального восстановления сведена к классической задаче Каратеодори– Фейера в пространстве H_∞, допускающей эффективное решение (см., например, [**34**, стр. 220], [**15**, стр. 477], [**76**]).

Из теоремы 1.2 следует, что оптимальный метод восстановления можно построить, предварительно решая систему (1.14) при $k = 0, 1, \dots, m$ и находя то ее решение, которое удовлетворяет условиям (1.15). При этом у экстремальной функции появляется $m - k$ дополнительных нулей (кроме постоянно присутствующих нулей функции W_1, связанных с заданным информационным оператором). Для фиксированного информационного оператора это дополнительное число нулей будет зависеть от расположения точки ξ.

Из замечания, сделанного перед формулировкой теоремы 1.2, вытекает при $p = 1$ существование экстремальной функции, не имеющей дополнительных нулей в D. Тем самым при $1 < p \leq \infty$ весь круг D разбивается, вообще говоря, на $m + 1$ множество $D_0, D_1, \dots, D_m$ (некоторые из них могут быть и пусты), каждое из которых обладает тем свойством, что при $\xi \in D_j$ у экстремальной функции имеется ровно j дополнительных нулей с учетом кратности, т.е. при $\xi \in D_j$ $k = m - j$. Определение множеств D_j корректно в силу единственности экстремальной функции для $1 < p \leq \infty$ (см., например, [**75**]).

Впервые, по-видимому, эта особенность была обнаружена Дьедонне [**83**], который, решая экстремальную задачу

$$\sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ f(0)=0}} |f'(\xi)|,$$

получил, что при $|\xi| \leq \sqrt{2} - 1$ (но не в большей области) экстремальной является функция $g_0(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$. Таким образом, в этой задаче $D_0 = \{z \in D : |z| \leq \sqrt{2} - 1\}$ и $D_1 = D \setminus D_0$. Этот результат был обобщен Г.М. Голузиным [**14**], [**15**, с. 499], который решая экстремальную задачу

$$\sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ f(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0}} |f^{(m)}(\xi)|, \tag{1.18}$$

нашел, что экстремальной при $|\xi| \leq 2^{\frac{1}{2m+1}} - 1$, но не в большей области, является функция $g_0(z) = \lambda z^m$, $|\lambda| = 1$, т.е. в наших обозначениях

$$D_0 = \{\, z \in D : |z| \leq 2^{\frac{1}{2m+1}} - 1 \,\}.$$

При $m = 1$ в работе [**108**] для $p = \infty$ было дано описание областей D_0 и D_1 в общем случае. В качестве следствия для экстремальной задачи

$$\sup_{\substack{f \in BH_p \\ f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0}} |f'(\xi)|, \tag{1.19}$$

обобщающей задачу Дьедонне, при $p = \infty$ была найдена область

$$D_0 = \left\{ z \in D : |z| \le \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n} \right\}.$$

Полное описание областей D_0 и D_1 для $m = 1$, $1 \le p \le \infty$ было получено в работе [**56**], из которой, в частности, следует, что для задачи (1.19) $D_0 = \{z \in D : |z| \le r_{np}\}$, где

$$r_{np} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{p-1}{p}\right)^2 + n\left(n - \dfrac{2}{p}\right)} - \dfrac{p-1}{p}}{n - \dfrac{2}{p}}.$$

Отметим, что при $1 \le p \le 2$ $D_0 = D$, а $D_1 = \emptyset$.

Опишем область D_m. Для этой области система (1.14) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^s = \frac{p}{2(p-1)}\gamma_s, \quad s = 1, \dots, m.$$

Учитывая следствие 1.1, получаем

Теорема 1.3. *Пусть $1 < p \le \infty$. Экстремальная функция в задаче* (1.11) *имеет m дополнительных нулей, лежащих в D, в том и только в том случае, если все нули полинома*

$$P_m(z) = \sum_{l=0}^{m} a_l z^{m-l},$$

где $a_0 = 1$, $a_l = -l^{-1}\dfrac{p}{2(p-1)}\displaystyle\sum_{s=1}^{l} a_{l-s}\gamma_s$, $l = 1, \dots, m$, а γ_s определены равенствами (1.13)*, лежат внутри круга D. При этом, если $b_1, \dots, b_m$ — нули $P_m(z)$, то для дополнительных нулей имеет место равенство*

$$\alpha_j = \frac{\bar{b}_j + \xi}{1 + \bar{\xi}\,\bar{b}_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Из этой теоремы, в частности, для задачи (1.18) при $m = 2$ можно найти оставшиеся множества

$$D_1 = \{\, z \in D : r_0 < |z| \le r_1 \,\} \quad \text{и} \quad D_2 = \{\, z \in D : |z| > r_1 \,\},$$

где $r_0 = \sqrt[3]{2} - 1 = 0.2599\ldots$, а $r_1 = 0.8423\ldots$ — единственный вещественный корень уравнения $3t^3 + 4t^2 + 4t - 8 = 0$.

§2. Оптимальное восстановление в пространствах Харди и Бергмана на единичном шаре из $\mathbb{C}^n$

Пусть B — единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и S — его граница:

$$B := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z|^2 := \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 < 1 \right\},$$
$$S := \{ z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1 \}.$$

Пространством Харди $H_p(B)$ (H_p) называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\int_S |f(rz)|^p \, d\sigma(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in B} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty,$$

где σ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно вращений. Для функций из H_p существуют почти всюду граничные значения, принадлежащие $L_p(S, \sigma)$ (см. [**61**, стр. 95]). Тем самым пространство H_p можно рассматривать как линейное подпространство $L_p(S, \sigma)$.

Пространством Бергмана $A_p(B)$ (A_p) называется множество голоморфных в B функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{A_p} := \left(\int_B |f(z)|^p \, d\nu(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

где ν — мера Лебега в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, нормированная так, что $\nu(B) = 1$. При $p = \infty$ $A_\infty = H_\infty$. Если возникает необходимость отметить размерность, будем писать B_n, S_n, σ_n или ν_n.

Пусть α — мультииндекс, т.е. упорядоченный набор неотрицательных целых чисел α_j, $1 \le j \le n$: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Положим

$$D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции $f \in BH_p$ или BA_p в точке $a \in B$ по значениям следов функций $D^\alpha f$, $|\alpha| = 0, \dots, r-1$, на некотором множестве $A \subset B$. Тем самым информационным оператором является оператор

$$I_A^r f := \left\{ D^\alpha f_{|A} \right\}, \quad |\alpha| = 0, \dots, r-1.$$

Величину погрешности оптимального восстановления будем обозначать в этом случае через $e\,(a, I_A^r, BX_p)$, где $X_p = H_p$ или A_p.

Исследование задач оптимального восстановления голоморфных функций многих переменных было начато в работе [**115**], где изучался случай $r = 0$.

Будем рассматривать эту задачу сначала для пространств H_p. Докажем ряд вспомогательных утверждений, касающихся весовых воспроизводящих ядер для пространств H_p.

Пусть $u \in \mathbb{C}$, $|u| < 1$ и $\rho \geq 1$. Положим

$$\Phi_n(\rho, u) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+\rho/2)}{\Gamma(k+\rho/2+1)} u^k.$$

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $1 \leq k \leq n$ положим

$$z'_k := (z_1, \dots, z_{n-k}, 0, \dots, 0), \quad z''_k := z - z'_k,$$

$$\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k, \ z, w \in \mathbb{C}^n, \quad s_k(z,w) := \frac{\langle z, w''_k \rangle}{1 - \langle z, w'_k \rangle},$$

$$K_{rk}(z,w) := \frac{\langle z, w''_k \rangle^r \Phi_n(rp, s_k(z,w))}{(n-1)!(1 - \langle z, w'_k \rangle)^{n+rp/2}}.$$

Отметим, что $s_k(z,w) = \overline{s_k(w,z)}$ и $K_{rk}(z,w) = \overline{K_{rk}(w,z)}$.

Предложение 2.1. *При всех $1 \leq p < \infty$ для любой функции $f \in H_p$ и всех $z \in B$ справедливо равенство*

$$f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} \left(D_n^j f\right)(z'_1) z_n^j = \int_S K_{r1}(z,w) f(w) |w_n|^{r(p-2)} \, d\sigma(w). \quad (2.1)$$

Доказательство. Поскольку полиномы плотны в H_p, то достаточно доказать, что равенство (2.1) выполнено для функций вида $f(z) = g(z')z_n^m$, $m = 0, 1, \dots$, где $g(z')$ — полином, зависящий от переменных $z_1, \dots, z_{n-1}$ ($z' := (z_1, \dots, z_{n-1})$). Интеграл в (2.1) можно свести к интегралу по B_{n-1} (см. [**61**, стр. 24])

$$\begin{aligned}
&\int_S K_{r1}(z,w) g(w') w_n^m |w_n|^{r(p-2)} \, d\sigma(w) \\
&\quad = \frac{1}{(n-1)!} \int_{B_{n-1}} \frac{(1-|w'|^2)^{r(p-2)/2} g(w') \, d\nu_{n-1}(w')}{(1 - \langle z', w' \rangle)^{n+rp/2}} \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z_n^r \overline{w}_n^r w_n^m e^{i(m-r)\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+rp/2)}{\Gamma(k+rp/2+1)} \frac{z_n^k \overline{w}_n^k e^{-ik\theta}}{(1-\langle z', w' \rangle)^k} \, d\theta \\
&\quad = \begin{cases} 0, & m < r, \\ z_n^m \displaystyle\int_{B_{n-1}} K_s(z', w') g(w') \, d\nu_{n-1}(w'), & m \geq r, \end{cases}
\end{aligned}$$

где

$$K_s(z', w') := \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n)\Gamma(s+1)} \frac{(1-|w'|^2)^s}{(1 - \langle z', w' \rangle)^{n+s}}, \quad s := m + r(p-2)/2.$$

Известно, что при всех $s > -1$ ядро $K_s(z', w')$ является воспроизводящим для функций из $H_\infty(B_{n-1})$ [**61**, стр. 129], а следовательно, и для полинома g. Таким образом,

$$\int_S K_{r1}(z,w)g(w')w_n^m|w_n|^{r(p-2)}\,d\sigma(w) = \begin{cases} 0, & m < r, \\ g(z')z_n^m, & m \geq r. \end{cases}$$

Легко убедиться, что левая часть (2.1) равна тому же выражению. Предложение доказано. $\square$

Для $a \in \mathbb{C}^n$ через $P_a z$ обозначим ортогональную проекцию $z \in \mathbb{C}^n$ на подпространство, порожденное вектором a:

$$P_a z := \begin{cases} \dfrac{\langle z,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Предложение 2.2. *При всех $1 \leq p < \infty$ для любой функции $f \in H_p$ и всех $z \in B$ справедливо равенство*

$$f(z) - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j f\Big|_{z'_k} = \int_S K_{rk}(z,w)f(w)|P_{z''_k}w|^{r(p-2)}\,d\sigma(w),$$

в котором $dz = z''_k$.

Доказательство. При $z''_k = 0$ утверждение теоремы очевидно. Будем считать, что $z''_k \neq 0$. Из предложения 2.1 следует, что при всех $g \in H_p$ и $v \in B$ имеет место равенство

$$g(v) - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j g\Big|_{v'_1} = \int_S K_{r1}(v,y)g(y)|y_n|^{r(p-2)}\,d\sigma(y), \tag{2.2}$$

где $dv = v''_1$. Пусть U — некоторая унитарная матрица порядка n и $f \in H_p$. Положим $g(v) = f(U^{-1}v)$. Тогда $g \in H_p$. Применяя равенство (2.2), получаем

$$f(U^{-1}v) - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j f\Big|_{U^{-1}v'_1} = \int_S K_{r1}(v,y)f(U^{-1}y)|y_n|^{r(p-2)}\,d\sigma(y), \tag{2.3}$$

где $dz = U^{-1}v''_1$. При заданном $z \in B$ таком, что $z''_k \neq 0$, рассмотрим матрицу U, имеющую вид

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & \\ & 0 & & C \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где C — унитарная матрица порядка k, переводящая вектор $(z_{n-k+1},\ldots,z_n)$ в вектор $(0,\ldots,0,|z''_k|)$. Положив $v = Uz$, $y = Uw$

в (2.3) и воспользовавшись инвариантностью меры σ относительно унитарных преобразований, будем иметь для $dz = z''_k$

$$f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j f\Big|_{z'_k} = \int_S K_{r1}(Uz, Uw) f(w) |(Uw)_n|^{r(p-2)}\, d\sigma(w).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\langle (Uz)'_1, (Uw)'_1 \rangle = \langle z'_k, (Uw)'_1 \rangle = \langle z'_k, Uw \rangle = \langle Uz'_k, Uw \rangle = \langle z'_k, w \rangle \\ = \langle z'_k, w'_k \rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z''_k| \overline{(Uw)}_n = (Uz)_n \overline{(Uw)}_n = \langle Uz, Uw \rangle - \langle (Uz)'_1, (Uw)'_1 \rangle \\ = \langle z, w \rangle - \langle z'_k, w'_k \rangle = \langle z''_k, w''_k \rangle.\end{aligned}$$

Отсюда

$$s_1(Uz, Uw) = s_k(z, w), \quad K_{r1}(Uz, Uw) = K_{rk}(z, w),$$
$$|(Uw)_n| = \frac{|\langle z''_k, w''_k \rangle|}{|z''_k|} = |P_{z''_k} w|.$$

Предложение доказано. □

Нетрудно убедиться (например, по индукции), что для функции $\Phi_n(\rho, u)$ справедливо равенство

$$\Phi_n(\rho, u) = \frac{\Gamma(n + \rho/2)}{\Gamma(\rho/2)} (1-u)^{-n} Q_n(\rho, u), \tag{2.5}$$

где

$$Q_n(\rho, u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k + \rho/2} C_{n-1}^k u^k.$$

Положим

$$\lambda_n(p) := \min\{\, |u| : Q_n(p, u) = 0 \,\}.$$

В работе [**115**] было доказано, что при всех $1 \le p < \infty$ для $1 \le n \le 5$ $\lambda_n(p) > 1$, а при любом $n \ge 6$ существуют $p \ge 1$, для которых $\lambda_n(p) < 1$. Обозначим через

$$\Delta_{nk}(p) := \left\{\, z \in B : |z''_k|^2 < \lambda_n^2(p)(1 - |z'_k|^2) \,\right\}, \quad \Delta_{nk}(\infty) := B.$$

Очевидно, что при $\lambda_n(p) \ge 1$ $\Delta_{nk}(p) = B$. В частности, при всех $1 \le p \le \infty$ и $1 \le n \le 5$ $\Delta_{nk}(p) = B$.

Теорема 2.1. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $A = A_k := \{\, z \in B : z_{n-k+1} = \ldots = z_n = 0 \,\}$, $1 \le k \le n$. Для всех $a \in \Delta_{nk}(rp)$ метод*

$$f(a) \approx \begin{cases} \chi^{(2-p)/p}(a) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\chi^{(p-2)/p}(z) f(z) \right)\Big|_{z=a'_k}, & 1 \le p < \infty, \\ (1 - |a|^2) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\frac{f(z)}{1 - \langle z, a \rangle} \right)\Big|_{z=a'_k}, & p = \infty, \end{cases}$$

где $dz = a''_k$, *а*

$$\chi(z) := \frac{\Phi_n(rp, s_k(z,a))}{(n-1)!(1-\langle z, a'_k\rangle)^{n+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p *по информации* $I^r_{A_k}$. *Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство*

$$e(a, I^r_{A_k}, BH_p) = \begin{cases} \chi^{1/p}(a)|a''_k|^r, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{|a''_k|}{\sqrt{1-|a'_k|^2}}\right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

При $a \in \Delta_{nk}(rp) \setminus A_k$ *экстремальная функция имеет вид*

$$g_0(z) = \begin{cases} \chi^{-1/p}(a)|a''_k|^{-r}\chi^{2/p}(z)\langle z, a''_k\rangle^r, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{\sqrt{1-|a'_k|^2}}{|a''_k|}\dfrac{\langle z, a''_k\rangle}{1-\langle z, a'_k\rangle}\right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Для $a \in A_k$ утверждение теоремы легко проверяется. Будем считать, что $|a''_k| \ne 0$. Пусть $1 \le p < \infty$. Поскольку

$$\sup_{z\in B}|s_k(z,w)| = \frac{|a''_k|}{\sqrt{1-|a'_k|^2}}, \tag{2.6}$$

то при $a \in \Delta_{nk}(rp)$ полином $Q_n(rp, s_k(z,a))$ не обращается в нуль при $w \in \overline{B}$. Тем самым из равенства (2.5) следует, что χ — обратимая функция из H_∞, а следовательно, $\chi^s(z) \in H_\infty$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Положим

$$g(z) := \chi^{2/p}(z)(\langle z, a''_k\rangle)^r, \quad \gamma := \chi^{(2-p)/p}(a)|a''_k|^{r(p-2)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\overline{g(z)}|g(z)|^{p-2} &= \overline{\chi(z)}\chi^{(p-2)/p}(z)(\langle a''_k, z\rangle)^r|\langle a''_k, z\rangle|^{r(p-2)} \\ &= K_{rk}(a,z)\chi^{(p-2)/p}(z)|\langle a''_k, z\rangle|^{r(p-2)}.\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая предложение 2.2 и то, что $\chi^{(p-2)/p}f \in H_p$, получаем для любой функции $f \in H_p$

$$\begin{aligned}&\gamma\int_S \overline{g(z)}|g(z)|^{p-2}f(z)\,d\sigma(z) \\ &\quad= \chi^{(2-p)/p}(a)\int_S K_{rk}(a,z)\chi^{(p-2)/p}(z)f(z)|P_{a''_k}z|^{r(p-2)}\,d\sigma(z) \\ &\quad= f(a) - \chi^{(2-p)/p}(a)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\chi^{(p-2)/p}(z)f(z)\right)\Big|_{z=a'_k},\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $dz = a''_k$. Очевидно, что при всех $w \in A_k$ $(D^\alpha g)(w) = 0$, $|\alpha| = 0, \dots, r-1$. Таким образом, условия теоремы 5.3 гл. I при $1 \le p < \infty$

выполнены. Остается лишь найти $\|g\|_{H_p}$. Положив в (2.7) f=g, получим

$$\gamma\|g\|_{H_p}^p = g(a).$$

Отсюда

$$\|g\|_{H_p} = \chi^{1/p}(a)|a_k''|^r.$$

Рассмотрим теперь случай $p=\infty$, который сведем к одномерной задаче восстановления. Пусть $f \in H_\infty$ и $b \in B$. Положим $\varphi(u) := f(b_1,\dots,b_{n-1},\sqrt{1-|b_1'|^2}u)$. Очевидно $\varphi \in BH_\infty(B_1)$. Из теоремы 1.2 (при $m=0$) получаем при всех $|\xi|<1$

$$\left|\varphi(\xi) - \sum_{j=0}^{r-1} c_j\varphi^{(j)}(0)\right| \le |\xi|^r,$$

где

$$c_j = \frac{\xi^r(1-|\xi|^2)}{j!(r-j-1)!}\left[\frac{1}{(1-\bar{\xi}u)(\xi-u)}\right]^{(r-j-1)}_{\big|u=0}.$$

Имеем

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j\varphi^{(j)}(0) = \frac{\xi^r(1-|\xi|^2)}{(r-1)!}\left[\frac{\varphi(u)}{(1-\bar{\xi}u)(\xi-u)}\right]^{(r-1)}_{\big|u=0}$$
$$= (1-|\xi|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\xi^j}{j!}\left(\frac{\varphi(u)}{1-\bar{\xi}u}\right)^{(j)}_{\big|u=0}.$$

Сделав замену $v=\sqrt{1-|b_1'|^2}u$, для $\xi = b_n(1-|b_1'|^2)^{-1/2}$ получаем

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j\varphi^{(j)}(0) = (1-|b|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{b_n^j}{j!}D_n^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,b\rangle}\right)_{\big|z=b_1'}$$
$$= (1-|b|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,b\rangle}\right)_{\big|z=b_1'},$$

где $dz=b_n''$. Таким образом, для всех $b\in B$ имеем

$$\left|f(b) - (1-|b|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(z)}{1-\langle z,b\rangle}\right)_{\big|z=b_1'}\right| \le \left(\frac{|b_k''|}{\sqrt{1-|b_k'|^2}}\right)^r.$$

Предположим, что $a \in B\setminus A_k$. Рассмотрим матрицу U вида (2.4), в которой C — унитарная матрица порядка k, переводящая вектор $(a_{n-k+1},\dots,a_n)$ в вектор $(0,\dots,0,|a_k''|)$. Тогда, положив $b=Ua$, для функции $f(U^{-1}z)$ будем иметь

$$\left|f(a)-(1-|Ua|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(U^{-1}z)}{1-\langle z,Ua\rangle}\right)_{\big|z=(Ua)'_1}\right|$$

$$=\left|f(a)-(1-|a|^2)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left(\frac{f(w)}{1-\langle w,a\rangle}\right)_{\big|w=a'_k}\right|\le\left(\frac{|a''_k|}{\sqrt{1-|a'_k|^2}}\right)^r,$$

где $dz=a''_k$. Тем самым

$$e(a,I^r_{A_k},BH_\infty)=\left(\frac{|a''_k|}{\sqrt{1-|a'_k|^2}}\right)^r.$$

С другой стороны, в силу (2.6) функция

$$g_0(z)=\left(\frac{\sqrt{1-|a'_k|^2}}{|a''_k|}\frac{\langle z,a''_k\rangle}{1-\langle z,a'_k\rangle}\right)^r$$

принадлежит классу BH_∞ и при всех $w\in A_k$ $(D^\alpha g_0)(w)=0$, $|\alpha|=0,\dots,r-1$. Следовательно, из теоремы 4.2 гл. I вытекает, что

$$e(a,I^r_{A_k},BH_\infty)=\sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ I^r_{A_k}f=0}}|f(a)|\ge|g_0(a)|=\left(\frac{|a''_k|}{\sqrt{1-|a'_k|^2}}\right)^r.$$

Теорема доказана. □

Поскольку величина $e(a,I^r_{A_k},BH_p)$ совпадает с решением экстремальной задачи

$$\sup_{\substack{f\in BH_p\\ I^r_{A_k}f=0}}|f(a)|$$

(теорема 4.2 гл. I), то при $k=n$ и $A_n=\{0\}$ мы получаем следующее обобщение леммы Шварца.

Следствие 2.1. *При всех $1\le p<\infty$ для $a\in B$ таких, что $|a|<\lambda_n(rp)$, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in BH_p\\ (D^\alpha f)(0)=0,\,|\alpha|\le r-1}}|f(a)|$$

$$=\frac{|a|^r}{(1-|a|^2)^{n/p}}\left[\frac{\Gamma(n+rp/2)}{\Gamma(n)\Gamma(rp/2)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+rp/2}C^k_{n-1}|a|^{2k}\right]^{1/p}. \tag{2.8}$$

Случай $p=\infty$ безусловно также вытекает из теоремы 2.1, но мало интересен, так как не отличается от одномерного случая (правая часть в (2.8) равна $|a|^r$).

Отметим, что решение поставленной задачи восстановления получено при $n\ge 6$ лишь в области $\Delta_{nk}(rp)$ (как было отмечено, при $1 \le n \le 5$ $\Delta_{nk}(rp) = B$ для всех $1 \le p \le \infty$). Для величины $\lambda_n(p)$, входящей в определение области $\Delta_{nk}(rp)$, в работе **[115]** была получена оценка

$$\lambda_n(p) \ge \frac{p+2}{p+2n}.$$

Тем самым можно указать область простого вида

$$|a_k''|^2 < \left(\frac{rp+2}{rp+2n}\right)^2 (1 - |a_k'|^2), \tag{2.9}$$

которая лежит в $\Delta_{nk}(rp)$. Кроме того, из (2.9) видно, что для любой точки $a \in B$ можно воспользоваться оптимальным методом восстановления, полученным в теореме 2.1, если выбрать r достаточно большим.

Остановимся еще несколько подробнее на случае $p = 2$. При доказательстве теоремы 2.1 условие $a \in \Delta_{nk}(rp)$ использовалось для обратимости функции χ, что,в свою очередь, необходимо было для того, чтобы функции $\chi^{2/p}$ и $\chi^{(p-2)/p}$ принадлежали пространству H_∞. При $p = 2$ последнее условие выполнено при всех $a \in B$. Однако в этом случае легко получить оптимальный метод восстановления непосредственно. Остановимся на задаче оптимального восстановления значения $f \in BH_2$ в точке a по значениям информационного оператора

$$I_{rm}f := \left\{(D^\alpha f)(0)\right\}_{|\alpha|=0}^{r-1} \cup \left\{(D^{\alpha^j} f)(0)\right\}_{j=1}^{m},$$

где $|\alpha^j| = r$, $j = 1, \ldots, m$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ положим

$$\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \quad a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}, \quad a \in \mathbb{C}^n.$$

Предложение 2.3. *При всех $a \in B$ метод*

$$f(a) \approx \sum_{|\alpha| \le r-1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0) a^\alpha + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha^j!}(D^{\alpha^j} f)(0) a^{\alpha^j} \tag{2.10}$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_2 по информации I_{rm}. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I_{rm}, BH_2) = \left(\frac{1}{(1-|a|^2)^n} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}|a|^{2j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\alpha^j!}|a^{2\alpha^j}|\right)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Положим

$$k_{rm}(z,a) := (1-\langle z,a\rangle)^{-n} - \sum_{|\alpha|=0}^{r-1} \frac{(n+|\alpha|-1)!}{(n-1)!\alpha!} z^\alpha \overline{a}^\alpha - \sum_{j=1}^{m} \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\alpha^j!} z^{\alpha^j} \overline{a}^{\alpha^j}.$$

При любом $a \in B$ $k_{rm} \in H_2$. В силу воспроизводящего свойства ядра Коши, его разложения

$$(1-\langle z,a\rangle)^{-n} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(n+|\alpha|-1)!}{(n-1)!\alpha!} z^\alpha \overline{a}^\alpha \tag{2.12}$$

и ортогональности мономов

$$\int_S z^\alpha \overline{z}^\beta \, d\sigma(z) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \dfrac{(n-1)!\alpha!}{(n+|\alpha|-1)!}, & \alpha = \beta \end{cases}$$

(см. [**61**, стр. 25], [**77**, стр. 557]), получаем

$$\int_S \overline{k_{rm}(z,a)} f(z) \, d\sigma(z) = f(a) - \sum_{|\alpha|\le r-1} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(0) a^\alpha - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha^j!} (D^{\alpha^j} f)(0) a^{\alpha^j}. \tag{2.13}$$

Из разложения (2.12) видно, что для $g(z) := k_{rm}(z,a)$ выполнены равенства

$$D^\alpha g\big|_{z=0} = 0, \quad |\alpha| = 1,\dots,r-1, \quad \alpha = \alpha^j,\ j=1,\dots,m.$$

Таким образом, функция $g(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.3 гл. I при $p=2$. Следовательно, рассматриваемый метод восстановления оптимален, а

$$e(a, I_{rm}, BH_2) = g(a)\|g\|_{H_2}^{-1}.$$

Подставляя в (2.13) $f = g$, получаем

$$g(a) = \|g\|_{H_2}^2.$$

Тем самым

$$e(a, I_{rm}, BH_2) = \sqrt{g(a)}.$$

Для того чтобы получить формулу (2.11), остается заметить, что

$$\sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} |a^{2\alpha}| = |a|^{2j}.$$

Предложение доказано. □

Следуя Рудину [**61**, стр. 41] будем называть аффинным подмножеством B пересечение произвольного аффинного подмножества из $\mathbb{C}^n$ с шаром B. Рассмотрим в качестве множества A произвольное аффинное подмножество B. Без ограничения общности можно считать, что A имеет вид

$$A = \{\, z \in B : z_{n-k+1} = c_{n-k+1}, \dots, z_n = c_n \,\}, \tag{2.14}$$

где $c = (0, \dots, 0, c_{n-k+1}, \dots, c_n) \in B$, $1 \le k \le n$, так как любое аффинное подмножество B с помощью унитарного преобразования может быть переведено в множество вида (2.14).

Положим

$$\varphi_c(z) := \frac{c - P_c z - \sqrt{1-|c|^2}(z - P_c z)}{1 - \langle z, c\rangle}.$$

Отображение φ_c является автоморфизмом шара ([**61**, стр. 34]). Положим

$$\Delta_{nk}(p, c) := \varphi_c(\Delta_{nk}(p)).$$

Теорема 2.2. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и A определено равенством* (2.14)*. Тогда для всех $a \in \Delta_{nk}(rp, c)$ метод*

$$f(a) \approx \begin{cases} \left(\dfrac{1-|c|^2}{1-\langle a, c\rangle}\right)^{2n/p} \chi_c^{(2-p)/p}(a_c) \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\chi_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z, c\rangle)^{2n/p}}\right]_{\big| z=(a_c)'_k}, & 1 \le p < \infty, \\ (1-|a_c|^2) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z, a_c\rangle)}\right]_{\big| z=(a_c)'_k}, & p = \infty, \end{cases}$$

где $a_c = \varphi_c(a)$, $dz = (a_c)''_k$, а

$$\chi_c(z) := \frac{\Phi_n(rp, s_k(z, a_c))}{(n-1)!(1-\langle z, (a_c)'_k\rangle)^{n+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p по информации I_A^r. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I_A^r, BH_p) = \begin{cases} \dfrac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a, c\rangle|^{2n/p}} \chi^{1/p}(a_c) |(a_c)''_k|^r, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{|(a_c)''_k|}{\sqrt{1-|(a_c)'_k|^2}}\right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

При $a \in \Delta_{nk}(rp, c) \setminus A$ экстремальная функция имеет вид

$$g_0(z) = \begin{cases} \varepsilon \dfrac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle a,c\rangle)^{2n/p}} \dfrac{\chi_c^{2/p}(\varphi_c(z))\langle \varphi_c(z), (a_c)''_k\rangle^r}{\chi_c^{1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^r}, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{\sqrt{1-|(a_c)'_k|^2}}{|(a_c)''_k|} \dfrac{\langle \varphi_c(z), (a_c)''_k\rangle}{1-\langle \varphi_c(z), (a_c)'_k\rangle} \right)^r, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, выбрано из условия нормировки $g_0(a) > 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим ряд свойств автоморфизма φ_c, которые нам потребуются (см. [**61**, стр. 34, 161]). Имеют место следующие равенства

$$\varphi_c(\varphi_c(z)) = z, \quad z \in B, \tag{2.15}$$

$$1 - \langle \varphi_c(z), \varphi_c(w)\rangle = \frac{(1-|c|^2)(1-\langle z,w\rangle)}{(1-\langle z,c\rangle)(1-\langle c,w\rangle)}, \quad z, w \in B. \tag{2.16}$$

Оператор

$$(Tf)(z) := \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle z,c\rangle)^{2n/p}} f(\varphi_c(z))$$

является изометрией пространства H_p, т.е. при всех $f \in H_p$ $\|Tf\|_{H_p} = \|f\|_{H_p}$.

Пусть $1 \le p < \infty$. В силу (2.15) имеем

$$a_c = \varphi_c(a) \in \varphi_c(\Delta_{nk}(rp, c)) = \Delta_{nk}(rp).$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in BH_p$. Тогда $g := Tf \in BH_p$. Из теоремы 2.1 получаем

$$\left| g(a_c) - \chi_c^{(2-p)/p}(a_c) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\chi_c^{(p-2)/p}(z) g(z) \right)\Big|_{z=(a_c)'_k} \right| \le e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p) \tag{2.17}$$

(здесь и далее $dz = (a_c)''_k$). Из (2.15) и (2.16)

$$g(a_c) = \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle a_c, c\rangle)^{2n/p}} f(a) = \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{(1-\langle \varphi_c(a), \varphi_c(0)\rangle)^{2n/p}} f(a)$$
$$= \frac{(1-\langle a,c\rangle)^{2n/p}}{(1-|c|^2)^{n/p}} f(a).$$

Таким образом, умножая обе части неравенства (2.17) на

$$\frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2n/p}},$$

будем иметь

$$\left| f(a) - \left(\frac{1-|c|^2}{1-\langle a,c\rangle}\right)^{2n/p} \chi_c^{(2-p)/p}(a_c) \times \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\chi_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z,c\rangle)^{2n/p}}\right]\Big|_{z=(a_c)'_k} \right| \leq \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2n/p}} e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p).$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi_c(A) = A_k$, а следовательно, $\varphi_c(A_k) = A$. В силу произвольности функции f получаем

$$e(a, I^r_A, BH_p) \leq \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2n/p}} e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p).$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \chi_c^{-1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^{-r} \chi_c^{2/p}(z) \langle z, (a_c)''_k\rangle^r,$$

являющуюся экстремальной в задаче об оптимальном восстановлении в точке a_c по информации $I^r_{A_k}$. Положим $g_0 := \varepsilon T f_0$ где $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, выберем из условия $g_0(a) > 0$. Тогда $g_0 \in BH_p$, $I^r_A g_0 = 0$, и, следовательно,

$$e(a, I^r_A, BH_p) \geq |g_0(a)| = \frac{(1-|c|^2)^{n/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2n/p}} e(a_c, I^r_{A_k}, BH_p).$$

При $p = \infty$ доказательство проводится по той же схеме. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь аналогичную задачу восстановления в пространствах Бергмана, а именно, задачу оптимального восстановления значения функции $f \in BA_p$, $1 \leq p < \infty$, в точке $a \in B$ по информации I^r_A, где A определено равенством (2.14) для $c = (0, \ldots, 0, c_{n-k+1}, \ldots, c_n) \in B$, $1 \leq k \leq n$. Мы ограничиваемся случаем $1 \leq p < \infty$, так как $A_\infty = H_\infty$.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\Delta}_{nk}(p) := \left\{ z \in B : |z''_k|^2 < \lambda^2_{n+1}(p)(1-|z'_k|^2) \right\},$$
$$\widetilde{\Delta}_{nk}(p,c) := \varphi_c(\widetilde{\Delta}_{nk}(p)).$$

Теорема 2.3. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда при всех $a \in \widetilde{\Delta}_{nk}(rp,c)$ метод*

$$f(a) \approx \left(\frac{1-|c|^2}{1-\langle a,c\rangle}\right)^{2(n+1)/p} \widetilde{\chi}_c^{(2-p)/p}(a_c) \times \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left[\frac{\widetilde{\chi}_c^{(p-2)/p}(z) f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z,c\rangle)^{2(n+1)/p}}\right]\Big|_{z=(a_c)'_k},$$

где $a_c = \varphi_c(a)$, $dz = (a_c)''_k$, *а*

$$\widetilde{\chi}_c(z) := \frac{\Phi_{n+1}(rp, s_k(z, a_c))}{n!(1 - \langle z, (a_c)'_k\rangle)^{n+1+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BA_p *по информации* I^r_A. *Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство*

$$e(a, I^r_A, BA_p) = \frac{(1 - |c|^2)^{(n+1)/p}}{|1 - \langle a, c\rangle|^{2(n+1)/p}} \widetilde{\chi}_c^{1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^r.$$

При $a \in \widetilde{\Delta}_{nk}(rp, c) \setminus A$ *экстремальная функция имеет вид*

$$g_0(z) = \varepsilon \frac{(1 - |c|^2)^{(n+1)/p}}{(1 - \langle z, c\rangle)^{2(n+1)/p}} \frac{\widetilde{\chi}_c^{2/p}(\varphi_c(z))\langle\varphi_c(z), (a_c)''_k\rangle^r}{\widetilde{\chi}_c^{1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^r}, \tag{2.18}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, *выбрано из условия нормировки* $g_0(a) > 0$.

Доказательство. Определим оператор продолжения E равенством

$$(Eg)(z_0, z) := g(z),$$

где $z \in B_n$, а $(z_0, z) \in B_{n+1}$. Известно ([**61**, стр. 135]), что E — линейная изометрия пространства $A_p(B_n)$ в $H_p(B_{n+1})$, т.е. при всех $g \in A_p(B_n)$ $Eg \in H_p(B_{n+1})$ и $\|g\|_{A_p(B_n)} = \|Eg\|_{H_p(B_{n+1})}$. Через $e\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$ будем обозначать продолжение, определенное равенством $ez := (0, z)$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции из $BH_p(B_{n+1})$ в точке ea по информации I^r_{eA}. Из легко проверяемых соотношений

$$e(\varphi_c(z)) = \varphi_{ec}(ez), \quad e(\widetilde{\Delta}_{nk}(p)) \subset \widetilde{\Delta}_{n+1,k}(p)$$

и того, что $a \in \widetilde{\Delta}_{nk}(rp, c)$, имеем

$$\begin{aligned} ea \in e(\widetilde{\Delta}_{nk}(rp, c)) &= e\big(\varphi_c(\widetilde{\Delta}_{nk}(rp))\big) \\ &= \varphi_{ec}\big(e(\widetilde{\Delta}_{nk}(rp))\big) \subset \varphi_{ec}(\Delta_{n+1,k}(rp)) = \Delta_{n+1,k}(rp, ec). \end{aligned}$$

Пусть g — произвольная функция из $BA_p(B_n)$. Тогда $Eg \in BH_p(B_{n+1})$. Применяя теорему 2.2, получаем

$$|(Eg)(ea) - S_0 I^r_{eA} Eg| \le e(ea, I^r_{eA}, BH_p(B_{n+1})),$$

где через S_0 обозначен для краткости соответствующий метод восстановления. В силу того, что для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, любой функции $f \in A_p(B_n)$ и $z \in B_n$

$$D^\alpha(Ef)\big|_{ez} = D^\alpha f\big|_z,$$

последнее неравенство можно записать в виде

$$\Bigg| f(a) - \left(\frac{1-|c|^2}{1-\langle a,c\rangle}\right)^{2(n+1)/p} \widetilde{\chi}_c^{(2-p)/p}(a_c) \times \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}d^j\left[\frac{\widetilde{\chi}_c^{(p-2)/p}(z)f(\varphi_c(z))}{(1-\langle z,c\rangle)^{2(n+1)/p}}\right]\Bigg|_{z=(a_c)'_k}\Bigg| \le \frac{(1-|c|^2)^{(n+1)/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2(n+1)/p}}\widetilde{\chi}_c^{1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^r,$$

где $dz=(a_c)''_k$. Таким образом,

$$e(a,I_A^r,BA_p) \le \frac{(1-|c|^2)^{(n+1)/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2(n+1)/p}}\widetilde{\chi}^{1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^r.$$

С другой стороны, функция Eg_0 для g_0, определенной равенством (2.18), совпадает с экстремальной функцией в задаче оптимального восстановления в точке ea на классе $BH_p(B_{n+1})$ по информации I_{eA}^r. Следовательно, $\|g_0\|_{A_p(B_n)}=\|Eg_0\|_{H_p(B_{n+1})}=1$. Кроме того, $I_A^r g_0=0$. Тем самым

$$e(a,I_A^r,BA_p) \ge |g_0(a)| = \frac{(1-|c|^2)^{(n+1)/p}}{|1-\langle a,c\rangle|^{2(n+1)/p}}\widetilde{\chi}^{1/p}(a_c)|(a_c)''_k|^r.$$

Теорема доказана. □

Аналогично следствию 2.1 получаем следующее обобщение леммы Шварца для пространств Бергмана.

Следствие 2.2. *При всех $1\le p<\infty$ для $a\in B$ таких, что $|a|<\lambda_{n+1}(rp)$, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in BA_p\\ (D^\alpha f)(0)=0,\,|\alpha|\le r-1}} |f(a)| = \frac{|a|^r}{(1-|a|^2)^{(n+1)/p}}\left[\frac{\Gamma(n+1+rp/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(rp/2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+rp/2}C_n^k|a|^{2k}\right]^{1/p}.$$

Приведем также аналог предложения 2.3.

Предложение 2.4. *При всех $a\in B$ метод* (2.10) *является оптимальным методом восстановления на классе BA_2 по информации I_{rm}. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство*

$$e(a,I_{rm},BA_2) = \left(\frac{1}{(1-|a|^2)^{n+1}} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n+j)!}{n!j!}|a|^{2j} - \sum_{j=1}^{m}\frac{(n+r)!}{n!\alpha^j!}|a^{2\alpha^j}|\right)^{1/2}.$$

При $n = 1$, пользуясь легко проверяемыми равенствами

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) u^j = \frac{u^r}{(r-1)!} \left(\frac{g(z)}{u-z} \right)^{(r-1)}_{\big| z=0},$$

$$F^{(r-1)}(0) = (-1)^{r-1}(1-|c|^2) \left[(1-\overline{c}t)^{r-2} F\left(\frac{c-t}{1-\overline{c}t} \right) \right]^{(r-1)}_{\big| t=c},$$

справедливыми для любых функций g и F, голоморфных в окрестности нуля, из теоремы 2.3 можно получить

Следствие 2.3. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $I_c^r f := \{f(c), \dots, f^{(r-1)}(c)\}$, $c \in B_1$. *При всех* $a \in B_1$ *метод*

$$f(a) \approx \frac{(a-c)^r (1-|a|^2)^{2-4/p}}{(1-\overline{c}a)^{r+1} \omega^{(p-2)/p}(a)} \frac{1}{(r-1)!} \times \left[\frac{(1-\overline{c}t)^{r+1} \omega^{(p-2)/p}(t) f(t)}{(t-a)(1-\overline{a}t)^{2-4/p}} \right]^{(r-1)}_{\big| t=c},$$

где

$$\omega(t) := 1 + \frac{rp}{2} \left(1 - \frac{\overline{c}-\overline{a}}{1-c\overline{a}} \frac{c-t}{1-\overline{c}t} \right),$$

является оптимальным методом восстановления на классе $BA_p(B_1)$ *по информации* I_c^r. *Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство*

$$e(a, I_c^r, BA_p(B_1)) = \left| \frac{c-a}{1-\overline{c}a} \right|^r \frac{\omega^{1/p}(a)}{(1-|a|^2)^{2/p}}.$$

Утверждение следствия 2.3 другим способом (оставаясь в рамках одномерного случая) было доказано в работе [**56**].

§3. Восстановление гармонических функций

Обозначим через h_p пространство гармонических в единичном круге D функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{h_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{h_\infty} := \sup_{z \in D} |u(z)|, \quad p = \infty.$$

Для классов Bh_p можно рассмотреть задачи, аналогичные тем, которые рассматривались в §1. Несмотря на кажущуюся близость этих задач, гармонический случай оказывается менее изученным и теория экстремальных задач в h_p развита значительно слабее, чем в пространствах H_p. Решение некоторых задач, близких к рассматриваемым, изучались в работах [**33**], [**111**], [**135**].

Ряд сложностей, возникающих при решении экстремальных задач в h_p, связан с отсутствием алгебраической структуры у гармонических функций, а также с наличием эффектов, характерных для многомерной ситуации. Так, например, здесь экстремальная функция обращается в нуль не на дискретном множестве, а на кривых. Это приводит к эффектам "очистки", аналогичным наблюдавшимся в §2, когда в оптимальном методе восстановления используется лишь дискретная часть информации о функции, известной на некотором более широком множестве.

Мы рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала

$$L_x^\lambda u := \sum_{j=\nu}^{\nu+m} \frac{\lambda_j}{j!} u^{(j)}(x),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_{\nu+m} \neq 0$, $\nu \geq 0$, на классе функций из Bh_∞ по значениям информационного оператора

$$Iu := \left\{u(x), \dots, u^{(\nu-1)}(x), u(x_1), \dots, u^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, \\ u(x_n), \dots, u^{(\nu_n-1)}(x_n)\right\},$$

где $x, x_1, \dots, x_n$ — различные точки из интервала $(-1, 1)$, а через $u^{(j)}$ обозначены частные производные $\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j}$. Оказывается, что в некоторых случаях эта задача может быть сведена к задаче Каратеодори–Фейера для пространства H_1.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3.1. *Для любых $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ найдется $0 \leq k \leq m$, при котором существует решение системы*

$$\sum_{j=1}^{k} (\bar{b}_j^{-s} - b_j^s) + 2 \sum_{j=k+1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$|b_j| \leq 1, \ j = 1, \dots, k, \quad |b_j| < 1, \ j = k+1, \dots, m. \tag{3.2}$$

При этом полиномы

$$\prod_{j=1}^{m} (z - \bar{b}_j)(1 - b_j z), \quad \prod_{j=k+1}^{m} (1 - b_j z), \quad \prod_{j=k+1}^{m} (z - \bar{b}_j) \tag{3.3}$$

вещественны на вещественной оси.

Доказательство. Первая часть леммы вытекает из следствия 1.1, так как те из b_j, для которых $|b_j| = 1$, в силу равенства $\bar{b}_j^{-1} = b_j$ можно отнести как в первую группу ($j = 1, \dots, k$), так и во вторую ($j = k+1, \dots, m$). Здесь нам удобнее считать, что $|b_j| < 1$,

$j = k+1,\dots,m$. Докажем вещественность полиномов (3.3). Из следствия 1.1 вытекает, что полином

$$P_{2m}(z) := C\prod_{j=1}^{k}(z-\overline{b}_j)(1-b_jz)\prod_{j=k+1}^{m}(1-b_jz)^2, \tag{3.4}$$

где C выбрано из условия $P_{2m}(0)=1$, является решением задачи Каратеодори–Фейера в пространстве H_1 с условиями

$$f^{(j)}(0) = c_j, \quad j = 0,\dots,m, \tag{3.5}$$

где числа c_j определяются через $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ (см. следствие 1.1) и вещественны при вещественных $\gamma_1,\dots,\gamma_m$. В силу единственности полиномов вида (3.4), удовлетворяющих равенствам (3.5) (см. [**76**, с. 489]), полином $P_{2m}(z)$ имеет вещественные коэффициенты. Следовательно, каждому корню полинома $P_{2m}(z)$ некоторой кратности соответствует сопряженный корень той же кратности. Отсюда следует, что полиномы (3.3) имеют вещественные коэффициенты. Лемма доказана. □

Введем обозначения, аналогичные обозначениям §1:

$$W_1(z) := \left(\frac{z-x}{1-xz}\right)^{\nu} W(z), \quad W(z) := \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-x_j}{1-x_jz}\right)^{\nu_j},$$

$$d_j := \lambda_{\nu+m}^{-1}\lambda_{\nu+m-j}, \quad j=1,\dots,m, \quad y(z) := W^{-1}(z)W'(z),$$

$$\gamma_s := (-1)^s\Bigg[(m+\nu-1)x^s - \sum_{l=1}^{s}(-1)^l C_s^l x^{s-l}(1-x^2)^l \times\left(\frac{y^{(l-1)}(x)}{(l-1)!}+\rho_l\right)\Bigg],$$

где вектор $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_m)^T$ определен равенствами (1.3).

Пусть $b_1,\dots,b_m$ — решение системы (3.1), удовлетворяющее условиям (3.2), существование которого утверждается в лемме 3.1. Положим

$$\alpha_j := \frac{\overline{b}_j + x}{1+x\overline{b}_j}, \quad j=1,\dots,m,$$

$$\Psi(z) := \prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_jz)\prod_{j=k+1}^{m}(1-\overline{\alpha}_jz)^2,$$

$$g(z) := W_1(z)\prod_{j=k+1}^{m}\frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_jz}, \quad C(x) := \frac{\lambda_{\nu+m}W(x)(1-x^2)^{m+1-\nu}}{\Psi(x)(1+g^2(x))}.$$

Теорема 3.1. *При всех $\nu \ge 0$ и $m \le (2\nu-1)_+$ метод*

$$L_x^{\lambda}u \approx S_0Iu := \sum_{l=0}^{\nu-1}c_l(x)u^{(l)}(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j-1}c_{jl}(x)u^{(l)}(x_j), \tag{3.6}$$

где

$$c_l(x) := -\frac{C(x)}{l!(\nu+m-l)!}\left[\frac{\Psi(z)(1+g^2(z))}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}}\right]^{(\nu+m-l)}\Bigg|_{z=x}, \tag{3.7}$$

$$c_{jl}(x) := -\frac{C(x)}{l!(\nu_j-l-1)!}\left[\frac{\Psi(z)(1-x_jz)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1-xz)^{m+1-\nu}(z-x)^{\nu+m+1}}\right]^{(\nu_j-l-1)}\Bigg|_{z=x_j},$$

$$\omega_j(z) := \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left(\frac{z-x_l}{1-x_lz}\right)^{\nu_l},$$

является оптимальным методом восстановления, функция

$$u_0(z) := \operatorname{sign}(C(x))\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} g(z)$$

— экстремальная, и

$$e(x,\lambda,I,Bh_\infty) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}|C(x)|\dfrac{1}{m!}\left[\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{m}(1-\overline{\alpha}_jz)(z-\alpha_j)}{(1-xz)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=x}, & \nu>0,\\ |\lambda_0|\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|W(x)|, & \nu=0. \end{cases}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(z) := \frac{z\prod\limits_{j=1}^{m}(z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_jz)}{(z-x)^{m+1}(1-xz)^{m+1}},$$

$$Jf := C(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})2\operatorname{Re} g(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Поскольку при $|z|=1$ $\overline{g(z)} = g^{-1}(z)$, то для любой функции $f\in H_p$, $1\le p\le\infty$, по теореме о вычетах получаем

$$\begin{aligned} Jf &= C(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\varphi(z)\frac{1+g^2(z)}{g(z)}f(z)\frac{dz}{z}\\ &= C(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\Psi(z)(1+g^2(z))f(z)\,dz}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}(z-x)^{m+1-\nu}}\\ &= -\sum_{l=0}^{\nu+m}c_l(x)f^{(l)}(x)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j-1}c_{jl}(x)f^{(l)}(x_j), \end{aligned}$$

где $c_l(x)$ определены равенством (3.7) при всех $l = 0, \ldots, \nu + m$. Для $l \geq \nu > 0$ в силу того, что $m \leq 2\nu - 1$, имеем

$$\left[\frac{\Psi(z) g^2(z)}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}}\right]^{(\nu+m-l)}\Bigg|_{z=x}$$
$$= \left[\frac{(z-x)^{2\nu} W(z)}{(1-xz)^{m+1+\nu}} \prod_{j=1}^{k} (z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_j z) \prod_{j=k+1}^{m} (z-\alpha_j)^2\right]^{(\nu+m-l)}\Bigg|_{z=x} = 0.$$

Тем самым

$$c_l(x) = -\frac{C(x)}{l!(\nu+m-l)!}\left[\frac{\Psi(z)}{W(z)(1-xz)^{m+1-\nu}}\right]^{(\nu+m-l)}\Bigg|_{z=x},$$
$$l = \nu, \ldots, \nu+m.$$

Аналогично доказательству теоремы 1.2 находим

$$c_l(x) = -\frac{\lambda_l}{l!}, \quad l = \nu, \ldots, \nu+m.$$

Легко убедиться, что последнее равенство справедливо и для $\nu = m = 0$. Таким образом, получаем

$$Jf = L_x^\lambda f - \sum_{l=0}^{\nu-1} c_l(x) f^{(l)}(x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} c_{jl}(x) f^{(l)}(x_j).$$

Из вещественности полиномов (3.3) следует вещественность полиномов

$$\prod_{j=1}^{m} (z-\alpha_j)(1-\overline{\alpha}_j z), \quad \prod_{j=k+1}^{m} (1-\overline{\alpha}_j z), \quad \prod_{j=k+1}^{m} (z-\alpha_j).$$

Следовательно, все коэффициенты $c_l(x)$ и $c_{jl}(x)$ вещественные. Обозначив через $u := \operatorname{Re} f$, будем иметь

$$\operatorname{Re} Jf = L_x^\lambda u - S_0 I u.$$

С другой стороны, поскольку почти всюду

$$u_0(e^{i\theta}) = \operatorname{sign}(C(x) \operatorname{Re} g(e^{i\theta})),$$

то, положив $\varphi_1(z) := 2|C(x) \operatorname{Re} g(z)| \varphi(z)$, получаем

$$\operatorname{Re} Jf = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\theta}) u_0(e^{i\theta}) u(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Если $u \in h_\infty \subset h_2$, то сопряженная функция $v \in h_2$ (см. [**15**, с. 380]) и, следовательно, $u + iv \in H_2$. Таким образом, равенство

$$L_x^\lambda u - S_0 I u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\theta}) u_0(e^{i\theta}) u(e^{i\theta})\, d\theta$$

справедливо при всех $u \in h_\infty$. Так как $\varphi_1(e^{i\theta}) \geq 0$, $u_0 \in Bh_\infty$, $|u_0(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду и, кроме того, $Iu_0 = 0$, то из теоремы 5.3 гл. I следует оптимальность метода S_0, экстремальность функции u_0 и равенство

$$e(x, \lambda, I, Bh_\infty) = L_x^\lambda u_0.$$

Пусть $\nu > 0$. Пользуясь тем, что функция $g(z)$ вещественна на вещественной оси, получаем

$$L_x^\lambda u_0 = L_x^\lambda g^* = Jg^*,$$

где

$$g^*(z) := \operatorname{sign}(C(x))\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} g(z) = \operatorname{sign}(C(x))\left(\frac{4}{\pi}g(z) + g^3(z)w(z)\right),$$

а $w(z) \in H_2$. Тем самым, учитывая условие $2\nu > m$, будем иметь

$$\begin{aligned} e(x, \lambda, I, Bh_\infty) &= Jg^* \\ &= |C(x)|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\varphi(z)(1 + g^2(z))\left(\frac{4}{\pi} + g^2(z)w(z)\right)\frac{dz}{z} \\ &= \frac{4}{\pi}|C(x)|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\varphi(z)\frac{dz}{z} \\ &= \frac{4}{\pi}|C(x)|\frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^{m}(1 - \overline{\alpha}_j z)(z - \alpha_j)}{(1 - xz)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=x}. \end{aligned}$$

При $\nu = m = 0$

$$L_x^\lambda u_0 = \lambda_0 u_0(x) = |\lambda_0|\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|W(x)|.$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим подробнее случай $\nu = m = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Введем следующие обозначения:

$$e(z, I, W) = e(z, 1, I, W), \quad e'(z, I, W) = e(z, (0, 1), I, W).$$

Следствие 3.1. *Метод*

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j - 1} c_{jl}(x)u^{(l)}(x_j), \tag{3.8}$$

где

$$c_{jl}(x) := -\frac{W(x)(1-x^2)}{1+W^2(x)} \frac{1}{l!(\nu_j-l-1)!} \times \left[\frac{(1-x_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1-xz)(z-x)}\right]^{(\nu_j-l-1)}\Bigg|_{z=x_j},$$

является оптимальным методом восстановления, функция

$$u_0(z) := \operatorname{sign}(W(x))\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} W(z)$$

— экстремальная и

$$e(x, I, Bh_\infty) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|W(x)|.$$

В частности, если $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$, то оптимальный метод (3.8) имеет вид

$$u(x) \approx \frac{1-x^2}{1+W^2(x)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)} \frac{1-x_j^2}{(1-xx_j)^2} u(x_j).$$

В случае восстановления по тейлоровской информации

$$I_n u := \{\, u(0), \ldots, u^{(n-1)}((0)\,\}$$

для оптимального метода (3.8) имеем

$$u(x) \approx \frac{1}{1+x^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}(1-x^{2(n-k)})u^{(k)}(0), \tag{3.9}$$

причем

$$e(x, I_n, Bh_\infty) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|x^n|. \tag{3.10}$$

Сформулируем последний результат в несколько более общем виде.

Следствие 3.2. *Для любогго $z = \rho e^{i\varphi} \in D$ метод*

$$u(z) \approx \frac{1}{1+\rho^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!}(1-\rho^{2(n-k)})(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

где $a_k := \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(0)$, $b_k := \dfrac{\partial^k u}{\partial y^k}(0)$, является оптимальным методом восстановления на классе Bh_∞ по информации

$$Iu := \{(D^\alpha u)(0)\}_{|\alpha|=0}^{n-1}$$

(α — двумерный мультииндекс). Функция

$$u_0(\xi) := \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg}\left(e^{-i\varphi}\xi\right)^n$$

является экстремальной и

$$e(z, I, Bh_\infty) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n. \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть $u \in Bh_\infty$. Положим

$$U(\xi) := u(e^{i\varphi}\xi).$$

Очевидно $U \in Bh_\infty$. Тогда из (3.9) и (3.10) имеем

$$\left| U(\rho) - \frac{1}{1+\rho^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} (1 - \rho^{2(n-k)}) U^{(k)}(0) \right| \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n.$$

Поскольку всякую гармоническую в круге функцию можно представить в виде

$$u(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|w|^k}{k!} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

где $\theta = \arg w$, $a_k := \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(0)$, $b_k := \dfrac{\partial^k u}{\partial y^k}(0)$, то

$$U(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\xi|^k}{k!} (a_k \cos k(\theta + \varphi) + b_k \sin k(\theta + \varphi)).$$

Следовательно,

$$U^{(j)}(0) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi.$$

В силу того, что $U(\rho) = u(z)$, имеем

$$\left| u(z) - \frac{1}{1+\rho^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} (1 - \rho^{2(n-k)}) (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right| \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n.$$

С другой стороны, $u_0 \in Bh_\infty$ и $(D^\alpha u)(0) = 0$ при всех $|\alpha| = 0, \ldots, n-1$. Тем самым

$$e(z, I, Bh_\infty) = \sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ (D^\alpha u)(0) = 0, \ |\alpha| \le n-1}} |u(z)| \ge |u_0(z)| = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n.$$

Следствие доказано. □

Близким к следствию 3.2 является результат М.Г. Крейна [**33**], который доказал, что величина (3.11) является погрешностью приближения класса функций

$$\Gamma^\rho := \{\, u(\rho, \cdot) : u(\rho, \varphi) \in Bh_\infty \,\}$$

тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ (см. также [**111**], [**41**], [**66**], [**31**], [**32**]). Нами же построен метод являющийся оптимальным для любой точки $z \in D$, который на окружностях $|z| = \rho$ оказывается тригонометрическим полиномом порядка $n-1$.

Следствие 3.3. *Для любого $z \in D$ метод*

$$u(z) \approx \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} u(z_1),$$

где

$$z_1 := \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 + |z|^2 + \sqrt{(1+|z|^2)^2 - 4(\operatorname{Re} z)^2}}, \quad \rho := \left| \frac{z - z_1}{1 - z_1 z} \right|,$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_∞ по информационному оператору

$$Iu := u\Big|_{(-1,1)},$$

где $u\Big|_{(-1,1)}$ — след функции u на интервале $(-1,1)$. Для погрешности оптимального метода имеет место равенство

$$e(z, I, Bh_\infty) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\xi)$ — конформное преобразование круга D, переводящее точку z_1 в нуль, а z в точку $x \in [0,1)$. В силу конформной инвариантности псевдогиперболического расстояния $x = \rho$. Из (3.9) и (3.10) для любой функции $U \in Bh_\infty$ имеем

$$\left| U(x) - \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} U(0) \right| \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho.$$

Пусть $u \in Bh_\infty$. Рассмотрим функцию

$$U(\xi) := u(\varphi^{-1}(\xi)).$$

Поскольку $U \in Bh_\infty$, $U(x) = u(z)$, а $U(0) = u(z_1)$, то

$$\left| u(z) - \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} u(z_1) \right| \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho.$$

Положим

$$v(\xi) := \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \left(i \frac{\xi - z_1}{1 - z_1 \xi} \right).$$

Легко убедиться, что $\operatorname{Re} \dfrac{z - z_1}{1 - z_1 z} = 0$, поэтому $|v(z)| = \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho$. Кроме того, $v\Big|_{(-1,1)} = 0$. Таким образом,

$$e(z, I, Bh_\infty) = \sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ u|_{(-1,1)} = 0}} |u(z)| \ge |v(z)| = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho.$$

Следствие доказано. □

В следствии 3.3 наблюдается эффект очистки, аналогичный многомерной ситуации в §2. Из всей информации о следе функции u на интервале $(-1,1)$ оптимальный метод использует лишь значения в неевклидовой проекции точки z на вещественную ось.

Рассмотрим случай $\nu = 0$, $m = 1$ (это единственный случай при $m = 1$, не охваченный теоремой 3.1. Положим

$$P(\beta,\gamma) := \begin{cases} \dfrac{\gamma}{1+\sqrt{(\gamma-\beta)^2+1-\beta^2}}, & |\beta| < 1, \\ \dfrac{\operatorname{sign}\beta}{|\beta|+\sqrt{|\beta|^2-1}}, & |\beta| \ge 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\beta(x) := \frac{1-x^2}{2}\left(\frac{W'(x)}{W(x)}\frac{1-W^2(x)}{1+W^2(x)} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right),$$

$$\gamma(x) := \frac{1-x^2}{1+W^2(x)}\left(\frac{W'(x)}{W(x)} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right),$$

$$D_1 := \{\, x \in (-1,1) : |\beta(x) < 1| \,\},$$

$$D_0 := (-1,1) \setminus (D_1 \cup \{x_1,\dots,x_n\}),$$

$$b_1 := -P(\beta(x),\gamma(x)), \quad k = \begin{cases} 0, & x \in D_0, \\ 1, & x \in D_1. \end{cases}$$

Для α_1, $\Psi(x)$, $g(z)$ и $C(x)$ оставляем прежние обозначения.

Теорема 3.2. *В обозначениях теоремы* 3.1 *при* $\nu = 0$, $m = 1$ *и любых* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \ne 0$, *метод*

$$\lambda_0 u(x) + \lambda_1 u'(x) \approx S_0 I u := \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl}(x) u^{(l)}(x_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_∞, *функция* $u_0(z)$ — *экстремальная и*

$$e(x,\lambda,I,Bh_\infty) = \frac{4}{\pi}\left|\lambda_0 \operatorname{arctg} g(x) + \lambda_1 \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\right|.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при всех $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ $P(\beta,\gamma) \in [-1,1]$, поэтому $\alpha_1 \in [-1,1]$. Повторяя схему доказательства теоремы 3.1 (отличие состоит лишь в уравнении для нахождения b_1, поэтому мы не можем здесь воспользоваться леммой 3.1), можно показать, что при всех $u \in h_\infty$ справедливо равенство

$$\lambda_0 u(x) + \lambda_1 u'(x) - S_0 I u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\theta}) u_0(e^{i\theta}) u(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Применение теоремы 5.3 гл. I завершает доказательство теоремы. □

При $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ с помощью ряда упрощений получаем

Следствие 3.4. *При всех* $x \in (-1,1)$ *имеет место равенство*

$$e'(x,I,Bh_\infty) = \frac{4}{\pi}\frac{|W'(x)|}{1+W^2(x)}\frac{c^2(x)+1}{2c(x)},$$

где

$$c(x) := \begin{cases} \dfrac{|\gamma(x)|}{1+\sqrt{1+\gamma^2(x)W^2(x)}}, & x \in D_1, \\ 1, & x \notin D_1, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \frac{W'(x)}{W(x)} \frac{1-x^2}{1+W^2(x)},$$

$$D_1 = \left\{ x \in (-1,1) : \frac{1-W^2(x)}{2}|\gamma(x)| < 1 \right\}.$$

Следствие 3.5. *При всех $z \in D \setminus 0$ и $n \geq 1$ имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ (D^\alpha u)(0)=0,\ |\alpha| \leq n-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(z) \right|$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \dfrac{n\rho^{n-1}}{1+\rho^{2n}}, & \rho \leq r_n, \\ \dfrac{2}{\pi\rho^{2n}} \left[\sqrt{n^2\rho^{2n-2} + \left(\dfrac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}} \right)^2} - \dfrac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2} \right], & \rho > r_n, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $\rho = |z|$, а r_n — единственный корень уравнения

$$n\frac{1-x^2}{2x} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = 1, \tag{3.14}$$

лежащий в интервале $(0,1)$.

Доказательство. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$. С помощью поворота на угол φ нетрудно убедиться, что исходная величина совпадает с величиной

$$E := \sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ (D^\alpha u)(0)=0,\ |\alpha| \leq n-1}} |u'(\rho)|.$$

Из теоремы 4.2 гл. I имеем

$$E \leq \sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ u(0)=\ldots=u^{(n-1)}(0)=0}} |u'(\rho)| = e'(\rho, I, Bh_\infty),$$

где $Iu := (u(0), \ldots, u^{(n-1)}(0))$. Таким образом, в рассматриваемом случае $W(\xi) = \xi^n$. Поскольку экстремальная функция в задаче о нахождении величины $e'(\rho, I, Bh_\infty)$ имеет вид

$$u_0(\xi) = C \operatorname{Re} \operatorname{arctg}(\xi^n \varphi(\xi)),$$

где $\varphi(\xi) = 1$ или $\dfrac{\xi - a}{1 - a\xi}$, $C, a \in \mathbb{R}$, то $(D^\alpha u)(0) = 0$ при всех $|\alpha| \leq n-1$. Тем самым

$$E = e'(\rho, I, Bh_\infty).$$

В силу следствия 3.4 для нахождения области D_1 необходимо решить неравенство

$$n\frac{1-\rho^2}{2\rho}\frac{1-\rho^{2n}}{1+\rho^{2n}} < 1.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (3.14) в интервале $(0,1)$ имеет единственное решение, обозначенное через r_n. При этом $\rho \in D_1$, если $r_n < \rho < 1$ и $\rho \in D_0$, если $\rho \le r_n$. Выражение для $e'(\rho, I, Bh_\infty)$ легко находится из следствия 3.4. Следствие доказано. $\square$

Экстремальная задача (3.13) является аналогом экстремальной задачи (1.19), которую рассматривал при $n=1$ Дьедонне. Здесь при $n=1$ общей границей областей D_0 и D_1 является окружность

$$|z| = r_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

В работе **[122]** был обнаружен любопытный факт, касающийся восстановления производной на классе BH_∞. Оказалось, что если требуется восстановить значение $f'(0)$, используя информацию о значении функции лишь в одной точке z, то погрешность оптимального восстановления минимальна при $|z| = 1/\sqrt{3}$. Более общая задача рассматривалась затем в работе **[121]** (см. также **[109]**).

Для гармонических функций имеет место тот же эффект, но с другим численным значением $|z|$. Для $I_x u := u(x)$ из следствия 3.5 получаем

$$E(x) := e'(0, I_x, Bh_\infty)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, & |x| \le r_1, \\ \dfrac{2(1-x^2)}{\pi|x|}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} - 1\right), & |x| > r_1. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\min_{x\in(-1,1)} E(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

причем минимум достигается при

$$|x| = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Здесь мы уже подходим к другому типу задач — задачам об оптимальном выборе информационного оператора, которым будет посвящен следующий параграф.

Вернемся к общей задаче восстановления линейного функционала L_x^λ теперь уже на классе Bh_2. Положим

$$\psi_1(z) := W^{-1}(z), \quad \psi_2(z) := (1 - xz)^\nu z^{-1} W^{-1}(z),$$
$$\alpha(z) := \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j (z - x)^j, \quad \beta(z) := \alpha(z^{-1}) z^{m+1},$$

где при $x = 0$ $\alpha_0 := 0$,

$$\alpha_j := W(0) \left[\lambda_{\nu+m+1-j} - \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\alpha_s}{(j-s)!} \psi_1^{(j-s)}(0) \right],$$
$$j = 1, \ldots, \min(\nu + m, m + 1),$$

$$\alpha_{m+1} := \frac{W(0)}{1 + W^2(0)} \left[\lambda_0 - \sum_{s=1}^{m} \frac{\alpha_s}{(m+1-s)!} \psi_1^{(m+1-s)}(0) \right], \quad \text{если } \nu = 0,$$

а при $x \neq 0$

$$\alpha_j := \frac{xW(x)}{(1 - x^2)^\nu} \left[\lambda_{\nu+m-j} - \sum_{s=0}^{j-1} \frac{\alpha_s}{(j-s)!} \psi_2^{(j-s)}(x) \right], \quad j = 0, \ldots, m,$$
$$\alpha_{m+1} := \frac{(-1)^m}{x^{m+1}(1 + x^{2\nu} W^2(0))} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s x^s a_s.$$

Теорема 3.3. *При всех $\nu \geq 0$ и $m \geq 0$ метод S_0, определенный равенством (3.6), в котором*

$$c_l(x) := -\frac{1}{l!(\nu + m - l)!} \left[\alpha(z) \psi_2(z) \right]^{(\nu+m-l)}_{|z=x},$$
$$c_{jl}(x) := -\frac{1}{l!(\nu_j - l - 1)!} \left[\frac{\alpha(z)(1 - xz)^\nu (1 - x_j z)^{\nu_j}}{z(z - x)^{\nu+m+1} \omega_j(z)} \right]^{(\nu_j - l - 1)}_{\Big|z=x_j},$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_2. При этом функция

$$u_0(z) := \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{Re} \left[W(z) \beta(z) \frac{(z - x)^\nu}{(1 - xz)^{\nu+m+1}} \right],$$

где

$$\varepsilon := \begin{cases} \dfrac{2}{m!} \left[\dfrac{\alpha(z)\beta(z)}{z(1 - xz)^{m+1}} \right]^{(m)}_{\Big|z=x}, & x \neq 0, \\ 2 \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j^2, & x = 0, \ \nu \neq 0, \\ 2 \left[\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 + (1 + W^2(0)) \alpha_{m+1}^2 \right], & x = 0, \ \nu = 0, \end{cases}$$

является экстремальной, а

$$e(x, \lambda, I, Bh_2) = \sqrt{\varepsilon}.$$

Доказательство. В прежних обозначениях положим

$$g(z) := W_1(z)\frac{\beta(z)}{(1-xz)^{m+1}}, \quad w(z) := 2\operatorname{Re} g(z),$$

$$Jf := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} w(z)f(z)\,\frac{dz}{z}.$$

Поскольку при $|z| = 1$

$$w(z) = g(z) + \overline{g(z)} = g(z) + \frac{\alpha(z)}{W_1(z)(z-x)^{m+1}},$$

то, применяя теорему о вычетах, можно убедиться, что

$$Jf = L_x^\lambda f - S_0 If.$$

Если $u \in h_2$, то $f = u + iv \in H_2$ (v — сопряженная функция). Поэтому при всех $u \in h_2$ имеют место равенства

$$L_x^\lambda u - S_0 Iu = \operatorname{Re} Jf = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})u(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{3.15}$$

Так как $w \in h_2$ и $Iw = 0$, то из теоремы 5.3 гл. I следует, что метод S_0 является оптимальным, функция $u_0 := w/\|w\|_{h_2}$ — экстремальная, а $e(x, \lambda, I, Bh_2) = L_x^\lambda u_0$. В силу равенства (3.15)

$$\begin{aligned} L_x^\lambda w = \|w\|_{h_2}^2 &= 2\operatorname{Re} Jg \\ &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(g^2(z) + \frac{\alpha(z)\beta(z)}{[(z-x)(1-xz)]^{m+1}}\right)\frac{dz}{z}\right]. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что последняя величина совпадает с ε. Таким образом,

$$e(x, \lambda, I, Bh_2) = \frac{L_x^\lambda w}{\|w\|_{h_2}} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 3.6. *Метод*

$$u(x) \approx \frac{1}{1 + W^2(0)}\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}\frac{1 - x_j^2}{1 - x_j x}(1 + x_j\omega_j^2(0)x)u(x_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_2, функция

$$\begin{aligned} u_0(z) := \operatorname{sign}(W(x))&\sqrt{\frac{2}{1+W^2(0)}\frac{1-x^2}{1+x^2W^2(0)}} \\ &\times \operatorname{Re}\left[W(z)\frac{1 + xW^2(0)z}{1 - xz}\right] \end{aligned}$$

является экстремальной и

$$e(x,\lambda,I,Bh_2)=\sqrt{\frac{2}{1+W^2(0)}\frac{1+x^2W^2(0)}{1-x^2}}|W(x)|.$$

Обозначим через a_2 пространство гармонических в D функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{a_2}:=\left(\frac{1}{\pi}\int_D|u(z)|^2\,d\nu(z)\right)^{1/2}<\infty$$

(ν — плоская мера Лебега). Введем следующие обозначения:

$$a:=\frac{1+xy^{2n+1}}{n((1-y^2)+1-yx},\quad \alpha(x):=\frac{(x-y)^n}{(a+y^{2n})(1-yx)^{n+1}},$$

$$\Psi(z):=\frac{1-yz}{1-xz}(a+xy^{2n}z),$$

$$\varphi(z):=(n+1)\frac{1-y^2}{(1-yz)^2}\Psi(z)+\frac{z-y}{1-yz}\Psi'(z).$$

Теорема 3.4. *Пусть x,y — различные точки из интервала $(-1,1)$, а $Iu:=(u(y),\dots,u^{(n-1)}(y))$. Тогда метод*

$$u(x)\approx S_0Iu:=\sum_{s=0}^{n-1}c_s(x)u^{(s)}(y), \tag{3.16}$$

где

$$c_s(x):=\frac{\alpha(x)}{s!(n-s-1)!}\left[\frac{(1-yz)^{n+1}(az+xy^{2n})}{z(x-z)}\right]^{(n-s-1)}\Bigg|_{z=y},$$

является оптимальным методом восстановления на классе Ba_2, функция

$$u_0(z):=\operatorname{sign}(\alpha(x))\sqrt{\frac{2}{(1-yx)(a+y^{2n})\varphi(x)}}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{z-y}{1-yz}\right)^n\varphi(z)\right] \tag{3.17}$$

является экстремальной и

$$e(x,I,Ba_2)=\left|\frac{x-y}{1-yx}\right|^n\sqrt{\frac{2\varphi(x)}{(1-yx)(a+y^{2n})}}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Для $f\in H_\infty$ рассмотрим интеграл

$$Jf:=\alpha(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[\frac{(1-yz)^{n+1}(az+xy^{2n})}{(z-y)^n(z-x)z}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{z}\left(\frac{z-y}{1-yz}\right)^n\varphi(z)\right]f(z)\,dz.$$

Пользуясь теоремой о вычетах, можно показать, что

$$Jf = f(x) - S_0 If.$$

С другой стороны, по формуле Стокса

$$\begin{aligned}
Jf = \alpha(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\Bigg[\left(\frac{\overline{z}-y}{1-y\overline{z}}\right)^{n+1}\Psi(\overline{z})& \\
+\overline{z}\left(\frac{z-y}{1-yz}\right)^{n}\varphi(z)\Bigg]\, f(z)\, dz& \\
= \alpha(x)\frac{1}{\pi}\int_D\left[\left(\frac{\overline{z}-y}{1-y\overline{z}}\right)^{n}\overline{\varphi(z)} + \left(\frac{z-y}{1-yz}\right)^{n}\varphi(z)\right] f(z)\, d\nu(z).&
\end{aligned}$$

Тем самым при всех $f \in H_\infty$ имеет место равенство

$$f(x) - S_0 If = |\alpha(x)|\frac{1}{\pi}\int_D w(z) f(z)\, d\nu(z), \tag{3.19}$$

где

$$w(z) := \operatorname{sign}(\alpha(x)) 2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{z-y}{1-yz}\right)^{n}\varphi(z)\right].$$

В силу того, что функции из H_∞ плотны в A_2, равенство (3.19) справедливо для всех $f \in A_2$. Положим $u := \operatorname{Re} f$. Тогда из (3.19) получаем

$$u(x) - S_0 Iu = |\alpha(x)|\frac{1}{\pi}\int_D w(z) u(z)\, d\nu(z). \tag{3.20}$$

Если $u \in a_2$, то аналогично доказательству теоремы 4 из работы [**15**, стр. 380] доказывается, что сопряженная функция $v \in a_2$. Следовательно, $u + iv \in A_2$ и равенство (3.20) имеет место для всех $u \in a_2$. Поскольку $w \in a_2$ и $Iw = 0$, то из теоремы 5.3 гл. I следует, что метод (3.16) является оптимальным, а функция $u = w/\|w\|_{a_2}$ — экстремальной. Из равенства (3.20) при $u = w$ получаем

$$|\alpha(x)|\|w\|^2_{a_2} = w(x).$$

Таким образом,

$$u_0 = \sqrt{\frac{|\alpha(x)|}{w(x)}}w, \quad e(x, I, Ba_2) = u_0(x) = \sqrt{|\alpha(x)| w(x)}.$$

Подставляя в эти равенства выражения для $\alpha(x)$ и $w(x)$, получим равенства (3.17) и (3.18). Теорема доказана. □

§4. Оптимизация информационного оператора, n-поперечники и некоторые их точные значения

Вернемся к общей задаче оптимального восстановления однозначного отображения $f\colon W \to Z$, где Z — метрическое пространство, по значениям информационного оператора (многозначного отображения) $F\colon W \to Y$. Предположим, что нам задан некоторый класс допустимых методов восстановления $\mathcal{S}$ (под методами восстановления понимаются однозначные отображения $\varphi\colon Y \to Z$). Погрешностью оптимального восстановления для заданного $\mathcal{S}$ назовем величину

$$e(f, F, \mathcal{S}) := \inf_{\varphi \in \mathcal{S}} \sup_{(x,y) \in \operatorname{gr} F} \rho(f(x), \varphi(y)). \tag{4.1}$$

В частности, когда $\mathcal{S}$ совпадает со всевозможными методами восстановления, получаем величину $e(f, F)$, введенную в §4 гл. I.

Пусть требуется восстановить целое семейство отображений Φ и при этом имеется возможность выбирать информационный оператор из некоторого множества операторов $\mathcal{F}$. В этой ситуации положим

$$e(\Phi, \mathcal{F}, \mathcal{S}) := \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{f \in \Phi} e(f, F, \mathcal{S}). \tag{4.2}$$

Информационный оператор F_0 будем называть оптимальным, если на нем достигается нижняя грань в (4.2). В случае, когда $\mathcal{S}$ совпадает с множеством всевозможных методов, будем опускать в обозначении величин (4.1) и (4.2) зависимость от $\mathcal{S}$.

Задачи (4.1) и (4.2) содержат в себе многие хорошо известные и часто рассматриваемые в теории приближений задачи. В этом параграфе мы рассматриваем две из них в приложении к некоторым классам аналитических и гармонических функций — задачу об оптимальной интерполяции и задачу об n-поперечниках.

1. Задача об оптимальной интерполяции. Пусть W — некоторый класс комплексных или вещественных функций, определенных на множестве Ω и $E \subset \Omega$. Положим

$$\Phi(W, E) := \{\, x' \in (\operatorname{lin} W)' : \langle x', x\rangle = x(z_0),\ z_0 \in E,\ x \in W \,\},$$
$$\mathcal{F}_n(\delta) := \{\, F : Fx = Ix + \delta B,\ Ix = (x(z_1), \dots, x(z_n)),\ z_j \in E \,\},$$

здесь B — единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ по отношению к некоторой норме, а $\delta \ge 0$.

Под задачей оптимальной интерполяции с погрешностью δ будем понимать задачу о нахождении величины

$$e_n(E, W, \delta) := e(\Phi(W, E), \mathcal{F}_n(\delta)). \tag{4.3}$$

Оптимальными узлами интерполяции назовем узлы, для которых соответствующий информационный оператор F_0 является оптимальным. Для задач оптимальной интерполяции по точным данным ($\delta = 0$) будем опускать в обозначениях величины (4.3) зависимость от δ. Здесь мы рассмотрим некоторые задачи оптимальной интерполяции по точным данным (случай $\delta > 0$ будет рассматриваться в III главе).

Обозначим через $\mathcal{B}_n$ множество произведений Бляшке порядка не выше n, т.е. функций вида

$$B(z) = \sigma \prod_{j=1}^{m} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z}, \quad |\alpha_j| < 1,\ j = 1, \dots, m, \quad |\sigma| = 1, \quad m \le n,$$

а через $\mathcal{B}_n^0$ — множество произведений Бляшке из $\mathcal{B}_n$ с вещественными нулями и $\sigma = \pm 1$.

Для $W = BH_\infty$ и $\delta = 0$ задача (4.3) исследовалась в работах автора [**44**] и [**45**]. В частности, из этих работ вытекает, что при всех $0 < k < 1$ и $n \ge 1$ имеют место равенства

$$e_n([-\sqrt{k}, \sqrt{k}], BH_\infty) = \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \|B\|_{C([-\sqrt{k},\sqrt{k}])} = \sqrt{\kappa(h^n)}, \tag{4.4}$$

где

$$\kappa(x) := 4x^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{m(m+1)} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2} \right)^{-2},$$

$h = e^{-\pi K'/K}$, а K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k и $k' = \sqrt{1-k^2}$, соответственно:

$$K := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

При этом узлы

$$z_j^0 = \sqrt{k}\, \mathrm{sn} \left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1 \right) K, k \right], \quad j = 1, \dots, n, \tag{4.5}$$

являются оптимальными. Здесь и далее $\mathrm{sn}(x,k)$, $\mathrm{cn}(x,k)$ и $dn(x,k)$ — стандартные обозначения эллиптических функций (см. [**5**], [**18**], [**70**], [**21**]). В этом параграфе для краткости зависимость эллиптических функций от модуля отмечается лишь в случае, если он отличен от k.

Экстремальная задача (4.4) тесно связана с одной из классических задач Е.И. Золотарева [**22**] (см. также [**5**]). В [**45**] было показано, как свести более общие задачи минимизации погрешности оптимального восстановления к задаче, обобщающей задачу Е.И. Золотарева и изучавшейся в работе [**16**].

В дальнейшем нам потребуется решение ряда экстремальных задач типа (4.4) не только в равномерной, но и в интегральной метрике. Для этого сформулируем обобщение одного результата А. Пинкуса из работы [**116**] (см. также [**17**, стр. 174]), касающегося ядер, не увеличивающих осцилляцию.

Обозначим через $S_c(f)$ число перемен знака кусочно-непрерывной, вещественной и 2π-периодической функции на периоде. Для вещественной, непрерывной и 2π-периодической функции K положим

$$(\mathcal{K} * f)(x) := \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(x-t)f(t)\,dt.$$

Будем говорить, что $\mathcal{K} \in NCVD$ (nondegenerate cyclic variation diminishing), если $S_c(\mathcal{K} * f) \le S_c(f)$ при всех f и

$$\dim \operatorname{span}\{\,\mathcal{K}(x_1 - \cdot), \ldots, \mathcal{K}(x_n - \cdot)\,\} = n$$

при всех $0 \le x_1 < \ldots < x_n < 2\pi$ и всех n. Если при всех $0 \le x_1 < \ldots < x_{2l+1} < 2\pi$, $0 \le y_1 < \ldots < y_{2l+1} < 2\pi$ выполняется неравенство

$$\varepsilon \det\left(\mathcal{K}(x_j - y_m)\right)_{j,m=1}^{2l+1} > 0,$$

где $\varepsilon = 1$ или -1, то говорят, что $\mathcal{K} \in SSC_{2l+1}$ (strictly sign consistent).

Положим

$$\Lambda_n := \{\,\theta : \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n),\ 0 \le \theta_1 \le \ldots \le \theta_n < 2\pi\,\}.$$

Для $\xi \in \Lambda_{2n}$ введем функцию

$$h_\xi(t) := (-1)^{j+1}, \quad t \in [\xi_{j-1}, \xi_j), \quad j = 1, \ldots, 2n+1,$$

где $\xi_0 := 0$, $\xi_{2n+1} := 2\pi$. Через $h_n(t)$ обозначим функцию $h_\xi(t)$, когда $\xi_j = (j-1)\pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n$, а через $\|\cdot\|_q$ — норму в пространстве $L_q[0, 2\pi] := L_q([0, 2\pi], \mu)$ при $d\mu(t) = dt$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{K} \in NCVD$ и φ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, определенная на $[0, \|\mathcal{K}\|_1]$, такая, что φ' положительна и возрастает в интервале $(0, \|\mathcal{K}\|_1)$. Тогда при всех $1 \le q \le \infty$*

$$\inf_{\xi \in \Lambda_{2n}} \|\varphi(|\mathcal{K} * h_\xi|)\|_q = \|\varphi(|\mathcal{K} * h_n|)\|_q.$$

Причем если $\mathcal{K} \in SSC_{2l+1}$, $l = 0, 1, \ldots, n$, и для $\xi^* \in \Lambda_{2n}$ достигается инфимум, то $\xi^*_{j+1} - \xi^*_j = \pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n-1$.

Эта теорема для $\varphi(x) = x$ была доказана А. Пинкусом [**116**]. При этом использовался метод, предложенный А. Женсыкбаевым [**19**], [**20**]. В общем случае доказательство проводится по той же схеме.

Теорема 4.2. *Пусть φ — функция, определенная на $[0, 1]$ и удовлетворяющая условиям теоремы 4.1. Тогда при всех $k \in (0, 1)$*

и $s \in \mathbb{N}$

$$\inf_{\theta\in\Lambda_s}\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left|k^{s/2}\prod_{j=1}^{s}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(\cdot-\theta_j)\right)\right|\right)\right\|_q$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi^q\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{\lambda}t)\right)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \varphi\left(\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\right), & q=\infty,\end{cases}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-s\pi K'/K}\right)$*, а* Λ *— полный эллиптический интеграл первого рода для модуля* λ*. Причем, если для* $\theta^* \in \Lambda_s$ *достигается инфимум, то* $\theta^*_{j+1} - \theta^*_j = 2\pi/s$*,* $j = 1, \ldots, s-1$*.*

Доказательство. Положим $D_H := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < H\}$. Через A_H обозначим класс аналитических в полосе D_H функций, вещественных на вещественной оси, 2π-периодических и удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{Re} f(z)| \le 1, \quad z \in D_H.$$

Функции из класса A_H допускают представление (см. [**4**])

$$f(z) = \int_0^{2\pi} K_H(z-t)\operatorname{Re} f(t+iH)\,dt,$$

где $z \in D_H$, а

$$K_H(z) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos jz}{\operatorname{ch} jH}\right).$$

Известно, что $K_H(t) \in NCVD$ при $t \in [0, 2\pi)$ (см. [**117**, стр. 128]). Более того, в работе [**92**] было доказано, что $K_H \in SSC_{2l+1}$ при всех $l = 0, 1, \ldots$.

Рассмотрим случай четных s. Пусть $s = 2n$ и $\theta \in \Lambda_{2n}$. Положим

$$f_\theta(z) := \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[k^n\prod_{j=1}^{2n}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(z-\theta_j)\right)\right].$$

Поскольку $\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u$ и $|\sqrt{k}\operatorname{sn} u| < 1$ при $|\operatorname{Im} z| < K'/2$, то $f_\theta \in A_H$ для $H = \dfrac{\pi K'}{2K}$. Из равенства

$$\sqrt{k}\operatorname{sn}(u+iK'/2) = \frac{(1+k)\operatorname{sn} u + i\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{1+k\operatorname{sn}^2 u} \tag{4.6}$$

вытекает, что при $0 \le u \le 2K$

$$\sqrt{k}\operatorname{sn}(u+iK'/2) = \exp(i\omega(u)),$$

где $\omega(u)$ монотонно возрастает от 0 до π. Так как для $|z| = 1$ и $z \neq \pm i$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} z\right) = \operatorname{sign}\operatorname{Re} z,$$

то при всех $t \in [0, 2\pi)$

$$\operatorname{Re} f_\theta(t + iH) = \operatorname{sign}\operatorname{Re}\exp\biggl(i\sum_{j=1}^{2n}\omega_j(t)\biggr),$$

где $\sum_{j=1}^{2n}\omega_j(t)$ монотонно возрастает от некоторого α до $\alpha + 2\pi n$. Отсюда следует существование $\xi \in \Lambda_{2n}$ такого, что

$$f_\theta(z) = \sigma(K_H * h_\xi)(z)$$

при $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Из теоремы 4.1 для $\mathcal{K} = K_H$ получаем

$$\inf_{\theta\in\Lambda_{2n}} \|\varphi(|f_\theta(\cdot)|)\|_q \geq \inf_{\theta\in\Lambda_{2n}} \|\varphi(|(K_H * h_\xi)(\cdot)|)\|_q = \|\varphi(|(K_H * h_n)(\cdot)|)\|_q. \tag{4.7}$$

Обозначим через f_n функцию f_θ при $\theta_j = (j-1)\pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n$. Пользуясь равенствами $\operatorname{sn}(u - 2K) = -\operatorname{sn} u$,

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v},$$

а также первым главным преобразованием эллиптических функций $2n$-ой степени (см. [**5**, стр. 284]), находим

$$\begin{aligned}
&f_n\left(z - \frac{\pi}{2n}\right)\\
&= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\biggl[(-1)^n k^n \prod_{j=1}^{n}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - \frac{2j-1}{2n}K\right)\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z + \frac{2j-1}{2n}K\right)\biggr]\\
&\qquad= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[k^n\prod_{j=1}^{n}\frac{\operatorname{sn}^2\dfrac{2j-1}{2n}K - \operatorname{sn}^2\dfrac{K}{\pi}z}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\dfrac{2j-1}{2n}K\operatorname{sn}^2\dfrac{K}{\pi}z}\right]\\
&\qquad\qquad= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z + \Lambda, \lambda\right)\right],
\end{aligned}$$

где $\Lambda'/\Lambda = 2nK'/K$, $\lambda = \kappa(h^{2n})$. Таким образом,

$$f_n(z) = -\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z, \lambda\right)\right]. \tag{4.8}$$

Поскольку $f_n \in A_H$ и, кроме того, в силу (4.6)

$$\operatorname{Re} f_n(t + iH) = -\operatorname{sign}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z, \lambda\right) = h_n(t),$$

то $f_n(z) = (K_H * h_n)(z)$. Тем самым, учитывая (4.7), имеем

$$\inf_{\theta\in\Lambda_{2n}} \|\varphi(|f_\theta(\cdot)|)\|_q = \|\varphi(|f_n(\cdot)|)\|_q$$
$$= \left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}\cdot,\lambda\right)\right|\right)\right\|_q .$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы в рассматриваемом случае, если $q=\infty$. При $1\le q<\infty$ после замен $x = \dfrac{2n\Lambda}{\pi}z$ и $t=\operatorname{sn}(x,\lambda)$, пользуясь свойствами эллиптического синуса, получаем

$$\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}\cdot,\lambda\right)\right|\right)\right\|_q =$$
$$\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\int_0^\Lambda \varphi^q\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}(x,\lambda)\right)\right)dx\right)^{1/q}$$
$$=\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\int_0^1 \frac{\varphi^q\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}\right)^{1/q}.$$

Если для $\theta\in\Lambda_{2n}$ достигается инфимум в левой части (4.7), то в силу теоремы 4.1 с точностью до сдвига функция f_θ совпадает с K_H*h_n и, следовательно, нули функции f_θ распределены равномерно с шагом π/n.

Пусть s — нечетное число. С помощью преобразования Ландена [**5**, с. 283] находим

$$\sqrt{k}\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}u\right) = -l\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}u,l\right)\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}(u-\pi),l\right), \tag{4.9}$$

где

$$l=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad \frac{L'}{L}=\frac{K'}{2K},$$

а L и L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l и $l'=\sqrt{1-l^2}$ соответственно. Из равенства (4.9) имеем

$$k^{s/2}\prod_{j=1}^{s}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t-\theta_j)\right) = (-1)^s l^s\prod_{j=1}^{2s}\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}\left(\frac{t}{2}-\frac{\theta_j}{2}\right),l\right),$$

где $\theta_{n+j}=2\pi+\theta_j$, $j=1,\dots,n$. Теперь утверждение теоремы вытекает из соответствующего утверждения для четного случая. Теорема доказана. □

Положим при $k\in(0,1)$ $L_{qk} := L_q([-\sqrt{k},\sqrt{k}],\nu_k)$, где

$$d\nu_k(z) := \frac{\pi}{2K}\frac{dz}{\sqrt{(k-z^2)(1-kz^2)}}.$$

Теорема 4.3. *Пусть функция φ, определенная на отрезке $[0,1]$, удовлетворяет условиям теоремы* 4.1. *Тогда при всех $k \in (0,1)$ имеет место равенство*

$$\inf_{B\in\mathcal{B}_n^0}\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|B(\cdot)|\right)\right\|_{L_{qk}} = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{\Lambda}\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi^q\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{\lambda}t)\right)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \varphi\left(\dfrac{4}{\pi}\arctan\sqrt{\lambda}\right), & q=\infty, \end{cases} \tag{4.10}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-n\pi K'/K}\right)$. Единственной с точностью до знака функцией из $\mathcal{B}_n^0$, на которой достигается инфимум, является произведение Бляшке с нулями, определенными равенствами (4.5).

Доказательство. Если $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\sqrt{k}<|\alpha|<1$, то при всех $x\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$

$$\left|\frac{x-\alpha}{1-\alpha x}\right| > \left|\frac{x-\sqrt{k}\operatorname{sign}\alpha}{1-x\sqrt{k}\operatorname{sign}\alpha}\right|. \tag{4.11}$$

Поэтому в (4.10) инфимум можно брать лишь по произведениям Бляшке из $\mathcal{B}_n^0$ порядка n с нулями из отрезка $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$. Пусть

$$B(z)=\prod_{j=1}^n\frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z},\quad \alpha_j\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}].$$

Положим $l=2\sqrt{k}/(1+k)$. Сделав замены переменных $z=(x-\sqrt{k})/(1-\sqrt{k}x)$, $x=l\operatorname{sn}^2(y,l)$ и пользуясь тем, что $L=(1+k)K$ (см. [**5**, стр. 283]), получаем $d\nu_k(z)=\dfrac{\pi}{2L}\,dy$,

$$B(z)=l^n\prod_{j=1}^n\frac{\operatorname{sn}^2(y,l)-\operatorname{sn}^2(y_j,l)}{1-l^2\operatorname{sn}^2(y_j,l)\operatorname{sn}^2(y,l)} = l^n\prod_{j=1}^n\operatorname{sn}(y-y_j,l)\operatorname{sn}(y+y_j,l),$$

где $\alpha_j=(x_j-\sqrt{k})/(1-\sqrt{k}x_j)$, а $x_j=l\operatorname{sn}^2(y_j,l)$. Положив $t=\pi y/L$, $\theta_j=\pi y_j/L$, имеем

$$\inf_{B\in\mathcal{B}_n^0}\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\arctan|B(\cdot)|\right)\right\|_{L_{qk}} = \inf_{0\le\theta_j\le\pi}\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\arctan|f_\theta(t)|\right)\right\|_q,$$

где

$$f_\theta(t)=l^n\prod_{j=1}^n\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}(t-\theta_j),l\right)\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}(t+\theta_j),l\right). \tag{4.12}$$

Равенство (4.10) вытекает теперь из теоремы 4.2, учитывая, что $\dfrac{L'}{L} = \dfrac{K'}{2K}$. При этом система узлов $\theta_j = \dfrac{2j-1}{2n}\pi$, $j = 1, \ldots, n$, является единственной системой, на которой достигается инфимум в правой части (4.12). Следовательно, единственной с точностью до множителя функцией из $\mathcal{B}_n^0$, на которой достигается инфимум, будет произведение Бляшке с нулями $z_j = (x_j - \sqrt{k})/(1 - \sqrt{k}x_j)$, где

$$x_j = l \operatorname{sn}^2\left(\frac{2j-1}{2n}L, l\right).$$

С помощью преобразования Гаусса [**5**, стр. 283] можно убедиться, что узлы z_j совпадают с узлами, определенными равенством (4.5). Теорема доказана. □

Обозначим через $H_\infty(G)$ класс аналитических в области $G \in \mathbb{C}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_\infty(G)} := \sup_{z \in G} |f(z)| < \infty.$$

Аналогичное обозначение $h_\infty(G)$ будем использовать для гармонических функций. Пусть $\widetilde{H}_\infty(D_H)$ — множество 2π-периодических функций из $H_\infty(D_H)$.

Теорема 4.4. *Положим $k = \kappa(e^{-2H})$, а $\lambda = \kappa(e^{-2Hn})$. Тогда*

1) *при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$e_n([0, 2\pi), B\widetilde{H}_\infty(D_H)) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}, & n = 2s, \\ \sqrt{k\lambda}, & n = 2s-1, \end{cases}$$

причем единственными с точностью до сдвига оптимальными узлами являются узлы $t_j^* = (j-1)2\pi/n$, $j = 1, \ldots, n$;

2) *метод*

$$f(t) \approx \frac{K}{n\Lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{n\Lambda}{\pi}t, \lambda\right) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j c_n\left(\frac{K}{\pi}t - j\frac{2K}{n}\right) f\left(j\frac{2\pi}{n}\right),$$

в котором

$$c_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{sn}(x,k)} + i\mu, & n = 2s, \\ \dfrac{\operatorname{dn}^2(x,k)}{\operatorname{sn}(x,k)}, & n = 2s-1, \end{cases}$$

а μ — произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию $|\mu| \le 1 - k$, является оптимальным методом восстановления на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Функция $P(z,\zeta) := u(z,\zeta) + iv(z,\zeta)$, где $u(z,\zeta)$ — функция Грина области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с особенностью в точке ζ, а $v(z,\zeta)$ — сопряженная к $u(z,\zeta)$ функция (в общем случае многозначная), называется комплексной функцией Грина области Ω. Положим

$$\Delta_h := \{\, z \in \mathbb{C} : \sqrt{h} < |z| < 1/\sqrt{h}\,\}, \quad h \in (0,1).$$

В работе [**5**, стр. 232] для $\Omega = \Delta_h$ приведено выражение функции $F(z,\zeta) := \exp(-P(z,\zeta))$ (называемой в [**5**] комплексной функцией Грина) через тета-функции

$$F(z,\zeta) = z^{-\sigma} \frac{H\left(\dfrac{K}{\pi i}(\ln z - \ln\zeta)\right)}{\Theta\left(\dfrac{K}{\pi i}(\ln z + \ln\overline{\zeta})\right)},$$

где $\sigma := \ln|\zeta|/\ln h$, а модуль k определяется из условия

$$e^{-\pi K'/K} = h.$$

Модуль k выражается через h в явном виде, так как (см. [**5**, с. 277])

$$k = \kappa\left(e^{-\pi K'/K}\right). \tag{4.13}$$

В силу равенства

$$\frac{H(u)}{\Theta(u)} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(u,k)$$

имеем для $t \in [0,2\pi)$

$$F(e^{iu}, e^{it}) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{K}{\pi}(u-t)\right). \tag{4.14}$$

В работе [**43**] дано описание оптимальных методов восстановления значения функции из класса $BH_\infty(\Delta_h)$ в любой точке $z \in \Delta_h$ по ее значениям в конечном наборе узлов и найдена погрешность оптимального восстановления. В частности, из результатов этой работы вытекает, что метод

$$f(z) \approx B(z) \sum_{j=1}^{n} d_j(z) f(z_j),$$

где

$$B(w) := \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{n} F(w, z_j), & n = 2s, \\ \displaystyle F(w, -z) \prod_{j=1}^{n} F(w, z_j), & n = 2s - 1, \end{cases}$$

$$d_j(z) := \begin{cases} B'^{-1}(z_j)(P'(z_j, z) - \gamma/z_j), & n = 2s, \\ B'^{-1}(z_j)(P'(z_j, z) + P'(-z, z)z/z_j), & \\ & n = 2s-1,\ z \neq -z_j, \\ 2B''^{-1}(z_j)(P''(z_j, z) + P'(z_j, z)z/z_j), & \\ & n = 2s-1,\ z = -z_j, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления на классе $BH_\infty(\Delta_h)$ по значениям в узлах z_j, $j = 1, \ldots, n$, таких, что $|z_j| = 1$, а для его погрешности справедливо равенство

$$e(z, I, BH_\infty(\Delta_h)) = |B(z)|.$$

С помощью отображения $z = e^{iw}$ можно решить аналогичную задачу восстановления на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$, $h = e^{-2H}$, и получить, что

$$e(t, I, B\widetilde{H}_\infty(D_H)) = \begin{cases} |W(t)|, & n = 2s, \\ \sqrt{k}|W(t)|, & n = 2s - 1, \end{cases}$$

где

$$W(t) := k^{n/2} \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j)\right), \quad k = \kappa(e^{-2H}).$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из теоремы 4.2, если положить в ней $\varphi(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}x$, а также из вида оптимального метода для класса $BH_\infty(\Delta_h)$. Теорема доказана. □

Теорема 4.5. *При всех $k \in (0, 1)$ и $n \geq 1$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} e_n([-\sqrt{k}, \sqrt{k}], Bh_\infty) &= \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\kappa(h^n)} \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{h^{n(2m+1)/4}}{1 + h^{n(2m+1)/2}}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $h = e^{-\pi K'/K}$, а узлы (4.5) являются единственными оптимальными узлами.

Доказательство. Из определения e_n, следствия 3.1 и неравенства (4.11) имеем

$$e_n([-\sqrt{k}, \sqrt{k}], Bh_\infty) = \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \| \operatorname{arctg} B \|_{C([-\sqrt{k}, \sqrt{k}])}.$$

Применяя теорему 4.3, получаем первое из равенств (4.15), а также оптимальность и единственность узлов (4.5). Второе из равенств (4.15) вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.1. *При всех $0 < h < 1$ имеет место равенство*

$$\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{h^{2m+1}}{1+h^{2(2m+1)}} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\kappa(h^4)}.$$

Доказательство. Положим $k = \kappa(h)$. Тогда (см. [**5**, стр. 267]) для вещественных v

$$\operatorname{dn}\left(\frac{Kv}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h^m}{1+h^{2m}}\cos mv.$$

Следовательно,

$$\frac{4K}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{dn}\left(\frac{Kv}{\pi}\right)dv = 1 + 8\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{h^{2m+1}}{1+h^{2(2m+1)}}. \tag{4.16}$$

Пользуясь легко проверяемым непосредственным дифференцированием равенством

$$\int \operatorname{dn} x\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} + C$$

и известными в теории эллиптических функций формулами (см., например, [**5**])

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \operatorname{cn}\frac{K}{2} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\sqrt{k'} = \left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m h^{m^2}\right)\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}h^{m^2}\right)^{-1},$$

получаем из (4.16)

$$\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{h^{2m+1}}{1+h^{2(2m+1)}} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{dn} x\,dx - 1$$

$$= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}\bigg|_0^{\pi/2} - 1 = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\kappa(h^4)}.$$

Лемма доказана. □

□

Пусть $Э_c$ — внутренность эллипса с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей $c > 1$. Функция

$$\varphi(w) := \sqrt{k}\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin w, k\right), \quad \frac{K'}{K} = \frac{4}{\pi}\log c, \tag{4.17}$$

конформно отображает область $Э_c$ на единичный круг. При этом отрезок $[-1,1]$ переходит в отрезок $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$, а точки

$$w_j^0 = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1,\dots,n, \tag{4.18}$$

в точки (4.5). С помощью отображения (4.17), из теоремы 4.5 получаем

Следствие 4.1. *При всех $c > 1$ имеет место равенство*

$$e_n([-1,1], Bh_\infty(Э_c)) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{c^{-(2m+1)n}}{1+c^{-2(2m+1)n}},$$

а чебышевские узлы (4.18) *являются единственными оптимальными узлами.*

В рассмотренных случаях информационные операторы задавались значениями функции в n точках. Можно расширить постановку этих задач и рассматривать информационные операторы, задаваемые значениями n линейных непрерывных функционалов или в более общем случае — отображением в некоторое n-мерное линейное пространство.

Обозначим через $A_0(Э_c)$ класс функций, аналитических в $Э_c$, вещественных на вещественной оси и удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{Re} f(z)| \le 1, \quad z \in Э_c.$$

Н.И. Ахиезером [**4**, стр. 271] было доказано, что

$$E_n(A_0(Э_c)) := \sup_{f\in A_0(Э_c)}\inf_{p\in\mathcal{P}_{n-1}}\|f-p\|_{C[-1,1]}$$
$$= \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{c^{-(2m+1)n}}{1+c^{-2(2m+1)n}},$$

где $\mathcal{P}_{n-1}$ — множество алгебраических полиномов степени не выше $n-1$.

Сужения классов $A_0(Э_c)$ и $Bh_\infty(Э_c)$ на вещественную ось совпадают. Действительно, так как вещественная часть любой аналитической функции является гармонической функцией, то для любой $f \in A_0(Э_c)$ и $x \in \mathbb{R}\cap Э_c$

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) \in Bh_\infty(Э_c)\big|_{\mathbb{R}}.$$

Если $u \in Bh_\infty(Э_c)$, то $\widetilde{u}(z) := (u(z)+u(\overline{z}))/2 \in Bh_\infty(Э_c)$. Для функции $\widetilde{u}$ может быть построена сопряженная функция $\widetilde{v}$, удовлетворяющая условию $\widetilde{v}(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}\cap Э_c$. Следовательно, для вещественных x имеем

$$u(x) = \widetilde{u}(x) = \widetilde{u}(x) + i\widetilde{v}(x) \in A_0(Э_c)\big|_{\mathbb{R}}.$$

Таким образом,

$$E_n(A_0(\mathfrak{Э}_c)) = E_n(Bh_\infty(\mathfrak{Э}_c)).$$

Тем самым, если в качестве информационного оператора рассматривать оператор, ставящий в соответствие функции ее полином наилучшего приближения, то погрешность оптимального восстановления будет не хуже, чем при восстановлении по значениям функции в чебышевских узлах.

В связи с этим возникает вопрос: как наилучшим образом выбрать информационный оператор? Здесь мы подходим к задачам, связанным с n-поперечниками.

2. n**-поперечники.** Рассмотрим задачу (4.1), когда Z — линейное нормированное пространство, а $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$ $(\mathcal{S}_n^L)$ — множество всевозможных (линейных непрерывных) операторов с областью значений в n-мерных линейных подпространствах Z. Положим

$$\begin{aligned} d_n(f, F) :=& e(f, F, \mathcal{S}_n), \\ \lambda_n(f, F) :=& e(f, F, \mathcal{S}_n^L). \end{aligned}$$

Если $W \subset X$, X и Y — линейные нормированные пространства, $F = I_\delta := I + \delta BY$ и $f = i$ — тождественное отображение ($i(x) \equiv x$), получаем величины

$$\begin{aligned} d_n(W, X, I, \delta) :=& d_n(i, I_\delta), \\ \lambda_n(W, X, I, \delta) :=& \lambda_n(i, I_\delta), \end{aligned}$$

первая из которых была введена Ю.Н. Субботиным [**64**]. Величины

$$\begin{aligned} d_n(W, X) :=& d_n(W, X, i, 0), \\ \lambda_n(W, X) :=& \lambda_n(W, X, i, 0) \end{aligned}$$

хорошо известны и называются колмогоровским и линейным поперечниками, соответственно.

Напомним еще определение гельфандовского поперечника. Предположим, что $0 \in W$ (как правило, рассматриваются выпуклые уравновешенные множества W). Тогда n-поперечником по Гельфанду называется величина

$$d^n(W, X) := \inf_{X^n} \sup_{x \in W \cap X^n} \|x\|,$$

где X^n — подпространства X коразмерности не выше n. Подпространство $X^n \subset X$ имеет коразмерность n, если существуют n непрерывных линейно независимых линейных функционалов $x_1, \dots, x_n' \in X^*$, для которых

$$X^n = \{\, x \in X : \langle x_j', x \rangle = 0,\ j = 1, \dots, n \,\}.$$

Подробные сведения об этих (и других) поперечниках можно найти в монографиях [**66**], [**117**] и в обзоре [**67**]. В частности, в этих работах приведены следующие хорошо известные соотношения

$$d_n(W, X) \leq \lambda_n(W, X) \tag{4.19}$$

$$\lambda_n(W, X) \geq d^n(W, X). \tag{4.20}$$

Ряд точных значений поперечников на классах аналитических функций можно найти в работах [**67**], [**117**], [**90**], [**58**], [**89**], [**72**], [**55**]. Одним из наиболее известных результатов здесь является результат Фишера и Мичелли [**89**]:

$$d_n(BH_\infty, L_q) = \lambda_n(BH_\infty, L_q) = d^n(BH_\infty, L_q) = \inf_{B \in \mathcal{B}_n} \|B\|_q, \tag{4.21}$$

где $L_q = L_q(E, \mu)$, $1 \leq q \leq \infty$, $E \subset D$ — некоторый компакт, а μ — неотрицательная мера на E.

Оценки сверху для поперечников могут быть найдены с помощью оптимальных методов восстановления. Именно так и получалась оценка сверху в [**89**]. Мы докажем некоторый аналог приведенного результата для гармонических функций из класса Bh_∞, используя оптимальный метод восстановления, полученный в §3.

Теорема 4.6. *Пусть E — компакт из интервала $(-1, 1)$, μ — неотрицательная мера на E и $L_q := L(E, \mu)$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда*

$$d_n(Bh_\infty, L_q) = \lambda_n(Bh_\infty, L_q) = d^n(Bh_\infty, L_q) = \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \| \arctan B\|_q.$$

Доказательство. Зафиксируем точки $x_0, \dots, x_n \in (-1, 1)$. Пусть $y = (y_0, ..., y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ принадлежит единичной сфере $\mathbb{S}^n$, т.е. $\sum_{j=0}^{n} y_j^2 = 1$. Положим

$$\rho(y) := \inf_{\substack{f \in H_\infty \\ f(x_j)=y_j,\ j=0,\dots,n}} \|f\|_{H_\infty}.$$

Тогда в силу классической теоремы Неванлинны–Пика (см. [**71**, стр. 347], [**76**], [**104**]) существует единственное произведение Бляшке $B \in \mathcal{B}_n$, для которого

$$\rho(y)B(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, n. \tag{4.22}$$

Поскольку функция $\overline{B(\overline{z})}$ также удовлетворяет условиям (4.22), то B — вещественна на вещественной оси. Обозначим через $\mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}$ множество произведений Бляшке из $\mathcal{B}_n$, вещественных на вещественной оси, а через $T \colon \mathbb{S}^n \to Bh_\infty$ — отображение, которое каждой точке $y \in \mathbb{S}^n$ ставит в соответствие функцию

$$u(z) = \frac{4}{\pi} \arctan B(z),$$

где $B \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условиям (4.22). Отображение T нечетное и непрерывное в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах D.

Пусть $1 < q < \infty$, X_n — некоторое линейное подпространство L_q размерности n и $f_1, \dots, f_n$ — базис в X_n. Для каждого $f \in L_q$ существует единственный элемент наилучшего приближения подпространством X_n

$$f_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j(f) f_j.$$

Положим $Sf := (c_1(f), \dots, c_n(f))$. Тогда отображение $S \circ T\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ является нечетным и непрерывным. По теореме Борсука (см., например, [**66**, стр. 84]) существует $y^* \in \mathbb{S}^n$, для которого $c_j(Ty^*) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Это означает, что

$$\sup_{u \in Bh_\infty} \inf_{v \in X_n} \|u - v\|_q \geq \inf_{v \in X_n} \|Ty^* - v\|_q = \|Ty^*\|_q \geq \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}} \|\arctan B\|_q.$$

В силу произвольности X_n имеем

$$d_n(Bh_\infty, L_q) \geq \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}} \|\arctan B\|_q.$$

Поскольку для $B \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}$ и $x \in (-1, 1)$

$$|\arctan B(x)| = \arctan |B(x)|,$$

а, кроме того, для любых $\alpha + i\beta \in D$

$$\left| \frac{x - \alpha - i\beta}{1 - (\alpha - i\beta)x} \right| \geq \left| \frac{x - \alpha}{1 - \alpha x} \right|, \tag{4.23}$$

то

$$\inf_{B \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}} \|\arctan B\|_q = \inf_{B \in \mathcal{B}_n^{0}} \|\arctan B\|_q.$$

Таким образом,

$$d_n(Bh_\infty, L_q) \geq \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^{0}} \|\arctan B\|_q. \tag{4.24}$$

Случаи $q = 1, \infty$ получаются стандартным предельным переходом (см., например, [**30**, стр. 264]).

Пусть теперь B — произведение Бляшке с нулями в точках $x_1, \dots, x_n \in (-1, 1)$ (не обязательно различных). Из теоремы 3.1 следует существование линейного метода S_x, для которого при всех $x \in (-1, 1)$ для любой функции $u \in Bh_\infty$

$$|u(x) - S_x I u| \leq \frac{4}{\pi} |\arctan B(x)|.$$

Иными словами, существуют $g_1(x), \dots, g_n(x)$ такие, что

$$\left| u(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j(u) g_j(x) \right| \leq \frac{4}{\pi} |\arctan B(x)|,$$

где $c_j(u)$ значения функции u в точках $x_1, \dots, x_n$ (или их производных в случае совпадения ряда точек). Отсюда

$$\lambda_n(Bh_\infty, L_q) \geq \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \|\arctan B\|_q.$$

Тем самым, учитывая (4.19) и (4.24) имеем

$$d_n(Bh_\infty, L_q) = \lambda_n(Bh_\infty, L_q) = \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \|\arctan B\|_q. \tag{4.25}$$

Пусть $f_1', \dots, f_n'$ — линейные непрерывные функционалы на L_q. Определим отображение $T' \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}.$ равенством

$$T'y := (\langle f_1', Ty \rangle, \dots, \langle f_n', Ty \rangle).$$

Отображение T' — нечетное и непрерывное. Следовательно, по теореме Борсука существует $y^* \in \mathbb{S}^n$, для которого $T'y^* = 0$. Таким образом,

$$\sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ \langle f_j', u \rangle = 0,\ j=1,\dots,n}} \|u\|_q \geq \|Ty^*\|_q \geq \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{R}}} \|\arctan B\|_q$$

$$= \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \|\arctan B\|_q.$$

В силу произвольности системы функционалов $f_1', \dots, f_n'$ имеем

$$d^n(Bh_\infty, L_q) \geq \frac{4}{\pi} \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \|\arctan B\|_q.$$

что вместе с (4.20) и (4.25) завершает доказательство теоремы. □

Положим

$$I_{q0}(\lambda) := \int_0^1 \frac{t^q \, dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}},$$

$$I_{q1}(\lambda) := \int_0^1 \frac{\arctan^q(\sqrt{\lambda} t) \, dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}.$$

Теорема 4.7. *При всех $1 \leq q \leq \infty$ и $c > 1$ для $L_q := L_q([-1,1], \mu)$, где $d\mu(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, имеют место равенства*

$$d_n\left(BH_\infty(\mathfrak{Э}_c), L_q\right) = \lambda_n\left(BH_\infty(\mathfrak{Э}_c), L_q\right) = d^n\left(BH_\infty(\mathfrak{Э}_c), L_q\right)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\lambda} \left(\dfrac{\pi}{\Lambda} I_{q0}(\lambda) \right)^{1/q} = 2 \left(\sqrt{\pi} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)} \right)^{1/q} c^{-n} + O\left(c^{-5n}\right), & 1 \leq q < \infty, \\ \sqrt{\lambda} = 2c^{-n} + O(c^{-5n}), & q = \infty, \end{cases}$$

$$d_n\left(Bh_\infty(Э_c), L_q\right) = \lambda_n\left(Bh_\infty(Э_c), L_q\right) = d^n\left(Bh_\infty(Э_c), L_q\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{\Lambda} I_{q1}(\lambda)\right)^{1/q} = \dfrac{8}{\pi}\left(\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} c^{-n} + O\left(c^{-5n}\right), & \\ & 1 \le q < \infty, \\ \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda} = \dfrac{8}{\pi} c^{-n} + O\left(c^{-5n}\right) & q = \infty, \end{cases}$$

в которых $\lambda = \kappa(c^{-4n})$.

Доказательство. Функция $z = \varphi(w)$, определенная равенством (4.17), конформно отображает внутренность эллипса $Э_c$ на единичный круг. При этом отрезок $[-1, 1]$ переходит в отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Из равенства

$$d\nu_k(z) = \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$$

вытекает, что при таком конформном отображении поперечники для пар $(BH_\infty(Э_c), L_q)$ и $(Bh_\infty(Э_c), L_q)$ переходят в поперечники для пар (BH_∞, L_{qk}) и (Bh_∞, L_{qk}), соответственно. Тем самым из (4.21) и теоремы 4.6 следует, что достаточно найти величины

$$d_n(BH_\infty, L_{qk}) = \inf_{B\in\mathcal{B}_n} \|B(\cdot)\|_{L_{qk}},$$

$$d_n(Bh_\infty, L_{qk}) = \frac{4}{\pi}\inf_{B\in\mathcal{B}_n^0} \|\operatorname{arctg}|B(\cdot)|\|_{L_{qk}}.$$

В силу неравенства (4.23) нижняя грань в первом из этих равенств может также браться лишь по произведениям Бляшке из $\mathcal{B}_n^0$. Точные значения рассматриваемых поперечников находятся теперь из теоремы 4.3. Асимптотика в том и другом случае получается из равенств

$$\Lambda = \frac{\pi}{2}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} h^{m^2}\right)^2, \quad h = c^{-4n},$$
$$\int_0^1 x^q(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}. \tag{4.26}$$

Теорема доказана. □

Для классов функций, задаваемых сверткой с ядрами, не увеличивающими осцилляцию, А. Пинкусом [**116**], [**117**, стр. 180] был получен ряд точных значений поперечников. В частности, из этих результатов для класса A_H имеем при всех $1 \le q \le \infty$

$$d_{2n}(A_H, L_q) = \lambda_{2n}(A_H, L_q) = d^{2n}(A_H, L_q) = \|(K_H * h_n\|_q,$$

где $L_q = L_q[0, 2\pi]$. В силу того, что функция $K_H * h_n$ найдена нами в явном виде (см. (4.8)), можно найти точные значения для n-поперечников рассматриваемого класса и их асимптотику при $n \to \infty$.

Теорема 4.8. *При всех* $1 \le q \le \infty$

$$d_{2n}(A_H, L_q) = \lambda_{2n}(A_H, L_q) = d^{2n}(A_H, L_q)$$
$$\begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda} I_{q1}(\lambda)\right)^{1/q} = \dfrac{8}{\pi}\left(2\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} + O\left(c^{-5Hn}\right), & \\ & 1 \le q < \infty, \\ \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda} = \dfrac{8}{\pi}e^{-Hn} + O\left(e^{-5Hn}\right) & q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa(e^{-4H})$.

При $q = \infty$ из теоремы 4.8, учитывая лемму 4.1, получаем

$$d_{2n}(A_H, L_\infty) = \lambda_{2n}(A_H, L_\infty) = d^{2n}(A_H, L_\infty)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{1}{\operatorname{ch}[(2m+1)Hn]}. \quad (4.27)$$

Эти равенства впервые были получены В.М. Тихомировым [**65**].

Обозначим через $BH^{\mathbb{R}}_\infty(\Delta_h)$ множество функций из $BH_\infty(\Delta_h)$, вещественных на единичной окружности $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В работе [**137**] (см. также [**89**]) было показано, что

$$d_{2n}(BH^{\mathbb{R}}_\infty(\Delta_h), L_q) = \lambda_{2n}(BH^{\mathbb{R}}_\infty(\Delta_h), L_q) = d^{2n}(BH^{\mathbb{R}}_\infty(\Delta_h), L_q)$$
$$= \inf_{B \in \mathcal{B}_{2n}(\Delta_h)} \|B\|_q,$$

где $L_q = L_q(S, \mu)$, $d\mu(e^{i\theta}) = d\theta$, а $\mathcal{B}_{2n}(\Delta_h)$ — множество произведений Бляшке для области Δ_h порядка $2n$ с нулями, лежащими на единичной окружности.

Напомним, что произведением Бляшке порядка n для области $\Omega \subset \mathcal{C}$ называется функция вида

$$B(z) = \sigma \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} P(z, \zeta_j)\right),$$

где $|\sigma| = 1$, а $P(z, \zeta_j)$ — комплексные функции Грина области Ω с особенностями в точках $\zeta_j \in \Omega$. Нетрудно убедиться, что это определение в случае, когда Ω — единичный диск, совпадает с данным ранее.

Обозначим через $\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H)$ множество функций из класса $\widetilde{H}_\infty(D_H)$, вещественных на вещественной оси. Задача вычисления поперечников для класса $B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H)$ с помощью отображения $z = e^{iw}$ сводится к соответствующей задаче для класса $BH^{\mathbb{R}}_\infty(\Delta_h)$, где $h = e^{-2H}$. Пользуясь равенством (4.14) и теоремой 4.2, получаем

Теорема 4.9. *Для $L_q := L_q[0, 2\pi]$ при всех $1 \le q \le \infty$ имеют место равенства*

$$d_{2n}\left(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q\right) = \lambda_{2n}\left(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q\right) = d^{2n}\left(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q\right)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\lambda}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda} I_{q0}(\lambda)\right)^{1/q} = 2\left(2\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} \\ \qquad\qquad + O\left(e^{-5Hn}\right), \quad 1 \le q < \infty, \\ \sqrt{\lambda}, \qquad\qquad q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-4Hn}\right)$.

§5. Некоторые точные значения гельфандовских и линейных поперечников для многомерных классов Харди и Бергмана

Положим для $0 < \rho < 1$

$$S_\rho := \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z| = \rho \,\}, \quad C_\rho := C(S_\rho).$$

В совместной работе автора и М.И. Стесина [**55**] были найдены гельфандовский и линейный N-поперечники для пары $(BH_2(B_n), C_\rho)$. В связи с этой работой В.М. Тихомировым было отмечено, что метод, использованный при нахождении этих поперечников, близок к методу, применяемому при доказательстве теоремы Р.С. Исмагилова [**27**] (см. также [**117**, стр. 93]). Оказалось, что, действительно, гельфандовский и линейный поперечники в более общей ситуации могут быть получены из теоремы, двойственной к теореме Р.С. Исмагилова.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ будем обозначать множество линейных непрерывных операторов из X в Y.

Докажем сначала следующее утверждение, являющееся аналогом предложения 8.8 из работы [**117**, стр. 33] (мы не можем непосредственно воспользоваться этим предложением в силу некоторого различия в определениях).

Предложение 5.1. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathcal{L}(H, X)$. Тогда*

$$d^N(T(BH), X) = \lambda_N(T(BH), X).$$

Доказательство. Пусть X^N — произвольное подпространство X коразмерности N и $x'_1, \ldots, x'_N \in X^*$ — образующие его функционалы. Обозначим через $e_1, \ldots, e_m$, $m \leq N$, ортонормированную систему в линейной оболочке $\operatorname{lin}\{T^* x'_1, \ldots, T^* x'_N\}$. Пусть

$$e_j = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} T^* x'_k, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Положим

$$y'_j := \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} x'_k, \quad P(y) := \sum_{j=1}^{m} \langle y'_j, y \rangle T e_j.$$

Имеем

$$P(Te) = \sum_{j=1}^{m} \langle y'_j, Te \rangle T e_j = \sum_{j=1}^{m} (e, T^* y'_j) T e_j = \sum_{j=1}^{m} (e, e_j) T e_j.$$

Обозначим через $z := e - \sum_{j=1}^{m} (e, e_j) e_j$. Для любого x'_k, $k = 1, \ldots, N$,

$$\langle x'_k, Tz \rangle = (z, T^* x'_k) = 0.$$

Следовательно, при всех $e \in BH$ $Tz \in X^N$, а кроме того, $\|z\| \leq \|e\| \leq 1$. Тем самым

$$\lambda_N(T(BH), X) \leq \sup_{e \in BH} \|Te - P(Te)\| = \sup_{e \in BH} \left\| T\left(e - \sum_{j=1}^{m} (e, e_j) e_j\right) \right\| \leq \sup_{z \in BH \cap X^N} \|Tz\|.$$

В силу произвольности подпространства X^N

$$\lambda_N(T(BH), X) \leq d^N(T(BH), X).$$

Теперь утверждение предложения вытекает из неравенства (4.19). Предложение доказано. □

Пусть H — по-прежнему гильбертово пространство, S — компакт, μ — неотрицательная мера на нем, удовлетворяющая условию $\mu(S) = 1$, и $T \in \mathcal{L}(H, C(S))$. Рассматривая оператор T как оператор из H в $L_2(S, \mu)$, предположим, что

$$T^* T \phi_j = \lambda_j \phi_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_{\geq} \ldots > 0$, а $\phi_1, \phi_2, \ldots$ образуют полную ортонормированную систему в образе оператора $T^* T$ (для выполнения этих условий достаточно, например, компактности оператора T).

Теорема 5.1. *Имеют место соотношения*

$$\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}\lambda_j} \le d^N(T(BH), C(S)) = \lambda_N(T(BH), C(S))$$

$$\le \sup_{z\in S}\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}|(T\phi_j)(z)|^2}.$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker} T$, то можно без ограничения общности считать, что $\phi_1, \phi_2, \dots$ образуют полную ортонормированную систему в H. Положим $\psi_j := T\phi_j$. Покажем, что при всех $z \in S$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j(z)|^2 \le \|T\|^2 \tag{5.1}$$

Пусть $z \in S$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда для $h := \sum_{j=1}^{m}\overline{\psi_j(z)}\phi_j \in H$ имеем

$$\|Th\|_\infty = \sup_{s\in S}\left|\sum_{j=1}^{m}\overline{\psi_j(z)}\psi_j(s)\right| \ge \sum_{j=1}^{m}|\psi_j(z)|^2 = \|h\|^2$$

(через $\|\cdot\|_\infty$ мы обозначаем норму в $C(S)$, а через $\|\cdot\|_2$ — норму в $L_2(S,\mu)$). Отсюда при $h \ne 0$

$$\|h\| \le \frac{\|Th\|_\infty}{\|h\|} \le \|T\|.$$

Следовательно, при любых $z \in S$ и $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{m}|\psi_j(z)|^2 \le \|T\|^2.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства (5.1).

Положим

$$h_z := \sum_{j=1}^{\infty}\overline{\psi_j(z)}\phi_j.$$

Нетрудно убедиться, что при всех $x \in H$ и $z \in S$

$$(Tx)(z) = (x, h_z).$$

Пусть L^N — некоторое подпространство в H коразмерности N и $e_1, \dots, e_N$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении $(L^N)^\perp$. Обозначим через g_z ортогональную проекцию h_z на L^N

$$g_z := h_z - \sum_{k=1}^{N}(h_z, e_k)e_k.$$

Для любого $z \in S$ такого, что $g_z \neq 0$, имеем

$$\sup_{x \in BH \cap L^N} \|Tx\|_\infty \geq \frac{\|Tg_z\|_\infty}{\|g_z\|} = \sup_{s \in S} \frac{|(g_z, h_s)|}{\|g_z\|} \geq \frac{|(g_z, h_z)|}{\|g_z\|} = \|g_z\|$$
$$= \sqrt{\|h_z\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(h_z, e_k)|^2}. \quad (5.2)$$

Дополним систему $e_1, \ldots, e_N$ до полной ортонормированной системы в H. Пусть имеет место разложение

$$e_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \phi_j, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$(e_k, h_z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \psi_j(z).$$

Из (5.2) получаем

$$\sup_{x \in BH \cap L^N} \|Tx\|_\infty \geq \sup_{z \in S} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(z)|^2 - \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \psi_j(z) \right|^2}$$
$$\geq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \psi_j \right\|_2^2} =: d. \quad (5.3)$$

Поскольку

$$(\psi_j, \psi_k) = (T\phi_j, T\phi_k) = (T^* T \phi_j, \phi_k) = \lambda_j (\phi_j, \phi_k),$$

то

$$d^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j - \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 \lambda_j.$$

Обозначив через $q_j := \sum_{k=1}^{N} |a_{kj}|^2$, в силу унитарности матрицы $\{a_{kj}\}$ получаем $0 \leq q_j \leq 1$ и $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 = N$. Так как $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — невозрастающая последовательность, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j \lambda_j \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j.$$

Тем самым

$$d^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j - \sum_{j=1}^{\infty} q_j \lambda_j \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j. \quad (5.4)$$

Пусть теперь Y^N — произвольное пространство коразмерности N в $C(S)$. Если $y_1',\dots,y_N' \in C(S)^*$ — функционалы, порождающие это пространство, то, положив $x_j := T^* y_j'$ (здесь под T^* мы понимаем оператор, сопряженный к T как к оператору из H в $C(S)$) и учитывая (5.3) и (5.4), будем иметь

$$\sup_{\substack{x\in BH\\ \langle y_j', Tx\rangle = 0\ j=1,\dots,N}} \|Tx\|_\infty = \sup_{\substack{x\in BH\\ (x,x_j)=0\ j=1,\dots,N}} \|Tx\|_\infty \geq \sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j}.$$

В силу произвольности Y^N это означает, что

$$d^N(T(BH), C(S)) \geq \sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j}.$$

Для оценки сверху рассмотрим линейный оператор

$$Py := \sum_{j=1}^{N} (y,\psi_j)\lambda_j^{-1}\psi_j.$$

При $y = Tx$ имеем

$$P(Tx) = \sum_{j=1}^{N} (Tx,\psi_j)\lambda_j^{-1}\psi_j = \sum_{j=1}^{N} (x,\phi_j)T\phi_j.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\lambda_N(T(BH), C(S)) &\leq \sup_{x\in BH} \|Tx - P(Tx)\|_\infty \\ &= \sup_{x\in BH} \left\| T\left(x - \sum_{j=1}^{N}(x,\phi_j)\phi_j\right)\right\| = \sup_{x\in BH}\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty}(x,\phi_j)\psi_j\right\| \\ &\leq \sup_{x\in BH}\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}|(x,\phi_j)|^2}\,\sup_{z\in S}\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}|\psi_j(z)|^2}.\end{aligned}$$

Применение предложения 5.1 завершает доказательство теоремы. □

Пусть H — гильбертово пространство функций, заданных на некотором множестве Ω. Функция $K(z,w)$, определенная на множестве $\Omega\times\Omega$, называется воспроизводящим ядром пространства H, если для любого $w\in\Omega$ $K(z,w)\in H$ и при всех $f\in H$

$$f(w) = (f(\cdot), K(\cdot,w))_H.$$

Для воспроизводящего ядра справедливо равенство

$$K(z,w) = \overline{K(w,z)}.$$

Пусть $E \in \Omega$ — компакт. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(E,\mu)$, где неотрицательная мера μ нормирована условием

$\mu(E) = 1$. Для $f \in H$ положим $Tf := f_{|E}$. Предположим, что $T \in \mathcal{L}(H, L_2(E, \mu))$. Тогда при всех $g \in L_2(E, \mu)$ имеем

$$(T^*g)(w) = ((T^*g)(\cdot), K(\cdot, w))_H = (g(\cdot), TK(\cdot, w))_{L_2(E,\mu)} \\ = \int_E g(z)\overline{K(z,w)}\, d\mu(z) = \int_E K(w,z)g(z)\, d\mu(z).$$

Тем самым для нахождения собственных функций и собственных значений оператора T^*T получаем уравнение

$$\int_E K(w,z)g(z)\, d\mu(z) = \lambda f(w). \tag{5.5}$$

Для классов аналитических функций в одномерном случае это уравнение исследовалось в работах [**90**], [**91**] (см. также [**117**, стр. 258]).

Следствие 5.1. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — полная ортонормированная система в H, являющаяся также ортогональной системой в $L_2(E, \mu)$, и, кроме того, $\lambda_j := \|\varphi_j\|^2_{L_2(E,\mu)}$ упорядочены по убыванию: $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots$. Тогда*

$$\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j} \le d^N(T(BH), C(E)) = \lambda_N(T(BH), C(E)) \\ \le \sup_{z \in E} \sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty} |\varphi_j(z)|^2}.$$

Доказательство. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — полная ортонормированная система в H, то для воспроизводящего ядра справедливо представление

$$K(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\varphi_j(w)}\varphi_j(z).$$

В силу ортогональности системы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ в $L_2(E, \mu)$ имеем

$$\int_E K(w,z)\varphi_j(z)\, d\mu(z) = \lambda_j \varphi_j(w).$$

Тем самым λ_j — собственные значения, а φ_j — собственные функции для уравнения (5.5). Остается воспользоваться теоремой 5.1. Следствие доказано. □

Пусть функция $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha z^\alpha \tag{5.6}$$

(здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс). Обозначим через $F_s(z)$ сумму членов $c_\alpha z^\alpha$ степенного ряда, у которых $|\alpha| = s$. Тогда степенной ряд (5.6), записанный в виде

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(z), \tag{5.7}$$

называется однородным разложением функции f. Радиальная производная порядка r для функции, имеющей однородное разложение (5.7), определяется равенством

$$\mathcal{R}^r f(z) := \sum_{s=r}^{\infty} \frac{s!}{(s-r)!} F_s(z).$$

Понятие радиальной производной было введено Рудиным [**124**] (см. также [**61**, стр. 111], [**94**]).

Обозначим через $H\mathcal{R}_2^r(B_n)$ класс функций f, голоморфных в B_n, для которых $\mathcal{R}^r f \in BH_2(B_n)$. Через $A\mathcal{R}_2^r(B_n)$ будем обозначать класс функций f, голоморфных в B_n, для которых $\mathcal{R}^r f \in BA_2(B_n)$.

Положим $N_m := \sum_{s=0}^{m-1} C_{n+s-1}^{n-1}$. Число N_m равно размерности пространства полиномов от n переменных степени не выше $m-1$.

Теорема 5.2. *При всех $0 < \rho < 1$ и $m \geq r \geq 0$*

$$d^{N_m}\left(H\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) = \lambda_{N_m}\left(H\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right)$$
$$= \rho^m \left(\frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{((m-r+s)!)^2 (n+m-1+s)!}{((m+s)!)^3} \rho^{2s} \right)^{1/2}.$$

При всех $0 < \rho < 1$ и $m \geq r \geq 1$

$$d^{N_m}\left(A\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) = \lambda_{N_m}\left(A\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right)$$
$$= \rho^m \left(\frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{((m-r+s)!)^2 (n+m+s)!}{((m+s)!)^3} \rho^{2s} \right)^{1/2}.$$

При всех

$$0 < \rho \leq \left(\frac{n}{n+m} \right)^{\frac{1}{2m}}$$

$$d^{N_m}\left(BA_2(B_n), C_\rho\right) = \lambda_{N_m}\left(BA_2(B_n), C_\rho\right)$$
$$= \rho^m \left(\frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+m+s)!}{(m+s)!} \rho^{2s} \right)^{1/2}$$
$$= \frac{\rho^m}{(1-\rho^2)^{(n+1)/2}} \left(C_{n+m}^m \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{1+s/m} C_n^s \rho^{2s} \right)^{1/2}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ пространство функций f, голоморфных в B_n, таких, что $(D^\alpha f)(0) = 0$, $|\alpha| = 0, \ldots, r-1$, и $\mathcal{R}^r f \in H_2(B_n)$. Это пространство становится гильбертовым, если ввести в нем скалярное произведение

$$(f, g) := (\mathcal{R}^r f, \mathcal{R}^r g)_{H_2}.$$

Тем самым, если

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=r}^{\infty} c_\alpha z^\alpha, \quad g(z) = \sum_{|\alpha|=r}^{\infty} d_\alpha z^\alpha,$$

то в силу ортогональности мономов и равенства

$$\|z^\alpha\|_{H_2}^2 = \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}$$

имеем

$$(f, g) = \sum_{|\alpha|=r}^{\infty} \left(\frac{|\alpha|!}{(|\alpha|-r)!}\right)^2 \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!} c_\alpha \overline{d}_\alpha.$$

Нетрудно убедиться, что ядро

$$K(z, w) = \sum_{|\alpha|=r}^{\infty} \left(\frac{(|\alpha|-r)!}{|\alpha|!}\right)^2 \frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!} \overline{w}^\alpha z^\alpha$$

является воспроизводящим для пространства $\mathcal{H}_0$. Рассмотрим пространство $L_2(S_\rho, \sigma_\rho)$, где σ_ρ — вероятностная борелевская мера на S_ρ, инвариантная относительно вращений. Очевидно, что мономы ортогональны в $L_2(S_\rho, \sigma_\rho)$. Положим для $|\alpha| \geq r$

$$\varphi_\alpha(z) := \frac{(|\alpha|-r)!}{|\alpha|!} \left(\frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}\right)^{1/2} z^\alpha.$$

Тогда функции $\varphi_\alpha(z)$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathcal{H}_0$ и ортогональную систему в $L_2(S_\rho, \sigma_\rho)$. Имеем

$$\|\varphi_\alpha\|_{L_2(S_\rho,\sigma_\rho)}^2 = \int_{S_\rho} |\varphi_\alpha(z)|^2 \, d\sigma_\rho(z) = \int_S |\varphi_\alpha(\rho\xi)|^2 \, d\sigma(\xi)$$
$$= \left(\frac{(|\alpha|-r)!}{|\alpha|!}\right)^2 \rho^{2|\alpha|}.$$

Число различных мономов z^α таких, что $|\alpha| = s$, равно C_{n+s-1}^{n-1}. Тем самым из следствия 5.1 получаем

$$\left(\sum_{s=m}^{\infty} \left(\frac{(s-r)!}{s!}\right)^2 C_{n+s-1}^{n-1} \rho^{2s}\right)^{1/2} \leq d^{N_m - N_r}\left(B\mathcal{H}_0, C(S_\rho)\right)$$
$$\leq \sup_{z \in S_\rho} \left(\sum_{|\alpha| \geq m}^{\infty} \left(\frac{(|\alpha|-r)!}{|\alpha|!}\right)^2 \frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!} \left|z^{2\alpha}\right|\right)^{1/2}.$$

Отсюда, используя равенство

$$\sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} \left| z^{2\alpha} \right| = |z|^{2s},$$

будем иметь

$$d^{N_m - N_r} \left(B\mathcal{H}_0, C(S_\rho) \right) = \left(\sum_{s=m}^{\infty} \left(\frac{(s-r)!}{s!} \right)^2 C_{n+s-1}^{n-1} \rho^{2s} \right)^{1/2}$$

$$= \rho^m \left(\frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{((m-r+s)!)^2)(n+m-1+s)!}{((m+s)!)^3} \rho^{2s} \right)^{1/2}.$$

Остается заметить, что $H\mathcal{R}_2^r(B_n) = B\mathcal{H}_0 + P_r$, где P_r — линейное пространство полиномов степени не выше r-1, имеющее размерность N_r, и, следовательно,

$$d^{N_m} \left(H\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho \right) = d^{N_m - N_r} \left(B\mathcal{H}_0, C(S_\rho) \right).$$

Аналогичное равенство очевидно выполняется и для линейного поперечника.

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathcal{A}_0$ функций f, голоморфных в B_n, таких, что $(D^\alpha f)(0) = 0$, $|\alpha| = 0, \dots, r-1$, и $\mathcal{R}^r f \in A_2(B_n)$, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(f, g) := (\mathcal{R}^r f, \mathcal{R}^r g)_{A_2}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю и учитывая равенство

$$\|z^\alpha\|_{A_2}^2 = \frac{n!\alpha!}{(n+|\alpha|)!},$$

получаем, что функции

$$\psi_\alpha(z) := \sqrt{\frac{n+|\alpha|}{n}} \varphi_\alpha(z)$$

образуют полную ортонормированную систему в $\mathcal{A}_0$ и ортогональную систему в $L_2(S_\rho, \sigma_\rho)$. Таким образом,

$$\|\psi_\alpha(z)\|_{L_2(S_\rho, \sigma_\rho)}^2 = \frac{n+|\alpha|}{n} \left(\frac{(|\alpha|-r)!}{|\alpha|!} \right)^2 \rho^{2|\alpha|} =: \lambda_{|\alpha|}.$$

Пусть $r \geq 1$ и $s \geq r$. Тогда

$$(n+s+1) \left(\frac{s+1-r}{s+1} \right)^2 \leq (n+s+1) \left(\frac{s}{s+1} \right)^2 \leq \frac{n+s+1}{s+1} s < n+s.$$

Тем самым

$$\lambda_{s+1} = \frac{n+s+1}{n} \left(\frac{(s+1-r)!}{(s+1)!} \right)^2 \rho^{2(s+1)} \leq \frac{n+s}{n} \left(\frac{(s-r)!}{s!} \right)^2 \rho^{2s} = \lambda_s.$$

При $r = 0$ (в этом случае класс $A\mathcal{R}_2^0(B_n)$ совпадает с классом $BA_2(B_n)$) величины $\lambda_s = \dfrac{n+s}{s}\rho^{2s}$, вообще говоря, не являются упорядоченными по убыванию. Однако можно убедиться, что при $\dfrac{n+m}{n}\rho^{2m} \le 1$ для любых $s \ge m$ и $q < m$ $\lambda_q \ge \lambda_s$. Далее доказательство проводится по той же схеме, что и для класса $A\mathcal{R}_2^r(B_n)$. Для доказательства последнего из равенств (5.8) воспользуемся функцией Φ_n, введенной в §2, и равенством (2.5). Имеем

$$\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+m+s)!}{(m+s)!}\rho^{2s} = \frac{1}{n!}\Phi_{n+1}(2m,\rho^2)$$
$$= (1-\rho^2)^{-n-1}C_{n+m}^n\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{1+s/m}C_n^s\rho^{2s}.$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь аналогичные задачи для классов Харди и Бергмана в единичном поликруге. Положим Set

$$U^n := \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1 \,\},$$
$$T^n := \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1 \,\},$$
$$T_\rho^n := \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \rho_1, \dots, |z_n| = \rho_n \,\},$$

где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ и $0 \le \rho_j < 1$, $j = 1, \dots, n$. Через $H_2(U^n)$ обозначим множество голоморфных в U^n функций, для которых

$$\|f\|_{H_2(U^n)} := \sup_{0<r<1}\left(\int_{T^n}|f(rz)|^2\,d\mu(z)\right)^{1/2} < \infty,$$

где $\mu(z)$ — нормированная мера Лебега на T^n. Через $A_2(U^n)$ будем обозначать множество голоморфных в U^n функций, для которых

$$\|f\|_{A_2(U^n)} := \left(\int_{U^n}|f(z)|^2\,d\omega(z)\right)^{1/2} < \infty,$$

где $\omega(z)$ — нормированная мера Лебега на U^n. Пространства $H_2(U^n)$ и $A_2(U^n)$ являются гильбертовыми пространствами с воспроизводящими ядрами

$$K_H(z,w) := \begin{cases}(1-z_1\overline{w}_1)^{-1}\dots(1-z_n\overline{w}_n)^{-1}, & H = H_2(U^n),\\ (1-z_1\overline{w}_1)^{-2}\dots(1-z_n\overline{w}_n)^{-2}, & H = A_2(U^n)\end{cases}$$

(подробнее см. [**60**], [**78**]).

Теорема 5.3. *Пусть величины $\rho^{2\alpha} = \rho_1^{2\alpha_1}\dots\rho_n^{2\alpha_n}$ упорядочены по убыванию*

$$\rho^{2\alpha^1} \ge \rho^{2\alpha^2} \ge \dots .$$

Тогда

$$d^N\left(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\right) = \lambda_N\left(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\right)$$
$$= \left((1-\rho_1^2)^{-1}\dots(1-\rho_n^2)^{-1} - \sum_{s=1}^{N}\rho^{2\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Пусть величины $k_\alpha\rho^{2\alpha}$, *где* $k_\alpha := (\alpha_1+1)\dots(\alpha_n+1)$, *упорядочены по убыванию*

$$k_{\alpha^1}\rho^{2\alpha^1} \geq k_{\alpha^2}\rho^{2\alpha^2} \geq \dots.$$

Тогда

$$d^N\left(BA_2(U^n), C(T^n_\rho)\right) = \lambda_N\left(BA_2(U^n), C(T^n_\rho)\right)$$
$$= \left((1-\rho_1^2)^{-2}\dots(1-\rho_n^2)^{-2} - \sum_{s=1}^{N}k_{\alpha^{(s)}}\rho^{2\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Мономы z^α образуют полную ортонормированную систему в $H_2(U^n)$, а также являются ортогональной системой в пространстве $L_2(T^n_\rho, \mu_\rho)$, где μ_ρ — нормированная мера Лебега в T^n_ρ. Кроме того,

$$\|z^\alpha\|^2_{L_2(T^n_\rho,\mu_\rho)} = \rho^{2\alpha}$$

и при $z \in T^n_\rho$ $|z^\alpha|^2 = \rho^{2\alpha}$. Из следствия 5.1 получаем

$$d^N\left(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\right) = \lambda_N\left(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\right) = \left(\sum_{s=N+1}^{\infty}\rho^{2\alpha^s}\right)^{1/2}.$$

В силу разложения

$$(1-\rho_1^2)^{-1}\dots(1-\rho_n^2)^{-1} = \sum_{|\alpha|\geq 0}\rho^{2\alpha}$$

получаем равенства (5.9). В случае класса $BA_2(U^n)$ доказательство аналогично. При этом используется разложение (см., например, [**77**, стр. 556])

$$(1-\rho_1^2)^{-2}\dots(1-\rho_n^2)^{-2} = \sum_{|\alpha|\geq 0}k_\alpha\rho^{2\alpha}. \quad (5.10)$$

Теорема доказана. □

Следствие 5.2. *Пусть* $\rho_1 = \dots = \rho_n = \rho$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда*

1) *при* $N_{m-1} < N \leq N_m$

$$d^N\left(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\right) = \lambda_N\left(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\right)$$
$$= \rho^{m-1}\left(N_m - N + C^{n-1}_{n+m-1}(1-\rho^2)^{-n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s}{1+s/m}C^s_{n-1}\rho^{2(s+1)}\right)^{1/2};$$

2) *при* $n \geq 2$ *и*

$$0 < \rho \leq m^{1/2} \left(\frac{m}{n} + 1\right)^{-n/2} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} d^N \big(BA_2(U^n), C(T^n_\rho)\big) &= \lambda_N \big(BA_2(U^n), C(T^n_\rho)\big) \\ &= \frac{\rho^m}{(1-\rho^2)^n} \left(C^{2n-1}_{2n+m-1} \sum_{s=0}^{2n-1} \frac{(-1)^s}{1+s/m} C^s_{2n-1} \rho^{2s} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу монотонного убывания величин $\rho^{2|\alpha|}$ при $|\alpha| \to \infty$ и того, что число различных мультииндексов α, для которых $|\alpha| = s$, равно C^{n-1}_{n+s-1}, из равенств (5.9) имеем при $N_{m-1} < N \leq N_m$

$$\begin{aligned} d^N \big(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\big) &= \lambda_N \big(BH_2(U^n), C(T^n_\rho)\big) \\ &= \left((1-\rho^2)^{-n} - \sum_{s=0}^{m-2} C^{n-1}_{n+s-1} \rho^{2s} - (N - N_{m-1}) \rho^{2(m-1)} \right)^{1/2} \\ &= \left((N_m - N) \rho^{2(m-1)} + \sum_{s=m}^{\infty} C^{n-1}_{n+s-1} \rho^{2s} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \sum_{s=m}^{\infty} C^{n-1}_{n+s-1} \rho^{2s} &= \rho^{2m} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+m-1+s)!}{(m+s)!} \rho^{2s} \\ &= \rho^{2m} \frac{1}{(n-1)!} \Phi_n(2m, \rho^2) \\ &= \rho^{2m} (1-\rho^2)^{-n} C^{n-1}_{n+m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{1+s/m} C^s_{n-1} \rho^{2s}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

получаем утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) докажем сначала, что при выполнении условия (5.11) для всех $|\beta| \geq m$ и $|\alpha| < m$ справедливо неравенство

$$k_\beta \rho^{2|\beta|} \leq k_\alpha \rho^{2|\alpha|}. \tag{5.13}$$

В силу монотонного убывания функции $y(x) := x(x/n+1)^{-n}$ при $x \geq 2$ и $n \geq 2$ имеем

$$\rho^2 \leq \max\{y(1), y(2)\} \leq 1/2.$$

Следовательно, при всех $s \geq 1$

$$(s+1)\rho^{2s} \leq s\rho^{2s-2}.$$

Тем самым для $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, выбрав любые $\beta_j \geq 1$, будем иметь

$$k_\beta \rho^{2|\beta|} \leq k_{\beta'} \rho^{2|\beta'|},$$

где $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_j - 1, \dots, \beta_n)$, а следовательно, $|\beta'| = |\beta| - 1$. Продолжая этот процесс, получаем β^*, для которого $|\beta^*| = m$ и

$$k_\beta \rho^{2|\beta|} \le k_{\beta^*} \rho^{2|\beta^*|} \le (m/n+1)^n \rho^{2m}.$$

С другой стороны, если $|\alpha| < m$, то вследствие монотонного убывания последовательности $\{s\rho^{2s-2}\}_1^\infty$ и выполнения условия (5.11) получаем

$$k_\alpha \rho^{2|\alpha|} \ge (|\alpha|+1)\rho^{2|\alpha|} \ge m\rho^{2m-2} \ge (m/n+1)^n \rho^{2m}.$$

Тем самым (5.13) доказано. Из теоремы 5.3 вытекает тогда, что

$$\begin{aligned} d^{N_m}\big(BA_2(U^n), C(T^n_\rho)\big) &= \lambda_{N_m}\big(BA_2(U^n), C(T^n_\rho)\big) \\ &= \left((1-\rho^2)^{-2n} - \sum_{|\alpha|=0}^{m-1} k_\alpha \rho^{2|\alpha|}\right)^{1/2} =: d. \end{aligned}$$

В силу (5.10) имеем

$$\sum_{|\alpha|=s} k_\alpha = C^{2n-1}_{2n+s-1}.$$

Отсюда аналогично равенствам (5.12) находим

$$d^2 = \sum_{s=m}^\infty C^{2n-1}_{2n+s-1}\rho^{2s} = \rho^{2m}(1-\rho^2)^{-2n} C^{2n-1}_{2n+m-1} \sum_{s=0}^{2n-1} \frac{(-1)^s}{1+s/m} C^s_{2n-1}\rho^{2s}.$$

Следствие доказано. □

Остановимся несколько подробнее на случае $n = 1$. Следуя Фишеру и Миччелли [**91**], рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ голоморфных в единичном круге D функций

$$f(z) = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s z^s,$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \gamma_s |a_s|^2 < \infty,$$

где $\{\gamma_s\}$ — последовательность неотрицательных чисел таких, что $\liminf\limits_{s\to\infty} \gamma_s^{1/s} \ge 1$. Положим $\Gamma := \{s : \gamma_s = 0\}$ и $r := \operatorname{card}\Gamma$ — число элементов в множестве Γ. Тогда пространство

$$\mathcal{H}_\Gamma := \left\{ f \in \mathcal{H} : f^{(j)}(0) = 0,\ j \in \Gamma \right\}$$

является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{s=0}^{+\infty} \gamma_s a_s \overline{b}_s,$$

где
$$f(z)=\sum_{s=0}^{+\infty}a_sz^s,\quad g(z)=\sum_{s=0}^{+\infty}b_sz^s.$$
Кроме того, в пространстве $\mathcal{H}_\Gamma$ имеется воспроизводящее ядро
$$K(z,w):=\sum_{s\notin\Gamma}\gamma_s^{-1}z^s\overline{w}^s.$$
Обозначим через H класс функций из $\mathcal{H}$, для которых $(f,f)\le 1$.

Теорема 5.4. *Пусть* $\gamma_0=\ldots=\gamma_{r-1}=0$ *и* $\gamma_j>0$ *при* $j\ge r$. *Предположим, что для* $0<\rho<1$ *и* $N\in\mathbb{N}$ *для всех* $s\ge N$ *и* $q<N$
$$\gamma_q^{-1}\rho^{2q}\ge\gamma_s^{-1}\rho^{2s}. \tag{5.14}$$
Тогда
$$d^N(H,C_\rho)=\lambda_N(H,C_\rho)=\rho^N\left(\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{N+s}^{-1}\rho^{2s}\right)^{1/2}.$$

Доказательство. В силу того, что
$$H=B\mathcal{H}_\Gamma+P_r,$$
где P_r — множество полиномов степени не выше $r-1$, имеем
$$d^N(H,C_\rho)=d^{N-r}(B\mathcal{H}_\Gamma,C_\rho)$$
(аналогичное равенство верно и для линейного поперечника). Функции
$$\varphi_s(z):=\gamma_s^{1/2}z^s,\quad s\ge r,$$
образуют полную ортонормированную систему в пространстве $\mathcal{H}_\Gamma$. Кроме того, φ_s образуют ортогональную систему в $L_2(S_\rho,\sigma_\rho)$ и
$$\|\varphi_s\|^2_{L_2(S_\rho,\sigma_\rho)}=\gamma_s^{-1}\rho^{2s}.$$
Теперь утверждение теоремы вытекает из следствия 5.1. Теорема доказана. □

Приведем примеры классов функций H, получающиеся при конкретном выборе последовательности γ_s (ряд из них приведен в работе [**91**]).

1. H_2^r — класс функций, аналитических в D, для которых $f^{(r)}\in BA_2$. В этом случае
$$\gamma_0=\ldots=\gamma_{r-1}=0,\quad \gamma_s=\left(\frac{s!}{(s-r)!}\right)^2,\quad s\ge r.$$
Отметим, что класс H_2^r совпадает с классом $H\mathcal{R}_2^r$ при $n=1$.

2. A_2^r — класс функций, аналитических в D, для которых $f^{(r)}\in BH_2$. В этом случае
$$\gamma_0=\ldots=\gamma_{r-1}=0,\quad \gamma_s=\left(\frac{s!}{(s-r)!}\right)^2(s-r+1),\quad s\ge r.$$

3. $A\mathcal{R}_2^r$ — здесь

$$\gamma_0 = \ldots = \gamma_{r-1} = 0, \quad \gamma_s = \left(\frac{s!}{(s-r)!}\right)^2 (s+1), \quad s \geq r.$$

Анализируя условия при которых выполняется (5.14), получим

Следствие 5.3. 1) *При всех* $0 < \rho < 1$, $r \geq 0$ *и* $N \geq r$

$$d^N(H_2^r, C_\rho) = \lambda_N(H_2^r, C_\rho) = \rho^N \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(N-r+s)!}{(N+s)!}\right)^2 \rho^{2s}\right)^{1/2}.$$

2) *При всех* $0 < \rho < 1$, $r \geq 1$ *и* $N \geq r$

$$d^N(A_2^r, C_\rho) = \lambda_N(A_2^r, C_\rho) = \rho^N \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(N-r+s)!}{(N+s)!}\right)^2 (N-r+s+1)\rho^{2s}\right)^{1/2},$$

$$d^N(A\mathcal{R}_2^r, C_\rho) = \lambda_N(A\mathcal{R}_2^r, C_\rho) = \rho^N \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(N-r+s)!}{(N+s)!}\right)^2 (N+s+1)\rho^{2s}\right)^{1/2}.$$

3) *При всех* $N \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \rho \leq (N+1)^{-\frac{1}{2N}}$

$$d^N(BA_2, C_\rho) = \lambda_N(BA_2, C_\rho) = \frac{\rho^N}{1-\rho^2}\left(1 + N(1-\rho^2)\right)^{1/2}. \qquad (5.15)$$

Эти же утверждения (кроме утверждения для пары (A_2^r, C_ρ)) могут быть получены и из теоремы 5.2 при $n = 1$.

Отметим, что при $r = 0$ из утверждения 1) следствия 5.3 вытекают равенства

$$d^N(BH_2, C_\rho) = \lambda_N(BH_2, C_\rho) = \frac{\rho^N}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

справедливые при всех $N \geq 0$ и $0 < \rho < 1$. Кроме того, заметим, что равенства (5.15) выполнены при всех $N \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \leq 1/\sqrt{2}$ в силу монотонного возрастания последовательности $(N+1)^{-\frac{1}{2N}}$.

Из доказательства теоремы 5.1 следует, что оптимальными линейными методами (т.е. линейными методами, погрешность которых совпадает со значениями соответствующих линейных поперечников) для поперечников, рассмотренных в теоремах 5.2, 5.3 и 5.4, являются отрезки рядов Тейлора. Некоторая специфика пространств Бергмана заключается в том, что для них эти отрезки не обязательно начинаются с первого слагаемого. Например, при вычислении N-поперечника для пары (BA_2, C_ρ) в одномерном случае оптимальный линейный метод будет иметь вид

$$Pf = \sum_{j=1}^{N} \frac{f^{(s_j)}(0)}{s_j!} z^{s_j},$$

где $s_1, \ldots, s_N$ — первые N максимальных значений из последовательности $\{(s+1)\rho^{2s}\}_0^\infty$. Подобный эффект наблюдался и при восстановлении на классе BA_2 по коэффициентам ряда Тейлора, заданным с погрешностью (см. пример 6.2 гл. I).

§6. Восстановление по бесконечной информации

Ранее мы в основном рассматривали ситуацию, когда информационный оператор сопоставлял каждой функции конечномерный вектор ее значений в некоторой системе точек из области определения. Тем не менее, уже встречались случаи, когда восстановление происходило по бесконечной информации, а именно, когда в качестве информационного оператора рассматривался след функции на некотором бесконечном множестве из области определения (см. §§2,3). Однако реально в оптимальном методе в этих случаях все равно использовалось лишь конечное число значений функции.

Здесь мы рассматриваем информационные операторы, задающиеся значениями восстанавливаемой функции в некоторой последовательности точек $\{z_n\}_{-\infty}^\infty$ или $\{z_n\}_1^\infty$ из области определения. Задачи оптимального восстановления по информационным операторам, указанного типа, активно изучались (в основном на классах гладких функций) в работах Сунь Юн-Шена и его учеников [**130**], [**98**], [**134**], [**133**], а также Г.Г.-Магарил-Ильяевым [**36**].

Напомним, что бесконечным произведением Бляшке называется функция вида

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} -\frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \cdot \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}, \tag{6.1}$$

где $z_n \in D$ (для $z_n = 0$ частное $-\overline{z}_n/|z_n|$ заменяется на единицу и в соответствии с этим будем считать, что $\operatorname{sign} 0 = 1$). Известно (см., например, [**13**, стр. 61]), что если $z_n \in D$ удовлетворяют условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty,$$

то произведение (6.1) сходится в D, $B(z) \in BH_\infty$ и $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду.

Лемма 6.1. *Пусть последовательности $\{z_j\}_{-\infty}^\infty$, $\{\nu_j\}_{-\infty}^\infty$ таковы, что $-1 < z_j < z_{j+1} < 1$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$,*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu_j (1 - |z_j|) < \infty, \tag{6.2}$$

и для

$$B(z) := \prod_{j=-\infty}^{\infty}\left(-\operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{1 - z_j z}\right)^{\nu_j}$$

существуют такие $a_j \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, *что*

$$|B(a_j)| \geq c > 0. \tag{6.3}$$

Тогда для любой функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$, *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{B(z)}\,dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-\operatorname{sign} z_j)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!}\left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)}\right]^{(\nu_j - 1)}_{\big|z=z_j},$$

где

$$\omega_j(z) := \prod_{k\neq j}\left(-\operatorname{sign} z_k \frac{z - z_k}{1 - z_k z}\right)^{\nu_k}.$$

Доказательство. Поскольку $H_p \subset H_1$ для всех $1 < p \leq \infty$, то достаточно рассмотреть случай $p = 1$. Без ограничения общности будем считать, что $z_j \neq 0$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ (в противном случае с помощью конформного преобразования единичного круга можно прийти к рассматриваемой ситуации). Из неравенства Фейера–Рисса (см. [**84**, стр. 46])

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx \leq \pi\|f\|_{H_1}$$

и того, что при всех $x \in (0, 1)$

$$\left|\frac{ix - z_j}{1 - z_j ix}\right| \geq |z_j|,$$

а следовательно,

$$|B(ix)| \geq |B(0)|,$$

вытекает существование интегралов

$$I_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_k}\frac{f(z)}{B(z)}\,dz, \quad k = 0, 1,$$

где $D_k := \{z \in D : (-1)^k \operatorname{Re} z > 0\}$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{B(z)}\,dz = I_0 + I_1.$$

Пусть для определенности $z_0 < 0 < z_1$. Докажем, что

$$I_0 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!}\left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)}\right]^{(\nu_j - 1)}_{\big|z=z_j} \tag{6.4}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\varphi \in (0, \pi/2)$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi}^{\varphi}|f(e^{i\theta})|\,d\theta < \varepsilon.$$

Тогда в силу хорошо известного равенства (см., например, [**15**, стр. 390])

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|\, d\theta = 0$$

существует такое $r_1 \in (0,1)$, для которого при всех $r \in (r_1, 1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|\, d\theta < \varepsilon.$$

Тем самым при всех $r \in (r_1, 1)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|\, d\theta < 2\varepsilon. \quad (6.5)$$

Из неравенства Фейера–Рисса следует существование $r_2 \in (0,1)$, для которого

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_2}^{1} |f(xe^{i\theta})|\, dx < \varepsilon \quad (6.6)$$

при $\theta = \pm\varphi$. Пусть

$$r_0 := \max\{r_1, r_2, (1-\sin\varphi)/(1+\sin\varphi)\}, \quad N := \max\{n : a_n \le r_0\}.$$

Тогда, положив

$$S_n := \{\, z \in D : |z| > a_n,\ |\arg z| < \varphi \,\}, \quad \Omega_n := D_0 \setminus S_n,$$
$$\Gamma_n := \partial D \cap \partial S_n, \quad \gamma_n := D \cap \partial S_n,$$

будем иметь для всех $n > N$

$$\begin{aligned} R_n &:= \left| I_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right]^{(\nu_j - 1)} \Bigg|_{z = z_j} \right| \\ &= \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_n} \frac{f(z)}{B(z)}\, dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{B(z)}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{B(z)}\, dz \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} |f(z)|\, |dz| + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \left| \frac{f(z)}{B(z)} \right| |dz| < \varepsilon + \frac{b_n}{2\pi} \int_{\gamma_n} |f(z)|\, |dz|, \end{aligned}$$

где

$$b_n := \sup_{z \in \gamma_n} |B(z)|^{-1}.$$

Нетрудно убедиться, что множество точек z, для которых

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right| < \left| \frac{a_n - z_j}{1 - z_j a_n} \right|,$$

при всех $j \geq n+1$ является кругом, лежащим внутри области S_n, а при всех $1 \leq j \leq n$ — кругом, лежащим вне области S_n. Отсюда следует, что при всех $z \in \gamma_n$ и $j \geq 0$

$$\left|\frac{z - z_j}{1 - z_j z}\right| \geq \left|\frac{a_n - z_j}{1 - z_j a_n}\right|.$$

Следовательно, для любого $z \in \gamma_n$ имеем

$$|B(z)| \geq \prod_{j=0}^{-\infty}\left|\frac{z - z_j}{1 - z_j z}\right| \prod_{j=1}^{\infty}\left|\frac{a_n - z_j}{1 - z_j a_n}\right| \geq |B(a_n)| \prod_{j=0}^{-\infty}|z_j|$$

$$\geq c\prod_{j=0}^{-\infty}|z_j| =: c_1.$$

Таким образом, $b_n \leq c_1^{-1}$ и в силу неравенств (6.5), (6.6)

$$R_n < \varepsilon + \frac{1}{2\pi c_1}\left(\int_{-\varphi}^{\varphi}|f(a_n e^{i\theta})|\,d\theta + \int_{r_0}^{1}|f(xe^{i\theta})|\,dx + \int_{r_0}^{1}|f(xe^{-i\theta})|\,dx\right)$$

$$< \varepsilon(1 + 4c_1^{-1}).$$

Тем самым равенство (6.4) доказано. Аналогично доказывается равенство

$$I_1 = \sum_{j=0}^{-\infty}\frac{1}{(\nu_j - 1)!}\left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)}\right]^{(\nu_j - 1)}_{\Big|z = z_j}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6.2. *Пусть последовательности* $\{z_j\}_1^\infty$, $\{\nu_j\}_1^\infty$ *таковы, что* $-1 < z_1 < z_2 < \ldots < 1$, $\nu_j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j(1 - |z_j|) < \infty,$$

и существуют такие $a_j \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 1, 2, \ldots$, *что для*

$$B(z) := \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z - z_j}{1 - z_j z}\right)^{\nu_j}$$

выполнено условие (6.3). *Тогда для любой функции* $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$, *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{B(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu_j - 1)!}\left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)}\right]^{(\nu_j - 1)}_{\Big|z = z_j},$$

где

$$\omega_j(z) := \prod_{k \neq j}\left(\frac{z - z_k}{1 - z_k z}\right)^{\nu_k}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.1.

С помощью доказанных лемм теми же методами, которые применялись в §1,3, можно получить оптимальные методы восстановления значений функций и ее производных по бесконечной информации, представляющей из себя значения функции и ее производных до порядка $\nu_j - 1$ в системах точек $\{z_j\}_{-\infty}^{\infty}$ или $\{z_j\}_1^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, указанным в этих леммах. Сформулируем некоторые из соответствующих результатов, рассматривая для простоты случай $\nu_j \equiv 1$.

Предложение 6.1. *Пусть система* $\{z_j\}_s^{\infty}$ *удовлетворяет условиям лемм* 6.1 *или* 6.2 ($s = -\infty$ *или* 1, *соответственно*) *при* $\nu_j \equiv 1$. *Тогда*

1) *для любого* $\xi \in D$ *метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=s}^{\infty} \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1 - z_j^2}{1 - z_j \xi} \left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - \bar{\xi} z_j} \right)^{(p-2)/p} f(z_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p, $1 \le p \le \infty$, *по информации* $If := \{f(z_j)\}_{j=s}^{\infty}$, *а для его погрешности справедливо равенство*

$$e(\xi, I, BH_p) = \frac{|B(\xi)|}{(1 - |\xi|^2)^{1/p}};$$

2) *для любого* $\xi \in (-1, 1)$ *метод*

$$u(\xi) \approx \frac{1 - \xi^2}{1 + B^2(\xi)} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1 - z_j^2}{(1 - z_j \xi)^2} u(z_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_{∞} *по информации* Iu, *а для его погрешности справедливо равенство*

$$e(\xi, I, Bh_{\infty}) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |B(\xi)|.$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta(\xi) = \frac{1-|\xi|^2}{2}\frac{B'(\xi)}{B(\xi)} + \frac{\overline{\xi}}{p},$$

$$D_1 = \left\{ \xi \in D : |\beta(\xi)| < \frac{p-1}{p} \right\}, \quad D_0 := D \setminus D_1,$$

$$b = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1}\beta(\xi), & \xi \in D_1, \\ \dfrac{e^{i\arg\beta(\xi)}}{|\beta(\xi)| + \sqrt{|\beta(\xi)|^2 - \dfrac{p-2}{p}}}, & \xi \in D_0, \end{cases}$$

$$a = \frac{\xi - \overline{b}}{1-\overline{\xi}\overline{b}}, \quad u_\xi(z) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_1, \\ \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}, & \xi \in D_0. \end{cases}$$

Предложение 6.2. *В условиях предложения* 6.1 *при всех* $\xi \in D$ *метод*

$$f'(\xi) \approx \sum_{j=s}^{\infty} c_j(\xi) f(z_j),$$

где

$$c_j(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{B(\xi)u_\xi(z_j)(1-z_j^2)}{\omega_j(z_j)u_\xi(\xi)(z_j-\xi)^2}\left(\dfrac{1-|\xi|^2}{1-z_j\overline{\xi}}\right)^{\frac{2(p-2)}{p}}\left(\dfrac{1-\overline{a}z_j}{1-\overline{a}\xi}\right)^{\frac{2(p-1)}{p}}, \\ \hfill \xi \notin \{z_j\}, \\ \dfrac{\omega_k(\xi)(1-z_j^2)}{\omega_j(z_j)(1-\overline{\xi}z_j)(\xi-z_j)}\left(\dfrac{1-\overline{\xi}z_j}{1-|\xi|^2}\right)^{\frac{2}{p}}, & \xi = z_k,\ k \neq j, \\ \dfrac{\omega_j'(\xi)}{\omega_j(\xi)} + \dfrac{2}{p}\dfrac{\overline{\xi}}{1-|\xi|^2}, & \xi = z_j, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p, $1 \le p \le \infty$, *по информации* $If := \{f(z_j)\}_s^\infty$, *а для его погрешности справедливо равенство*

$$e'(\xi, I, BH_p) = \begin{cases} \left|\dfrac{B(\xi)}{u_\xi(\xi)}\right| \dfrac{(1+|b|^2)^{(p-1)/p}}{(1-|\xi|^2)^{(p+1)/p}}, & \xi \notin \{z_j\}, \\ \dfrac{|\omega_k(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{(p+1)/p}}, & \xi = z_k. \end{cases}$$

Положим теперь

$$\beta(x) := \frac{1-\xi^2}{2}\frac{B'(\xi)}{B(\xi)}\frac{1-B^2(\xi)}{1+B^2(\xi)}, \quad \gamma(x) := \frac{2\beta(\xi)}{1-B^2(\xi)},$$

$$D_1 := \{\, \xi \in (-1,1) : |\beta(\xi)| < 1 \,\}, \quad D_0 := (-1,1) \setminus D_1,$$

$$b := P(\beta(\xi), \gamma(\xi)),$$

где $P(\beta,\gamma)$ определено равенством (3.12). Кроме того, пусть

$$B_1(z) := \begin{cases} B(z), & \xi \in D_0, \\ \dfrac{z-a}{1-az}B(z), & \xi \in D_1, \end{cases}$$

а за a и $u_\xi(z)$ сохраняются прежние обозначения.

Предложение 6.3. *В условиях предложения* 6.1 *при всех* $\xi \in (-1,1)$ *метод*

$$u'(\xi) \approx \frac{1}{1+B_1^2(\xi)} \sum_{j=s}^{\infty} c_j(\xi) u(z_j),$$

где

$$c_j(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{B(\xi)u_\xi(z_j)(1-z_j^2)(1-\xi^2)^2(1-az_j)^2}{\omega_j(z_j)u_\xi(\xi)(z_j-\xi)^2(1-z_j\xi)^2(1-a\xi)^2}, & \xi \notin \{z_j\}, \\ \dfrac{\omega_k(\xi)(1-z_j^2)}{\omega_j(z_j)(1-\xi z_j)(\xi - z_j)}, & \xi = z_k,\ k \neq j, \\ \dfrac{\omega_j'(\xi)}{\omega_j(\xi)}, & \xi = z_j, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_∞ *по информации* $Iu := \{u(z_j)\}_s^\infty$, *а для его погрешности справедливо равенство*

$$e'(\xi, I, Bh_\infty) = \frac{4}{\pi}\frac{|B_1'(\xi)|}{1+B_1^2(\xi)}.$$

Рассмотрим некоторые конкретные системы узлов. Пусть K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $k \in (0,1)$ и $k' = \sqrt{1-k^2}$, соответственно. Положим

$$\alpha_j := \operatorname{th}\left((2j-1)\frac{\pi K}{2K'}\right), \quad j = 0, \pm 1, \dots,$$
$$\beta_j := -\alpha_j^2,\ j = 1, 2, \dots.$$

Произведение Бляшке

$$B_0(z,k) := \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z+\alpha_j^2}{1+\alpha_j^2 z}$$

является экстремальной функцией в задаче Мию [**110**] о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ \|f\|_{C(-1,0)} \le \sqrt{k}}} |f(z_0)|$$

для $z_0 \in (0,1)$ и было найдено в работе [**97**] (см. также [**74**]). Оно может быть выражено через эллиптические функции в следующем виде

$$B_0(z,k) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2}{\pi}K'v + K, k\right), \quad z = -\,\mathrm{th}^2\, v.$$

Для произведения Бляшке по системе узлов $\{\alpha_j\}_{-\infty}^{\infty}$ имеем

$$B_1(z,k) := \prod_{j=-\infty}^{\infty} -\operatorname{sign}\alpha_j \frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j^2 - z^2}{1-\alpha_j^2 z^2} = B_0(-z^2, k).$$

Тем самым

$$B_1(z,k) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2}{\pi}K'\,\mathrm{arth}\, z + K, k\right).$$

Положив

$$a_j := \mathrm{th}\left(j\frac{\pi K}{K'}\right), \quad j = 0, \pm 1, \ldots,$$

будем иметь

$$B_1(a_j, k) = (-1)^j \sqrt{k}.$$

Отсюда следует, что системы $\{\alpha_j\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\beta_j\}_1^{\infty}$ удовлетворяют условиям лемм 6.1 и 6.2, соответственно, и к ним применимы предложения 6.1–6.3.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции и ее производной для классов $BH_\infty(D_H)$ и $Bh_\infty(D_H)$ по ее значениям в равномерной сетке с шагом $\tau > 0$ $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$. Определим $k \in (0,1)$ из условия

$$\frac{K'}{K} = \frac{4H}{\tau}.$$

В силу (4.13) получаем, что $k = \kappa(exp(-4\pi H/\tau))$. При конформном отображении полосы D_H в единичный круг, задаваемом функцией

$$w = \mathrm{th}\left[\frac{\pi}{4H}\left(z - \frac{\tau}{2}\right)\right], \tag{6.7}$$

система узлов $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ перейдет в систему узлов $\{\alpha_j\}_{-\infty}^{\infty}$. Из предложения 6.1 будем иметь

Следствие 6.1. *При всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ методы*

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{\pi}{K'}\,\mathrm{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{f(j\tau)}{\mathrm{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(x - j\tau)\right]}, \\ u(x) &\approx \frac{\pi}{K'} \frac{\mathrm{sn}\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)}{1 + k\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{f(j\tau)}{\mathrm{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(x - j\tau)\right]} \end{aligned} \tag{6.8}$$

являются оптимальными методами восстановления на классах $BH_\infty(D_H)$ и $Bh_\infty(D_H)$, соответственно, а для их погрешностей *справедливы равенства*

$$e(x, I, BH_\infty(D_H)) = \sqrt{k}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)\right|,$$

$$e(x, I, Bh_\infty(D_H)) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{k}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)\right|\right].$$

Займемся теперь восстановлением производной на классе $BH_\infty(D_H)$ в точке $x \in \mathbb{R}$. Всякую функцию $f \in BH_\infty(D_H)$ можно представить в виде

$$f(z) = \varphi(w(z)),$$

где $\varphi \in BH_\infty$, а w определено равенством (6.7). Тем самым задача сводится к восстановлению величины

$$\varphi'(w(x))w'(x) = \frac{\pi}{4H}\frac{\varphi'(w(x))}{\operatorname{ch}^2\left[\frac{\pi}{4H}\left(x - \frac{\tau}{2}\right)\right]},$$

где $\varphi \in BH_\infty$, по системе узлов $\{\alpha_j\}_{-\infty}^{\infty}$. Для того чтобы воспользоваться предложением 6.2, найдем область D_0. Имеем для $\xi = w(x)$

$$\beta := \beta(\xi) = \frac{1-\xi^2}{2}\frac{B_1'(\xi, k)}{B_1(\xi, k)} = \frac{K'}{\pi}\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right)}. \qquad (6.9)$$

Пользуясь преобразованием Гаусса (см. [**5**, стр. 283]), получаем

$$\beta(\xi) = \frac{2L'}{\pi}\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{L'}{H}x, l\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{L'}{H}x, l\right)},$$

где $l := \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$, а L и L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l и l', соответственно. Отсюда область D_0 состоит из тех точек $x \in \mathbb{R}$, для которых

$$\left|\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{L'}{H}x, l\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{L'}{H}x, l\right)}\right| \le \frac{2L'}{\pi}.$$

Из периодичности и монотонного возрастания функции

$$t(z) := \frac{\operatorname{sn}(z, l)}{\operatorname{cn}(z, l)}$$

вытекает, что

$$D_0 = \left\{x \in \mathbb{R} : \min_j |j\tau - x| \le \tau_0\right\}, \qquad (6.10)$$

где τ_0 — единственный корень уравнения

$$t\left(\frac{L'}{H}x\right)=\frac{2L'}{\pi}$$

при $x\in(0,\tau/2)$. Функцию, обратную к $t(z)$, можно записать в виде

$$z=\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+l'^2t^2)}}.$$

Поэтому

$$\tau_0=\frac{H}{L'}\int_0^{2L'/\pi}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+l'^2t^2)}}. \tag{6.11}$$

Сделав замену $t=L'y$, получаем

$$\tau_0=H\int_0^{2/\pi}\frac{dy}{\sqrt{(1+L'^2y^2)(1+l'^2L'^2y^2)}}. \tag{6.12}$$

Поскольку при возрастании τ k, а следовательно, и l монотонно возрастают, то из формулы (6.12) вытекает монотонное возрастание τ_0 при $\tau\in(0,\infty)$. Интересно, что в силу равенства

$$\lim_{l\to1}L'=\frac{\pi}{2}$$

(см. [**5**, стр. 116]) существует конечный предел

$$\lim_{\tau\to\infty}\tau_0=\frac{2H}{\pi}\log(1+\sqrt{2}).$$

Следствие 6.2. *Пусть β, D_0 и τ_0 определены равенствами* (6.9)–(6.11) *и $D_1:=\mathbb{R}\setminus D_0$. Тогда при всех $H>0$ и $\tau>0$ методы*

$$f'(r\tau)\approx\frac{\pi}{2H}\sum_{j\neq r}(-1)^{r+j}\frac{f(j\tau)}{\operatorname{sh}\left[(r-j)\dfrac{\pi\tau}{2H}\right]},$$

$$f'(x)\approx\frac{\pi^2}{2HK'}\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x,k\right)\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{c_j(x)}{\operatorname{sh}^2\left[\dfrac{\pi}{2H}(j\tau-x)\right]}f(j\tau),$$

где

$$c_j(x):=\begin{cases}\beta\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(j\tau-x)\right]+\operatorname{ch}\left[\dfrac{\pi}{2H}(j\tau-x)\right], & x\in D_0\setminus\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty},\\ \left(\beta\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{4H}(j\tau-x)\right]+\operatorname{ch}\left[\dfrac{\pi}{4H}(j\tau-x)\right]\right)^2, & x\in D_1,\end{cases}$$

являются оптимальными методами восстановления на классе $BH_\infty(D_H)$. Для погрешности оптимального метода при всех $x\in\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$e'(x,I,BH_\infty(D_H))=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{k}K'}{2H}, & x\in\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty},\\ \dfrac{\pi\sqrt{k}}{2H}\left|\operatorname{sn}\left(\dfrac{K'}{2H}x,k\right)\right|G(\beta), & x\in\mathbb{R}\setminus\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty},\end{cases}$$

где

$$G(\beta) := \begin{cases} |\beta|, & |\beta| \geq 1, \\ \dfrac{\beta^2+1}{2}, & |\beta| > 1. \end{cases}$$

Случай восстановления производной на классе $Bh_\infty(D_H)$ во многом подобен восстановлению на классе $BH_\infty(D_H)$. Положим

$$\beta_1 := \frac{K'}{\pi} \frac{\operatorname{cn}\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right) \operatorname{dn}\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)} \frac{1 - k\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)}{1 + k\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)}.$$

Область D_1 в этом случае состоит из тех точек $x \in \mathbb{R}$, для которых $|\beta_1(x)| < 1$. Применяя преобразование Гаусса, получим

$$\beta_1 = \frac{2L'}{\pi} \frac{\operatorname{cn}\left(\dfrac{L'}{H}x, l\right) \operatorname{dn}\left(\dfrac{L'}{H}x, l\right)}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{L'}{H}x, l\right)}. \tag{6.13}$$

Аналогично предыдущему случаю находим

$$D_0 = \left\{ x \in \mathbb{R} : \min_j |j\tau - x| \leq \tau_1 \right\}, \tag{6.14}$$

где

$$\tau_1 = \frac{H}{2\Lambda'} \int_0^{4L'/\pi} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+\lambda'^2 t^2)}}, \tag{6.15}$$

а Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $\lambda := \dfrac{2\sqrt{l}}{1+l}$ и $\lambda' := \sqrt{1-\lambda^2}$, соответственно. Для предельного значения τ_1 здесь имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau_1 = \frac{H}{\pi} \log(2+\sqrt{5}).$$

Следствие 6.3. *Пусть β_1, D_0 и τ_1 определены равенствами* (6.13)–(6.15) *и $D_1 := \mathbb{R} \setminus D_0$. Тогда при всех $H > 0$ и $\tau > 0$ методы*

$$u'(r\tau) \approx \frac{\pi}{2H} \sum_{j\neq r} (-1)^{r+j} \frac{u(j\tau)}{\operatorname{sh}\left[(r-j)\dfrac{\pi\tau}{2H}\right]},$$

$$u'(x) \approx \frac{\pi^2}{2HK'} \frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)}{1 + b^2(x) k \operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{c_j(x)}{\operatorname{sh}^2\left[\dfrac{\pi}{2H}(j\tau - x)\right]} u(j\tau),$$

где

$$b(x) := \begin{cases} 1, & x \in D_0, \\ \dfrac{\gamma(x)}{1 + \sqrt{(\gamma(x) - \beta_1)^2 + +1 - \beta_1^2}}, & x \in D_1, \end{cases}$$

$$\gamma(x) := \frac{2\beta_1}{1 - k \operatorname{sn}^2 \left(\dfrac{K'}{2H} x, k \right)},$$

$$c_j(x) := \begin{cases} \beta_1 \operatorname{sh} \left[\dfrac{\pi}{2H} (j\tau - x) \right] + \operatorname{ch} \left[\dfrac{\pi}{2H} (j\tau - x) \right], & x \in D_0 \setminus \{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}, \\ \left(b(x) \operatorname{sh} \left[\dfrac{\pi}{4H} (j\tau - x) \right] + \operatorname{ch} \left[\dfrac{\pi}{4H} (j\tau - x) \right] \right)^2, & x \in D_1, \end{cases}$$

являются оптимальными методами восстановления на классе $Bh_\infty(D_H)$. *Для погрешности оптимального метода при всех* $x \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$e'(x, I, Bh_\infty(D_H)) = \frac{\sqrt{k}}{H} \times \frac{\left| (1 - b^2(x)) \operatorname{sn} \left(\dfrac{K'}{2H} x, k \right) + b(x) \dfrac{2K'}{\pi} \operatorname{cn} \left(\dfrac{K'}{2H} x, k \right) \operatorname{dn} \left(\dfrac{K'}{2H} x, k \right) \right|}{1 + b^2(x) k \operatorname{sn} \left(\dfrac{K'}{2H} x, k \right)}.$$

Рассмотрим теперь задачу оптимальной интерполяции (см. §4) на некотором классе функций W, определенных на всей вещественной оси, для случая, когда информационные операторы являются значениями функций из этого класса в бесконечной системе узлов $\{\xi_j\}_{-\infty}^{\infty}$, подчиненной определенным условиям.

Обозначим через $\widetilde{\Theta}_\tau$, $\tau > 0$, системы узлов $\{\xi_j\}_{-\infty}^{\infty}$, для каждой из которых

1) существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$-n\tau \le \xi_{-n} < \xi_{-n+1} < \ldots < \xi_{n-1} < n\tau,$$

2) $\xi_{j+2n} = 2n\tau + \xi_j$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

В соответствии с общей постановкой задачи об оптимальной интерполяции (см. (4.1), (4.2)) положим

$$e(\tau, W) := \inf_{\xi \in \widetilde{\Theta}_\tau} \sup_{x \in \mathbb{R}} e(x, I_\xi, W), \tag{6.16}$$

где

$$e(x, I_\xi, W) := \inf_{S \colon I_\xi(W) \to \mathbb{R}} \sup_{f \in W} |f(x) - S(I_\xi f)|, \quad I_\xi f := \{f(\xi_j)\}_{-\infty}^{\infty}.$$

Систему узлов, на которой достигается нижняя грань в равенстве (6.16), будем называть оптимальной.

Теорема 6.1. *Имеют место равенства*

$$e(\tau, BH_\infty(D_H)) = (\kappa(\exp(-4\pi H/\tau)))^{1/2},$$

$$e(\tau, Bh_\infty(D_H)) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)\dfrac{\pi H}{\tau}\right]}. \tag{6.17}$$

Система $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ является оптимальной в обоих случаях, а соответствующие этой системе оптимальные методы имеют вид (6.8).

Доказательство. Пусть $\xi \in \widetilde{\Theta}_\tau$ и имеет период $2n\tau$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e(x, I_\xi, BH_\infty(D_H)) \ge \sup_{x\in[0,2\pi)} e(x, I_{\xi'}, B\widetilde{H}_\infty(D_{H'})),$$

где $\xi' = \left\{j\dfrac{\pi}{n}\right\}_{j=0}^{2n-1}$, $H' = \dfrac{\pi H}{n\tau}$. Отсюда, учитывая теорему 4.4, получаем

$$e(\tau, BH_\infty(D_H)) \ge e_{2n}([0,2\pi), B\widetilde{H}_\infty(D_{H'})) = (\kappa(\exp(-4H'n)))^{1/2} = (\kappa(\exp(-4\pi H/\tau)))^{1/2}.$$

С другой стороны, из следствия 6.1 для $\xi = \{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ имеем

$$e(\tau, BH_\infty(D_H)) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} e(x, I_\xi, BH_\infty(D_H)) = (\kappa(\exp(-4\pi H/\tau)))^{1/2}.$$

Для доказательства второго из равенств (6.17) рассмотрим класс функций A_H^∞, вещественных на вещественной оси, аналитических в полосе D_H и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re} f(z)| \le 1$. Предположим, что $\xi \in \widetilde{\Theta}_\tau$ и имеет период $2n\tau$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e(x, I_\xi, Bh_\infty(D_H)) \ge \sup_{x\in[0,2\pi)} e(x, I_\xi, A_H^\infty) \ge \sup_{x\in[0,2\pi)} e(x, I_{\xi'}, A_{H'}) \ge d_{2n}(A_{H'}, L_\infty).$$

В силу равенств (4.27) получаем

$$e(\tau, Bh_\infty(D_H)) \ge \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)\dfrac{\pi H}{\tau}\right]}.$$

Оценка сверху вытекает из следствия 6.1. Теорема доказана. □

Задача (6.16) была поставлена Сунь Юн-Шеном [**130**]. Им же [**131**], [**133**] для класса A_H^∞ доказано первое из равенств (6.17), оптимальность системы $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$ и получено описание оптимального метода для этой системы. Аналогично тому, как это было сделано для классов $Bh_\infty(Э_c)$ и $A_0(Э_c)$ (см. §4 п.1) можно показать, что сужения классов A_H^∞ и $Bh_\infty(D_H)$ на $\mathbb{R}$ совпадают. Тем самым для $Bh_\infty(D_H)$ нами получен (более простым путем) результат Сунь

Юн-Шена, а также предъявлен в явном виде оптимальный метод восстановления. Следует отметить, что схема рассуждений, применяемая Сунь Юн-Шеном для классов функций, представимых сверткой с ядром, не повышающим осцилляции, не распространяется на класс $BH_\infty(D_H)$.

Глава 3

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИИ

§1. Восстановление функций из H_∞ по приближенным значениям в оптимальных узлах. Константы Лебега

В работах [**44**], [**45**] для класса BH_∞ был построен оптимальный метод восстановления значения функции в произвольной точке $z \in D$ по информации $If := \{f(z_1), \ldots, f(z_n)\}$, $z_j \in D$. Этот результат легко вытекает из более общей теоремы 1.2 гл. II. Так как реально информация о значениях функции, как правило, бывает известна с некоторой погрешностью, то естественно рассмотреть задачу об оценке погрешности этого метода, если используется информация $\widetilde{I}f$ такая, что при всех $f \in BH_\infty$

$$\|\widetilde{I}f - If\|_q \le \delta,$$

где $\|\cdot\|_q$ — норма в пространстве l_q^n, $1 \le q \le \infty$.

В силу соображений, связанных с нормировкой, нам удобнее будет рассматривать эту задачу на классе $BH_\infty(D_k)$, где

$$D_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1/\sqrt{k} \right\}.$$

Тогда при всех $t \in \mathbb{R} \cap D_k$ оптимальный метод восстановления по информации $I_\tau f := \{f(t_1), \ldots, f(t_n)\}$, $\tau := (t_1, \ldots, t_n)$, где t_j — различные вещественные точки из D_k, имеет вид

$$f(t) \approx S_0 I_\tau f := \sum_{j=1}^{n} D_j(t) f(t_j), \tag{1.1}$$

где

$$D_j(t) := \frac{\omega_j(t)}{\omega_j(t_j)} \left(1 - kW_j^2(t)\right), \quad \omega_j(t) := \prod_{m \ne j} W_m(t),$$
$$W_j(t) = \frac{t - t_j}{1 - kt_j t}.$$

Для погрешности этого метода имеем

$$e(t, I_\tau, BH_\infty(D_k)) = k^{n/2}|W(t)|, \tag{1.2}$$

где
$$W(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{t-t_j}{1-kt_jt}. \tag{1.3}$$

Отметим, что формальная подстановка $k=0$ превращает метод (1.1) в интерполяционный многочлен Лагранжа. Иными словами, оптимальный метод восстановления при больших областях аналитичности близок к интерполяционному многочлену Лагранжа.

Положим
$$e_q(t,\tau,k,\delta):=\sup_{f\in BH_\infty(D_k)}\ \sup_{\substack{y\in l_q^n\\ \|I_\tau f-y\|_q\le\delta}}|f(t)-S_0y|.$$

Предложение 1.1. *При всех $t\in\mathbb{R}\cap D_k$ и $1\le q\le\infty$ имеет место равенство*
$$e_q(t,\tau,k,\delta)=e(t,I_\tau,BH_\infty(D_k))+\delta\|D(t)\|_p,$$
где $D(t):=(D_1(t),\dots,D_n(t))$, $1/p+1/q=1$.

Доказательство. Для любой функции $f\in BH_\infty(D_k)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ такого, что $\|I_\tau f-y\|_q\le\delta$, имеем
$$|f(t)-S_0y|\le|f(t)-S_0I_\tau f|+\sum_{j=1}^{n}|D_j(t)||f(t_j)-y_j|$$
$$\le e(t,I_\tau,BH_\infty(D_k))+\delta\|D(t)\|_p.$$
Отсюда
$$e_q(t,\tau,k,\delta)\le e(t,I_\tau,BH_\infty(D_k))+\delta\|D(t)\|_p.$$

Положим при $1\le p<\infty$
$$y_j:=-\delta\frac{|D_j(t)|^{p-1}\operatorname{sign}D_j(t)}{\|D(t)\|_p^{p-1}},\quad j=1,\dots,n,$$
а при $p=\infty$ и $\max\limits_{1\le j\le n}|D_j(t)|=|D_m(t)|$
$$y_j:=\begin{cases}-\delta\operatorname{sign}D_m(t), & j=m,\\ 0, & j\ne m.\end{cases}$$
Рассмотрим функцию $f(z):=k^{n/2}W(z)\operatorname{sign}W(t)$. В силу того, что $f\in BH_\infty(D_k)$ и $\|y\|_q=\delta$, учитывая (1.2), имеем
$$e_q(t,\tau,k,\delta)\ge|f(t)-S_0y|=e(t,I_\tau,BH_\infty(D_k))+\delta\|D(t)\|_p.$$
Предложение доказано. □

При $k\in(0,1)$ обозначим через
$$E_q(\tau,k,\delta):=\sup_{t\in[-1,1]}e_q(t,\tau,k,\delta). \tag{1.4}$$

Тогда из предложения 1.1 получаем

$$E_q(\tau,k,\delta) \le \max_{t\in[-1,1]} e(t, I_\tau, BH_\infty(D_k)) + \delta L_n(\tau,p,k), \tag{1.5}$$

где

$$L_n(\tau,p,k) := \max_{t\in[-1,1]} \|D(t)\|_p.$$

При $k=0$

$$L_n(\tau,p,0) = \Lambda_n(\tau,p),$$

где

$$\Lambda_n(\tau,p) := \max_{t\in[-1,1]} \|l(t)\|_p,$$

$$l(t) := (l_1(t),\ldots,l_n(t)), \quad l_j(t) := \prod_{m\ne j} \frac{t-t_m}{t_j-t_m}.$$

Величина $\Lambda_n(\tau,p)$, связанная с задачами интерполяции многочленами Лагранжа, хорошо известна в теории приближения и носит название константы Лебега. Исследованию констант Лебега (в основном при $p=1$) посвящено довольно много работ (см. **[87]**, **[86]**, **[118]**, **[119]**, **[95]**, **[128]**, **[85]** и цитируемую там литературу).

Как отмечалось в §4 гл. II (см. **[44]**, **[45]**) оптимальными узлами интерполяции при восстановлении по точной информации на классе BH_∞ для отрезка $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ являются узлы (2.4.5). Следовательно, на классе $BH_\infty(D_k)$ для отрезка $[-1,1]$ оптимальные узлы имеют вид

$$Z := \left\{ \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n}-1\right)K,k\right]\right\}_1^n.$$

Система Z играет роль, аналогичную роли чебышевской системы узлов

$$T := \left\{\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right\}_1^n$$

при интерполировании многочленом Лагранжа. Кроме того, при $k=0$ в силу равенств $K=\pi/2$ и $\operatorname{sn}(x,0)=\sin x$ система Z совпадает с системой T. Тем самым

$$L_n(Z,p,0) = \Lambda_n(T,p). \tag{1.6}$$

Рассмотрим некоторые оценки для величины $L_n(Z,p,k)$.

Теорема 1.1. *При всех $n\ge 1$, $2\le p\le\infty$ и $k\in[0,1)$ имеют место неравенства*

$$L_n(Z,p,k) \le \sqrt{1+\operatorname{sn}\left(\frac{n-1}{n}K,k\right)} < \sqrt{2}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть функция W определена равенствами (1.3) для системы точек Z. Тогда при фиксированном $t \in [-1, 1]$, применяя к функции

$$\frac{W^2(t)(1-kt^2)}{W^2(\xi)(1-kt\xi)(\xi-t)}$$

теорему о полной сумме вычетов, получаем при всех $k \in [0, 1)$ равенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(t) + 1 - k^{2n} W^4(t) = 0, \tag{1.8}$$

где

$$c_j(t) := W^2(t)(1-kt^2)\left[\frac{(1-k\xi t_j)^2}{\omega_j^2(\xi)(1-kt\xi)(\xi-t)}\right]'_{\big|\xi=t_j}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что

$$c_j(t) = -D_j^2(t) h_j(t),$$

где

$$h_j(t) = \frac{1+kW_j^2(t)}{1-kW_j^2(t)} - \frac{2\omega_j'(t_j)W_j(t)}{\omega_j(t_j)W_j'(t_j)(1-kW_j^2(t))}.$$

Тем самым равенство (1.8) может быть записано следующим образом

$$\sum_{j=1}^{n} D_j^2(t) h_j(t) = 1 - k^{2n} W^4(t).$$

Для системы узлов Z функция W с помощью первого главного преобразования n-ой степени эллиптических функций (см. [**5**, стр. 284]) может быть записана в параметрическом виде

$$W(t) = (-1)^{n+1} a_n \operatorname{sn}\left[(nx-1)M_n, \mu_n\right], \quad t = \operatorname{sn}[(x-1)K, k], \tag{1.9}$$

где M_n — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $\mu_n := k^n a_n^2$, а

$$a_n := \prod_{j=1}^{[n/2]} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2j-1}{n}K, k\right).$$

Поскольку $W(t) = W_j(t)\omega_j(t)$, то

$$\omega_j(t_j) = \frac{W'(t_j)}{W_j'(t_j)}, \quad \omega_j'(t_j) = \frac{W''(t_j)W_j'(t_j) - W'(t_j)W_j''(t_j)}{2\left[W_j'(t_j)\right]^2}.$$

Вычисляя значения $W'(t_j)$ и $W''(t_j)$ из представления (1.9), получаем

$$h_j(t) = \frac{1+kW_j^2(t)}{1-kW_j^2(t)} - \frac{(1-k)^2(1+kt_j^2)(t-t_j)(1-kt_jt)t_j}{(1-t_j)^2(1-k^2t_j^2)(1-kt_j^2)(1-kt^2)}.$$

Нетрудно убедиться, что при всех $t \in [-1, 1]$ и $k \in [0, 1)$ выполняются неравенства

$$(1-k)^2 \leq (1-kt^2)(1-kt_j^2), \quad (1+kt_j^2) \leq 1+k|t_j|,$$
$$t_j(t-t_j)(1-kt_jt) \leq |t_j|(1-|t_j|)(1-k|t_j|).$$

Отсюда

$$h_j(t) \geq 1 - \frac{|t_j|}{1+|t_j|} \geq \left[1 + \operatorname{sn}\left(\frac{n-1}{n}K, k\right)\right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\left[1 + \operatorname{sn}\left(\frac{n-1}{n}K, k\right)\right]^{-1} \sum_{j=1}^{n} D_j^2(t) \leq \sum_{j=1}^{n} D_j^2(t) h_j(t)$$
$$= 1 - k^{2n} W^4(t) \leq 1.$$

Следовательно,

$$\|D(t)\|_2 \leq \sqrt{1 + \operatorname{sn}\left(\frac{n-1}{n}K, k\right)} < \sqrt{2}.$$

Неравенства (1.7) следуют теперь из того, что $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_2$ при $2 \leq p \leq \infty$. Теорема доказана. □

При $2 \leq p \leq \infty$ в силу (1.6) и (1.7) получаем неравенства

$$\Lambda_n(T, p) \leq \sqrt{1 + \cos\frac{\pi}{2n}} < \sqrt{2},$$

которые для $p = 2$ были получены Фейером [**87**].

Из теоремы 1.1, учитывая (1.4) и (1.7), вытекает

Следствие 1.1. *При $1 \leq q \leq 2$, $k \in (0, 1)$ и $\delta \geq 0$ имеет место неравенство*

$$E_q(Z, k, \delta) \leq \sqrt{\mu_n} + \delta\sqrt{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $p = 1$.

Теорема 1.2. *При всех $n \geq 1$ и $k \in [0, 1)$ имеет место равенство*

$$L_n(Z, 1, k) = (1 + \alpha_n(k)) \frac{L}{nM_n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ctn} \frac{2j-1}{2n} L, \tag{1.10}$$

где

$$0 \leq \alpha_n(k) \leq \frac{2kK^2}{(1-k)^2 n^2}, \quad l := \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \operatorname{ctn} x := \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}$$

(здесь и далее зависимость эллиптических функций от модуля не отмечается, если он равен l), а L — полный эллиптический

интеграл первого рода для модуля l. Кроме того, $\alpha_n(k) = 0$ при

$$n \geq \frac{8k}{(1-k)^2} + 1. \tag{1.11}$$

Доказательство. Положим

$$t(u) := \left(\frac{2}{1+k}u - 1\right)\left(1 - \frac{2k}{1+k}u\right)^{-1}.$$

Сделав замену $t = t(u)$, получаем

$$L_n(Z,1,k) = \max_{u\in[0,1]} \sum_{j=1}^{n} |\widetilde{D}_j(u)|,$$

где

$$\widetilde{D}_j(u) := \frac{\widetilde{W}(u)(1-l^2u^2)}{\widetilde{W'}(u_j)(u-u_j)(1-l^2u_ju)}, \quad \widetilde{W}(u) := \prod_{j=1}^{n} \frac{u-u_j}{1-i^2u_ju},$$

а $t(u_j) = t_j$. С помощью преобразования Гаусса можно показать, что

$$u_j = \operatorname{sn}^2 \frac{2j-1}{2n}L, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Функцию $\widetilde{W}$, используя первое главное преобразование $2n$-ой степени, запишем в виде

$$\widetilde{W}(u) = (-1)^n \widetilde{a}_n \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2nt}{L}+1\right)M_n, \mu_m\right], \quad u = \operatorname{sn}^2 t,$$

$$\widetilde{a}_n := \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sn}^2 \frac{2j-1}{2n}L.$$

Отсюда, найдя $\widetilde{W'}(u_j)$ и применяя известные в теории эллиптических функций тождества, получаем

$$\widetilde{D}_j(\operatorname{sn}^2 t) = (-1)^{j+1}\frac{L}{2nM_n}\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2nt}{L}+1\right)M_n, \mu_m\right] \times \left(\operatorname{ctn}(t_j+t) + \operatorname{ctn}(t_j-t)\right). \tag{1.12}$$

Из неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} |\widetilde{D}_j(\operatorname{sn}^2 t)| \leq \frac{L}{2nM_n}\left|\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2nt}{L}+1\right)M_n, \mu_m\right]\right| \times \sum_{j=1}^{n} \left(|\operatorname{ctn}(t_j+t)| + |\operatorname{ctn}(t_j-t)|\right),$$

обращающегося в равенство при $t \in \left[-\frac{L}{2n}, \frac{L}{2n}\right]$, четности и периодичности функции, стоящей в правой части этого неравенства, с периодом L/n вытекает, что

$$\max_{u\in[0,1]}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(u)| = \max_{t\in\left[0,\frac{L}{2n}\right]}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(\operatorname{sn}^2 t)| = \max_{u\in[0,u_1]}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(u)|.$$

Поскольку при $u\in[0,u_1]$

$$|\widetilde{D}_j(u)| = \frac{\widetilde{\omega}_j(u)(1-l^2u^2)}{|\widetilde{W}'(u_j)|(1-l^2u_ju)^2},\quad \widetilde{\omega}_j(u) := \prod_{m\neq j}\frac{u_m-u}{1-i^2u_mu},$$

а каждый из множителей $(u_m-u)/(1-l^2u_ju)$ монотонно убывает в то время, как функция $(1-l^2u^2)/(1-l^2u_ju)^2$ возрастает, то

$$\max_{u\in[0,u_1]}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(u)| \le \frac{\widetilde{\omega}_j(0)(1-l^2u_1^2)}{|\widetilde{W}'(u_j)|(1-l^2u_ju_1)^2} = |\widetilde{D}_j(0)|\frac{1-l^2u_1^2}{(1-l^2u_ju_1)^2}.$$

В силу того, что

$$\frac{1-l^2u_1^2}{(1-l^2u_ju_1)^2} \le 1+\frac{2l^2u_nu_1}{(1-l^2u_nu_1)^2},$$

$$l^2u_nu_1 = l^2\operatorname{sn}^2\left(L-\frac{L}{2n}\right)\operatorname{sn}^2\frac{L}{2n} \le l^2\operatorname{sn}^4\frac{L}{2} = \frac{l^2}{(1+\sqrt{1-l^2})^2} = k,$$

и, кроме того,

$$l^2u_nu_1 \le l^2\operatorname{sn}^2\frac{L}{2n} \le \frac{l^2L^2}{4n^2} = \frac{kK^2}{n^2},$$

имеем

$$\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(0)| \le \max_{u\in[0,u_1]}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(u)| \le \left[1+\frac{2kK^2}{(1-k)^2n^2}\right]\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{D}_j(0)|.$$

Равенство (1.10) вытекает теперь из (1.12) при $t=0$.

Пусть выполнено неравенство (1.11). Для того чтобы доказать, что $\alpha_n(k)=0$, достаточно доказать убывание при $u\in[0,u_1]$ функций

$$\varphi_j(u) := \widetilde{\omega}_j(u)\frac{1-l^2u^2}{(1-l^2u_ju)^2}.$$

Из соотношений

$$(1-l^2u^2)\frac{\varphi_j'(u)}{\varphi_j(u)} = 2l^2\frac{u_j-u}{1-l^2u_ju} - (1-l^2u^2)\sum_{m\neq j}\frac{1-l^2u_m^2}{(u_m-u)(1-l^2u_mu)}$$

$$\le 2l^2u_j - \sum_{m\neq j}\frac{1-l^2u_m^2}{u_m} \le 2l^2-(n-1)(1-l^2)$$

вытекает, что $\varphi_j'(u)\le 0$ при $u\in[0,u_1]$ и

$$n \ge \frac{2l^2}{1-l^2}+1 = \frac{8k}{(1-k)^2}+1.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.2. *При выполнении условия* (1.11) *имеет место равенство*

$$E_\infty(Z,k,\delta)=\sqrt{\mu_n}+\delta L_n(Z,1,k).$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что если выполнено неравенство (1.11), то

$$L_n(Z,1,k)=\sum_{j=1}^{n}|D_j(1)|=\frac{L}{nM_n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ctn}\frac{2j-1}{2n}L. \tag{1.13}$$

В силу представления (1.9)

$$\max_{t\in[-1,1]}e(t,I_Z,BH_\infty(D_k))=e(1,I_Z,BH_\infty(D_k))=\sqrt{\mu_n}.$$

Отсюда и из предложения 1.1

$$\begin{aligned}E_\infty(Z,k,\delta)\ge e_\infty(1,Z,k,\delta)&=e(1,I_Z,BH_\infty(D_k))+\delta\|D(1)\|_1\\&=\max_{t\in[-1,1]}e(t,I_Z,BH_\infty(D_k))+\delta L_n(Z,1,k).\end{aligned}$$

Оценка сверху следует из неравенства (1.5). Следствие доказано. $\square$

Отметим, что при $l=0$ $\operatorname{ctn}x=\operatorname{ctg}x$. Поэтому равенства (1.13), учитывая (1.6), при $k=0$ переходят в равенства

$$\Lambda_n(T,1)=\sum_{j=1}^{n}|l_j(1)|=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{2j-1}{4n}\pi,$$

которые были доказаны в работах **[86]**, **[118]**.

Теорема 1.3. *При выполнении условия* (1.11) *имеет место равенство*

$$\begin{aligned}L_n(Z,1,k)=\frac{2}{\pi}\log n+A(k)+\sum_{s=1}^{m-1}\frac{a_s}{n^{2s}}\left[B_{2s}\left(2^{2s-1}-1\right)-4sH_{2s-1}(k)\right]\\+\frac{a_m}{n^{2m}}\rho_m(n,k)-h^{2n}\left[\frac{8}{\pi}\log n+B(k)\right]\theta_n(k),\end{aligned}$$

где

$$A(k):=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\log\frac{4}{(1+k)K}\right),$$

$\gamma = 0.5772\ldots$ — *постоянная Эйлера*, B_{2s} — *числа Бернулли*,

$$a_s := 4\frac{|B_{2s}|\,(2^{2s-1}-1)\,\pi^{2s-1}}{2^{2s}s(2s)!},$$

$$H_s(k) := \sum_{r=1}^{\infty}\frac{h^{2r-1}}{1+h^{2r-1}}(2r-1)^s, \quad h := e^{-\frac{\pi K'}{2K}},$$

$$-2\pi m H_{2m}(k) \le (-1)^{m+1}\rho_m(n,k) \le 2\pi m H_{2m}(k) + |B_{2m}|\left(2^{2m-1}-1\right),$$

$$B(k) := 4A(k) + \frac{2}{3}\pi^2 H_2(k) + \frac{\pi}{18}, \quad 0 \le \theta_n(k) \le 1.$$

Доказательство. В работе [**128**] (см. также [**95**]) для любой функции $f \in C^{2m}_{[0,2n]}$ было доказано равенство

$$\sum_{j=1}^{n} f(2j-1) = \frac{1}{2}\int_0^{2n} f(x)\,dx$$
$$+\sum_{s=1}^{m-1}\frac{B_{2s}}{(2s)!}\left(1-2^{2s-1}\right)\left(f^{(2s-1)}(2n)-f^{(2s-1)}(0)\right)+r_m(n), \quad (1.14)$$

где

$$r_m(n) = -\frac{2^{2m}}{(2m)!}\int_0^n f^{(2m)}(2x)y_m(x)\,dx,$$
$$y_m(x) := B^*_{2m}(x+1/2) - B^*_{2m}(1/2),$$

а B^*_{2m} — периодические функции Бернулли с периодом 1. При этом, если $f \in C^{2m+2}_{[0,2n]}$ и $f^{(2m+2)}(x)f^{(2m)}(x) \ge 0$ для всех $x \in [0,2n]$, то

$$r_m(n) = \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(1-2^{2m-1}\right)\left[f^{(2m-1)}(2n)-f^{(2m-1)}(0)\right]\theta, \quad 0 \le \theta \le 1. \quad (1.15)$$

Используя представление функции $\operatorname{sn} u$ через тета-функции и разложение последних в бесконечные произведения [**18**, стр. 214, 205, 209], после несложных преобразований приходим к равенству

$$\operatorname{ctn} u = \frac{d}{du}\log \operatorname{sn} u = \frac{\pi}{2L}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2L} - \frac{2\pi}{L}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h^r}{1+h^r}\sin\frac{\pi r u}{L}, \quad (1.16)$$

где $|\operatorname{Im} u| < L'$, а $h := e^{-\frac{\pi L'}{L}} = e^{-\frac{\pi K'}{2K}}$. Положим $f(x) := \operatorname{ctn}\frac{xL}{2n} - \frac{2n}{xL}$. Тогда $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

$$f_1(x) := \frac{\pi}{2L}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4n} - \frac{2n}{xL} = -\frac{1}{L}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2^{2r-1}(2r)!n^{2r-1}}x^{2r-1}, \quad |x| < 4n, \quad (1.17)$$

$$f_2(x) := -\frac{2\pi}{L}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h^r}{1+h^r}\sin\frac{\pi r x}{2n}.$$

Следовательно,

$$f^{(2s-1)}(0) = -\frac{|B_{2s}|\pi^{2s}}{L2^{2s}sn^{2s-1}} + (-1)^s \frac{4\pi^{2s}}{L2^{2s}n^{2s-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h^r}{1+h^r} r^{2s-1}.$$

Положим $g(x) := f_1(x+2n) = -\frac{\pi}{2L}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4n} - \frac{2n}{L(x+2n)}$. Из известного разложения для $\operatorname{tg} z$ получаем

$$f_1^{(2s-1)}(2n) = g^{(2s-1)}(0) = \frac{|B_{2s}|\pi^{2s}(1-2^{2s})}{L2^{2s}sn^{2s-1}} + \frac{(2s-1)!}{L2^{2s-1}n^{2s-1}}.$$

Таким образом,

$$f^{(2s-1)}(2n) = \frac{|B_{2s}|\pi^{2s}(1-2^{2s})}{L2^{2s}sn^{2s-1}} + \frac{(2s-1)!}{L2^{2s-1}n^{2s-1}} \\ + (-1)^s \frac{4\pi^{2s}}{L2^{2s}n^{2s-1}} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{h^r}{1+h^r} r^{2s-1}.$$

Теперь из (1.14) и того, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{2n} \left(\operatorname{ctn}\frac{xL}{2n} - \frac{2n}{xL}\right) dx = \frac{n}{L}\int_0^L \left(\operatorname{ctn} u - \frac{1}{u}\right) du = \frac{n}{L}\log\frac{\operatorname{sn} u}{u}\bigg|_0^L \\ = \frac{n}{L}\log\frac{1}{L},$$

следует равенство

$$\frac{L}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\operatorname{ctn}\frac{2j-1}{2n}L - \frac{2n}{(2j-1)L}\right) = \log\frac{1}{L} \\ + \frac{\pi}{2}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{a_s}{n^{2s}}\left[B_{2s}\left(2^{2s-1}-1\right) - 4sH_{2s-1}(k)\right] - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{B_{2s}\left(2^{2s-1}-1\right)}{2^{2s}sn^{2s}} \\ + r_m^{(1)}(n) + r_m^{(2)}(n),$$

где

$$r_m^{(j)}(n) = -\frac{L2^{2m}}{n(2m)!}\int_0^n f_j^{(2m)}(2x)y_m(x)\,dx, \quad j=1,2.$$

Поскольку для любого s $f_1^{(s)}(x) \le 0$ при $x \in [0,2n]$ (см. (1.17)), то из (1.15) имеем

$$0 \le (-1)^{m+1} r_m^{(1)}(n) \le \frac{\pi}{2}\frac{a_m}{n^{2m}}|B_{2m}|\left(2^{2m-1}-1\right) - \frac{|B_{2m}|\left(2^{2m-1}-1\right)}{2^{2m}mn^{2m}}.$$

Для оценки величины $r_m^{(2)}(n)$ заметим сначала, что для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\int_0^n y_m(x)\sin\frac{2\pi rx}{n}\,dx = 0. \tag{1.18}$$

Это равенство вытекает из периодичности подынтегральной функции с периодом n и ее нечетности. Итак,

$$f_2^{(2m)}(2x) = (-1)^{m+1} \frac{\pi^{2m+1}}{L2^{2m-1}n^{2m}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h^r}{1+h^r} r^{2m} \sin \frac{\pi r x}{n},$$

что вместе с (1.18) дает

$$\begin{aligned} &|r_m^{(2)}(n)| \\ &= \frac{2\pi^{2m+1}}{(2m)!n^{2m+1}} \left| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h^{2r-1}}{1+h^{2r-1}} (2r-1)^{2m} \int_0^n y_m(x) \sin \frac{\pi(2r-1)x}{n}\, dx \right| \\ &\qquad \le \frac{2\pi^{2m+1}}{(2m)!n^{2m+1}} H_{2m}(k) \int_0^n |y_m(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Из хорошо известных свойств многочленов Бернулли следует, что

$$(-1)^{m+1} y_m(x) \ge 0 \quad \text{и} \quad \int_0^n y_m(x)\, dx = n \frac{B_{2m}\,(2^{2m-1}-1)}{2^{2m-1}}.$$

Тем самым

$$|r_m^{(2)}(n)| \le \pi^2 m \frac{a_m}{n^{2m}} H_{2m}(k).$$

Воспользуемся равенством (см. [**128**])

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{2j-1} = \log n + 2\log 2 + \gamma + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}\,(2^{2s-1}-1)}{2^{2s} s n^{2s}} + \delta_m(n),$$

где

$$0 \le (-1)^{m+1} \delta_m(n) \le \frac{|B_{2m}|\,(2^{2m-1}-1)}{2^{2m} m n^{2m}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{L}{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ctn} \frac{2j-1}{2n} L &= \frac{L}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{ctn} \frac{2j-1}{2n} L - \frac{2n}{(2j-1)L} \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{2j-1} \\ &= \log n + \frac{\pi}{2} A(k) + \frac{\pi}{2} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{a_s}{n^{2s}} \left[B_{2s} \left(2^{2s-1}-1\right) - 4s H_{2s-1}(k) \right] \\ &\qquad + \frac{\pi}{2} \frac{a_m}{n^{2m}} \rho_m(n,k). \qquad (1.19) \end{aligned}$$

Обозначив левую часть равенств (1.19) через $A_n(k)$, при $m = 1$ получим

$$A_n(k) = \log n + \frac{\pi}{2} A(k) + \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{n^2} \rho_1(n,k) \le \log n + \frac{\pi}{8} B(k). \qquad (1.20)$$

Из теоремы 1.2 следует, что при выполнении условия (1.11),

$$L_n(Z,1,k) = M_n^{-1} A_n(k). \qquad (1.21)$$

Для полного эллиптического интеграла первого рода M_n справедливы равенства [**5**, стр. 277, 284]

$$\sqrt{\frac{2M_n}{\pi}} = 1 + 2\sum_{r=1}^{m} h_1^{r^2}, \quad h_1 := e^{-\frac{\pi M_n'}{M_n}} = h^{2n}.$$

Следовательно,

$$1 \le \sqrt{\frac{2M_n}{\pi}} \le 1 + \frac{2h_1}{1-h_1}. \tag{1.22}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (1.19)–(1.22). $\square$

При $k = 0$ из теоремы 1.3 вытекает представление для $\Lambda_n(T, 1)$, полученное в работе [**128**] (см. также [**85**])

$$\Lambda_n(T,1) = \frac{2}{\pi}\log n + \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \log\frac{8}{\pi}\right) + \sum_{s=1}^{m-1}\frac{a_s}{n^{2s}}B_{2s}\left(2^{2s-1}-1\right)$$
$$+\frac{a_m}{n^{2m}}\rho_m(n,0), \quad 0 \le (-1)^{m+1}\rho_m(n,0) \le |B_{2m}|\left(2^{2m-1}-1\right).$$

§2. Задача Хейнса–Уолша и оптимальное восстановление функций из H_∞ по неточным данным

В предыдущем параграфе оценивалась погрешность восстановления функции из $BH_\infty(D_k)$ фиксированным методом (оптимальным при отсутствии ошибок в исходных данных), когда использовались неточные данные о значениях функции. Из полученных результатов (следствие 1.2 и теорема 1.3) вытекает, что при фиксированной погрешности в исходных данных δ и числе точек n, в которых измеряются значения восстанавливаемой функции, стремящемся к бесконечности, погрешность оцениваемого метода растет как $\delta\dfrac{2}{\pi}\log n$. Это делает неприменимым исследуемый метод к восстановлению функций, заданных с погрешностью, при больших n.

Здесь мы рассмотрим задачу о нахождении оптимального метода восстановления при наличии погрешностей в исходных данных. В качестве информационного оператора I будем рассматривать оператор, сопоставляющий каждой функции из BH_∞ ее след на множестве $E \subset D$

$$If := f\big|_E.$$

Напомним (см. §4 гл. I), что погрешностью оптимального восстановления значения функции $f \in BH_\infty$ в точке $z_0 \in D \setminus E$ по информационному оператору I, заданному с погрешностью δ в норме пространства $C(E)$, называется величина

$$e(z_0, E, \delta) := \inf_{S\colon C(E)\to\mathbb{C}}\ \sup_{f\in BH_\infty}\ \sup_{\substack{y\in C(E)\\ \|f-y\|_{C(E)}\le\delta}} |f(z_0) - Sy|,$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Из теоремы 4.2 гл. I следует, что имеет место равенство

$$e(z_0, E, \delta) = \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ |f(z)| \le \delta,\ z \in E}} |f(z_0)|. \tag{2.1}$$

Экстремальная задача (2.1) для $E = (-1, 0)$ известна как задача Мию [**110**] (точнее, Хейнс [**96**] редуцировал задачу Мию к задаче (2.1) для $E = (-1, 0)$). Для $E = \{z \in D : |z| \le r\}$, $0 < r < 1$, как указывает Хейнс [**97**], задача была поставлена Уолшем. Хейнс [**97**] изучал также задачу (2.1) для $E = [a, b] \subset (-1, 1)$. Более общие задачи подобного типа изучались С. Я. Хавинсоном [**74**].

Для задачи (2.1) характерным является эффект "очистки", когда решение совпадает с решением аналогичной задачи для множества $E_1 \subset E$, состоящем из конечного или дискретного множества точек. С точки зрения восстановления этот эффект означает, что из всех значений восстанавливаемой функции на E достаточно знать ее значения на E_1, а информация о значениях в точках множества $E \setminus E_1$ является лишней.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество таких $E_1 \subset E$, для которых решение задачи (2.1) для E и E_1 совпадают. Порядком информативности множества E при заданных z_0 и δ будем называть величину

$$\operatorname{In}(z_0, E, \delta) := \inf_{E_1 \subset \mathcal{E}} \operatorname{card} E_1,$$

а множества, на которых достигается эта нижняя грань, назовем полными информативными системами.

В этом параграфе мы исследуем задачу Хейнса–Уолша (2.1) для замкнутого множества $E \subset (-1, 1)$, строим оптимальный метод восстановления и указываем алгоритм нахождения полной информативной системы.

Будем в дальнейшем считать, что $0 < \delta < 1$, так как случай $\delta = 0$ рассматривался в §1 гл. II, а случай $\delta \ge 1$ тривиален.

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset (-1, 1)$ — замкнутое множество, $0 < \delta < 1$ и $z_0 \in (-1, 1) \setminus E$. Тогда*

1) *экстремальная функция в задаче* (2.1)*, нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, существует, единственна и имеет вид*

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1), \quad \lambda = 1 \text{ или } 1; \tag{2.2}$$

2) *функция* (2.2)*, нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, является экстремальной в задаче* (2.1) *тогда и только тогда, когда при всех $z \in E$ $|f^*(z)| \le \delta$ и найдутся точки $x_1 < \ldots < x_m$, $x_j \in E$, такие,*

что

$$f^*(x_j) = \begin{cases} (-1)^{p+j}\delta, & j = 1, \ldots, p, \\ (-1)^{p+j+1}\delta, & j = p+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $0 \le p \le m$ *таково, что* $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$ $(x_0 := -1,\ x_{m+1} := 1)$, *а* $\lambda = (-1)^{p+m}$. *При этом* $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = m$, *а точки* $x_1, \ldots, x_m$ *являются полной информативной системой.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.1. *Положим*

$$B_1(z) := e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}, \quad B_2(z) := e^{i\beta} \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z},$$

где $\alpha_j, \beta_j \in D$, *а* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Пусть разность* $\Phi := B_1 - B_2$ *обращается в нуль в* l *точках на единичной окружности* $|z| = 1$. *Тогда если* $B_1 \not\equiv B_2$, *то число нулей* m *(с учетом кратности) функции* Φ *в круге* D *удовлетворяет неравенству*

$$m \le \frac{n + k - l}{2}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\Phi(z) = p(z) \biggl(\prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{\alpha}_j z) \prod_{j=1}^{k} (1 - \overline{\beta}_j z) \biggr)^{-1},$$

где

$$p(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^{k} (1 - \overline{\beta}_j z) - e^{i\beta} \prod_{j=1}^{k} (z - \beta_j) \prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{\alpha}_j z).$$

При всех $z \ne 0$

$$\overline{p(1/\overline{z})} = -e^{-i(\alpha+\beta)} p(z) z^{-(n+k)}. \tag{2.5}$$

В силу того, что $p(z)$ является полиномом степени не выше $n + k$, справедливо представление

$$p(z) = C z^p \prod_{j=1}^{s} (z - a_j)^{k_j}, \quad p + \sum_{j=1}^{s} k_j \le n + k,$$

где $a_1, \ldots, a_s$ различны и не равны нулю. Из равенства (2.5) имеем

$$\overline{C} z^{-p} \prod_{j=1}^{s} (z^{-1} - \overline{a}_j)^{k_j} = -e^{-i(\alpha+\beta)} z^{-(n+k)} C z^p \prod_{j=1}^{s} (z - a_j)^{k_j}.$$

Отсюда получаем

$$z^{n+k} \prod_{j=1}^{s} (z - \overline{a}_j^{\,-1})^{k_j} = z^{2p + \sum_{j=1}^{s} k_j} \prod_{j=1}^{s} (z - a_j)^{k_j}.$$

Следовательно, $n+k=2p+\sum_{j=1}^{s}k_j$ и, если a_j — нуль $p(z)$ кратности k_j, то $\overline{a}_j^{-1}$ также нуль кратности k_j. Пусть r — число нулей функции $\Phi(z)$, а следовательно, и функции $p(z)$, лежащих в D и отличных от нуля. Тогда

$$p+2r+l\leq p+\sum_{j=1}^{s}k_j=n+k-p.$$

Из последнего соотношения, учитывая, что общее число нулей в D равно $p+r$, получаем неравенство (2.4). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть* $-1<a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<b_3<1$. *Тогда*

1) *если* $z_0\in(b_2,a_3)$ *и*

$$f(z)=\frac{z-\alpha_1}{1-\alpha_1 z}\frac{z-\alpha_2}{1-\alpha_2 z}, \tag{2.6}$$

где $\alpha_1,\alpha_2\in(b_1,a_2)$, *то существует функция* $g\in BH_\infty$, *для которой*

$$|g(z)|\leq|f(z)|,\ z\in[a_j,b_j],\ j=1,2,3,\quad |g(z_0)|>|f(z_0)|; \tag{2.7}$$

2) *если* $z_0\in(b_1,a_2)$ *и у функции* f, *определенной равенством* (2.6), $\alpha_1,\alpha_2\in(b_2,a_3)$ *то существует функция* $g\in BH_\infty$, *для которой выполнены неравенства* (2.7);

3) *если* $z_0\in(b_1,a_2)$ *и*

$$f(z)=\frac{z-\alpha}{1-\alpha z},\quad \alpha\in(b_1,a_2),$$

то существует функция $g\in BH_\infty$, *для которой*

$$|g(z)|\leq|f(z)|,\ z\in[a_j,b_j],\ j=1,2,\quad |g(z_0)|>|f(z_0)|.$$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Предположим, что $\alpha_1<\alpha_2$. Положим $z_1:=b_2$, $z_2:=a_3$,

$$A_j=f(z_j),\quad A_j(\beta)=A_j\frac{1-\beta z_j}{\beta-z_j},\quad j=1,2.$$

Покажем, что при $\beta\in\mathbb{R}$, достаточно близких к единице, существуют $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}$, близкие к α_1, α_2, такие, что

$$\frac{z_j-\gamma_1}{1-\gamma_1 z_j}\frac{z_j-\gamma_2}{1-\gamma_2 z_j}=A_j(\beta),\quad j=1,2. \tag{2.8}$$

Равенства (2.8) эквивалентны системе

$$z_j\left(A_j(\beta)-1\right)p+\left(1-A_j(\beta)z_j^2\right)q=A_j(\beta)-z_j^2,\quad j=1,2,$$

где $p=\gamma_1+\gamma_2$, $q=\gamma_1\gamma_2$. Можно убедиться, что определитель этой системы при $\beta\to1$ стремится к величине, отличной от нуля. Следовательно, при β, достаточно близких к единице, значения p и q будут определены и близки к значениям $\alpha_1+\alpha_2$ и $\alpha_1\alpha_2$. В силу того, что $\alpha_1\neq\alpha_2$, при β, достаточно близких к единице, $p^2-4q>0$. Таким образом, γ_1, γ_2 будут вещественны и близки к α_1,

α_2. Выберем $\beta \in (b_3, 1)$ так, чтобы $\gamma_1, \gamma_2 \in (b_1, a_2)$ и рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{z-\gamma_1}{1-\gamma_1 z}\frac{z-\gamma_2}{1-\gamma_2 z}\frac{\beta - z}{1-\beta z}.$$

Вследствие выбора γ_1, γ_2 разность $g(z) - f(z)$ обращается в нуль при $z = b_2, a_3, -1$. Из леммы 2.1 следует, что в круге D у этой разности лишь два нуля b_2 и a_3 (оба кратности единица). Следовательно, $g(z) - f(z) \leq 0$ при $z \in [a_j, b_j]$, $j = 1, 2, 3$, и $g(z) - f(z) > 0$ при $z \in (b_2, a_3)$. Из того, что $\gamma_1, \gamma_2 \in (b_1, a_2)$, а $\beta \in (b_3, 1)$, вытекает неравенство $g(z) > 0$ при $z \in [a_j, b_j]$, $j = 1, 2, 3$. Тем самым неравенства (2.7) для функции g доказаны.

Пусть теперь $\alpha_1 = \alpha_2$. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) := \frac{f(z) - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 f(z)}.$$

Она может быть записана в виде

$$f_1(z) = \frac{z-\widetilde{\alpha}_1}{1-\widetilde{\alpha}_1 z}\frac{z-\widetilde{\alpha}_2}{1-\widetilde{\alpha}_2 z},$$

где

$$\widetilde{\alpha}_1 := \frac{\alpha_1 + \varepsilon}{1+\varepsilon\alpha_1}, \quad \widetilde{\alpha}_2 := \frac{\alpha_1 - \varepsilon}{1-\varepsilon\alpha_1}.$$

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ будут выполнены неравенства $b_1 < \widetilde{\alpha}_1 < \widetilde{\alpha}_2 < a_2$. Следовательно, в силу доказанного найдется функция $g_1 \in BH_\infty$ такая, что

$$0 < g_1(z) \leq f_1(z), \ z \in [a_j, b_j], \ j = 1, 2, 3, \quad g_1(z_0) > f_1(z_0). \tag{2.9}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{g_1(z) + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 g_1(z)}.$$

Из неравенств (2.9) и того, что

$$f(z) := \frac{f_1(z) + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 f_1(z)},$$

следует справедливость неравенств (2.9) для функций g и f, а тем самым справедливость соотношений (2.7) для рассматриваемого случая.

Доказательство утверждения 2) проводится аналогично.

Докажем утверждение 3). Предположим, что $\alpha \leq z_0$. Положим

$$\gamma := \frac{a_2 - A}{1 - A a_2}, \quad A := \frac{a_2 - \alpha}{1-\alpha a_2}\frac{1-\beta a_2}{\beta - a_2}.$$

В силу того, что $\gamma \to \alpha - 0$ при $\beta \to 1 - 0$, можно выбрать $\beta \in (b_2, 1)$ так, чтобы $\gamma \in (b_1, \alpha)$. Рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{z-\gamma}{1-\gamma z}\frac{\beta - z}{1-\beta z}.$$

Вследствие выбора γ разность $g(z)-f(z)$ обращается в нуль при $z=a_2,-1$. Из леммы 2.1 следует, что в круге D у этой разности лишь один нуль a_2. Следовательно, $f(z)-g(z)\geq 0$ при $z\in[a_2,1)$ и $f(z)-g(z)\leq 0$ при $z\in(-1,a_2]$. Так как $g(z)>0$ при $z\in(\gamma,b_2)$, имеем

$$|g(z)|\leq|f(z)|,\ z\in[a_2,b_2],\quad |g(z_0)|>|f(z_0)|.$$

Неравенство $|g(z)|\leq|f(z)|$, $z\in[a_1,b_1]$, следует из того, что $f(z)\leq g(z)<0$ при $z\in[a_1,b_1]$.

Случай $\alpha>z_0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. □

Обозначим через B_0 класс функций из BH_∞, вещественных на интервале $(-1,1)$.

Лемма 2.3. *Пусть* $-1=:x_0<x_1<\ldots<x_m<x_{m+1}:=1$. *Тогда*

1) *если функция* $f\in B_0$, *удовлетворяющая условиям*

$$f(x_j)=\delta_j^{(0)},\quad j=1,\ldots,m, \tag{2.10}$$

единственна, то она имеет вид

$$f(z)=\lambda\prod_{j=1}^{k}\frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z},\quad \alpha_j\in D,$$

где $k<m$, *а* $\lambda=1$ *или* -1;

2) *если множество функций из* B_0, *удовлетворяющих условиям* (2.10), *содержит более одной функции, то оно содержит функцию вида*

$$g_0(z)=(-1)^{m+p}\prod_{j=1}^{m}\frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z},\quad \alpha_j\in D,\quad 0\leq p\leq m, \tag{2.11}$$

которая может быть получена из рекуррентных соотношений

$$g_{k-1}(z)=\left[\frac{z-x_k}{1-x_k z}g_k(z)+\delta_k^{(k-1)}\right]\left[1+\delta_k^{(k-1)}\frac{z-x_k}{1-x_k z}g_k(z)\right]^{-1}, \tag{2.12}$$

при $k=m,\ldots,1$, *где* $g_m(z):=(-1)^{m+p}$,

$$\delta_k^{(j)}:=\frac{1-x_jx_k}{x_k-x_j}\frac{\delta_k^{(j-1)}-\delta_j^{(j-1)}}{1-\delta_j^{(j-1)}\delta_k^{(j-1)}},\quad k=j+1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,m-1; \tag{2.13}$$

3) *если функция* $g_0\in B_0$ *имеет вид* (2.11), *то для любого* $0\leq p\leq m$, *любой функции* $g\in B_0$, *удовлетворяющей условиям*

$$\begin{gathered}(-1)^{j+p}(g(x_j)-g_0(x_j))\leq 0,\quad j=1,\ldots,p,\\ (-1)^{j+p+1}(g(x_j)-g_0(x_j))\leq 0,\quad j=p+1,\ldots,m,\end{gathered} \tag{2.14}$$

и любого $z^* \in (x_p, x_{p+1})$ справедливо неравенство

$$g(z^*) \le g_0(z^*).$$

Доказательство. Для того чтобы существовала функция $f \in B_0$, удовлетворяющая условиям (2.10), необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

$$|\delta_1^{(0)}| < 1, \ldots, |\delta_j^{(j-1)}| < 1, \quad |\delta_{j+1}^{(j)}| = 1, \quad \delta_{j+1}^{(j)} = \ldots = \delta_m^{(j)}; \tag{2.15}$$

$$|\delta_1^{(0)}| < 1, \ldots, |\delta_m^{(m-1)}| < 1. \tag{2.16}$$

В случае выполнения условий (2.15) функция f единственна и получается из формул (2.12) при $k = j, \ldots, 1$, где $g_j(z) := \delta_{j+1}^{(j)}$, а $f(z) = g_0(z)$. В случае выполнения условий (2.16) функция f не единственна. Все такие функции и только такие функции получаются из формул (2.12), где $g_m(z)$ — произвольная функция из B_0, а $f(z) = g_0(z)$. Эти утверждения очевидным образом вытекают из соответствующих утверждений для класса BH_∞ (см. [**71**, стр. 344]).

Для доказательства первых двух утверждений леммы остается доказать, что для функции

$$g(z) := \frac{B_k(z) + \alpha}{1 + \alpha B_k(z)}, \quad \alpha \in (-1, 1),$$

где $B_k \in B_0$ и имеет вид

$$B_k(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z}, \quad \beta_j \in D,$$

а $\lambda = 1$ или -1, справедливо представление

$$g(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}, \quad \alpha_j \in D.$$

Последнее нетрудно установить, пользуясь равенством

$$\overline{B_k(1/\overline{z})} = B_k^{-1}(z).$$

Перейдем к доказательству утверждения 3). Пусть существует более одной функции из класса B_0, удовлетворяющей равенствам (2.10). Положим $\varphi(t, z) := g_0(z)$, где g_0 определяется из равенств (2.12) при $g_m(z) \equiv t$. Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \prod_{j=1}^{m} \frac{z - x_j}{1 - x_j z} \left(1 - \left(\delta_j^{(j-1)}\right)^2\right) \left(1 + \delta_j^{(j-1)} \frac{z - x_j}{1 - x_j z} g_j(z)\right)^{-2}.$$

Таким образом, при всех $z \in (x_p, x_{p+1})$ функция $\varphi(t, z)$ принимает максимальное значение для $t \in [-1, 1]$ в точке $t = (-1)^{m+p}$. Следовательно, среди всех функций из класса B_0, удовлетворяющих равенствам (2.10) (если существует более одной такой функции), максимальное значение в точке $z^* \in (x_p, x_{p+1})$ принимает функция вида (2.12).

Предположим, что для некоторой функции $g \in B_0$, удовлетворяющей условиям (2.14), в которых $g_0 \in B_0$ и имеет вид (2.11), при некотором $z^* \in (x_p, x_{p+1})$ выполнено неравенство $g(z^*) > g_0(z^*)$. Покажем, что разность $\Phi(z) := g(z) - g_0(z)$ при $z \in (-1, 1)$ имеет не менее m нулей. Положим $u_j := x_j$, $j = 1, \ldots, p$, $u_{p+1} := z^*$, $u_j := x_{j-1}$, $j = p+2, \ldots, m+1$. Тогда $(-1)^{j+p}\Phi(u_j) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m+1$. Если

$$\Phi(u_k) \neq 0, \quad \Phi(u_{k+1}) = \ldots = \Phi(u_{k+s}) = 0, \quad \Phi(u_{k+s+1}) \neq 0, \quad (2.17)$$

то $\Phi(u_k)$ и $(-1)^{s+1}\Phi(u_{k+s+1})$ имеют одинаковые знаки. Поэтому число нулей разности Φ в интервале (u_k, u_{k+s+1}) имеет ту же четность, что и число $s+1$. Из (2.17) следует, что число нулей в интервале (u_k, u_{k+s+1}) есть по крайней мере $s+1$. Если $\Phi(u_1) = \ldots = \Phi(u_{k-1}) = 0$, $\Phi(u_k) \neq 0$ или $\Phi(u_{m-k+2}) \neq 0$, $\Phi(u_{m-k+3}) = \ldots = \Phi(u_{m+1}) = 0$, то на промежутке $[u_1, u_k)$ или, соответственно, $(u_{m-k+2}, u_{m+1}]$ число нулей есть по крайней мере $k-1$. Тем самым доказано, что функция Φ имеет не менее m нулей в интервале $(-1, 1)$.

Если множество функций из класса B_0, принимающих в точках x_j значения $g(x_j)$, состоит лишь из одной функции g, то, как было показано,

$$g(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z}, \quad \beta_j \in D,$$

где $k < m$. Из леммы 2.1 следует, что число нулей функции Φ в круге D должно быть меньше m.

Если множество функций из класса B_0, принимающих в точках x_j значения $g(x_j)$, состоит более, чем из одной функции, то в нем содержится функция вида

$$g_1(z) = (-1)^{m+p} \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z}, \quad \beta_j \in D,$$

для которой $g_1(z^*) \geq g(z^*) > g_0(z^*)$. Следовательно, разность $\Phi_1 := g_1 - g_0$ имеет не менее m нулей в интервале $(-1, 1)$. По лемме 2.1 число нулей функции Φ_1 в круге D меньше m (имеется два корня $z = \pm 1$ на окружности $|z| = 1$). Полученные противоречия доказывают утверждение 3) леммы. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. 1. Из теоремы 4.7 работы **[74]** следует, что при сделанных предположениях относительно множества E экстремальная функция в задаче (2.1) существует, единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и имеет вид

$$f^*(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{m} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z}, \quad \alpha_j \in D.$$

Докажем, что все нули f^* вещественны. Рассмотрим функцию

$$g(z) := \prod_{j\neq k} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z} \frac{z-\overline{\alpha}_k}{1-\alpha_k z}.$$

Поскольку при $z \in (-1,1)$

$$\left|\frac{z-\overline{\alpha}_k}{1-\alpha_k z}\right| = \left|\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\right|,$$

то g — также экстремальная функция, а следовательно, $\overline{\alpha}_k = \alpha_k$.

2. Пусть функция f^*, определенная равенством (2.2) и нормированная условием $f^*(z_0) > 0$ является экстремальной в задаче (2.1). Из теоремы 6.1 работы **[74]** следует, что найдутся точки $u_1 < \ldots < u_N$, $u_j \in E$, для которых $|f^*(u_j)| = \delta$, $j = 1,\ldots,N$, и решения задачи (2.1) для множеств E и $E_1 := \{u_1,\ldots,u_N\}$ совпадают. Положим $u_0 := -1$, $u_{N+1} := 1$. Пусть $0 \le s \le N$ таково, что $z_0 \in (u_s, u_{s+1})$. Покажем, что $f^*(z)$ не имеет нулей при $z \in (u_s, u_{s+1})$. Пусть при некотором j $\alpha_j \in (u_s, u_{s+1})$. Введем следующие обозначения:

$$a_1 := (\min(u_1, z_0, \alpha_j) - 1)/2, \quad b_1 := (\max(z_0,\alpha_j) + \max(u_s, a_1))/2,$$
$$b_2 := (\max(u_N, z_0, \alpha_j) + 1)/2,$$
$$a_2 := (\max(z_0,\alpha_j) + \min(u_{s+1}, b_2))/2.$$

Поскольку $E_1 \subset [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2]$ и $\alpha_j, z_0 \in (b_1,a_2)$, то в силу леммы 2.2 найдется функция $g \in BH_\infty$ такая, что

$$|g(z)| \le \left|\frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}\right|,\ z \in E_1, \quad |g(z_0)| > \left|\frac{z_0-\alpha_j}{1-\alpha_j z_0}\right|. \tag{2.18}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) := g(z) \prod_{k\neq j} \frac{z-\alpha_k}{1-\alpha_k z}.$$

Из (2.18) имеем

$$|f_1(z)| \le \delta,\ z \in E_1, \quad |f_1(z_0)| > |f^*(z_0)|, \tag{2.19}$$

т.е. f^* не является экстремальной функцией. Полученное противоречие показывает, что в интервале (u_s, u_{s+1}) нет нулей функции f^*.

Покажем теперь, что между любыми двумя нулями функции f^* найдется по крайней мере одна точка из множества E_1. Пусть $\alpha_i \le \alpha_j$ и в интервале (α_i,α_j) нет точек множества E_1. Тогда найдется k, $0 \le k \le N$, такое, что $u_k < \alpha_i \le \alpha_j < u_{k+1}$. Очевидно, что $k \neq s$, так как на интервале (u_s, u_{s+1}) нет нулей функции f^*. Пусть $k < s$. Положим

$$a_1 := (\min(u_1, \alpha_i) - 1)/2, \quad b_1 := (\max(u_k, a_1) + \alpha_i)/2,$$
$$a_2 := (\alpha_j + u_{k+1})/2, \quad b_2 := (u_s + z_0)/2,$$
$$b_3 := (\max(u_N, z_0) + 1)/2, \quad a_3 := (z_0 + \min(u_{s+1}, b_3))/2.$$

Тогда $E_1 \subset [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup [a_3, b_3]$, $\alpha_i, \alpha_j \in (b_1, a_2)$, а $z_0 \in (b_2, a_3)$. По лемме 2.2 найдется функция $g \in BH_\infty$ такая, что

$$|g(z)| \le \left| \frac{z - \alpha_i}{1 - \alpha_i z} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z} \right|, \ z \in E_1, \quad |g(z_0)| > \left| \frac{z_0 - \alpha_i}{1 - \alpha_i z_0} \frac{z_0 - \alpha_j}{1 - \alpha_j z_0} \right|.$$

Положим

$$f_1(z) := g(z) \prod_{r \ne i,j} \frac{z - \alpha_r}{1 - \alpha_r z}.$$

Для функции $f_1(z)$ выполнены неравенства (2.19), что противоречит экстремальности f^*. Аналогично рассматривается случай $k > s$.

Итак, доказано, что все нули функции f^* простые и между любыми двумя найдется хотя бы одна точка множества E_1.

Пусть нули функции f^* упорядочены по возрастанию: $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ и $z_0 \in (\alpha_p, \alpha_{p+1})$, $0 \le p \le m$ ($\alpha_0 := -1$, $\alpha_{m+1} := 1$). Поскольку в интервале (u_s, u_{s+1}) нет нулей функции f^*, то $\alpha_p \le u_s < z_0 < u_{s+1} \le \alpha_{p+1}$. Положим $x_p := u_s$, $x_{p+1} := u_{s+1}$. В каждом интервале (α_k, α_{k+1}), $k = 1, \ldots, p-1$, (α_{k-1}, α_k), $k = p+2, \ldots, m$, найдется точка из множества E_1, которую обозначим через x_k. Нетрудно видеть, что в точках $x_1, \ldots, x_m$ будут выполнены равенства (2.3). Равенство $\lambda = (-1)^{m+p}$ вытекает из нормировки $f^*(z_0) > 0$.

Пусть есть функция вида (2.2) такая, что $|f^*(z)| \le \delta$, $z \in E$, и существуют точки $x_1 < \ldots < x_m$, $x_j \in E$, удовлетворяющие условию (2.3), где $0 \le p \le m$ таково, что $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$, а $\lambda = (-1)^{m+p}$. Рассмотрим задачу (2.1) для $E_1 := \{x_1, \ldots, x_m\}$. Из 1) следует, что экстремальная функция в этой задаче принадлежит классу B_0, а из п. 3 леммы 2.3 вытекает ее совпадение с f^*. Поскольку

$$\sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ |f(z)| \le \delta, \ z \in E}} |f(z_0)| \le \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ |f(z)| \le \delta, \ z \in E_1}} |f(z_0)| = f^*(z_0)$$

и $f^*(z) \le \delta$, $z \in E$, то f^* является экстремальной функцией в задаче (2.1) и для множества E. Поэтому $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \le m$. Для любого $F \subset E$, $\operatorname{card} F < m$, решение экстремальной задачи (2.1) есть произведение Бляшке порядка меньше m и в силу единственности экстремальной функции не может совпадать с f^*. Тем самым $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = m$ и $x_1, \ldots, x_m$ — полная информативная система. Теорема доказана. $\square$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления при условии, что найдена полная информативная система (алгоритм нахождения полных информативных систем будет рассмотрен несколько ниже).

Теорема 2.2. *Пусть $x_1 < \ldots < x_m$ — полная информативная система для множества $E \subset D$ при заданных $0 < \delta < 1$ и $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$, $0 \le p \le m$ ($x_0 := -1$, $x_{m+1} := 1$). Тогда метод*

$$f(z_0) \approx \sum_{j=1}^{m} c_j(z_0) f(x_j),$$

где

$$c_j(z) := \frac{P(z)(1-z^2)}{P'(x_j)(z-x_j)(1-x_j z)}, \quad P(z) := q_0^{-2}(z) \prod_{j=1}^{m} (z-x_j)(1-x_j z),$$

а q_0 определяется из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} q_{k-1}(z) = (1-x_k z) q_k(z) + \delta_k^{(k-1)} (z-x_k) p_k(z), \\ p_{k-1}(z) = (z-x_k) p_k(z) + \delta_k^{(k-1)} (1-x_k z) q_k(z), \quad k = m, \ldots, 1, \end{gathered}$$

в которых $q_m(z) \equiv 1$, $p_m(z) \equiv (-1)^{m+p}$ и $\delta_k^{(k-1)}$ определены равенствами (2.13) при

$$\delta_j^{(0)} = \begin{cases} (-1)^{p+j}\delta, & j = 1, \ldots, p, \\ (-1)^{p+j+1}\delta, & j = p+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.20}$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞ по значениям на множестве E, заданным с погрешностью δ в норме пространства $C(E)$, а для его погрешности справедливо равенство

$$e(z_0, E, \delta) = \frac{p_0(z)}{q_0(z)}. \tag{2.21}$$

Доказательство. В силу того, что $x_1, \ldots, x_m$ — полная информативная система, решение задачи (2.1) для множеств E и $E_1 := \{x_1, \ldots, x_m\}$ совпадают. Кроме того, из теоремы 2.1 следует, что экстремальная функция в этой задаче, нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, имеет вид (2.2), где $\lambda = (-1)^{m+p}$, и удовлетворяет равенствам (2.3). Из п. 2) леммы 2.3 вытекает справедливость равенства

$$f^*(z) = \frac{p_0(z)}{q_0(z)}.$$

Тем самым соотношение (2.21) доказано.

Построим оптимальный метод восстановления. Прежде всего заметим, что поскольку экстремальная функция f^* имеет вид (2.2), а p_0 и q_0 — полиномы степени m, то

$$p_0(z) = C(-1)^{m+p}\prod_{j=1}^{m}(z-\alpha_j), \quad q_0(z) = C\prod_{j=1}^{m}(1-\alpha_j z), \quad \alpha_j \in (-1,1).$$

Для $f \in BH_\infty$ положим

$$Jf := \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f^*(e^{i\theta})}\varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где

$$\alpha := (1-z_0^2)|P(z_0)|, \quad \varphi(z) := (-1)^{m+p}\frac{zp_0(z)}{(z-z_0)(1-z_0z)P(z)q_0(z)}.$$

Применяя теорему о вычетах и учитывая, что $\operatorname{sign} P(z_0) = (-1)^{m+p}$, получаем

$$Jf = (1-z_0^2)P(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{P(z)(z-z_0)(1-z_0z)}\,dz$$
$$= f(z_0) - \sum_{j=1}^{m} c_j(z_0)f(x_j).$$

Так как при всех $\beta \in D$ для $|z| = 1$

$$\frac{z}{(z-\beta)(1-\overline{\beta}z)} = \frac{1}{|z-\beta|^2} > 0,$$

то $\varphi(e^{i\theta}) > 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Поскольку

$$\operatorname{sign} c_j(z_0) = \begin{cases}(-1)^{p+j}, & j = 1,\dots,p,\\ (-1)^{p+j+1}, & j = p+1,\dots,m,\end{cases}$$

то

$$\sum_{j=1}^{m} c_j(z_0)f^*(x_j) = \delta\sum_{j=1}^{m}|c_j(z_0)|.$$

Применение теоремы 5.3 гл. I завершает доказательство теоремы. □

Существенной частью в построении оптимального метода восстановления является нахождение полной информативной системы. Из теоремы 2.1 вытекает, что $x_1 < \ldots < x_m$ — полная информативная система для множества $E \subset D$ и $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$, $0 \le p \le m$, при заданном $0 < \delta < 1$ тогда и только тогда, когда для величин $\delta_k^{(j)}$, определенных равенствами (2.13) и (2.20), выполнены условия (2.16) и для функции g_0, полученной из рекуррентных соотношений (2.12), при всех $z \in E$ $|g_0(z)| \le \delta$. В случае, когда $E \subset (-1, 1)$ и $\operatorname{card} E < \infty$, полная информативная система может быть получена перебором всевозможных комбинаций точек из E, пользуясь сформулированным выше критерием. Мы опишем более экономный алгоритм построения полной информативной системы.

Пусть $E := \{u_1, \dots, u_n\}$ и $-1 < u_1 < \dots < u_n < 1$. Из теоремы 2.1 следует, что порядок информативности $\mathrm{In}(z_0, E, \delta)$ при фиксированных $u_1, \dots, u_n$ и δ зависит лишь от того, в какой из интервалов $(-1, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_n, 1)$ попадает значение z_0. Отметим также, что если $z_0 \in (u_s, u_{s+1})$, $0 \le s \le n$ ($u_0 := -1$, $u_{n+1} := 1$) и f^* — экстремальная функция в задаче (2.1), нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, то точки x_p, x_{p+1} в равенствах (2.3) совпадают с точками u_s, u_{s+1} соответственно. Это следует из того, что у функции $f^{*\prime}$ число нулей в круге D равно $m-1$ (см. [**74**, теорема 7.2]) и, следовательно, $f^*(z) > \delta$, $z \in (x_p, x_{p+1})$.

Лемма 2.4. *Пусть для точек $x_1 < \dots < x_k$ из множества $E := \{u_1, \dots, u_n\}$, $-1 < u_1 < \dots < u_n < 1$, существует функция f, имеющая вид*

$$f(z) = (-1)^{k+s} \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1), \quad 0 \le s \le k,$$

и удовлетворяющая равенствам

$$f(x_j) = \begin{cases} (-1)^{s+j}\delta, & j = 1, \dots, s, \\ (-1)^{s+j+1}\delta, & j = s+1, \dots, k. \end{cases}$$

Тогда при всех $z_0 \in (x_s, x_{s+1})$ ($x_0 := -1$, $x_{k+1} := 1$)

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \ge k - \nu_s(k),$$

где

$$\nu_s(k) := \begin{cases} 0, & s = 0, k, \\ 2, & 0 < s < k. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = m$. Тогда существует функция

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad \beta_j \in (-1, 1),$$

$\lambda = 1$ или -1, для которой выполняются неравенства $|f^*(z)| \le \delta$, $z \in E$, $f^*(z) > 0$, $z \in (x_s, x_{s+1})$. По теореме 2.1 для функции f также справедливо неравенство

$$f(z) > 0, \quad z \in (x_s, x_{s+1}). \tag{2.22}$$

Рассмотрим функцию $\Phi := f - f^*$. Имеем

$$(-1)^{j+s}\Phi(x_j) \ge 0,\ j = 1, \dots, s, \quad (-1)^{j+s+1}\Phi(x_j) \ge 0,\ j = s+1, \dots, k. \tag{2.23}$$

Предположим, что $\lambda = (-1)^{k+s+1}$. В силу неравенства (2.22) $s < k$. Таким образом,

$$(-1)^{k+s+1}\Phi(x_k) \ge 0, \quad (-1)^{k+s}\Phi(1) > 0.$$

Если $\lambda = (-1)^{k+s}$, а m и k разной четности, то $s > 0$ и

$$(-1)^{s+1}\Phi(x_1) \geq 0, \quad (-1)^{s}\Phi(-1) > 0.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 2.3, можно показать, что в рассматриваемых случаях у функции Φ число нулей в интервале $(-1,1)$ не менее $k-1$, а при $s = 0, k$ — не менее k. Из (2.4) получаем $m \geq k-2$ и $m \geq k$, если $s = 0, k$. В случае, когда $\lambda = (-1)^{k+s}$, а m и k одинаковой четности из (2.23) следует, что число нулей у функции Φ в интервале $(-1,1)$ не менее $k-2$, а при $s = 0, k$ — не менее $k-1$. Учитывая, что $\Phi(\pm 1) = 0$, из неравенства (2.4) получаем утверждение леммы в этом случае. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть* $E := \{u_1, \ldots, u_n\}$, $-1 < u_1 < \ldots < u_n < 1$, $z_0 \in (u_p, u_{p+1})$, $0 \leq p \leq n$ $(u_0 := -1,\ u_{n+1} := 1)$ *и* $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = k$. *Тогда при* $u^* \in (-1, u_1)$ *для* $E_1 := \{u^*, u_1, \ldots, u_n\}$ *и* $0 < p \leq n$ *имеют место неравенства*

$$k - \nu_p(n) \leq \mathrm{In}(z_0, E_1, \delta) \leq k+1.$$

Эти же неравенства справедливы при $u^* \in (u_n, 1)$ *и* $0 \leq p < n$.

Доказательство. Оценка снизу непосредственно вытекает из леммы 2.4. Докажем оценку сверху. Пусть $u^* \in (-1, u_1)$ и $0 < p \leq n$. Предположим, что $\mathrm{In}(z_0, E_1, \delta) = m$. Тогда существует функция

$$f^*(z) = (-1)^{m+s} \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1,1), \tag{2.24}$$

и точки $x_1 < \ldots < x_m$ из множества E_1 такие, что

$$f^*(x_j) = \begin{cases} (-1)^{s+j}\delta, & j = 1, \ldots, s, \\ (-1)^{s+j+1}\delta, & j = s+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.25}$$

где $x_s = u_p$, $x_{s+1} = u_{p+1}$. Кроме того, так как $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = k$, то существует функция

$$f(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad \beta_j \in (-1,1),$$

$\lambda = 1$ или -1, для которой $|f(u_j)| \leq \delta$, $j = 1, \ldots, n$, и $f(z) > 0$, $z \in (u_p, u_{p+1})$. Для функции f будут также выполнены неравенства $|f(x_j)| \leq \delta$, $j = 2, \ldots, m$, $f(u) \geq f^*(u)$, $u \in (u_p, u_{p+1})$. Отсюда следует, что для разности $\Phi := f^* - f$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} (-1)^{j+s}\Phi(x_j) \geq 0,\ j = 2, \ldots, s, \quad \Phi(u) \leq 0,\ u \in (u_p, u_{p+1}), \\ (-1)^{j+s+1}\Phi(x_j) \geq 0,\ j = s+1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Тем самым число нулей функции Φ на отрезке $[x_2, x_m]$ не менее $m-1$. Из неравенства (2.4) имеем оценку $m \leq k+2$.

Покажем, что случай $m = k + 2$ невозможен. Если $\lambda = (-1)^{m+s+1}$, то $p < n$ и

$$(-1)^{m+s+1}\Phi(x_m) \geq 0, \quad (-1)^{m+s}\Phi(1) > 0.$$

Последние соотношения вместе с неравенствами (2.26) показывают, что функция Φ имеет в интервале $(-1,1)$ не менее m нулей, а это противоречит неравенству (2.4). При $\lambda = (-1)^{m+s}$ функция Φ обращается в нуль в точках ± 1, что снова противоречит неравенству (2.4). Аналогично рассматривается случай, когда $u^* \in (u_n, 1)$ и $0 \leq p < n$. Лемма доказана. □

Из леммы 2.2 вытекает алгоритм построения полной информативной системы для случая, когда $E := \{u_1, \ldots, u_n\}$, $-1 < u_1 < \ldots < u_n < 1$. Пусть $z_0 \in (u_p, u_{p+1})$, $0 < p < n$, и для точек $u_r < \ldots < u_p < u_{p+1} < \ldots < u_{p+s}$ уже построена полная информативная система $x_1, \ldots, x_k$. Если она не остается таковой при добавлении точки u_{r-1} (или u_{p+s+1}), то в полную информативную систему на новом множестве обязательно войдут точки u_{r-1} (или u_{p+s+1}), u_p, u_{p+1}. Остальные точки находятся из множества $u_r, \ldots, u_{p-1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+s}$ перебором по $m = k-2, k-3, k-4, k-5$ точкам, используя критерий, сформулированный перед леммой 2.4.

Пусть $z_0 \in (-1, u_1)$ (т.е. $p = 0$) и для точек $u_1 < \ldots < u_s$ полная информативная система $x_1, \ldots, x_k$ уже найдена. Если она не остается таковой при добавлении точки u_{s+1}, то в полную информативную систему на новом множестве войдут точки u_1, u_{s+1}, а остальные точки находятся из множества $u_2, \ldots, u_s$ перебором по $m = k-1, k-2$ точкам. Аналогично поступаем в случае $z \in (u_n, 1)$.

В заключение установим при малых δ связь между погрешностями оптимального метода восстановления, построенного в теореме 2.2 и метода, оптимального для восстановления по точным значениям, если его применить к восстановлению по приближенным значениям. Последний метод (см. (1.1) при $k = 1$) может быть записан в виде

$$f(z_0) \approx S_0\widetilde{I}f := \sum_{j=1}^{m} \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(x_j)} \left(1 - W_j^2(z_0)\right) \widetilde{f}(x_j);$$

здесь

$$\omega_j(z) := \prod_{k \neq j} W_k(z), \quad W_j(z) = \frac{z - x_j}{1 - x_j z}.$$

Положим для $E := \{x_1, \ldots, x_m\}$

$$e(z_0, E, \delta, S_0) := \sup_{f \in BH_\infty} \sup_{\substack{y \in l_\infty^m \\ |f(x_j) - y_j| \leq \delta, \ j=1,\ldots,m}} |f(z_0) - S_0 y|.$$

Теорема 2.3. *Пусть $E := \{x_1, \ldots, x_m\} \subset (-1, 1)$. Тогда*

$$e(z_0, E, \delta) = e(z_0, E, \delta, S_0) + O(\delta^2).$$

Доказательство. Из предложения 1.1 вытекает равенство

$$e(z_0, E, \delta, S_0) = |W(z_0)| + \delta \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(x_j)} \right| \left(1 - W_j^2(z_0)\right),$$

где

$$W(z) := \prod_{j=1}^{m} W_j(z).$$

Пусть δ достаточно мало и $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$, $0 \le p \le n$ ($x_0 := -1$, $x_{n+1} := 1$). Тогда из теоремы 2.1 следует, что величина $\varphi(\delta) := e(z_0, E, \delta)$ совпадает со значением функции вида (2.2), где $\lambda = (-1)^{m+p}$, удовлетворяющей условию (2.3). В лемме 2.3 указан способ построения такой функции, из которого видно, что функция $\varphi(\delta)$ аналитична в окрестности нуля и $\varphi'(0) = |W(z_0)|$. Остается доказать равенство

$$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(x_j)} \right| \left(1 - W_j^2(z_0)\right).$$

Обозначим через $\psi(\delta^{(0)})$, $\delta^{(0)} := (\delta_1^{(0)}, \dots, \delta_m^{(0)})$, значение функции g_0, получаемой из рекуррентных соотношений (2.12), в точке z_0. Тогда, выбрав

$$\delta_j^{(0)} = \begin{cases} (-1)^{p+j}\delta, & j = 1, \dots, p, \\ (-1)^{p+j+1}\delta, & j = p+1, \dots, m, \end{cases}$$

при достаточно малых δ будем иметь

$$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi}{\partial \delta_j^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} \frac{\partial \delta_j^{(0)}}{\partial \delta}\Big|_{\delta=0}.$$

В силу (2.12) имеем при $z = z_0$

$$\frac{\partial g_{k-1}}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} = W_k(z_0) \frac{\partial g_k}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0}, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} = \frac{\partial g_0}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} &= \omega_m(z_0) \frac{\partial g_{m-1}}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} \\ &= \omega_m(z_0) \left(1 - W_m^2(z_0)\right) \frac{\partial \delta_m^{(m-1)}}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0}. \end{aligned}$$

Из (2.13) получаем

$$\frac{\partial \delta_m^{(j)}}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} = \frac{1 - x_j x_m}{x_m - x_j} \frac{\partial \delta_m^{(j-1)}}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \delta_m^{(m-1)}}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} = \omega_m^{-1}(x_m).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} = \frac{\omega_m(z_0)}{\omega_m(x_m)} \left(1 - W_m^2(z_0)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \delta_m^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} \frac{\partial \delta_m^{(0)}}{\partial \delta}\Big|_{\delta=0} = \left|\frac{\omega_m(z_0)}{\omega_m(x_m)}\right| \left(1 - W_m^2(z_0)\right).$$

Аналогично (делая перестановку узлов x_j) доказывается, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \delta_j^{(0)}}\Big|_{\delta^{(0)}=0} \frac{\partial \delta_j^{(0)}}{\partial \delta}\Big|_{\delta=0} = \left|\frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(x_j)}\right| \left(1 - W_j^2(z_0)\right), \quad j = 1, \ldots, m-1.$$

Теорема доказана. □

§3. Зависимость порядка информативности от величины погрешности в задании восстанавливаемой функции

В этом параграфе мы дадим оценки для порядка информативности $\mathrm{In}(z_0, E, \delta)$ при фиксированных z_0 и E в зависимости от δ через некоторые характеристики множества E, связанные с решением ряда уже встречавшихся экстремальных задач.

Из теоремы Неванлинны–Пика [**71**, стр. 347], упоминавшейся в §4 гл. II, вытекает, что среди функций из H_∞, принимающих значения $\delta_1^{(0)}, \ldots, \delta_n^{(0)}$ в точках $x_1 < \ldots < x_n$ из интервала $(-1, 1)$, существует единственная функция f_0 с минимальной нормой. Эта функция с точностью до множителя, равного значению этой минимальной нормы, является произведением Бляшке порядка меньше n, вещественного на вещественной оси. Величина $M := \|f_0\|_{H_\infty}$ может быть найдена из определенным образом записанного уравнения

$$|\delta_n^{(n-1)}| = M, \tag{3.1}$$

где

$$\delta_k^{(m)} := M^2 \frac{1 - x_m x_k}{x_k - x_m} \frac{\delta_k^{(m-1)} - \delta_m^{(m-1)}}{M^2 - \delta_m^{(m-1)} \delta_k^{(m-1)}}, \quad k = m+1, \ldots, n,$$
$$m = 1, \ldots, n-1.$$

Искомое значение M является тем корнем уравнения (3.1), для которого при некотором $m \leq n-1$

$$|\delta_1^{(0)}| < M, \ldots, |\delta_m^{(m-1)}| < M, \quad |\delta_{m+1}^{(m)}| = M, \quad \delta_{m+1}^{(m)} = \ldots = \delta_n^{(m)}$$

(подробнее см. [**71**, стр. 348]).

Рассматриваемая величина M может быть найдена также как наибольший корень уравнения

$$\det \left\| \frac{M^2 - \delta_m^{(0)} \delta_k^{(0)}}{1 - x_m x_k} \right\|_1^n = 0$$

(см. [**34**, стр. 100]).

Для данного $0 \le p \le n$ обозначим через I_m^p множество целочисленных векторов $\tau = (i_1, \dots, i_m)$, $1 \le i_1 \le \dots \le i_m \le n$, для каждого из которых существует $0 \le s \le m$ такое, что $i_s = p$, $i_{s+1} = p + 1$ ($i_0 := -1$, $i_{m+1} := 1$). Для заданного $\tau \in I_m^p$ через A_τ обозначим множество функций из H_∞, удовлетворяющих равенствам

$$f(x_{i_j}) = \begin{cases} (-1)^{s+j}, & j = 1, \dots, s, \\ (-1)^{s+j+1}, & j = s+1, \dots, m. \end{cases}$$

Положим $\delta_{p1} := 1$,

$$\delta_{pm}^{-1} := \inf_{\tau \in I_m^p} \inf_{f \in A_\tau} \|f\|_{H_\infty}, \quad m = 2, \dots, n.$$

Подобные величины при $m = n$ для аналогичных задач на классах гладких функций вводились в работе [**107**].

Нетрудно убедиться, что $\delta_{p2} = 1$ при $p = 1, \dots, n-1$. Кроме того, положив для $\tau = (i_1, \dots, i_{m+1}) \in I_{m+1}^p$

$$\tau' = (i_2, \dots, i_{m+1}), \quad \tau'' = (i_1, \dots, i_m),$$

получим, что $A_\tau \subset A_{\tau'}$ при $i_1 < p$ и $A_\tau \subset A_{\tau''}$ при $i_1 \ge p$. Отсюда следуют неравенства

$$\delta_{p,m+1} \le \delta_{pm}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Предложение 3.1. *Имеют место неравенства*

$$\delta_{p,m+2} < \delta_{pm}, \quad m = 1, \dots, n-2.$$

При $p = 0, n$

$$\delta_{p,m+1} < \delta_{pm}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Предположим, что при некотором $1 \le r \le 2$ и $1 \le m \le n - r$ имеет место равенство

$$\delta_{p,m+r} = \delta_{pm}.$$

Пусть $\tau = (i_1, \dots, i_{m+r})$ — вектор, для которого

$$\delta_{p,m+r}^{-1} = \inf_{f \in A_\tau} \|f\|_{H_\infty}. \tag{3.2}$$

Если $i_1 < p$, $i_{m+r} > p + 1$, то $A_\tau \subset A_{\tau_0}$, где $\tau_0 := (i_2, \dots, i_{m+1})$, если $i_1 \ge p$, то $A_\tau \subset A_{\tau_1}$, где $\tau_1 := (i_1, \dots, i_m)$, наконец, если $i_{m+r} \le p + 1$, то $A_\tau \subset A_{\tau_2}$, где $\tau_2 := (i_{r+1}, \dots, i_{m+r})$. Таким образом, всегда найдется вектор $\tau' := (j_1, \dots, j_m)$, для которого

$$A_\tau \subset A_{\tau'}. \tag{3.3}$$

Отсюда имеем
$$\delta_{p,m+r}^{-1} \geq \inf_{f \in A_{\tau'}} \|f\|_{H_\infty} \geq \delta_{pm}^{-1}.$$
Следовательно,
$$\inf_{f \in A_\tau} \|f\|_{H_\infty} = \inf_{f \in A_{\tau'}} \|f\|_{H_\infty}. \tag{3.4}$$
Пусть f^* — функция, на которой достигается нижняя грань в равенстве (3.2). Из равенства (3.4) и включения (3.3) следует минимальность $\|f^*\|_{H_\infty}$ среди функций из множества A_τ. Из единственности функции f^* следует, что она является с точностью до постоянного множителя произведением Бляшке порядка меньше m. С другой стороны, $f^* \in A_\tau$ и имеет не менее $m + r - 2$ нулей, если $0 < p < n$, и не менее $m + r - 1$ нулей, если $p = 0, n$. Предложение доказано. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть* $E := \{u_1, \ldots, u_n\}$, $-1 < u_1 < \ldots < u_n < 1$ *и* $z_0 \in (u_p, u_{p+1})$, $0 \leq p \leq n$ $(u_0 := -1,\ u_{n+1} := 1)$. *Тогда при* $\delta_{p,m+1} \leq \delta < \delta_{pm}$, $m = 1, \ldots, n-1$,
$$m - \nu_p(n) \leq \mathrm{In}(z_0, E, \delta) \leq m.$$
При $0 \leq \delta < \delta_{pn}$
$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = n.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = m$. Тогда существует функция вида (2.24) и точки $x_1 < \ldots < x_m$ из множества E, для которых справедливы равенства (2.25), причем $x_s = u_p$, а $x_{s+1} = u_{p+1}$. Для функции $\delta^{-1} f \in A_\tau$, где $\tau = (i_1, \ldots, i_m)$ — вектор, определяемый из условия $u_{i_j} = x_j$, $j = 1, \ldots, m$, имеем
$$\delta_{pm}^{-1} \leq \|\delta^{-1} f\|_{H_\infty} < \delta^{-1}.$$
Тем самым доказано, что при $\delta \geq \delta_{p,m+1}$ $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \leq m$.

Пусть теперь $\delta < \delta_{pm}$. Тогда существуют точки $u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}$, $\tau := (i_1, \ldots, i_m) \in I_m^p$, для которых
$$\inf_{f \in A_\tau} \|f\|_{H_\infty} < \delta^{-1}. \tag{3.5}$$
Пусть нижняя грань в (3.5) достигается для функции $f_1 \in A_\tau$. Тогда функция $\delta f_1 \in B_0$ и удовлетворяет равенствам (2.25), причем является не единственной такой функцией из класса B_0. Из леммы 2.3 следует существование функции вида (2.24), удовлетворяющей равенствам (2.25). В силу леммы 2.4 имеем
$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \geq m - \nu_p(n).$$
При $m = n$ из теоремы 2.1 следует, что $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = n$. Теорема доказана. $\square$

Оценим теперь порядок информативности через величины, связанные с экстремальной задачей о нахождении произведения Бляшке порядка n, наименее уклоняющегося от нуля в норме пространства $C(E)$, которую будем обозначать через $\|\cdot\|_E$. Положим для $E \subset D$

$$\delta_n(E) := \inf_{B \in \mathcal{B}_n} \|B\|_E, \tag{3.6}$$

где $\mathcal{B}_n$ — множество произведений Бляшке порядка не выше n. Напомним, что эти величины тесно связаны с задачей о нахождении точных значений n-поперечников (см. §4 гл. II).

Величина $\delta_n(E)$ для $E = [a, b] \subset (-1, 1)$ исследовалась в работах [**97**], [**44**], [**117**, стр. 268].

Пусть $E \subset D$ — произвольное замкнутое множество со связным дополнением. Через $c(E)$ обозначим емкость конденсатора $(E, \mathbb{C} \setminus D)$ (см. [**16**], [**136**]). В работе [**45**] было доказано неравенство

$$\delta_n(E) \geq e^{-\frac{n}{c(E)}}, \quad n \geq 1, \tag{3.7}$$

а также неравенство

$$\delta_n(E) < e^{-\frac{n}{c(E)+\varepsilon}}, \tag{3.8}$$

справедливое для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n.

В дальнейшем мы считаем, что $E \subset (-1, 1)$. Положим

$$\rho := \max_{z \in E} |z|, \quad \alpha^* := \min\{\rho, |\operatorname{Re}\alpha|\} \operatorname{sign} \operatorname{Re}\alpha.$$

Нетрудно проверить, что при всех $z \in [-\rho, \rho]$ и $\alpha \in D$

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \right| \geq \left| \frac{z - \alpha^*}{1 - \alpha^* z} \right|, \tag{3.9}$$

поэтому при определении величины (3.6) в данном случае можно ограничиться произведениями Бляшке с нулями из отрезка $[-\rho, \rho]$.

Пусть

$$B_k^1 := \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad B_k^2 := \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда из неравенства

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} - \frac{z - \beta}{1 - \beta z} \right| \leq \frac{1}{1 - \rho^2} |\alpha - \beta|,$$

справедливого при всех $\alpha, \beta, z \in [-\rho, \rho]$, имеем

$$|B_n^1 - B_n^2| = \left| B_{n-1}^1 \left(\frac{z - \alpha_n}{1 - \alpha_n z} - \frac{z - \beta_n}{1 - \beta_n z} \right) + (B_{n-1}^1 - B_{n-1}^2) \frac{z - \beta_n}{1 - \beta_n z} \right|$$

$$\leq \frac{1}{1 - \rho^2} |\alpha_n - \beta_n| + |B_{n-1}^1 - B_{n-1}^2| \leq \ldots \leq \frac{1}{1 - \rho^2} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \beta_j|.$$

Отсюда следует непрерывность функции

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \max_{z \in E} \left| \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z} \right|$$

при $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [-\rho, \rho]^n$ и, следовательно, существование произведения Бляшке с вещественными нулями, на котором достигается нижняя грань в равенстве (3.6). В силу того, что неравенство (3.9) является строгим при $\alpha^* \neq \alpha$, всякое произведение Бляшке, на котором достигается нижняя грань в (3.6), имеет вещественные нули, лежащие на отрезке $[-\rho, \rho]$.

Докажем аналоги теорем Валле–Пуссена и Чебышева для задачи (3.6).

Предложение 3.2. *Пусть $E \subset (-1, 1)$ — замкнутое множество,* $\operatorname{card} E > n$ *и*

$$\delta_n(E) = \|B^*\|_E,$$

где $B^* \in \mathcal{B}_n$ и нормировано условием $B^*(1) = 1$. Тогда, если для функции $f \in B_0$ в некоторых точках $z_1 < \ldots < z_{n+1}$ из множества E выполнены условия

$$f(z_j) f(z_{j+1}) < 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

то

$$\min_{1 \le j \le n+1} |f(z_j)| \le \delta_n(E), \tag{3.10}$$

причем, если неравенство (3.10) *обращается в равенство, то $f = \lambda B^*$, где $\lambda = 1$ или -1.*

Доказательство. Из леммы 2.3 следует существование произведения Бляшке $B \in \mathcal{B}_m$, вещественного на вещественной оси, порядка $m \le n + 1$ и такого, что

$$B(z_j) = f(z_j), \quad j = 1, \dots, n + 1,$$

причем при $m \le n$ $f = B$, а при $m = n + 1$ можно выбрать B с любой из нормировок $B(1) = 1$ или -1. Предположим, что $|f(z_j)| \ge \delta_n(E)$, $j = 1, \dots, n + 1$. Рассмотрим функцию

$$\varphi := B - \lambda B^* \operatorname{sign} B(1),$$

где $\lambda = 1$ при $m \le n$, а при $m = n+1$ $\lambda = -1$ и нормировка выбрана из условия $B(1) = -\operatorname{sign} f(z_{n+1})$. В силу нормировки $B^* \in B_0$, поэтому имеем

$$(-1)^{j+n+1} \varphi(z_j) \operatorname{sign} f(z_{n+1}) \ge 0, \quad j = 1, \dots, n + 1. \tag{3.11}$$

Таким образом, функция φ имеет не менее n нулей (с учетом кратности) в интервале $(-1, 1)$. С другой стороны, по лемме 2.1 для числа нулей k функции $\varphi \not\equiv 0$ в круге D имеет место оценка

$$k \le \frac{m + n - l}{2}, \tag{3.12}$$

где l — число нулей функции φ на единичной окружности. При $m < n$ и $m = n$ (в последнем случае $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ и, следовательно, $l \geq 2$) неравенство (3.12) противоречит тому, что $k \geq n$. Поэтому в этих случаях $\varphi \equiv 0$, что означает совпадение f с точностью до знака с B^*. В случае $m = n + 1$ в силу нормировки B имеем

$$\varphi(1) = -2 \operatorname{sign} f(z_{n+1}).$$

Учитывая (3.11), получаем, что в интервале $(-1, 1)$ у φ число нулей не менее $n+1$. Это противоречит неравенству (3.12). Предложение доказано. □

Предложение 3.3. *В условиях предложения* 3.2 *решение задачи* (3.6) *единственно с точностью до множителя* λ, $|\lambda| = 1$. *Произведение Бляшке* $B^* \in \mathcal{B}_n$, *нормированное условием* $B^*(1) = 1$, *является решением этой задачи тогда и только тогда, когда найдутся точки* $z_1 < \ldots < z_{n+1}$ *из множества* E, *для которых*

$$B^*(z_j) = (-1)^{j+n+1} \|B^*\|_E, \quad j = 1, \ldots, n+1. \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть B^* — экстремальная функция в задаче (3.6), нормированная условием $B^*(1) = 1$. Было показано, что все нули функции B^* вещественные. Будем считать, что они упорядочены $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n$. Докажем, что все нули различные и в любом интервале (α_{j-1}, α_j), $j = 1, \ldots, n+1$ ($\alpha_0 := -1$, $\alpha_{n+1} := 1$) найдется точка из E, в которой $|B^*|$ принимает значение $\|B^*\|_E$. Предположим противное, пусть при некотором $1 \leq k \leq n+1$

$$\max_{z \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k] \cap E} |B^*(z)| =: \delta < \|B^*\|_E$$

(при $[\alpha_{k-1}, \alpha_k] \cap E = \emptyset$ считаем, что $\delta = 0$). Положим

$$\varphi(z) := \prod_{j=k-1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ из условия $\delta + \varepsilon < \|B^*\|_E$ и рассмотрим функцию

$$B(z) := g(z) \prod_{j \neq k-1, k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z},$$

где

$$g(z) := \frac{\varphi(z) - \varepsilon}{1 - \varepsilon \varphi(z)}.$$

Нетрудно показать, что

$$g(z) = \prod_{j=k-1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z},$$

где $[\alpha_{k-1}, \alpha_k] \subset [\beta_{k-1}, \beta_k]$. Из неравенств

$$|g(z)| \le |\varphi(z)| + \varepsilon, \quad z \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k],$$
$$|g(z)| < |\varphi(z)|, \quad z \in (-1,1) \setminus (\beta_{k-1}, \beta_k),$$
$$|g(z)| < \varepsilon < \|B^*\|_E, \quad z \in (\beta_{k-1}, \alpha_{k-1}) \cup (\alpha_k, \beta_k),$$

следует, что $\|B\|_E < \|B^*\|_E$. Полученное противоречие доказывает существование точек $z_j \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \cap E$, $j = 1, \dots, n+1$, в которых выполнены равенства (3.13). Обратное утверждение и единственность следуют из предложения 3.2. Предложение доказано. □

Теорема 3.2. *Пусть $E \subset (-1,1)$ — замкнутое множество и $z_0 \in (-1,1) \setminus E$. Тогда*

1) *при $\delta_n(E) \le \delta < \delta_{n-1}(E)$ ($\delta_0(E) := 1$) справедливы неравенства*

$$n \le \mathrm{In}(z_0, E, \delta) \le n+1, \tag{3.14}$$

причем, если $z_0 \in (-1,1) \setminus \operatorname{co} E$, то

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = n;$$

2) *при всех $\delta \in (0,1)$*

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \ge c(E) \log \frac{1}{\delta}, \tag{3.15}$$

кроме того,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathrm{In}(z_0, E, \delta)}{\log \dfrac{1}{\delta}} = c(E), \tag{3.16}$$

где $c(E)$ — емкость конденсатора $(E, \mathbb{C} \setminus D)$.

Доказательство. Рассмотрим для множества E задачу (2.1). Из теоремы 2.1 следует, что существует произведение Бляшке B^* конечного порядка m, являющееся решением этой задачи, для которого при условии нормировки $B^*(z_0) > 0$ существуют точки $z_1 < \ldots < z_m$ из множества E такие, что

$$B^*(z_j) = \begin{cases} (-1)^{p+j}\delta, & j = 1, \dots, p, \\ (-1)^{p+j+1}\delta, & j = p+1, \dots, m, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $0 \le p \le m$ таково, что $z_0 \in (z_p, z_{p+1})$ ($z_0 := -1$, $z_{m+1} := 1$). Кроме того, $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = m$. Имеем

$$\delta_{n-1}(E) > \delta = \|B^*\|_E \ge \delta_m(E). \tag{3.18}$$

Отсюда $m \ge n$. В силу (3.17) для функции B^* существует альтернанс из $m-1$ точки на множестве E. Используя предложение 3.2, получаем

$$\delta < \delta_{m-2}(E). \tag{3.19}$$

Если $z_0 \in (-1,1) \setminus \operatorname{co} E$, то число точек альтернанса равно m и имеем неравенство

$$\delta < \delta_{m-1}(E). \tag{3.20}$$

Из неравенства (3.19) следует, что $m \geq n+1$, а из неравенства (3.20) — $m \geq n$. Тем самым утверждение 1) доказано.

Из соотношений (3.18) и (3.7) имеем

$$\delta \geq \delta_m(E) \geq e^{-\frac{m}{c(E)}}.$$

Отсюда следует неравенство (3.15). Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых δ из (3.19) и (3.8) имеем

$$\delta < e^{-\frac{m-2}{c(E)+\varepsilon}}.$$

Следовательно, учитывая (3.15)

$$c(E) \leq \frac{\mathrm{In}(z_0, E, \delta)}{\log \dfrac{1}{\delta}} \leq c(E) + \varepsilon + \frac{2}{\log \dfrac{1}{\delta}}.$$

Устремляя δ к нулю, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим (3.16). Теорема доказана. $\square$

Остановимся несколько подробнее на случае, когда $E = [-l, 0]$, $l \in (0,1)$ (случай произвольного отрезка $[a,b] \in (-1,1)$ сводится к рассматриваемому с помощью конформного преобразования). Тогда (см. [**44**])

$$\delta_n(l) := \delta_n([-l,0]) = \left(\kappa(h^{4n})\right)^{1/2}, \tag{3.21}$$

где $h = e^{-\frac{\pi L'}{2L}}$, а L и L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l и $l' = \sqrt{1-l^2}$. Экстремальным произведением Бляшке для этой задачи является произведение

$$Z_n(z,l) := \prod_{j=1}^{n} \frac{z + l\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{2j-1}{2n}L, l\right)}{1 + l\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{2j-1}{2n}L, l\right) z}. \tag{3.22}$$

Когда E — континуум, хорошо известно (см., например, [**16**]) соотношение между емкостью $c(E)$ и римановым модулем $\rho(E)$ области $D \setminus E$

$$\rho(E) = e^{1/c(E)}.$$

Для рассматриваемого случая

$$\rho([-l,0]) = e^{\frac{\pi L'}{2L}}.$$

Следовательно,

$$c([-l,0]) = \frac{\pi L'}{2L}. \tag{3.23}$$

Теорема 3.3. *Пусть* $E := [-l,0]$, $l \in (0,1)$. *Тогда*

1) *при* $\delta_n(l) \leq \delta < \delta_{n-1}(l)$ $(\delta_0(l) := 1)$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = n;$$

2) *при всех* $\delta \in (0,1)$ *имеют место неравенства*

$$\frac{2L}{\pi L'} \log \frac{1}{\delta} \leq \mathrm{In}(z_0, E, \delta) < \frac{2L}{\pi L'} \log \frac{2}{\delta} + 1, \tag{3.24}$$

кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ *при достаточно малых* δ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) > \frac{2L}{\pi L'} \log \frac{2}{\delta} - \varepsilon. \tag{3.25}$$

Доказательство. Утверждение 1) и левая часть неравенств (3.24) вытекают непосредственно из теоремы 3.2 и равенства (3.23). Докажем правую часть неравенств (3.24). Из (3.21) имеем

$$\delta_n(l) < 2e^{-\frac{\pi L'}{2L} n}. \tag{3.26}$$

Если $\delta \in (0,1)$, то найдется такое n, что $\delta_n(l) \leq \delta < \delta_{n-1}(l)$. Следовательно,

$$\delta < 2e^{-\frac{\pi L'}{2L}(n-1)}.$$

Отсюда с помощью утверждения 1) получаем справедливость неравенств (3.24).

Из (3.21) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(l) e^{\frac{\pi L'}{2L} n} = 2.$$

Тем самым в силу (3.26) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\delta_n(l) > 2e^{-\frac{\pi L'}{2L}(n+\varepsilon)}. \tag{3.27}$$

Если $\delta \in (0, \delta_{N(\varepsilon)}(l))$, то найдется такое $n > N(\varepsilon)$, что $\delta \geq \delta_n(l)$. Последнее неравенство вместе с (3.27) дает неравенство (3.25). Теорема доказана. □

Из теоремы 3.3, в частности, вытекает, что при достаточно малом δ порядок информативности $\mathrm{In}(z_0, E, \delta)$ равен либо $\left[\frac{2L}{\pi L'} \log \frac{2}{\delta}\right]$, либо $\left[\frac{2L}{\pi L'} \log \frac{2}{\delta}\right] + 1$.

§4. Оптимальная экстраполяция и интерполяция по неточным данным

Рассмотрим некоторые задачи оптимального восстановления экстраполяционного типа. Остановимся сначала на случае, когда $E = [-l, 0]$, $l \in (0,1)$ и $z_0 \in (0,1)$. В теореме 3.3 мы исследовали поведение порядка информативности для этого случая в зависимости от δ — погрешности, с которой задаются значения восстанавливаемой функции. Здесь для некоторых значений δ мы укажем явный вид оптимального метода восстановления и его погрешность.

Как указывалось в §2, погрешность оптимального метода восстановления совпадает со значением экстремальной задачи (2.1). Нетрудно показать, что при $\delta = \delta_n(l)$ экстремальной функцией в задаче Хейнса (задача (2.1) при $E = [-l, 0]$) является функция $Z_n(z, l)$, определенная равенством (3.22). Действительно, функция $Z_n(z, l)$ с помощью первого главного преобразования n-ой степени (см. [**5**, стр. 136]) может быть записана в виде

$$Z_n(z, l) = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\left[(2nu+1)\Lambda, \lambda\right], \quad z = -l\,\mathrm{sn}^2(uL, l), \tag{4.1}$$

где $\lambda = \delta_n^2(l)$; здесь и далее Λ, Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ, $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$, соответственно. Тем самым для точек

$$u_j := -l\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{j}{n}L, l\right), \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

имеем

$$Z_n(u_j, l) = (-1)^j \delta_n(l).$$

Кроме того, при всех $z \in [-l, 0]$ $|Z_n(z, l)| \le \delta_n(l)$. Из теоремы 2.1 следует, что $Z_n(z, l)$ — экстремальная функция в задаче (2.1) для отрезка $[-l, 0]$.

Значение $\lambda = \delta_n^2(l)$ может быть также найдено из уравнения

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2n\frac{L'}{L}. \tag{4.2}$$

В силу того, что $\dfrac{\Lambda'}{\Lambda}$ является при $\lambda \in (0, 1)$ непрерывной и монотонно убывающей от $+\infty$ до 0 функцией, уравнение (4.2) имеет единственное решение при всех $l \in (0, 1)$. Отсюда также следует, что функция $\delta_n(l)$ при фиксированном n непрерывна и монотонно возрастает от 0 до 1 при $l \in (0, 1)$. Следовательно, при любых $\delta \in (0, 1)$ уравнение

$$\delta_n(l) = \delta \tag{4.3}$$

имеет единственное решение.

Положим $\Delta_1(l) :\equiv 1$, $\Delta_n(l) := \delta_n(l_1)$, $n > 1$, где l_1 определяется из уравнения

$$l_1\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{n-1}{n}L_1, l_1\right) = l \tag{4.4}$$

(L_1 — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля l_1). Аналогично тому, как это было доказано в работе [**5**, стр. 212] для сходного уравнения, можно доказать, что левая часть равенства (4.4) есть непрерывная и монотонно возрастающая от 0 до 1 функция при $l \in (0, 1)$. Тем самым уравнение (4.4) имеет единственное решение при любом $l \in (0, 1)$, причем $l_1 > l$. Отсюда следует, что $\delta_n(l) < \Delta_n(l)$ при всех $n \ge 1$. Из дальнейшего будет видно, что $\Delta_n(l) < \delta_{n-1}(l)$ при всех $n > 1$.

Теорема 4.1. *Пусть $l, z_0 \in (0,1)$. Тогда при $\delta_n(l) \le \delta \le \Delta_n(l)$ метод*

$$f(z_0) \approx \frac{L_0}{nD}(1-z_0^2)\sqrt{\frac{z_0}{(l_0+z_0)(1+l_0z_0)}}\,\mathrm{scn}\left(2nt_0D, \sqrt{1-\delta^4}\right) \times \left[\frac{l_0}{2z_0}\widetilde{f}(0) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \frac{(l_0+x_j)(1+l_0x_j)}{(z_0-x_j)(1-x_jz_0)}\widetilde{f}(x_j)\right],$$

где l_0 — решение уравнения (4.3), L_0 и D — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l_0 и δ^2, соответственно,

$$\mathrm{scn}(t,k) := \frac{\mathrm{sn}(t,k)\,\mathrm{cn}(t,k)}{\mathrm{dn}^2(t,k)}, \tag{4.5}$$

t_0 определяется из равенства

$$\mathrm{sn}\left(L_0t_0, \sqrt{1-l_0^2}\right) = \sqrt{\frac{z_0}{l_0+z_0}},$$

а

$$x_j := -l_0\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{j}{n}L_0, l_0\right), \quad j = 0,\dots,n-1, \tag{4.6}$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞ по значениям на отрезке $[-l,0]$, заданным с погрешностью δ, и для его погрешности справедливо равенство

$$e(z_0,[-l,0],\delta) = Z_n(z_0,l_o).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $Z_n(z,l_0)$, где l_0 — решение уравнения (4.3). Предположим, что $n > 1$. Из монотонности функции $\delta_n(l)$ и того, что $\Delta_n(l) := \delta_n(l_1)$, где l_1 определено равенством (4.4), следуют неравенства $l \le l_0 \le l_1$. В силу монотонного возрастания левой части равенства (4.4) и того, что $l_0 \le l_1$, получаем $x_{n-1} \ge -l$. Тем самым на отрезке $[-l,0]$ имеется n точек $x_0,\dots,x_{n-1}$, в которых (см. представление (4.1)) выполнены равенства

$$Z_n(x_j,l_0) = (-1)^j\delta, \quad j = 0,\dots,n-1.$$

Кроме того, $|Z_n(z,l_0)| \le \delta$, $z \in [-l,0]$. Эти утверждения очевидным образом остаются в силе и при $n = 1$. Из теоремы 2.1 вытекает экстремальность функции $Z_n(z,l_0)$ в задаче (2.1) для $E = [-l,0]$, а также то, что $x_0,\dots,x_{n-1}$ — полная информативная система.

Для построения оптимального метода восстановления воспользуемся теоремой 2.2. Прежде всего заметим, что

$$Z_n'(z,l_0) = C\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(z-x_j)(1-x_jz)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-z_jz)^2}$$

(здесь и далее в подобных обозначениях производная всегда берется по первой переменной), где z_j — нули произведения Бляшке $Z_n(z,l_0)$, а через C, C_1 мы обозначаем константы, несущественные для дальнейшего. Таким образом, для функции $P(z)$, участвующей в оптимальном методе восстановления из теоремы 2.2, имеем

$$P(z) = C^{-1} z Z_n'(z,l_0).$$

Используя представление (4.1), получаем

$$\begin{gathered} P(z) = C_1 \operatorname{cn}\left((2nu+1),\delta^2\right) \operatorname{dn}\left((2nu+1),\delta^2\right) \frac{\operatorname{sn}(L_0u,l_0)}{\operatorname{cn}(L_0u,l_0)\operatorname{dn}(L_0u,l_0)}, \\ z = -l_0 \operatorname{sn}^2(L_0u,l_0), \end{gathered} \tag{4.7}$$

а также равенства

$$P'(0) = C_1(1-\delta^4)\frac{2nD}{l_0L_0},$$

$$P'(x_j) = C_1(1-\delta^4)(-1)^j \frac{nD}{L_0(l_0+x_j)(1+l_0x_j)}, \quad j=1,\dots,n-1.$$

При $z\in(0,1)$, пользуясь вторым главным преобразованием первой степени (см. [**5**, стр. 132, 282]), представление (4.7) можно записать в виде

$$P(z) = C_1(1-\delta^4)\operatorname{scn}\left(2ntD,\sqrt{1-\delta^4}\right)\sqrt{\frac{z}{(l_0+z)(1+l_0z)}},$$

где t определяется из равенства

$$\operatorname{sn}\left(L_0t,\sqrt{1-l_0^2}\right) = \sqrt{\frac{z}{l_0+z}}.$$

Теперь оптимальный метод восстановления получается непосредственным применением теоремы 2.2. Теорема доказана. □

Рассмотрим задачу оптимальной экстраполяции, под которой будем понимать задачу о нахождении величины

$$e_n(z_0,E,\delta) := \inf_{\substack{F\subset E\\ \operatorname{card}F\le n}} e(z_0,F,\delta) \tag{4.8}$$

и множества F, на котором достигается нижняя грань в (4.8), называемом оптимальными узлами экстраполяции для данных n и δ.

Теорема 4.2. *Пусть $l,z_0\in(0,1)$ и $E=[-l,0]$. Тогда*

1) *при $\delta_m(l)\le\delta<\delta_{m-1}(l)$, $m\le n$,*

$$e_n(z_0,E,\delta) = |B^*(z_0)|,$$

где $B^*\in\mathcal{B}_m$ и является экстремальной функцией в задаче (2.1). Оптимальными узлами экстраполяции при $\delta_m(l)\le\delta\le\Delta_m(l)$ являются точки, определенные равенством (4.6) для $n=m$, а при

$\Delta_m(l) < \delta < \delta_{m-1}(l)$ — $m-2$ локальных экстремумов функции B^*, принадлежащих интервалу $(-l, 0)$, а также точки $-l$ и 0;

2) при $\delta < \delta_n(l)$ имеет место равенство

$$e_n(z_0, E, \delta) = Z_n(z_0, l_0),$$

где l_0 — решение уравнения (4.3), а оптимальными узлами экстраполяции являются узлы (4.6).

Доказательство. Утверждение 1) непосредственно вытекает из теорем 4.1, 3.3 и 2.1. Докажем утверждение 2). Сначала докажем существование множества $F = \{z_1^0, \dots, z_n^0\}$, на котором достигается нижняя грань в (4.8). Для этого достаточно показать, что функция

$$\varphi(\zeta) := \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ |f(z_j)| \le \delta,\ j=1,\dots,n}} |f(z_0)|$$

является непрерывной при $\zeta := (z_1, \dots, z_n) \in [-l, 0]^n$. Рассмотрим $\zeta_1 := (z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}), \zeta_2 := (z_1^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}) \in [-l, 0]^n$ такие, что $\|\zeta_1 - \zeta_2\|_{l_2^n} < \varepsilon\delta(1-l)$. Пусть $f \in BH_\infty$ и удовлетворяет условиям $|f(z_j^{(1)})| \le \delta$, $j = 1, \dots, n$. Из известной формулы Коши $|f'(z)| \le (1-l)^{-1}$ при $z \in [-l, 0]$. Следовательно,

$$|f(z_j^{(2)})| \le |f(z_j^{(1)})| + |f(z_j^{(2)}) - f(z_j^{(1)})| \le \delta + (1-l)^{-1}\|\zeta_1 - \zeta_2\|_{l_2^n} \le \delta(1+\varepsilon).$$

Функция $g := (1+\varepsilon)^{-1} f$ очевидно принадлежит классу BH_∞ и удовлетворяет неравенствам $|g(z_j^{(2)})| \le \delta$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом,

$$|f(z_0)| = (1+\varepsilon)|g(z_0)| \le (1+\varepsilon)\varphi(\zeta_2).$$

Отсюда

$$\varphi(\zeta_1) \le (1+\varepsilon)\varphi(\zeta_2) \le \varphi(\zeta_2) + \varepsilon.$$

Поскольку ζ_1 и ζ_2 можно поменять местами, то справедливо неравенство

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| \le \varepsilon,$$

из которого следует непрерывность функции φ.

Пусть $-l \le z_1 \le \ldots \le z_n \le 0$ — оптимальные узлы экстраполяции. Из теоремы 2.1 вытекает, что в задаче о нахождении величины $\varphi(\zeta)$, $\zeta := (z_1, \dots, z_n)$, экстремальная функция, нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, имеет вид

$$f^*(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 0), \quad m \le n,$$

и существуют точки $x_1 < \ldots < x_m$, $x_j \in \{z_1, \dots, z_n\}$, такие, что

$$f^*(x_j) = (-1)^{m+j}\delta, \quad j = 1, \dots, m.$$

Из леммы 2.3 следует, что $f^*(z) = g_0(z, x_1, \dots, x_m)$, где функция g_0 определяется из рекуррентных соотношений (2.12), (2.13), в которых $g_m(z) \equiv 1$, $\delta_j^{(0)} = (-1)^{m+j}\delta$.

Нетрудно показать, что при всех $z \in (-1,1)$ и точках $\xi = (u_1, \dots, u_m)$, достаточно близких к точке $(x_1, \dots, x_m)$ функция $g_0(z, u_1, \dots, u_m)$ дифференцируема и является экстремальной в задаче о нахождении $\varphi(\xi)$. Из экстремальности точек $x_1, \dots, x_m$ следует, что в точке $(z_0, x_1, \dots, x_m)$

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{4.9}$$

при $-l < x_1$, $x_m < 0$. Если $x_1 = -l$ или $x_m = 0$, то соответствующие равенства из (4.9) заменяются на неравенства

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_1} \geq 0, \quad \frac{\partial g_0}{\partial u_m} \leq 0.$$

Из равенств $g_0(u_j, u_1, \dots, u_m) = (-1)^{m+j}\delta$ вытекает, что в точках $(u_j, u_1, \dots, u_m)$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial g_0}{\partial z} + \frac{\partial g_0}{\partial u_j} = 0. \tag{4.10}$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (2.12) можно получить, что

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_j} = \Phi_j(z, u_1, \dots, u_m) F_j(u_1, \dots, u_m) \prod_{k \neq j} (z - u_k),$$

где Φ_j и F_j — некоторые функции, причем $\Phi_j > 0$, а F_j не зависят от z. Из последнего равенства, учитывая (4.9) и (4.10), получаем

$$f^{*\prime}(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

при $-l < x_1$, $x_m < 0$. Если $x_1 = -l$ или $x_m = 0$, то вместо соответствующих равенств имеем

$$(-1)^m f^{*\prime}(x_1) \geq 0, \quad f^{*\prime}(x_m) \geq 0.$$

При $z > x_m$ $f^*(z) > \delta$, поэтому $f^{*\prime}(x_m) > 0$ и, следовательно, $x_m = 0$.

Поскольку $f^*(x_1) = (-1)^{m+1}\delta$, $f^*(-1) = (-1)^m$, а $(-1)^m f^{*\prime}(x_1) \geq 0$, то найдется точка $x_0 \in (-1, x_1]$, в которой $f^{*\prime}(x_0) = 0$. Так как $f^{*\prime}$ имеет в круге D ровно $m-1$ нуль, то на интервале $(-1,1)$ функция f^* имеет локальные экстремумы только в точках $x_0, x_2, \dots, x_{m-1}$. Отсюда $|f^*(z)| \leq \delta$ при $z \in [x_1, 0]$, и по теореме 2.1 f^* — решение задачи Хейнса для отрезка $[x_1, 0]$. При $x_1 = -l$ и $\delta < \delta_n(l)$ экстремальная функция в задаче Хейнса для отрезка $[-l, 0]$ имеет порядок больший, чем n. Поэтому $x_1 > -l$, а тогда $f^{*\prime}(x_1) = 0$. В этом случае f^* — наименее уклоняющееся от нуля на отрезке $[-l_0, 0] \subset [-l, 0]$ произведение Бляшке порядка $m \leq n$ с уклонением δ, т.е. $f^*(z) = Z_m(z, l_0)$, где l_0 — решение уравнения $\delta_n(l) = \delta$.

Легко показать, что $Z_m(z_0, l_0) < Z_n(z_0, l_0)$ при $m < n$. Тем самым утверждение 2) доказано. Теорема доказана. □

Следствие 4.1. *При всех $z_0, \delta \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$e_n(z_0, (-1,0], \delta) = Z_n(z_0, l_0),$$

где l_0 — решение уравнения (4.3)*, а оптимальными узлами экстраполяции являются узлы* (4.6).

Рассмотрим теперь задачу о нахождении оптимального метода восстановления в задаче экстраполяции по приближенным значениям, заданным на множестве $(-1, 0]$.

Теорема 4.3. *Пусть $z_0 \in (0,1)$. Тогда при всех $0 < \delta < 1$ метод*

$$f(z_0) \approx S_0\widetilde{I}f := \frac{\pi}{2D'}\frac{1-z_0}{\sqrt{z_0}}\operatorname{scn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{z_0}, \sqrt{1-\delta^4}\right) \times \left[\widetilde{f}(0) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{2z_0(1+x_j)^2}{(z_0-x_j)(1-x_jz_0)}\widetilde{f}(x_j)\right],$$

где функция scn *определена равенством* (4.5),

$$x_j := -\operatorname{th}^2\left(j\frac{\pi D}{D'}\right), \quad j = 0, 1, \dots,$$

а D и D' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей δ^2 и $\sqrt{1-\delta^4}$, соответственно, является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞ по значениям на множестве $(-1,0]$, заданным с погрешностью δ. Для погрешности оптимального метода имеет место равенство

$$e(z_0, (-1,0], \delta) = \delta\operatorname{dn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{z_0}, \sqrt{1-\delta^4}\right). \tag{4.11}$$

Доказательство. Как отмечалось в §6 гл. II,экстремальной функцией в задаче (2.1) для $E = (-1, 0]$ (задача Мию) является бесконечное произведение Бляшке

$$B_0(z,\delta^2) := \prod_{j=1}^{\infty}\frac{z+\alpha_j^2}{1+\alpha_j^2 z}, \quad \alpha_j := \operatorname{th}\left((2j-1)\frac{\pi D}{2D'}\right), \tag{4.12}$$

которое может быть записано в следующем виде

$$B_0(z,\delta^2) = \delta\operatorname{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}v + D, \delta^2\right), \quad z = -\operatorname{th}^2 v. \tag{4.13}$$

Если $z \in (0,1)$, то $v = i\operatorname{arctg}\sqrt{z}$. Пользуясь вторым главным преобразованием первой степени, получаем

$$B_0(z,\delta^2) = \delta\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{z}, \sqrt{1-\delta^4}\right),$$

что доказывает равенство (4.11).

Положим

$$B_2(z,\delta^2) := \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z+a_j^2}{1+a_j^2 z}, \quad a_j := \operatorname{th}\left(j\frac{\pi D}{D'}\right). \tag{4.14}$$

Положив $h := e^{-\frac{\pi D}{D'}}$ и $z = \operatorname{tg}^2 u$, будем иметь $a_j = \dfrac{1-h^{2j}}{1+h^{2j}}$ и

$$B_2(z,\delta^2) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-2h^{2j}\cos 2u + h^{4j}}{1+2h^{2j}\cos 2u + h^{4j}} = \delta \operatorname{ctg} u \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}u, \sqrt{1-\delta^4}\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{2D'}{\pi}u, \sqrt{1-\delta^4}\right)}.$$

Для $u = iv$ с помощью второго главного преобразования первой степени получаем

$$B_2(z,\delta^2) = \delta \operatorname{cth} v \operatorname{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}v, \delta^2\right), \quad z = -\operatorname{th}^2 v. \tag{4.15}$$

Рассмотрим функцию

$$h_0(z,\delta^2) := \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+\alpha_j^2 z}{1+a_j^2 z}\right)^2. \tag{4.16}$$

Аналогично выводу соотношения (4.15) можно показать, что

$$h_0(z,\delta^2) = \operatorname{ch}^2 v \operatorname{dn}^2\left(\frac{2D'}{\pi}v, \delta^2\right), \quad z = -\operatorname{th}^2 v. \tag{4.17}$$

Положим

$$\varphi_0(z) := \frac{(1+z)^2}{z} \frac{B_0(z,\delta^2) h_0(z,\delta^2)}{B_2(z,\delta^2)}.$$

Из представлений (4.13), (4.15) и (4.17), используя преобразование Гаусса, будем иметь

$$\varphi_0(z) = -\frac{2}{\operatorname{sh} 2v} \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{2D'}{\pi}v, \delta^2\right) \operatorname{dn}\left(\frac{2D'}{\pi}v, \delta^2\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}v, \delta^2\right)}$$

$$= -\frac{2(1+\delta^2)}{\operatorname{sh} 2v} \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}v, \lambda\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}v, \lambda\right)} = -i\frac{2(1+\delta^2)}{\operatorname{sh} 2v} \operatorname{dn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}v + i\Lambda', \lambda\right),$$

где $\lambda = 2\delta/(1+\delta^2)$, а Λ' — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$. Пусть $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi,\pi)$. Тогда

v можно выбрать из условия $\operatorname{th} v = e^{i(\theta+\pi)/2}$. Отсюда $v = x + i\pi/4$, где $x = \dfrac{1}{2}\log\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\theta+\pi}{4}\right|$. Следовательно,

$$\varphi_0(e^{i\theta}) = \frac{2(1+\delta^2)}{\operatorname{ch} 2x}\operatorname{dn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}x, \lambda\right).$$

Из последнего равенства видно, что при $\theta \in (-\pi, \pi)$

$$0 < \varphi_0(e^{i\theta}) \le 2(1+\delta^2). \tag{4.18}$$

Для $f \in H_\infty$ рассмотрим интеграл

$$Jf := \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{B_0(e^{i\theta}, \delta^2)}\varphi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\, d\theta,$$

где

$$\varphi(z) := \varphi_0(z)\frac{z}{(z-z_0)(1-z_0 z)}, \quad \alpha := z_0\frac{1-z_0}{1+z_0}\frac{B_2(z,\delta^2)}{h_0(z,\delta^2)}.$$

Поскольку при $z = e^{i\theta}$

$$\frac{z}{(z-z_0)(1-z_0 z)} > 0,$$

то из неравенств (4.18) вытекает, что $\varphi(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi)$ и $\varphi(e^{i\theta}) > 0$ для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$. С другой стороны,

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{(1+z^2)h_0(z,\delta^2)f(z)}{zB_2(z,\delta^2)(z-z_0)(1-z_0 z)}\, dz. \tag{4.19}$$

Из представления (4.15) при всех $j \ge 1$

$$|B_2(-\alpha_j, \delta^2)| = \delta\alpha_j \ge \delta\alpha_1.$$

Тем самым к интегралу (4.19) применима лемма 6.2 гл. II, из которой получаем

$$\begin{aligned} Jf = f(z_0) - \frac{\alpha h_0(0,\delta^2)}{z_0 B_2(0,\delta^2)} f(0) \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha(1+x_j)^2 h_0(x_j,\delta^2)}{x_j B_2'(x_j,\delta^2)(z_0-x_j)(1-x_j z_0)} f(x_j). \end{aligned} \tag{4.20}$$

С помощью представлений (4.13), (4.15) и (4.17) находим

$$B_2(0,\delta^2) = \delta\frac{2D'}{\pi}, \quad h_0(x_j,\delta^2) = \frac{1}{1+x_j}, \ j = 0, 1, \ldots,$$

$$B_2'(x_j,\delta^2) = (-1)^j\delta\frac{D'}{\pi}\frac{1}{x_j(1+x_j)}, \ j = 1, 2, \ldots.$$

Кроме того, пользуясь вторым главным преобразованием первой степени, можно показать, что

$$\alpha = \delta\sqrt{z_0}(1-z_0)\operatorname{scn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{z_0}, \sqrt{1-\delta^4}\right).$$

Таким образом, равенство (4.20) может быть записано в виде

$$Jf = f(z_0) - S_0 If. \tag{4.21}$$

Поскольку

$$B_0(x_j, \delta^2) = (-1)^j \delta, \quad j = 0, 1, \dots,$$

то $S_0 I B_0 = \delta \|S_0\|$. Применение теоремы 5.3 гл. I завершает доказательство теоремы. □

Заметим, что в приведенном доказательстве можно было бы не пользоваться результатом Хейнса **[97]** об экстремальности функции B_0 в задаче Мию, так как этот результат после доказательства интегрального представления (4.21) автоматически вытекает из теоремы 5.3 гл. I.

В заключение рассмотрим задачу оптимальной интерполяции, под которой мы понимаем задачу о нахождении величины

$$e_n(E, \delta) := \inf_{\substack{F \subset E \\ \operatorname{card} F \le n}} \sup_{z_0 \in E} e(z_0, F, \delta) \tag{4.22}$$

и множества F_0, на котором достигается нижняя грань в (4.22). Элементы множества F_0 назовем оптимальными узлами интерполяции.

Будем рассматривать задачу (4.22) для $E = [\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$ и $0 < \delta < 1$. Для точек $u, v \in D$ определим псевдогиперболическое расстояние формулой

$$\rho(u, v) := \left| \frac{u - v}{1 - \bar{u} v} \right|.$$

Если $W(z)$ — какое-либо конформное преобразование круга D, то $e_n(E, \delta) = e_n(W(E), \delta)$. Существует конформное преобразование круга D, переводящее отрезок $[\alpha, \beta]$ в симметричный отрезок $[-k, k]$. Поскольку псевдогиперболическое расстояние не меняется при конформном преобразовании круга, то

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(-k, k) = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Следовательно,

$$e_n([\alpha, \beta], \delta) = e_n([-k, k], \delta), \tag{4.23}$$

где

$$k = \frac{\rho(\alpha, \beta)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(\alpha, \beta)}}.$$

Таким образом, величина $e_n([\alpha, \beta], \delta)$ при фиксированных n и δ зависит лишь от псевдогиперболического расстояния $\rho(\alpha, \beta)$.

Положим для $\zeta := (x_1, \dots, x_n)$

$$\varphi(z_0, \zeta) := e(z_0, \{x_1, \dots, x_n\}, \delta), \quad \Psi(\zeta) := \sup_{z_0 \in [\alpha, \beta]} \varphi(z_0, \zeta).$$

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 4.2, можно показать, что при $\|\zeta_1-\zeta_2\|_{l_2^n} < \varepsilon\delta\,(1-\max\{|\alpha|,|\beta|\})$ для всех $z_0\in[\alpha,\beta]$ выполнено неравенство

$$|\varphi(z_0,\zeta_1)-\varphi(z_0,\zeta_2)|\le\varepsilon.$$

Пусть $\Psi(\zeta_1)=\varphi(z_0,\zeta_1)$. Тогда

$$\Psi(\zeta_1)-\Psi(\zeta_2)\le\varphi(z_0,\zeta_1)-\varphi(z_0,\zeta_2)\le\varepsilon.$$

Поскольку ζ_1 и ζ_2 можно поменять местами, то справедливо неравенство

$$|\Psi(\zeta_1)-\Psi(\zeta_2)|\le\varepsilon,$$

из которого следует непрерывность функции $\Psi(\zeta)$ при $\zeta\in[\alpha,\beta]^n$. Отсюда вытекает существование оптимальных узлов интерполяции.

При $n\ge 2$ положим

$$e_n^*([\alpha,\beta],\delta):=\inf_{\substack{F\subset[\alpha,\beta]\\ \operatorname{card}F\le n\\ \alpha,\beta\in F}}\ \sup_{z_0\in[\alpha,\beta]} e(z_0,F,\delta).$$

Лемма 4.1. *Пусть* $0<\delta<1$ *и* $\rho(\alpha_1,\beta_1)>\rho(\alpha,\beta)$. *Тогда имеют место неравенства*

$$e_n([\alpha_1,\beta_1],\delta)>e_n([\alpha,\beta],\delta), \tag{4.24}$$

$$e_n^*([\alpha_1,\beta_1],\delta)>e_n^*([\alpha,\beta],\delta). \tag{4.25}$$

Доказательство. Докажем неравенство (4.24). В силу равенства (4.23) достаточно доказать, что

$$e_n([-k_1,k_1],\delta)>e_n([-k,k],\delta)$$

при $k_1>k$. Пусть $u_1,\dots,u_n$ — оптимальные узлы интерполяции для задачи (4.22) при $E=[-k_1,k_1]$, а точка $u_0\in E$ такова, что

$$e(u_0,\{u_1,\dots,u_n\},\delta)=e_n([-k_1,k_1],\delta).$$

Рассмотрим точки $z_j:=\dfrac{k}{k_1}u_j$, $j=0,\dots,n$. Очевидно, что $z_j\in[-k,k]$. Пусть f^* — экстремальная функция в задаче о нахождении величины $e(z_0,\{z_1,\dots,z_n\},\delta)$. Тогда $|f^*(z_j)|\le\delta$, $j=1,\dots,n$, и $|f^*(z_0)|\ge e_n([-k,k],\delta)$. Рассмотрим теперь функцию $g(z):=f^*\left(\dfrac{k}{k_1}z\right)$. Заметим, что $g(u_j)=f^*(z_j)$, $j=0,\dots,n$, кроме того, g не является произведением Бляшке, т.к. таковым является f^*. Тем самым

$$e_n([-k_1,k_1],\delta)=e(u_0,\{u_1,\dots,u_n\},\delta)>g(u_0)\ge e_n([-k,k],\delta).$$

Аналогично доказывается неравенство (4.25). Лемма доказана. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть* $[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$. *Положим* $a:=\operatorname{arth}\alpha$, $b:=\operatorname{arth}\beta$, $d:=b-a$. *Тогда при всех* $n\geq 2$ *и*

$$\frac{\operatorname{th} d\operatorname{th}\dfrac{n-2}{n-1}d}{1+\sqrt{1-\operatorname{th}^2 d\operatorname{th}^2\dfrac{n-2}{n-1}d}}\leq\delta<1 \tag{4.26}$$

имеет место равенство

$$e_n^*([\alpha,\beta],\delta)=\frac{\operatorname{th}^2\dfrac{d}{2(n-1)}+\delta}{1+\delta\operatorname{th}^2\dfrac{d}{2(n-1)}}, \tag{4.27}$$

а единственными оптимальными узлами интерполяции являются узлы

$$z_j^0:=\operatorname{th}\left[\frac{a+b}{2}-(n+1-2j)\frac{d}{2(n-1)}\right],\quad j=1,\ldots,n. \tag{4.28}$$

Доказательство. Узлы (4.28) равномерно распределены на отрезке $[\alpha,\beta]$ относительно псевдогиперболического расстояния, т.е.

$$\rho(z_j^0,z_{j+1}^0)=\operatorname{th}\frac{d}{n-1},\quad j=1,\ldots,n-1.$$

Следовательно, для любой системы узлов $\alpha=z_1\leq\ldots\leq z_n=\beta$ найдутся узлы z_k, z_{k+1}, для которых

$$\rho(z_k,z_{k+1})\geq\operatorname{th}\frac{d}{n-1}. \tag{4.29}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z):=\frac{\delta-W(z)}{1-\delta W(z)}, \tag{4.30}$$

где

$$W(z):=\prod_{j=k}^{k+1}\frac{z-z_j}{1-z_jz}.$$

Докажем, что при $z\in[z_k,z_{k+1}]$

$$e(z,\{z_1,\ldots,z_n\},\delta)=\varphi(z).$$

Поскольку φ — произведение Бляшке второго порядка, удовлетворяющее условию $\varphi(z_j)=\delta$, $j=k,k+1$, то достаточно доказать справедливость неравенств $|\varphi(z_j)|\leq\delta$, $j=1,\ldots,n$ (см. теорему 2.1). В силу монотонности функции φ на отрезках $[\alpha,z_k]$, $[z_{k+1},\beta]$ достаточно убедиться, что $\varphi(\alpha)\geq-\delta$ и $\varphi(\beta)\geq-\delta$. Имеем

$$\varphi(\alpha)=\frac{\delta-W(\alpha)}{1-\delta W(\alpha)}=\frac{\delta-\rho(\alpha,z_k)\rho(\alpha,z_{k+1})}{1-\delta\rho(\alpha,z_k)\rho(\alpha,z_{k+1})}.$$

Так как $\rho(\alpha, z_{k+1}) \le \operatorname{th} d$, а

$$\rho(\alpha, z_k) = \frac{\rho(\alpha, z_{k+1}) - \rho(z_k, z_{k+1})}{1 - \rho(z_k, z_{k+1})\rho(\alpha, z_{k+1})} \le \frac{\operatorname{th} d - \operatorname{th} \dfrac{d}{n-1}}{1 - \operatorname{th} \dfrac{d}{n-1} \operatorname{th} d} = \operatorname{th} \frac{n-2}{n-1} d,$$

то

$$\varphi(\alpha) \ge \frac{\delta - \operatorname{th} d \operatorname{th} \dfrac{n-2}{n-1} d}{1 - \delta \operatorname{th} d \operatorname{th} \dfrac{n-2}{n-1} d}.$$

Учитывая условие (4.26), получаем $\varphi(\alpha) \ge -\delta$. Аналогично доказывается неравенство $\varphi(\beta) \ge -\delta$. Нетрудно убедиться, что

$$\sup_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \varphi(z) = \frac{\rho^2 + \delta}{1 + \delta\rho^2},$$

где

$$\rho := \frac{\rho(z_k, z_{k+1})}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(z_k, z_{k+1})}} = \operatorname{th} \frac{\operatorname{arth} \rho(z_k, z_{k+1})}{2}.$$

В силу (4.29) справедливы неравенства

$$\sup_{z \in [\alpha, \beta]} e(z, \{z_1, \ldots, z_n\}, \delta) \ge \sup_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \varphi(z) \ge \frac{\operatorname{th}^2 \dfrac{d}{2(n-1)} + \delta}{1 + \delta \operatorname{th}^2 \dfrac{d}{2(n-1)}}, \tag{4.31}$$

которые обращаются в равенства (для всех k) при $z_j = z_j^0$, $j = 1, \ldots, n$. Тем самым доказано равенство (4.27) и оптимальность узлов (4.28). Единственность оптимальных узлов следует из того, что для узлов, отличных от (4.28), найдутся точки z_k, z_{k+1}, для которых неравенство (4.29), а следовательно, и второе из неравенств (4.31) являются строгими. Теорема доказана. □

Теорема 4.5. *В обозначениях теоремы* 4.4 *пусть* θ_n *удовлетворяет уравнению*

$$\theta_n + 2 \operatorname{arth} \operatorname{th}^2 \frac{\theta_n}{2(n-1)} = d. \tag{4.32}$$

Тогда при всех $\operatorname{th} \dfrac{\theta_n}{2} \le \delta < 1$ *имеет место равенство*

$$e_n([\alpha, \beta], \delta) = \frac{\operatorname{th}^2 \dfrac{\theta_n}{2(n-1)} + \delta}{1 + \delta \operatorname{th}^2 \dfrac{\theta_n}{2(n-1)}}, \tag{4.33}$$

а единственными оптимальными узлами интерполяции являются узлы

$$z_j^0 := \operatorname{th}\left[\frac{a+b}{2} - (n+1-2j)\frac{\theta_n}{2(n-1)}\right], \quad j = 1, \dots, n. \tag{4.34}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при $\theta_n \in [0, +\infty)$ левая часть (4.32) монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Тем самым уравнение (4.32) имеет единственное решение. Пусть $\alpha \le z_1 \le \ldots \le z_n \le \beta$ — произвольная система узлов. Докажем, что при

$$\rho(z_1, z_n) \le \frac{2\delta}{1+\delta^2} \tag{4.35}$$

имеет место равенство

$$\sup_{z\in[\alpha,z_1]} e(z, \{z_1, \dots, z_n\}, \delta) = \frac{\rho(\alpha, z_1) + \delta}{1 + \delta\rho(\alpha, z_1)}. \tag{4.36}$$

Обозначим через φ функцию, определенную равенством (4.30), в котором

$$W(z) := \frac{z - z_1}{1 - z_1 z}.$$

В силу монотонности φ при $z \in [z_1, z_n]$ имеем

$$\delta \ge \varphi(z) \ge \varphi(z_n) = \frac{\delta - \rho(z_1, z_n)}{1 - \delta\rho(z_1, z_n)} \ge -\delta.$$

Отсюда следует, что при $z \in [\alpha, z_1]$

$$e(z, \{z_1, \dots, z_n\}, \delta) = \varphi(z).$$

Из последнего равенства очевидным образом вытекает (4.36). Аналогично при условии (4.35) доказывается равенство

$$\sup_{z\in[z_n,\beta]} e(z, \{z_1, \dots, z_n\}, \delta) = \frac{\rho(z_n, \beta) + \delta}{1 + \delta\rho(z_n, \beta)}. \tag{4.37}$$

Из теоремы 4.4 получаем, что

$$e_n^*([z_1^0, z_n^0], \delta) = \sup_{z\in[z_1^0,z_n^0]} e(z, \{z_1^0, \dots, z_n^0\}, \delta) = R, \tag{4.38}$$

где через R для краткости обозначена величина, стоящая в правой части равенства (4.33). В силу равенств (4.34) и (4.32) имеем

$$\rho(\alpha, z_1^0) = \rho(z_n^0, \beta) = \operatorname{th}\frac{d - \theta_n}{2} = \operatorname{th}^2\frac{\theta_n}{2(n-1)}. \tag{4.39}$$

Поскольку $\rho(z_1^0, z_n^0) = \operatorname{th}\theta_n$, то неравенство (4.35) выполнено вследствие условия $\operatorname{th}\dfrac{\theta_n}{2} \le \delta$. Поэтому из (4.36)–(4.38) следует, что

$$\sup_{z\in[\alpha,\beta]} e(z, \{z_1^0, \dots, z_n^0\}, \delta) = R. \tag{4.40}$$

Рассмотрим произвольную систему узлов $\alpha \le z_1 \le \ldots \le z_n \le \beta$, отличную от $z_1^0, \ldots, z_n^0$. Если $\rho(z_1, z_n) > \rho(z_1^0, z_n^0) = \operatorname{th}\theta_n$, то из леммы 4.1

$$e_n^*([z_1, z_n], \delta) > e_n^*([z_1^0, z_n^0], \delta).$$

Отсюда и из (4.38)

$$\sup_{z\in[\alpha,\beta]} e(z, \{z_1, \ldots, z_n\}, \delta) > R. \tag{4.41}$$

Если

$$z_j = z_j^0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.42}$$

то в силу единственности оптимальных узлов для величины $e_n^*([z_1^0, z_n^0], \delta)$, доказанной в теореме 4.4, неравенство (4.41) по-прежнему выполнено.

Предположим, что $\rho(z_1, z_n) \le \operatorname{th}\theta_n$ и хотя бы одно из равенств (4.42) не выполнено. Тогда либо $\rho(\alpha, z_1) > \rho(\alpha, z_1^0)$, либо $\rho(z_n, \beta) > \rho(z_n^0, \beta)$. Пусть для определенности $\rho(\alpha, z_1) > \rho(\alpha, z_1^0)$. Условие $\rho(z_1, z_n) \le \operatorname{th}\theta_n$ гарантирует выполнение условия (4.35). Поэтому из (4.36) и (4.39) будем иметь

$$\sup_{z\in[\alpha,z_1]} e(z, \{z_1, \ldots, z_n\}, \delta) > R.$$

Отсюда следует неравенство (4.41). Случай $\rho(z_n, \beta) > \rho(z_n^0, \beta)$ разбирается аналогично. Таким образом, для любых узлов, отличных от $z_1^0, \ldots, z_n^0$, имеет место неравенство (4.41), из которого с учетом (4.40) вытекает равенство (4.33), а также единственность оптимальных узлов (4.34). Теорема доказана. □

Нетрудно убедиться, что при

$$\frac{\rho(\alpha, \beta)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(\alpha, \beta)}} \le \delta < 1$$

условие теорем 4.4 и 4.5 выполнены при любом $n \ge 2$. Из формул (4.27) и (4.33) следует, что в этом случае имеют место равенства

$$e_{n+1}^*([\alpha, \beta], \delta) = \delta + \frac{(1-\delta^2)d^2}{4n^2} - \frac{(1-\delta^2)(2+3\delta)d^4}{48n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

$$e_{n+1}([\alpha, \beta], \delta) = \delta + \frac{(1-\delta^2)d^2}{4n^2} - \frac{(1-\delta^2)(12+2\delta+3\delta d)d^3}{48n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

где $d := \operatorname{arth}\rho(\alpha, \beta)$.

§5. Восстановление производных ограниченных аналитических и гармонических функций по неточным данным

Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и $E \subset \Omega$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f^{(k)}(z_0)$ для $f \in W$ и $z_0 \in \Omega$ по значениям функции f, заданным на множестве E с погрешностью δ в норме пространства $C(E)$. Положим

$$e^{(k)}(z_0, E, \delta, W) := \inf_{S\colon C(E)\to\mathbb{C}} \sup_{f\in W} \sup_{\substack{y\in C(E)\\ \|f-y\|_{C(E)}\le\delta}} |f^{(k)}(z_0) - S(y)|. \quad (5.1)$$

Метод, на котором достигается нижняя грань в (5.1) будем называть оптимальным.

Из теоремы 4.2 гл. I следует, что если W — выпуклый уравновешенный класс функций, то имеет место равенство

$$e^{(k)}(z_0, E, \delta, W) = \sup_{\substack{f\in W\\ |f(z)|\le\delta,\ z\in E}} |f^{(k)}(z_0)| \quad (5.2)$$

(при $k = 0$ и $W = BH_\infty$ это равенство совпадает с равенством (2.1)).

Положим

$$B_3(z, \delta^2) := zB_2(-z^2, \delta^2) = z\prod_{j=1}^{\infty} \frac{a_j^2 - z^2}{1 - a_j^2 z^2},$$

где B_2 и a_j определены равенствами (4.14).

Теорема 5.1. *Для всех $0 < \delta < 1$ и $z_0 \in (-1, 1)$ метод*

$$f'(z_0) \approx S_1(z_0, \delta)\widetilde{I}f$$
$$:= \frac{2\pi}{D'(1-\delta^4)(1-z_0^2)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{D'}\right)} \widetilde{f}(z_j),$$

где

$$z_j = \frac{\operatorname{th}\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{2D'}\right) + z_0}{1 + z_0 \operatorname{th}\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{2D'}\right)},$$

D и D' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей δ^2 и $\sqrt{1-\delta^4}$, соответственно, является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞ по значениям, заданным на множестве $(-1, 1)$ с погрешностью δ. Функция $B_3\left(\dfrac{z - z_0}{1 - z_0 z}, \delta^2\right)$

— *экстремальная и*

$$e'(z_0,(-1,1),\delta,BH_\infty)=\frac{2\delta D'}{\pi(1-z_0^2)}=\frac{4}{\pi(1-z_0^2)}\delta\log\frac{2}{\delta}+O\left(\delta^5\log\frac{2}{\delta}\right). \tag{5.3}$$

Доказательство. Напомним (см. §6 гл. II), что

$$B_1(z,\delta^2):=B_0(-z^2,\delta^2)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j^2-z^2}{1-\alpha_j^2z^2},$$

где B_0 и α_j определены равенствами (4.12). Положим

$$\begin{aligned} h_1(z,\delta^2)&:=h_0^{-1}(-z^2,\delta^2),\\ \varphi(z)&:=\frac{B_3(z,\delta^2)h_1(z,\delta^2)}{zB_1(z,\delta^2)}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где h_0 определено равенством (4.16). Из представлений (4.15), (4.13) и (4.17) будем иметь

$$\begin{aligned} B_3(z,\delta^2)&=\delta\,\mathrm{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arth}z,\delta^2\right),\\ B_1(z,\delta^2)&=\delta\,\mathrm{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arth}z+D,\delta^2\right),\\ h_1(z,\delta^2)&=(1-z^2)\,\mathrm{dn}^{-2}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arth}z,\delta^2\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Таким образом,

$$\varphi(z)=\frac{1-z^2}{z}\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arth}z,\delta^2\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arth}z,\delta^2\right)\mathrm{dn}\left(\frac{2D'}{\pi}\operatorname{arth}z,\delta^2\right)}.$$

Пользуясь преобразованием Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(z)&=\frac{1-z^2}{z}\frac{1}{1+\delta^2}\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}\operatorname{arth}z,\lambda\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}\operatorname{arth}z,\lambda\right)}\\ &=-\frac{1-z^2}{z}\frac{1}{1+\delta^2}\frac{i}{\mathrm{dn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}\operatorname{arth}z+i\Lambda',\lambda\right)}, \end{aligned}$$

где $\lambda=2\delta/(1+\delta^2)$, а Λ' — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $\lambda'=\sqrt{1-\lambda^2}$. Если $z=e^{i\theta}$, $\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, то

$\operatorname{arth} z = x + i\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}\sin\theta$, где $x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\right|$. Следовательно,

$$\varphi(e^{i\theta}) = \frac{2}{1+\delta^2}\frac{|\sin\theta|}{\operatorname{dn}\left(\dfrac{4\Lambda'}{\pi}x, \lambda\right)}.$$

Поскольку для всех $y \in \mathbb{R}$ $1 \le \operatorname{dn}(y,\lambda) \ge \lambda' = (1-\delta^2)/(1+\delta^2)$, то почти для всех $\theta \in [0,2\pi]$ $\varphi(e^{i\theta}) > 0$ и $\varphi(e^{i\theta}) \in L_1[0,2\pi]$. Для $f \in H_\infty$ положим

$$Jf := \frac{\delta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{B_0(e^{i\theta},\delta^2)}\varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Нетрудно убедиться, что этот интеграл может быть записан в виде

$$Jf = \frac{\delta}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{h_1(z,\delta^2)f(z)}{B_1(z,\delta^2)}\frac{dz}{z^2}. \tag{5.6}$$

В силу (5.5) для $a_j := \operatorname{th}\left(j\dfrac{\pi D}{D'}\right)$

$$B_1(a_j,\delta^2) = (-1)^j\delta.$$

Следовательно, к интегралу (5.6) применима лемма 6.1 гл. II, из которой находим

$$Jf = f'(0) + \delta\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{h_1(\alpha_j,\delta^2)}{B_1'(\alpha_j,\delta^2)\alpha_j^2}f(\alpha_j).$$

Из равенств (5.5) имеем

$$B_1'(\alpha_j,\delta^2) = (-1)^j\delta\frac{2D'}{\pi(1-\alpha_j^2)}, \quad h_1(\alpha_j,\delta^2) = \frac{1-\alpha_j^2}{1-\delta^4}.$$

Тем самым

$$Jf = f'(0) - S_1(0,\delta)If.$$

Кроме того,

$$S_1(0,\delta)If = \delta\|S_1(0,\delta)\|.$$

Применяя теорему 5.3 гл. I, получим оптимальность метода $S_1(0,\delta)$ для $z_0 = 0$ и экстремальность функции $B_3(z,\delta^2)$. Отсюда

$$e'(0,(-1,1),\delta,BH_\infty) = B_3'(0,\delta^2) = \delta\frac{2D'}{\pi}.$$

Из равенства

$$D' = \log\frac{4}{\delta^2} + O\left(\delta^4\log\frac{4}{\delta^2}\right)$$

вытекают равенства (5.3) при $z_0 = 0$. В случае произвольного $z_0 \in (-1,1)$ утверждение теоремы получается с помощью конформного преобразования круга D

$$w(z) := \frac{z+z_0}{1+z_0 z}$$

и рассмотрения функций $g(z) = f(w(z))$, для которых $g'(0) = (1 - z_0^2)f'(z_0)$. Теорема доказана. □

Конформно отображая полосу D_H (см. (2.6.7)) на единичный круг, из теоремы 5.1 получаем

Следствие 5.1. *При всех* $0 < \delta < 1$ *и* $z_0 \in \mathbb{R}$ *метод*

$$\begin{aligned} f'(z_0) &\approx S_1^H(z_0,\delta)\widetilde{I}f \\ &:= \frac{\pi^2}{2HD'(1-\delta^4)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{D'}\right)} \widetilde{f}\left(z_0 + (2j-1)\frac{2HD}{D'}\right) \end{aligned}$$

является оптимальным методом восстановления на классе $BH_\infty(D_H)$ *по значениям на* $\mathbb{R}$, *заданным с погрешностью* δ, *функция* $\delta \operatorname{sn}\left(\dfrac{D'}{2H}(z - z_0), \delta^2\right)$ — *экстремальная и*

$$e'(z_0, \mathbb{R}, BH_\infty(D_H)) = \frac{\delta D'}{2H} = \frac{1}{H}\log\frac{2}{\delta} + O\left(\delta^5 \log\frac{2}{\delta}\right). \tag{5.7}$$

В силу равенства (5.2) из (5.7) получаем точное неравенство колмогоровского типа для производных функций $f \in H_\infty(D_H)$

$$\begin{aligned} \|f'\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{2H}&\|f\|_{C(\mathbb{R})}\|f\|^2_{H_\infty(D_H)} \\ &\times \int_0^{\pi/2} \left(\|f\|^4_{H_\infty(D_H)}\cos^2 t + \|f\|^4_{C(\mathbb{R})}\sin^2 t\right)^{-1/2} dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим аналогичную задачу восстановления для класса Bh_∞.

Теорема 5.2. *Для всех* $0 < \delta < 1$ *и* $z_0 \in (-1, 1)$ *метод*

$$u'(z_0) \approx \cos^{-2}\frac{\pi}{4}\delta S_1\left(z_0, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)\widetilde{I}u$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_∞ *по значениям на* $(-1, 1)$, *заданным с погрешностью* δ, *функция*

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} B_3\left(\frac{z - z_0}{1 - z_0 z}, \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\delta\right)$$

— *экстремальная и*

$$\begin{aligned} e'(z_0, (-1,1), \delta, Bh_\infty) = \frac{8\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta}{\pi^2(1 - z_0^2)}D_0' = \frac{4}{\pi(1 - z_0^2)}&\delta\log\frac{8}{\pi\delta} \\ &+ O\left(\delta^3\log\frac{8}{\pi\delta}\right), \end{aligned}$$

где D_0' — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{4}\delta}$.

Доказательство. Для $f\in H_2$ положим
$$Jf:=\frac{\Delta}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{h_1(z,\Delta^2)(1+B_3^2(z,\Delta^2))}{B_1(z,\Delta^2)z^2}f(z)\,dz,$$
где $\Delta:=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta$. Аналогично рассуждениям, проведенным в доказательстве теоремы 5.1, получаем
$$Jf=f'(0)-(1+\Delta^2)S_1(0,\Delta)If. \tag{5.8}$$
С другой стороны,
$$Jf=\frac{\Delta}{2\pi i}\int_{|z|=1}2(\operatorname{Re}B_3(z,\Delta^2))\varphi(z)f(z)\,\frac{dz}{z},$$
где φ определена равенством (5.4). Рассмотрим гармоническую в D функцию
$$u_0(z):=\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg}B_3(z,\Delta^2).$$
В силу того, что $u_0(e^{i\theta})=\operatorname{sign}\operatorname{Re}B_3(e^{i\theta},\Delta^2)$ при $\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, имеем
$$Jf=\frac{\Delta}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta, \tag{5.9}$$
где $\psi(z):=2|\operatorname{Re}B_3(z,\Delta^2)|\varphi(z)$. Из свойств функции φ вытекает, что $\psi(e^{i\theta})>0$ почти всюду и $\psi(e^{i\theta})\in L_1[0,2\pi]$. Взяв вещественные части от равенств (5.8), (5.9) и обозначив через $u:=\operatorname{Re}f$, получаем
$$u'(0)-(1+\Delta^2)S_1(0,\Delta)Iu=\frac{\Delta}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{5.10}$$
Если $u\in h_\infty\subset h_2$, то сопряженная функция $v\in h_2$ (см. [**15**, стр. 380]) и, следовательно, $u+iv\in H_2$. Тем самым равенство (5.10) справедливо для всех $u\in h_\infty$. Для применения теоремы 5.3 гл. I остается заметить, что $S_1(0,\Delta)Iu_0=\delta\|S_1(0,\Delta)\|$, так как $u_0(\alpha_j)=(-1)^{j+1}\delta$. Таким образом, при $x=0$ метод
$$(1+\Delta^2)S_1(0,\Delta)=\cos^{-2}\frac{\pi}{4}\delta S_1\left(0,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)$$
является оптимальным, функция u_0 — экстремальная и
$$e'(0,(-1,1),\delta,Bh_\infty)=u_0'(0)=\frac{8\Delta}{\pi^2}D_0'.$$
Переход к произвольному $z_0\in(-1,1)$ осуществляется аналогично соответствующему переходу в доказательстве теоремы 5.1. Теорема доказана. $\square$

Следствие 5.2. *При всех* $0<\delta<1$ *и* $z_0\in\mathbb{R}$ *метод*

$$u'(z_0)\approx\cos^{-2}\frac{\pi}{4}\delta S_1^H\left(z_0,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)\widetilde{I}u$$

является оптимальным методом восстановления на классе $Bh_\infty(D_H)$ *по значениям на* $\mathbb{R}$, *заданным с погрешностью* δ, *функция*

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\operatorname{sn}\left(\frac{D_0'}{2H}(z-z_0),\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\delta\right)\right)$$

— *экстремальная и*

$$e'(z_0,\mathbb{R},\delta,Bh_\infty(D_H))=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta}{\pi H}D_0'=\frac{1}{H}\delta\log\frac{8}{\pi\delta}+O\left(\delta^3\log\frac{8}{\pi\delta}\right).$$

Из следствия 5.2 вытекает точное неравенство для производных функций $u\in Bh_\infty(D_H)$

$$\|u'\|_{C(\mathbb{R})}\le\frac{2}{\pi H}\|u\|_{h_\infty(D_H)}\int_0^{\pi/2}\left(\operatorname{ctg}^2R_u\cos^2t+\operatorname{tg}^2R_u\sin^2t\right)^{-1/2}dt,$$

где

$$R_u:=\frac{\pi}{4}\frac{\|u\|_{C(\mathbb{R})}}{\|u\|_{h_\infty(D_H)}}.$$

Рассмотрим аналогичные задачи оптимального восстановления для второй производной. Оказывается, что здесь существует некоторое значение $\delta_0\in(0,1)$ такое, что характер поведения экстремальной функции качественно меняется в зависимости от того, какому из множеств $(0,\delta_0]$ или $(\delta_0,1)$ принадлежит величина погрешности задания исходных данных δ.

Положи

$$C(\delta):=\frac{8}{3}\left[\frac{1-5\delta^4}{2}\left(\frac{D'}{\pi}\right)^2-1\right].$$

Из монотонного убывания D' при $\delta\in(0,1)$ следует, что уравнение $C(\delta)=0$ имеет единственное решение $\delta_0\in(0,1)$ $(\delta_0=0,2145\ldots)$, причем $C(\delta)>0$ при $\delta\in(0,\delta_0)$ и $C(\delta)<0$ при $\delta\in(\delta_0,1)$.

Рассмотрим функцию

$$F(x):=\frac{4}{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\pi D}{D'}x\right)}\times\left[1-\frac{D'}{2\pi}\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi D}{D'}x\right)\frac{\operatorname{cn}(Dx,\delta^2)(1+\delta^4\operatorname{sn}^2(Dx,\delta^2))}{\operatorname{sn}(Dx,\delta^2)\operatorname{dn}(Dx,\delta^2)}\right].$$

Пользуясь разложениями

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x =& x + \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \operatorname{sn}(x,k) = x - \frac{1+k^2}{6}x^3 + O(x^5),\\ \operatorname{cn} x =& 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \operatorname{dn}(x,k) = 1 - k^2\frac{x^2}{2} + O(x^4),\end{aligned}$$

получаем

$$F(x) = C(\delta) + O(x^2).$$

Таким образом, при $\delta \in (\delta_0, 1)$ $F(0) < 0$. Поскольку $F(1) = 4\operatorname{sh}^{-2}\left(\dfrac{\pi D}{D'}\right) > 0$, то при любом $\delta \in (\delta_0, 1)$ существует $\gamma \in (0,1)$, для которого $F(\gamma) = 0$.

Теорема 5.3. *При всех $0 < \delta < 1$ метод $f''(0) \approx S_2(\delta)\widetilde{I}f$, где при $0 < \delta \le \delta_0$*

$$S_2(\delta)\widetilde{I}f := -C(\delta)\widetilde{f}(0) + 8\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\ne 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D}{D'}\right)}\widetilde{f}\left(\operatorname{th}\left(j\frac{\pi D}{D'}\right)\right),$$

а при $\delta_0 < \delta < 1$

$$\begin{aligned}S_2(\delta)\widetilde{I}f :=& \frac{4\pi}{D'}\frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{sn}(D\gamma,\delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{2D'}\right)\operatorname{dn}^2(D\gamma,\delta^2)}\\ &\times\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\ne 0}}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D}{D'}\right)}{\operatorname{sh}^2\left((2j-\gamma)\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{sh}^2\left((2j+\gamma)\dfrac{\pi D}{D'}\right)}\widetilde{f}(x_j),\end{aligned}$$

$$x_j := \sqrt{\operatorname{th}\left((2j-\gamma)\frac{\pi D}{2D'}\right)\operatorname{th}\left((2j+\gamma)\frac{\pi D}{2D'}\right)\operatorname{sign} j},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞ по значениям, заданным на множестве $(-1,1)$ с погрешностью δ. Функция

$$f^*(z) = -B_0\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2}, \delta^2\right),$$

где

$$a := \begin{cases}0, & 0 < \delta \le \delta_0,\\ \operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{2D'}\right), & \delta_0 < \delta < 1,\end{cases}$$

является экстремальной и

$$e''(0,(-1,1),\delta,BH_\infty)=\begin{cases}\delta(1-\delta^4)\left(\dfrac{2D'}{\pi}\right)^2, & 0<\delta\le\delta_0,\\ \dfrac{4D'}{\pi}\dfrac{\delta(1-\delta^4)\operatorname{sn}(D\gamma,\delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{dn}(D\gamma,\delta^2)}, & \delta_0<\delta<1.\end{cases} \tag{5.11}$$

Доказательство. Для $f\in H_\infty$ положим

$$Jf:=\frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|z|=1}\psi(z)f(z)\,\frac{dz}{z^3}, \tag{5.12}$$

где

$$\alpha:=\begin{cases}\delta\dfrac{4D'}{\pi}, & 0<\delta\le\delta_0,\\ \delta\dfrac{4\operatorname{sn}(D\gamma,\delta^2)}{\operatorname{sh}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{dn}^2(D\gamma,\delta^2)}, & \delta_0<\delta<1,\end{cases}$$

$$\psi(z):=(1-z^2)^2h_0\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2},\delta^2\right)B_2^{-1}\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2},\delta^2\right).$$

Применяя к интегралу (5.12) лемму 6.1 гл. II, будем иметь

$$Jf=\frac{\alpha}{2}(\psi(0)f''(0)+2\psi'(0)f'(0))+\psi''(0)f(0))\\ -\frac{\alpha}{2}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\ne0}}^{\infty}\frac{(1-x_j^2)^2(1+a^2x_j^2)^2h_0(-a_j^2,\delta^2)}{x_j^4(1-a^4)B_2'(-a_j^2,\delta^2)}f(x_j),$$

где

$$x_j:=\sqrt{\frac{a_j^2-a^2}{1-a^2a_j^2}}\operatorname{sign}j.$$

Легко убедиться, что при $\delta_0<\delta<1$ x_j совпадают с определением, данным в формулировке теоремы, а при $0<\delta\le\delta_0$ $x_j=a_j$. Из представлений (4.15) и (4.17) находим

$$h_0(-a_j^2,\delta^2)=\frac{1}{1-a_j^2},\quad B_2'(-a_j^2,\delta^2)=(-1)^{j+1}\delta\frac{D'}{\pi}\frac{1}{a_j^2(1-a_j^2)},$$

$$\psi(z)=\frac{(1-z^2)(1+a^2z^2)\operatorname{dn}^2\left(\dfrac{2D'}{\pi}v,\delta^2\right)\operatorname{th}v}{\delta(1-a^2)\operatorname{sn}\left(\dfrac{2D'}{\pi}v,\delta^2\right)},\quad \frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2}=\operatorname{th}^2v.$$

Отсюда $\psi(0) = 2\alpha^{-1}$, $\psi'(0) = 0$, $\dfrac{\alpha}{2}\psi''(0) = C(\delta)$ при $0 < \delta \le \delta_0$ и $\dfrac{\alpha}{2}\psi''(0) = F(\gamma) = 0$ при $\delta_0 < \delta < 1$. Тем самым имеет место равенство

$$Jf = f''(0) - S_2(\delta)If.$$

Интеграл (5.12) можно записать также в виде

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \overline{f^*(e^{i\theta})}\varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где

$$\varphi(z) := \frac{\psi(z)f^*(z)}{z^2}.$$

В доказательстве теоремы 4.3 было показано, что функция

$$\varphi_0(z) := \frac{(1+z)^2}{z}\frac{B_0(z,\delta^2)h_0(z,\delta^2)}{B_2(z,\delta^2)}$$

удовлетворяет условиям: $\varphi_0(e^{i\theta}) \in L_1(0,2\pi)$ и почти всюду $\varphi_0(e^{i\theta}) > 0$. В силу легко проверяемого равенства

$$\varphi(z) = \frac{(z^2+a^2)(1+a^2z^2)}{(1-a^2)^2z^2}\varphi_0\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2}\right)$$

и того, что при всех $|z| = 1$

$$\frac{(z^2+a^2)(1+a^2z^2)}{z^2} > 0,$$

функция φ обладает теми же свойствами. Чтобы воспользоваться теоремой 5.3 гл. I, остается проверить равенство $S_2(\delta)If^* = \delta\|S_2(\delta)\|$, которое следует из равенств

$$B_0(-a_j^2,\delta^2) = (-1)^j\delta.$$

Соотношения (5.11) получаются дифференцированием экстремальной функции f^*. Теорема доказана. $\square$

Следствие 5.3. *В условиях теоремы* 5.3 *при всех* $0 < \delta < 1$ *и* $z_0 \in \mathbb{R}$ *метод* $f''(z_0) \approx S_2^H(z_0,\delta)\widetilde{I}f$, *где при* $0 < \delta \le \delta_0$

$$S_2^H(z_0,\delta)\widetilde{I}f := -\frac{\pi^2}{16H^2}C(\delta)\widetilde{f}(z_0) + \frac{\pi^2}{2H^2}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\ne 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D}{D'}\right)}\widetilde{f}\left(z_0 + j\frac{4HD}{D'}\right),$$

а при $\delta_0 < \delta < 1$

$$S_2^H(z_0,\delta)\widetilde{I}f := \frac{\pi^3}{4H^2D'}\frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{sn}(D\gamma,\delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi D}{2D'}\right)\operatorname{dn}^2(D\gamma,\delta^2)}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq 0}}^{\infty}(-1)^{j+1}$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D}{D'}\right)}{\operatorname{sh}^2\left((2j-\gamma)\dfrac{\pi D}{D'}\right)\operatorname{sh}^2\left((2j+\gamma)\dfrac{\pi D}{D'}\right)}\widetilde{f}\left(z_0+\frac{4H}{\pi}\operatorname{arth}x_j\right),$$

является оптимальным методом восстановления на классе $BH_\infty(D_H)$ *по значениям на* $\mathbb{R}$*, заданным с погрешностью* δ*. Функция* $-B_0\left(-\dfrac{\xi^2+a^2}{1+a^2\xi^2},\delta^2\right)$*, где* $\xi := \operatorname{th}\left(\dfrac{\pi}{4H}(z-z_0)\right)$*, является экстремальной и*

$$e''(z_0,\mathbb{R},\delta,BH_\infty(D_H)) = \frac{\pi^2}{16H^2}e''(0,(-1,1),\delta,BH_\infty).$$

Построим теперь оптимальный метод восстановления второй производной в аналогичной задаче для класса Bh_∞.

Положим

$$C_1(\Delta) := \frac{8}{3}\left[\frac{1-6\Delta^2+\Delta^4}{2}\left(\frac{D_1'}{\pi}\right)^2-1\right]$$

(через D_1 и D_1' будем обозначать полные эллиптические интегралы первого рода для модулей Δ и $\Delta' = \sqrt{1-\Delta^2}$, соответственно). В силу монотонного убывания Δ' при $\Delta \in (0,1)$ существует единственное решение $\Delta_1 \in (0,1)$ уравнения $C_1(\Delta) = 0$ ($\Delta_1 = 0.1726\ldots$). При $\Delta \in (0,\Delta_1)$ $C_1(\Delta) > 0$, а при $\Delta \in (\Delta_1,1)$ $C_1(\Delta) < 0$. Обозначим через $\delta_1 := \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\Delta_1 = 0.2176\ldots$.

Рассмотрим функцию

$$F_1(x) := \frac{4}{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\pi D_1}{D_1'}x\right)}\left[1-\frac{D_1'}{2\pi}\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi D_1}{D_1'}x\right)\frac{1+\Delta^4\operatorname{sn}^2(D_1x,\Delta^2)}{1-\Delta^4\operatorname{sn}^2(D_1x,\Delta^2)}\right.$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{cn}(D_1x,\Delta^2)\operatorname{dn}(D_1x,\Delta^2)}{\operatorname{sn}(D_1x,\Delta^2)}\right].$$

Аналогично тому, как это было сделано для функции F, можно показать, что

$$F_1(x) = C_1(\Delta) + O(x^2)$$

и существует $\gamma_1 \in (0,1)$, для которого $F_1(\gamma_1) = 0$.

Теорема 5.4. *Положим* $\Delta := \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta$,

$$a := \begin{cases} 0, & 0 < \delta \le \delta_1, \\ \operatorname{th}\left(\gamma_1 \dfrac{\pi D_1}{2D_1'}\right), & \delta_1 < \delta < 1, \end{cases}$$

$$x_j := \sqrt{\operatorname{th}\left((2j-\gamma_1)\frac{\pi D_1}{2D_1'}\right)\operatorname{th}\left((2j+\gamma_1)\frac{\pi D_1}{2D_1'}\right)}\operatorname{sign} j.$$

Тогда при всех $0 < \delta < 1$ *метод* $u''(0) \approx s_2(\delta)\widetilde{I}u$, *где при* $0 < \delta \le \delta_1$

$$s_2(\delta)\widetilde{I}f := -C_1(\Delta)\widetilde{u}(0) + 8\sum_{\substack{j=-\infty \\ j\ne 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)}\widetilde{u}\left(\operatorname{th}\left(j\frac{\pi D_1}{D_1'}\right)\right),$$

а при $\delta_1 < \delta < 1$

$$s_2(\delta)\widetilde{I}u := \frac{4\pi}{D_1'}\frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma_1\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)\operatorname{sn}(D_1\gamma_1,\Delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma_1\dfrac{\pi D_1}{2D_1'}\right)(1-\Delta^2\operatorname{sn}^2(D_1\gamma_1,\Delta^2))}$$

$$\times\sum_{\substack{j=-\infty \\ j\ne 0}}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)}{\operatorname{th}^2\left((2j-\gamma_1)\dfrac{\pi D_1}{2D_1'}\right)\operatorname{th}^2\left((2j+\gamma_1)\dfrac{\pi D_1}{2D_1'}\right)}\widetilde{u}(x_j),$$

является оптимальным методом восстановления на классе Bh_∞ *по значениям, заданным на множестве* $(-1,1)$ *с погрешностью* δ. *Функция*

$$u^*(z) := -\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} B_0\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2},\Delta^2\right)$$

является экстремальной и

$$e''(0,(-1,1),\delta,Bh_\infty) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\Delta(1-\Delta^2)\left(\dfrac{2D_1'}{\pi}\right)^2, & 0 < \delta \le \delta_1, \\ \dfrac{16D_1'}{\pi^2}\dfrac{\Delta(1-\Delta^2)\operatorname{sn}(D_1\gamma_1,\Delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma_1\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)(1-\Delta^2\operatorname{sn}^2(D_1\gamma_1,\Delta^2))}, & \delta_1 < \delta < 1. \end{cases}$$

Доказательство. Наметим лишь схему доказательства этой теоремы, так как оно во многом совпадает с доказательствами теорем 5.2 и 5.3. Для $f \in H_2$ положим

$$Jf := \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|z|=1}\psi(z)f(z)\,\frac{dz}{z^3}, \tag{5.13}$$

где

$$\alpha := \begin{cases} \dfrac{\Delta}{1+\Delta^2}\dfrac{4D_1}{\pi}, & 0<\delta\le\delta_1, \\ \dfrac{\Delta}{1+\Delta^2}\dfrac{4\,\mathrm{sn}(D_1\gamma_1,\Delta^2)}{\mathrm{sh}\left(\gamma_1\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)(1-\Delta^2\,\mathrm{sn}^2(D_1\gamma_1,\Delta^2))}, & \delta_1<\delta<1, \end{cases}$$

$$\psi(z) := (1-z^2)^2 h_0(\zeta,\Delta^2)B_2^{-1}(\zeta,\Delta^2)(1+B_0^2(\zeta,\Delta^2)),$$

$$\zeta := -\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2}.$$

Применяя к интегралу (5.13) лемму 6.1 гл. II, получаем

$$Jf = f''(0) - s_2(\delta)If.$$

С другой стороны,

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|z|=1} 2(\mathrm{Re}\,B_0(\zeta,\Delta^2))\varphi(z)f(z)\,\frac{dz}{z}, \tag{5.14}$$

где

$$\varphi(z) := -\frac{(1-z^2)^2}{z^2}\frac{B_0(\zeta,\Delta^2)h_0(\zeta,\Delta^2)}{B_2(\zeta,\Delta^2)}.$$

Интеграл (5.14) можно записать в виде

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(e^{i\theta})\varphi_1(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где

$$\varphi_1(z) := 2|\,\mathrm{Re}\,B_0(\zeta,\Delta^2)|\varphi(z).$$

Далее аналогично доказательству теоремы 5.2 доказывается, что для всех $u \in h_\infty$ имеет место равенство

$$u''(0) - s_2(\delta)Iu = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(e^{i\theta})\varphi_1(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Затем проверяется равенство $s_2(\delta)Iu^* = \delta\|s_2(\delta)\|$ и применяется теорема 5.3 гл. II. Теорема доказана. □

Следствие 5.4. *В условиях теоремы* 5.4 *при всех* $0<\delta<1$ *и* $z_0\in\mathbb{R}$ *метод* $u''(z_0) \approx s_2^H(z_0,\delta)\widetilde{I}u$, *где при* $0<\delta\le\delta_1$

$$s_2^H(z_0,\delta)\widetilde{I}u := -\frac{\pi^2}{16H^2}C_1(\Delta)\widetilde{u}(z_0) + \frac{\pi^2}{2H^2}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\ne 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\mathrm{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)}\widetilde{u}\left(z_0 + j\frac{4HD_1}{D_1'}\right),$$

а при $\delta_1 < \delta < 1$

$$s_2^H(z_0,\delta)\widetilde{I}u := \frac{\pi^3}{4H^2 D_1'} \frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma_1 \dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right) \operatorname{sn}(D_1\gamma_1, \Delta^2)}{\operatorname{th}\left(\gamma_1 \dfrac{\pi D_1}{2D_1'}\right)(1-\Delta^2 \operatorname{sn}^2(D_1\gamma_1,\Delta^2))}$$

$$\times \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)}{\operatorname{th}^2\left((2j-\gamma_1)\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)\operatorname{th}^2\left((2j+\gamma_1)\dfrac{\pi D_1}{D_1'}\right)}$$

$$\times \widetilde{u}\left(z_0 + \frac{4H}{\pi}\operatorname{arth} x_j\right),$$

является оптимальным методом восстановления на классе $Bh_\infty(D_H)$ *по значениям на* $\mathbb{R}$*, заданным с погрешностью* δ*. Функция* $u_0(z) := u^*\left(\operatorname{th}\left(\dfrac{\pi}{4H}(z-z_0)\right)\right)$ *— экстремальная и*

$$e''(z_0,\mathbb{R},\delta,Bh_\infty(D_H)) = \frac{\pi^2}{16H^2} e''(0,(-1,1),\delta,Bh_\infty).$$

Отметим, что аналогичные задачи (в основном для первой производной) на классах гладких функций рассматривались в работах **[63]**, **[109]**, **[1]**, **[106]**, **[8]**, **[132]**.

Глава 4

НАИЛУЧШИЕ И ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

§1. Наилучшие квадратурные формулы

Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей интервал вещественной оси (a, b). Рассматривается задача оптимального восстановления функционала

$$Lf := \int_a^b f(x)p(x)\,dx$$

для функций $f \in W$ по точным значениям информационного оператора

$$If := \left\{\, f(x_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, f(x_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(x_n) \,\right\},$$

где p — неотрицательная и неэквивалентная нулю весовая функция, а $x_1, \dots, x_n$ — различные точки из множества $\mathbb{R} \cap \Omega$.

Положим для $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n)$

$$\tau_\nu := \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix},$$

$$e(\tau_\nu, W, p) := e(L, I, W, 0) \tag{1.1}$$

(величина, стоящая в правой части равенства (1.1), определялась равенством (4.21)). Если W — выпуклый и уравновешенный класс функций, то из теоремы 4.2 гл. I вытекает равенство

$$e(\tau_\nu, W, p) = \sup_{\substack{f \in W \\ If = 0}} \left| \int_a^b f(x)p(x)\,dx \right|, \tag{1.2}$$

а также существование линейного оптимального метода. Иными словами, существует квадратурная формула

$$Lf \approx S_0 If := \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} a_{jm} f^{(m)}(x_j),$$

для которой

$$\sup_{f \in W} |Lf - S_0 If| = e(\tau_\nu, W, p).$$

Будем называть такие квадратурные формулы наилучшими для данной системы узлов τ_ν.

Положим

$$W_j(z) := \frac{z - x_j}{1 - x_j z}, \quad \Phi(z) := \prod_{j=1}^{n} W_j^{\nu_j}(z), \quad \Phi_j(z) := \prod_{m \neq j} W_m^{\nu_m}(z).$$

Теорема 1.1. *При четных ν_j, $j = 1, \dots, n$, квадратурная формула*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} a_{jm} f^{(m)}(x_j), \tag{1.3}$$

где

$$a_{jm} = \int_a^b D_{jm}(x)p(x)\,dx,$$

$$D_{jm}(x) = \frac{\Phi(x)(1 - x^2)}{m!(\nu_j - m - 1)!} \left[\frac{(1 - x_j z)^{\nu_j}}{\Phi_j(z)(1 - xz)(x - z)} \right]^{(\nu_j - m - 1)}_{\Big| z = x_j},$$

является наилучшей на классе BH_∞. Для ее погрешности справедливо равенство

$$e(\tau_\nu, BH_\infty, p) = \int_a^b \Phi(x)p(x)\,dx. \tag{1.4}$$

Доказательство. Из теоремы 1.2 гл. II вытекает, что при всех $x \in (-1, 1)$ метод

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} D_{jm}(x) f^{(m)}(x_j)$$

является оптимальным на классе BH_∞, а его погрешность равна $\Phi(x)$ (в силу четности ν_j $\Phi(x) \geq 0$). Таким образом, для всех $x \in (a, b)$ и $f \in BH_\infty$ имеет место неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} D_{jm}(x) f^{(m)}(x_j) \right| \leq \Phi(x).$$

Отсюда

$$\left| \int_a^b f(x)p(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} D_{jm} f^{(m)}(x_j) \right| \leq \int_a^b \Phi(x)p(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Следовательно,

$$e(\tau_\nu, BH_\infty, p) \leq \int_a^b \Phi(x)p(x)\,dx.$$

С другой стороны, так как $\Phi \in BH_\infty$ и $I\Phi = 0$, то из равенства (1.2) получаем

$$e(\tau_\nu, BH_\infty, p) \geq \int_a^b \Phi(x)p(x)\,dx.$$

Тем самым равенство (1.4) доказано, а из (1.5) следует, что квадратурная формула (1.3) является наилучшей. Теорема доказана. □

Аналогично, пользуясь следствием 3.1 гл. II, доказывается

Теорема 1.2. *При четных ν_j, $j = 1, \dots, n$, квадратурная формула*

$$\int_a^b u(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} \widetilde{a}_{jm} u^{(m)}(x_j),$$

где

$$\widetilde{a}_{jm} = \int_a^b \frac{D_{jm}(x)}{1 + \Phi^2(x)} p(x)\,dx,$$

является наилучшей на классе Bh_∞. Для ее погрешности справедливо равенство

$$e(\tau_\nu, Bh_\infty, p) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} \Phi(x) p(x)\,dx.$$

§2. Произведения Бляшке, наименее уклоняющиеся от нуля в пространстве L_q

Рассматривая при фиксированных четных кратностях ν_j задачу о нахождении системы узлов $-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1$, для которых наилучшая квадратурная формула на классе BH_∞ минимальна (более подробно о таких квадратурных формулах речь будет идти в §3), мы приходим к следующей задаче

$$\int_a^b \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x - x_j}{1 - x_j x} \right)^{\nu_j} p(x)\,dx \to \inf, \quad -1 < x_1 < \ldots < x_n < 1.$$

Если поставить аналогичную задачу на классе Bh_∞, то получим задачу:

$$\int_a^b \operatorname{arctg} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x - x_j}{1 - x_j x} \right)^{\nu_j} \right] p(x)\,dx \to \inf, \quad -1 < x_1 < \ldots < x_n < 1.$$

В связи с этим рассмотрим задачу, обобщающую две предыдущие, о нахождении величины

$$\inf_{-1 < t_1 < \ldots < t_n < 1} F(\bar{t}), \tag{2.1}$$

где

$$F(\bar{t}) := \int_a^b \varphi\left(|\Phi(t, \bar{t})|\right) p(t)\,dt, \quad \bar{t} := (t_1, \dots, t_n),$$

$$\Phi(t, \bar{t}) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{t - t_j}{1 - t_j t} \right)^{\nu_j} w(t), \quad [a, b] \subset (-1, 1), \quad \nu_j \in \mathbb{N},$$

w — непрерывная, неотрицательная и не равная тождественно нулю на $[a, b]$ функция, а φ — неотрицательная, непрерывно дифференцируемая и монотонно возрастающая на множестве $[0, +\infty)$ функция.

Напомним, что в некоторых частных случаях решения задачи (2.1) были получены в §4 гл. II.

Теорема 2.1. *Существует система точек $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, на которой достигается нижняя грань в* (2.1)*, причем любая такая система удовлетворяет неравенствам*

$$a < t_1 < \ldots < t_n < b.$$

Доказательство. Из непрерывности функции $F(\bar{t})$ при $-1 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$ следует существование системы $\bar{t}$ из этого множества, на которой достигается нижняя грань в (2.1). Докажем, что $t_1 > a$. При $a = -1$ это очевидно. Предположим, что $-1 < t_1 = \ldots = t_m \leq a$ и $t_m < t_{m+1}$, если $m < n$. Рассмотрим систему $\bar{t}_\xi := (\xi, \ldots, \xi, t_{m+1}, \ldots, t_n)$ и функцию $\alpha(\xi) := F(\bar{t}_\xi)$. Поскольку

$$\alpha'(t_m) = -(\nu_1 + \ldots + \nu_m) \int_a^b \varphi'\left(|\Phi(t, \bar{t})|\right) |\Phi(t, \bar{t})| \\ \times \frac{1 - t^2}{(1 - t_m t)(t - t_m)} p(t)\, dt < 0,$$

то существует $\xi \in (t_m, t_{m+1})$ такое, что $F(\bar{t}_\xi) = \alpha(\xi) < \alpha(t_m) = F(\bar{t})$, а это противоречит экстремальности $\bar{t}$. Аналогично доказывается, что $t_n < b$.

Предположим теперь, что $t_j = t_{j+1} = \ldots = t_m =: c$ и $t_{j-1} < t_j$, если $j > 1$, а $t_m < t_{m+1}$, если $m < n$. Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon > 0$ систему $\bar{t}_\varepsilon := (t_1, \ldots, t_{j-1}, c_1, c, \ldots, c, c_2, t_{m+1}, \ldots, t_n)$, где $c_1 := c - \nu_m \varepsilon$, $c_2 := c + \nu_j \varepsilon$. Положим $\beta(\varepsilon) := F(\bar{t}_\varepsilon)$. Тогда

$$\beta'(\varepsilon) = -\varepsilon \nu_j \nu_m (\nu_j + \nu_m) \int_a^b \varphi'\left(|\Phi(t, \bar{t}_\varepsilon)|\right) |\Phi(t, \bar{t}_\varepsilon)| \\ \times \frac{1 - (2c + (\nu_j - \nu_m)\varepsilon)t + t^2}{(1 - c_1 t)(t - c_1)(1 - c_2 t)(t - c_2)} (1 - t^2) p(t)\, dt.$$

Отсюда

$$\beta''(0) = -\nu_j \nu_m (\nu_j + \nu_m) \int_a^b \varphi'\left(|\Phi(t, \bar{t})|\right) |\Phi(t, \bar{t})| \\ \times \frac{1 - 2ct + t^2}{(1 - ct)^2 (t - c)^2} (1 - t^2) p(t)\, dt < 0.$$

Таким образом, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $F(\bar{t}_\varepsilon) = \beta(\varepsilon) < \beta(0) = F(\bar{t})$, что противоречит экстремальности $\bar{t}$. Теорема доказана. □

С помощью конформного преобразования единичного круга задача (2.1) может быть сведена к аналогичной задаче на симметричном отрезке. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $[a,b]=[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$, $k\in(0,1]$.

В общем случае задача (2.1) может иметь неединственное решение. Рассмотрим в качестве примера случай $n=1$, $\nu_1=1$, $\varphi(x)=x^q$, $1<q<\infty$, $w(t)\equiv 1$ и $p(t)=|t|^\alpha$, $\alpha>0$. Тогда функция

$$F(t_1):=\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\left|\frac{t-t_1}{1-t_1t}\right||t|^\alpha\,dt$$

является четной и, следовательно, t_1 — единственная точка минимума лишь в случае, когда $t_1=0$. Непосредственным вычислением находим

$$F''(0)=2qk^{\frac{\alpha+q-1}{2}}\\ \times\frac{(1-k)[q-1-(q+1)k]\alpha^2+2[q(q+1)(1-k)^2-2]\alpha+c(k,q)}{(\alpha+q-1)(\alpha+q+1)(\alpha+q+3)}$$

(величина $c(k,q)$ для нас несущественна). Если $(q-1)/(q+1)<k\le 1$, то при достаточно больших α $F''(0)<0$ и точка $t_1=0$ не является минимумом функции F.

Тем не менее, мы покажем, что при достаточно малых k единственность есть. Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(x)=x^q$, $w(t)\equiv 1$, а весовая функция p непрерывна в интервале $(-\sqrt{k},\sqrt{k})$. Введем следующие обозначения: $r:=q\min\limits_{1\le j\le n}\nu_j$, $N:=\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j$,

$$F_j(\bar t):=\frac{\partial F(\bar t)}{\partial t_j},\quad J(\bar t,p,k)=\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(t_1,\dots,t_n)},$$

$$\gamma_m(p,q,k):=\inf_{t_j}\int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{m}|t-t_j|^q p^*(\sqrt{k}t)\,dt,$$

где p^* — нормированный вес

$$p^*(\sqrt{k}t):=\frac{p(\sqrt{k}t)}{\displaystyle\int_{-1}^{1}p(\sqrt{k}t)\,dt}.$$

Предложение 2.1. *Пусть $1<r<\infty$. Если выполнено условие*

$$k\le\frac{r-1}{9r-7+qN2^{qN+1}\gamma_N^{-1}(p,q,k)},\tag{2.2}$$

то для любой системы точек $-\sqrt{k}<u_1<\ldots<u_n<\sqrt{k}$, удовлетворяющей необходимым условиям экстремума

$$F_j(\overline{u})=0,\quad j=1,\dots,n,\tag{2.3}$$

выполняется неравенство $J(\overline{u}, p, k) > 0$.

Доказательство. Обозначим элементы якобиана $J(\overline{u}, p, k)$ через a_{jm}. Имеем

$$a_{jj} = \frac{\partial F_j(\overline{t})}{\partial t_j}\Big|_{\overline{t}=\overline{u}}$$
$$= q\nu_j \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |\Phi(t, \overline{u})|^q \frac{q\nu_j(1-t^2) - 1 + 2u_j t - t^2}{(t-u_j)^2(1-u_j t)^2}(1-t^2)p(t)\,dt.$$

В силу равенств (2.3)

$$a_{jj} = a_{jj} + \frac{2u_j}{1+u_j^2}F_j(\overline{u}) = q\nu_j \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |\Phi(t, \overline{u})|^q$$
$$\times \left[q\nu_j(1-t^2) - \frac{1-u_j^2}{1+u_j^2}(1+t^2)\right] \frac{(1-t^2)p(t)}{(t-u_j)^2(1-u_j t)^2}\,dt$$
$$\geq q\nu_j[r - 1 - (r+1)k] \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |\Phi(t, \overline{u})|^q \frac{(1-t^2)p(t)}{(t-u_j)^2(1-u_j t)^2}\,dt.$$

Из условия (2.2) и очевидного неравенства $\gamma_m(p, q, k) \leq 1$ следует, что $k \leq (r-1)/(9r-7) < (r-1)/(r+1)$. Отсюда следует утверждение предложения при $n = 1$. Пусть $n > 1$. Тогда

$$a_{jj} > q\nu_j \frac{[r - 1 - (r+1)k](1-k)}{(1+k)^{qN+2}}$$
$$\times \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |t - u_j|^{q\nu_j - 2} \prod_{m \neq j} |t - u_m|^{q\nu_m} p(t)\,dt.$$

После замены $t = \sqrt{k}x$ будем иметь

$$a_{jj} > q\nu_j \frac{[r - 1 - (r+1)k](1-k)}{4(1+k)^{qN+2}} k^{\frac{qN-1}{2}} \gamma_N(p, q, k) \int_{-1}^{1} p(\sqrt{k}x)\,dx. \tag{2.4}$$

При $m \neq j$

$$a_{jm} = \frac{\partial F_j(\overline{t})}{\partial t_m}\Big|_{\overline{t}=\overline{u}}$$
$$= q^2\nu_j\nu_m \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |\Phi(t, \overline{u})|^q \frac{(1-t^2)^2 p(t)\,dt}{(t-u_j)(1-u_j t)(t-u_m)(1-u_m t)}.$$

В силу равенств (2.3)

$$
\begin{aligned}
a_{jm} &= a_{jm} + q\frac{\nu_m(1+u_j^2)F_j(\overline{u}) - \nu_j(1+u_m^2)F_m(\overline{u})}{(u_j-u_m)(1-u_m u_j)} \\
&= -2q^2\nu_j\nu_m \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |\Phi(t,\overline{u})|^q \frac{t^2(1-t^2)p(t)\,dt}{(t-u_j)(1-u_j t)(t-u_m)(1-u_m t)}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно убедиться, что при всех $t, u \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ справедливы неравенства

$$
\left|\frac{t-u}{1-ut}\right| \le \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \frac{1}{1-ut} \le \frac{1}{1-k}, \quad \frac{1-t^2}{(1-ut)^2} \le \frac{1}{1-k}. \tag{2.5}
$$

Отсюда

$$
|a_{jm}| \le 2q^2\nu_j\nu_m \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^{qN-2} \frac{k}{(1-k)^3} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} p(t)\,dt.
$$

Поэтому

$$
\sum_{m\ne j} |a_{jm}| < q^2\nu_j N(1-k)^{-3} \frac{k^{\frac{qN+1}{2}}}{(1+k)^{qN-2}} 2^{qN-1} \int_{-1}^{1} p(\sqrt{k}x)\,dx. \tag{2.6}
$$

Для положительности якобиана $J(u,p,k)$ достаточно выполнения неравенств

$$
a_{jj} > \sum_{m\ne j} |a_{jm}|, \quad j = 1,\dots,n \tag{2.7}
$$

(см., например, [**11**, стр. 415]). Из (2.4) и (2.6) вытекает, что для этого достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$
qN2^{qN+1}\gamma_N^{-1}(p,q,k) \le f(k) := (r-1-(r+1)k)\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^4. \tag{2.8}
$$

Можно показать, что функция $f(k)$ выпукла вниз при $0 \le k \le (r-1)/(r+1)$ и $f'(0) = 7-9r$. Следовательно, $f(k) \ge r-1-(9r-7)k$ на этом отрезке. Таким образом, неравенство (2.8) будет выполнено, если

$$
qN2^{qN+1}\gamma_N^{-1}(p,q,k) \le r-1-(9r-7)k,
$$

что совпадает с условием (2.2). Предложение доказано. □

Предложение 2.2. *При $n = 1$ и $1 < r < \infty$ функция $F(t_1)$ имеет единственный минимум для любой непрерывной в интервале $(-\sqrt{k}, \sqrt{k})$ весовой функции p тогда и только тогда, когда*

$$
0 < k \le (r-1)/(r+1). \tag{2.9}
$$

Доказательство. Из доказательства предложения 2.1 следует, что при выполнении условия (2.9) для любой точки t_1, в которой $F'(t_1) = 0$, выполнено неравенство $F''(t_1) > 0$. Отсюда следует единственность точки минимума. Пример, приведенный перед предложением 2.1, показывает, что при $(r-1)/(r+1) < k \le 1$ существует весовая функция, для которой единственности нет. Предложение доказано. $\square$

Теорема 2.2. *При выполнении условия* (2.2) *существует единственная система точек* $-\sqrt{k} < u_1 < \ldots < u_n < \sqrt{k}$, *удовлетворяющая условиям* (2.3).

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства из работы [**81**]. Существование системы точек $-\sqrt{k} < u_1 < \ldots < u_n < \sqrt{k}$, удовлетворяющей равенствам (2.3), следует из теоремы 2.1. Единственность будем доказывать индукцией по n. При $n = 1$ утверждение теоремы вытекает из доказательства предложения 2.2. Будем считать, что утверждение доказано для $n-1$. Положим

$$p_\xi(t) := \left|\frac{t-\xi}{1-\xi t}\right|^{\nu_n q} p(t).$$

При любом $\xi \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ справедливы неравенства

$$\int_{-1}^{1} p_\xi(\sqrt{k}t)\,dt \le \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^{\nu_n q} \int_{-1}^{1} p(\sqrt{k}t)\,dt,$$

$$\inf_{t_j} \int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{m} |t-t_j|^q p_\xi(\sqrt{k}t)\,dt \\ \ge \left(\frac{\sqrt{k}}{1+k}\right)^{\nu_n q} \inf_{t_j} \int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{m+\nu_n} |t-t_j|^q p(\sqrt{k}t)\,dt.$$

Тем самым

$$\gamma_m(p_\xi, q, k) \ge 2^{-\nu_n q} \gamma_{m+\nu_n}(p, q, k). \tag{2.10}$$

Положим $r' := q \min\limits_{1 \le j \le n-1} \nu_j$. Из неравенства (2.10) и того, что $r' \ge r$, имеем

$$\frac{r'-1}{9r'-7+q(N-\nu_n)2^{q(N-\nu_n)+1}\gamma_{N-\nu_n}^{-1}(p_\xi, q, k)} \\ > \frac{r-1}{9r-7+qN2^{qN+1}\gamma_N^{-1}(p, q, k)}.$$

Отсюда вследствие условия (2.2) и предположения индукции вытекает, что в задаче с кратностями $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ и весом p_ξ при всех $\xi \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ существует единственная система точек $\overline{u}_\xi := (u_1(\xi), \ldots, u_{n-1}(\xi))$, $-\sqrt{k} < u_1(\xi) < \ldots < u_{n-1}(\xi) < \sqrt{k}$, удовлетворяющая равенствам (2.3) для $j = 1, \ldots, n-1$. Из предложения 2.1 следует, что $J(\overline{u}_\xi, p_\xi, k) > 0$ для всех $\xi \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. По теореме о неявных функциях $u_{n-1}(\xi)$ — непрерывна. Кроме того, $-\sqrt{k} < u_{n-1}(-\sqrt{k})$, $u_{n-1}(\sqrt{k}) < \sqrt{k}$. Следовательно, существует точка ξ_0, в которой $u_{n-1}(\xi_0) = \xi_0$. Эта точка единственна, так как в противном случае нашлась бы точка $\xi_1 \neq \xi_0$ такая, что $u_{n-1}(\xi_1) = \xi_1$, и задача с кратностями $\nu_1, \ldots, \nu_{n-2}, \nu_{n-1} + \nu_n$ и весом p имела бы два различных решения $u_1(\xi_0), \ldots, u_{n-1}(\xi_0)$ и $u_1(\xi_1), \ldots, u_{n-1}(\xi_1)$. Таким образом, неравенство $u_{n-1}(\xi) < \xi$ имеет место на $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ только для $\xi \in (\xi_0, \sqrt{k}]$.

Положим $\psi(\xi) := F_n(u_1(\xi), \ldots, u_{n-1}(\xi), \xi)$. Тогда

$$\psi'(\xi) = \frac{J(u_1(\xi), \ldots, u_{n-1}(\xi), \xi, p, k)}{J(\overline{u}_\xi, p_\xi, k)}.$$

Точки $-\sqrt{k} < u_1(\xi) < \ldots < u_{n-1}(\xi) < \xi < \sqrt{k}$ удовлетворяют равенствам (2.3) в том и только в том случае, если $\xi \in (\xi_0, \sqrt{k})$ и $\psi(\xi) = 0$. При этом из предложения 2.1 следует, что $J(u_1(\xi), \ldots, u_{n-1}(\xi), \xi, p, k) > 0$. Тем самым $\psi'(\xi) > 0$ для всех $\xi \in (\xi_0, \sqrt{k})$ таких, что $\psi(\xi) = 0$. Отсюда вытекает существование не более чем одной такой точки, а с учетом теоремы 2.1, — ровно одной. Теорема доказана. □

Теперь рассмотрим задачу (2.1) для $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$.

Положим $\nu := \min\limits_{1 \le j \le n} \nu_j$,

$$J(\bar{t}, w, p, k) = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)},$$

оставив за N, γ_m и F_j, $j = 1, \ldots, n$, прежние обозначения.

Предложение 2.3. *Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — четные натуральные числа и $0 \le w(t) \le 1$, $t \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Тогда если выполнено неравенство*

$$k \le \frac{\nu - 1}{9\nu - 7 + N 2^{N-1} \gamma_{N/2-1}^{-1}(wp, 2, k)}, \tag{2.11}$$

то для всех точек $-\sqrt{k} < u_1 < \ldots < u_n < \sqrt{k}$, удовлетворяющих равенствам (2.3), $J(\overline{u}, w, p, k) > 0$.

Доказательство. Обозначим элементы якобиана $J(\overline{u}, w, p, k)$ через a_{jm}. Имеем

$$a_{jj} = \frac{\partial F_j(\bar{t})}{\partial t_j}\Big|_{\bar{t}=\overline{u}} = \nu_j \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{\Phi(t, \overline{u})(1 - t^2)}{(1 + \Phi^2(t, \overline{u}))(t - u_j)^2 (1 - u_j t)^2}$$
$$\times \left[\nu_j \frac{1 - \Phi^2(t, \overline{u})}{1 + \Phi^2(t, \overline{u})}(1 - t^2) - 1 + 2u_j t - t^2\right] p(t)\, dt.$$

В силу равенств (2.3)

$$a_{jj} = a_{jj} + \frac{2u_j}{1+u_j^2}F_j(\overline{u}) = \nu_j \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{\Phi(t,\overline{u})(1-t^2)}{(1+\Phi^2(t,\overline{u}))(t-u_j)^2(1-u_jt)^2} \times \left[\nu_j \frac{1-\Phi^2(t,\overline{u})}{1+\Phi^2(t,\overline{u})}(1-t^2) - \frac{1-u_j^2}{1+u_j^2}(1+t^2)\right] p(t)\, dt.$$

Положим $\lambda := \left(2\sqrt{k}/(1+k)\right)^N$. Из неравенства (2.11) следует, что $k \leq (\nu-1)/(9\nu-7) < 1/9$. Следовательно, $\lambda < (0.6)^2$. Пользуясь этими неравенствами и тем, что $\Phi(t,\overline{u}) \leq \lambda$ при $t \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, получаем

$$\nu_j \frac{1-\Phi^2(t,\overline{u})}{1+\Phi^2(t,\overline{u})}(1-t^2) - \frac{1-u_j^2}{1+u_j^2}(1+t^2) \geq \nu \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}(1-k) - 1 - k > \nu\frac{16}{27} - \frac{10}{9} > 0.$$

Отсюда следует утверждение предложения при $n = 1$. Пусть теперь $n > 1$. Имеем

$$a_{jj} > \nu_j \left[\nu \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}(1-k) - 1 - k\right] \frac{1-k}{(1+k)^{N+2}(1+\lambda^2)} \times \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (t-u_j)^{\nu_j-2} \prod_{m\neq j}(t-u_m)^{\nu_m} w(t)p(t)\, dt.$$

Сделав замену $t = \sqrt{k}x$, будем иметь

$$a_{jj} > \nu_j \left[\nu \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}(1-k) - 1 - k\right] \frac{k^{\frac{N-1}{2}}(1-k)}{(1+k)^{N+2}(1+\lambda^2)} \times \gamma_{N/2-1}(wp,2,k) \int_{-1}^{1} w(\sqrt{k}x)p(\sqrt{k}x)\, dx. \quad (2.12)$$

При $m \neq j$

$$a_{jm} = \frac{\partial F_j(\overline{t})}{\partial t_m}\Big|_{\overline{t}=\overline{u}} = \nu_j\nu_m \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{(1-\Phi^2(t,\overline{u}))\Phi(t,\overline{u})(1-t^2)^2 p(t)\, dt}{(1+\Phi^2(t,\overline{u}))^2(t-u_j)(1-u_jt)(t-u_m)(1-u_mt)}.$$

Отсюда

$$a_{jm} = a_{jm} + \frac{\nu_m(1+u_j^2)F_j(\overline{u}) - \nu_j(1+u_m^2)F_m(\overline{u})}{(u_j-u_m)(1-u_mu_j)} = -2\nu_j\nu_m \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{(t^2+\Phi^2(t,\overline{u}))\Phi(t,\overline{u})(1-t^2)p(t)\, dt}{(1+\Phi^2(t,\overline{u}))^2(t-u_j)(1-u_jt)(t-u_m)(1-u_mt)}.$$

Из неравенств (2.5) и того, что при всех $t \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$

$$\frac{t^2 + \Phi^2(t, \overline{u})}{(1 + \Phi^2(t, \overline{u}))^2} \leq \frac{k + \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2},$$

следуют неравенства

$$|a_{jm}| \leq 2\nu_j \nu_m \left(\frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \right)^{N-2} \frac{k + \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2 (1 - k)^3} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} w(t) p(t)\, dt.$$

Тем самым

$$\sum_{m \neq j} |a_{jm}| < \nu_j N 2^{N-1} \frac{k^{\frac{N-1}{2}} (k + \lambda^2)}{(1 + k)^{N-2} (1 + \lambda^2)^2 (1 - k)^3} \times \int_{-1}^{1} w(\sqrt{k} x) p(\sqrt{k} x)\, dx. \quad (2.13)$$

Для положительности якобиана $J(\overline{u}, w, p, k)$ достаточно потребовать выполнения неравенств (2.7), которые в силу (2.12) и (2.13) будут выполнены, если

$$\alpha \frac{k + \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} \leq \left[\nu \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} (1 - k) - 1 - k \right] \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^4, \quad (2.14)$$

где $\alpha := N 2^{N-1} \gamma_{N/2-1}^{-1}(wp, 2, k)$. Неравенство (2.14) эквивалентно неравенству

$$\alpha k + \frac{\lambda^2 (1 - k)}{1 + \lambda^2} \left[2\nu \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^4 + \alpha \right] \leq [\nu - 1 - k(\nu + 1))] \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^4. \quad (2.15)$$

Можно показать, что при всех $k \in (0, 1)$

$$[\nu - 1 - k(\nu + 1)] \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^4 \geq \nu - 1 - (9\nu - 7)k + \frac{40(\nu - 1)k^2}{(1 + k)^4}. \quad (2.16)$$

Поскольку при $n > 1$ $N \geq 2\nu \geq 4$, то

$$\lambda^2 \leq \left(\frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \right)^8 \leq \frac{2^8 k^4}{(1 + k)^4}.$$

Пользуясь этими неравенствами и условием (2.11), получаем

$$\frac{\lambda^2 (1 - k)}{1 + \lambda^2} \left[2\nu \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^4 + \alpha \right] \leq \lambda^2 (2\nu + \alpha) \leq \frac{2^8 k^2 (\nu - 1)^2 (2\nu + \alpha)}{(1 + k)^4 (9\nu - 7 + \alpha)^2} \leq \frac{2^8 k^2 (\nu - 1)^2}{(1 + k)^4 (9\nu - 7 + \alpha)} \leq \frac{40(\nu - 1)k^2}{(1 + k)^4}. \quad (2.17)$$

Справедливость неравенства (2.15) вытекает теперь из (2.16) и (2.17). Предложение доказано. $\square$

Теорема 2.3. *В условиях предложения* 2.3 *при выполнении неравенства* (2.11) *существует единственная система точек* $-\sqrt{k} < u_1 < \ldots < u_n < \sqrt{k}$, *удовлетворяющая равенствам* (2.3).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.

§3. Оптимальные квадратурные формулы

Рассмотрим задачу построения оптимальной квадратурной формулы для интеграла

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx$$

на классе функций W, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей интервал (a,b). Положим для $\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_n)$

$$e(\nu, W, p) := \inf_{\substack{x_1<\ldots<x_n \\ x_j \in \Omega\cap\mathbb{R}}} e(\tau_\nu, W, p), \tag{3.1}$$

где величина $e(\tau_\nu, W, p)$ определена равенством (1.1). Точки $x_1 < \ldots < x_n$, на которых достигается нижняя грань в (3.1) назовем оптимальными узлами. Наилучшую квадратурную формулу для оптимальных узлов будем называть оптимальной.

Теорема 3.1. *Пусть* $-1 \le a < b \le 1$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — *произвольные натуральные числа,* $\nu_j := 2[(\mu_j+1)/2]$. *Для любых кратностей* $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *оптимальные узлы на классах* BH_∞ *и* Bh_∞ *существуют, удовлетворяют условиям*

$$a < x_1 < \ldots < x_n < b \tag{3.2}$$

и являются решением экстремальной задачи (2.1) *для* $w(t) \equiv 1$ *и* $\varphi(x) \equiv 1$, $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$, *соответственно. При этом оптимальные квадратурные формулы имеют вид*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-2} a_{jm} f^{(m)}(x_j), \tag{3.3}$$

$$\int_a^b u(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-2} \widetilde{a}_{jm} u^{(m)}(x_j),$$

где коэффициенты a_{jm} *и* $\widetilde{a}_{jm}$ *определены в теоремах* 1.1 *и* 1.2 *для узлов* $x_1 < \ldots < x_n$, *являющихся решением соответствующей экстремальной задачи.*

Доказательство. Рассмотрим класс BH_∞. Из теоремы 1.1 имеем

$$e(\nu, BH_\infty, p) = \inf_{-1<t_1<\ldots<t_n<1} F(\bar{t}).$$

В силу теоремы 2.1 существует решение этой задачи, удовлетворяющее условию (3.2). Следовательно, оптимальная квадратурная формула будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{\nu_j-1} a_{jm} f^{(m)}(x_j),$$

где a_{jm} определены в теореме 1.1. Из этой же теоремы вытекает, что

$$a_{j,\nu_j-1} = -\frac{(1-x_j^2)^{\nu_j}}{\nu_j!\Phi_j(x_j,\overline{x})} F_j(\overline{x}),$$

где

$$\Phi_j(x,\overline{x}) := \prod_{m\neq j}\left(\frac{x-x_m}{1-x_m x}\right)^{\nu_m}.$$

В силу необходимого условия экстремума $a_{j,\nu_j-1}=0$, $j=1,\dots,n$, и оптимальная квадратурная формула имеет вид (3.3). Остается доказать, что она будет оптимальной при всех кратностях $\nu_j-1\le\mu_j\le\nu_j$. Пусть μ — произвольная система кратностей, удовлетворяющая этим условиям. Положим

$$\tau_\mu := \begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n \\ \mu_1,\dots,\mu_n \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} e(\nu,BH_\infty,p) &= \sup_{f\in BH_\infty}\left|\int_a^b f(x)p(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{\nu_j-2} a_{jm} f^{(m)}(x_j)\right| \\ &\ge e(\tau_\mu,BH_\infty,p) \ge e(\mu,BH_\infty,p) \ge e(\nu,BH_\infty,p). \end{aligned}$$

Отсюда следует оптимальность построенной квадратурной формулы для системы кратностей μ. Доказательство для класса Bh_∞ проводится аналогично. Теорема доказана. □

Займемся теперь исследованием единственности оптимальных узлов. В общем случае, как видно из примера, приведенного в §2, единственности оптимальных узлов нет. Из предложения 2.2 в простейшем случае $n=1$ получаем

Предложение 3.1. *При $[a,b]=[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$, $k\in(0,1)$ и $n=1$ оптимальный узел с кратностью μ единственен на классе BH_∞ для любой весовой функции тогда и только тогда, когда*

$$k \le \frac{\nu-1}{\nu+1},$$

где $\nu := 2[(\mu+1)/2]$.

Переведем рассматриваемую задачу с помощью конформного отображения из класса BH_∞ в класс $BH_\infty(Э_c)$ так, чтобы отрезок $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ перешел в отрезок $[-1,1]$. Тогда будем иметь

Следствие 3.1. *Для $[a,b]=[-1,1]$ и $n=1$ оптимальный узел с кратностью μ единственен на классе $BH_\infty(\text{Э}_c)$ для любой весовой функции тогда и только тогда, когда*

$$c \geq \exp\left(\frac{\pi K_0'}{4K_0}\right), \tag{3.4}$$

где K_0 и K_0' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей

$$k_0 = \frac{\nu-1}{\nu+1}, \quad k_0' = \sqrt{1-k_0^2},$$

соответственно.

Например, при $\mu \leq 2$ $k_0 = 1/3$, а условие (3.4) означает, что $c \geq 3.4140\ldots$.

Зафиксируем отрезок интегрирования $[-1.1]$, а в качестве области аналитичности (или гармоничности) будем рассматривать круг $D := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1/\sqrt{k}\}$, $k \in (0,1)$. Из теорем 2.2 и 2.3 следует

Теорема 3.2. *Пусть $[a,b]=[-1,1]$ и для весовой функции p (быть может, зависящей от k) при всех $k \in (0,k_0)$, $0 < k_0 \leq 1$, выполнено условие*

$$\frac{\inf\limits_{t_j} \displaystyle\int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{N} (t-t_j)^2 p(t)\, dt}{\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\, dt} \geq \gamma_N > 0.$$

Тогда для всех $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ таких, что $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} [(\mu_j+1)/2] \leq N$ и всех

$$0 < k \leq \min\left\{k_0, \frac{2r-1}{18r-7+N4^{N+1}\gamma_N^{-1}}\right\},$$

где $r := \min\limits_{1\leq j\leq n} [(\mu_j+1)/2]$, оптимальные узлы для классов $BH_\infty(D_k)$ и $BH_\infty(D_k)$ единственны.

Дальнейшей нашей целью является получение ряда точных результатов относительно оптимальных квадратурных формул, основанных на решении экстремальных задач, приведенных в теоремах 4.2 и 4.3 гл. II.

Положим

$$I_{q2}(\lambda) := \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{\lambda}t)^q\, dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}.$$

Теорема 3.3. *Пусть $[a,b]=[-1,1]$, q — четное число и $p_o(t) := \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Тогда для любого $c > 1$ при всех $q-1 \leq \nu_j \leq q$ имеют* *место равенства*

$$e(\nu, BH_\infty(Э_c), p_0) = \frac{\pi}{\Lambda}\lambda^{q/2} I_{q0}(\lambda) = 2^{q/2}\pi\frac{(q-1)!!}{(q/2)!}c^{-qn} + O\left(c^{-(q+4)n}\right),$$
$$e(\nu, Bh_\infty(Э_c), p_0) = \frac{4}{\Lambda} I_{q2}(\lambda) = 2^{q/2+2}\frac{(q-1)!!}{(q/2)!}c^{-qn} + O\left(c^{-(q+4)n}\right),$$

где $\lambda = \kappa(c^{-4n})$, *а единственными оптимальными узлами являются чебышевские узлы* (2.4.18).

Доказательство. С помощью конформного отображения области $Э_c$ на единичный круг, задаваемого равенствами (2.4.17), исходная задача сводится к построению оптимальных квадратурных формул на классах BH_∞ и Bh_∞ для интеграла

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f(z) p_k(z)\, dz, \quad p_k(z) = \frac{\pi}{2K}\frac{1}{\sqrt{(k-z^2)(1-kz^2)}}$$

(ср. с доказательством теоремы 4.7 гл. II). Таким образом, в силу теорем 3.1 и 2.4.3 имеем

$$e(\nu, BH_\infty(Э_c), p_0) = e(\nu, BH_\infty, p_k) = \inf_{B\in\mathcal{B}_n^0} \|B\|_{L_{qk}}^q = \frac{\pi}{\Lambda}\lambda^{q/2} I_{q0}(\lambda),$$
$$e(\nu, Bh_\infty(Э_c), p_0) = e(\nu, Bh_\infty, p_k) = \frac{4}{\pi}\inf_{B\in\mathcal{B}_n^0} \|\operatorname{arctg} B\|_{L_{qk}}^q = \frac{4}{\Lambda} I_{q2}(\lambda).$$

Единственными оптимальными узлами для задач оптимального интегрирования на классах BH_∞ и Bh_∞ являются узлы, определенные равенством (2.4.5), которые при отображении, обратном к (2.4.17), переходят в чебышевские узлы. Асимптотика находится с помощью равенств (2.4.26). Теорема доказана. □

В случае, когда $\nu_j \le 2$, можно доказать, что оптимальные квадратурные формулы имеют вид

$$\int_{-1}^{1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx A\sum_{j=1}^{n} f\left(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right),$$

где коэффициент A (различный для классов $BH_\infty(Э_c)$ и $Bh_\infty(Э_c)$) выражается через эллиптические интегралы. Мы изучим более общую задачу, из которой, в частности, будет следовать этот результат для класса $BH_\infty(Э_c)$.

Рассмотрим величину $e(L, I_\tau, W, \delta)$, когда $W \subset BH_\infty(\Omega)$,

$$Lf = \int_a^b f(t)p(t)\, dt,$$

$(a,b) \subset \Omega$, p — неотрицательная весовая функция, $\tau = (t_1, \dots, t_n)$, $t_j \in (a,b)$ — различные точки, $I_\tau f = \{f(t_1), \dots, f(t_n)\}$, а погрешность измеряется в норме l_q^n, $1 \le q \le \infty$. Положим в этом случае

$$e_{nq}(W, \delta) := \inf_{t_j \in (a,b)} e(L, I_\tau, W, \delta). \tag{3.5}$$

Узлы, на которых достигается нижняя грань будем называть оптимальными.

Таким образом, задача (3.5) является задачей о нахождении оптимального метода интегрирования функции $f \in W$, использующего n приближенных значений $\widetilde{f}(t_1), \dots, \widetilde{f}(t_n)$ таких, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{f}(t_j) - f(t_j)|^q \right)^{1/q} \le \delta \quad \text{при} \quad 1 \le q < \infty$$

или

$$\max_{1 \le j \le n} |\widetilde{f}(t_j) - f(t_j)| \le \delta \quad \text{при} \quad q = \infty.$$

Из теоремы 4.2 гл. I вытекает, что для выпуклого и уравновешенного класса функций W имеет место равенство

$$e(L, I_\tau, W, \delta) = \sup_{\substack{f \in W \\ \|I_\tau f\|_q \le \delta}} \left| \int_a^b f(t) p(t)\, dt \right|. \tag{3.6}$$

Рассмотрим задачу (3.5) для $W = B\widetilde{H}(D_H)$ и

$$Lf = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt.$$

В тривиальном случае, когда $\delta \ge n^{1/q}$ (все выражения с q при $q = \infty$ понимаются как предельные значения при $q \to \infty$), из равенства (3.6) следует, что для любой системы узлов $e(L, I_\tau, B\widetilde{H}(D_H), \delta) = 2\pi$, $f(t) \equiv 1$ — экстремальная функция, а $Lf \approx 0$ — оптимальный метод (тем самым любой набор узлов — оптимальный).

Положим

$$J_r(\lambda, \Delta) := \int_0^1 \left(\frac{\lambda t^2 + \Delta}{1 + \Delta \lambda t^2} \right)^{r/2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}.$$

Теорема 3.4. *Пусть $1 \le q \le \infty$ и $0 \le \delta < n^{1/q}$. Тогда*

1) *квадратурная формула*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt \approx \frac{2\pi}{n} (1 - \Delta^2)^{-1} \left(1 - \Lambda^{-1} J_4(\lambda, \Delta) \right) \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{f} \left(j \frac{2\pi}{n} \right), \tag{3.7}$$

в которой $\Delta = \delta n^{-1/q}$, а $\lambda = \kappa(e^{-2Hn})$, является оптимальным методом интегрирования на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ по значениям, заданным с погрешностью δ в норме l_q^n;

2) *имеет место равенство*

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta) = 2\pi\Lambda^{-1}J_2(\lambda,\delta n^{-1/q}) = 2\pi\delta n^{-1/q}$$
$$+\,4\pi(1-\delta^2 n^{-2/q})e^{-Hn} + 4\pi\delta(4-3\delta^2 n^{-2/q})n^{-1/q}e^{-2Hn} + O\left(e^{-3Hn}\right);$$

3) *узлы* $t_j^* = (j-1)\dfrac{2\pi}{n}$, $j=1,\dots,n$, *— единственные с точностью до сдвига оптимальные узлы.*

Доказательство. Пусть $0\le t_1<\ldots<t_n<2\pi$. Положим для k, определенного из условия $\dfrac{\pi K'}{2K}=H$,

$$W(z) := k^{n/2}\prod_{j=1}^n \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(z-t_j),k\right).$$

Далее мы снова будем отмечать зависимость эллиптических функций от модуля лишь в случае, если он отличен от k. Нетрудно убедиться, что $W^2(z)\in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$, причем при всех $x\in\mathbb{R}$ $|W(x)\pm iH)|=1$. Для $t\in[0,2\pi)$ и $f\in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ рассмотрим интеграл

$$Jf := \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{K}{\pi}\frac{W^2(t)(1+\Delta W^2(\xi))^2}{W^2(\xi)(1+\Delta W^2(t))^2}\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(\xi-t)\right)f(\xi)\,d\xi,$$

где Γ — граница прямоугольника: $-\varepsilon\le\operatorname{Re}z\le 2\pi-\varepsilon$, $|\operatorname{Im}z|\le H$, в котором $\varepsilon>0$ выбрано из условия, чтобы точки $t,t_1,\dots,t_n$ лежали внутри этого прямоугольника. По теореме о вычетах будем иметь

$$Jf = f(t) - \sum_{j=1}^n\left(a_{j0}(t)f(t_j)+a_{j1}(t)f'(t_j)\right), \tag{3.8}$$

где

$$a_{j1}(t) = \frac{K}{\pi}\frac{W^2(t)}{W'^2(t_j)(1+\Delta W^2(t))^2}\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t-t_j)\right),$$

$$a_{j0}(t) = \frac{K^2}{\pi^2}\frac{W^2(t)}{W'^2(t_j)(1+\Delta W^2(t))^2}\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4\left(\dfrac{K}{\pi}(t-t_j)\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K}{\pi}(t-t_j)\right)} - \frac{W''(t_j)}{W'(t_j)}a_{j1}(t).$$

Рассмотрим при фиксированном $t\in[0,2\pi)$ функцию

$$F(\xi) := \frac{K}{\pi}\frac{W^2(t)}{W^2(\xi)(1+\Delta W^2(t))^2}\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(\xi-t)\right).$$

Функция F является эллиптической функцией с периодами 2π и $i2\pi K'/K$. С точностью до периодов все полюсы F находятся в точках $t, t_1, \dots, t_n$ и $t + i\pi K'/K$. Пользуясь тем, что сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, лежащих внутри параллелограмма периодов равна нулю (см. [**5**, стр. 16]), получаем

$$(1+\Delta W^2(t))^{-2} - \sum_{j=1}^{n} a_{j0}(t) - W^4(t)(1+\Delta W^2(t))^{-2} = 0. \tag{3.9}$$

В силу 2π-периодичности функций $W^2(z)$ и $\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z\right)$ в интеграле Jf Γ можно заменить на $\Gamma_0 := [2\pi + iH, iH] \cup [-iH, 2\pi - iH]$. Из свойств эллиптических функций вытекают равенства

$$\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(x \pm iH)\right) = \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}x \pm i\frac{K'}{2}\right) = \mp i(1+k)\frac{1 - k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}x\right)}{1 + k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}x\right)}.$$

Тем самым интеграл Jf может быть записан в виде

$$Jf = \alpha \int_{\Gamma_1} \overline{g(\xi)}\chi(\xi, t) f(\xi)\, d\mu(\xi), \tag{3.10}$$

где

$$\alpha := \frac{K(1+k)W^2(t)}{2\pi^2(1+\Delta W^2(t))^2}, \quad g(\xi) := \frac{W^2(\xi) + \Delta}{1 + \Delta W^2(\xi)},$$

$$\chi(\xi, t) := \frac{(1+\Delta W^2(\xi))(W^2(\xi)+\Delta)}{W^2(\xi)} \frac{1 - k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}(\operatorname{Re}\xi - t)\right)}{1 + k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}(\operatorname{Re}\xi - t)\right)},$$

а $\Gamma_1 := [iH, 2\pi + iH] \cup [-iH, 2\pi - iH]$ с мерой $d\mu(x \pm iH) = dx$. Поскольку $|W(\xi)| = 1$ при $\xi \in \Gamma_1$, то $|g(\xi)| = 1$ и $\chi(\xi, t) > 0$ при всех $\xi \in \Gamma_1$ и $t \in [0, 2\pi)$. Из равенств (3.8) и (3.10) получаем представление

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt - \sum_{j=1}^{n} (A_{j0} f(t_j) + A_{j1} f'(t_j)) = \alpha \int_{\Gamma_1} \overline{g(\xi)}\psi(\xi) f(\xi)\, d\mu(\xi),$$

в котором

$$\psi(\xi) := \int_0^{2\pi} \chi(\xi, t)\, dt, \quad A_{jm} := \int_0^{2\pi} a_{jm}(t)\, dt, \quad m = 0, 1.$$

Обозначим через W_0 функцию W для узлов t_j^* (соответствующую функцию g в этом случае обозначим через g_0). С помощью первого главного преобразования эллиптических функций n-ой степени можно показать, что

$$W_0(t) = (-1)^{n+1}\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{n\Lambda}{\pi}t, \lambda\right), \tag{3.11}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-2Hn}\right)$. Следовательно, $W_0^2(t + t_j^*) = W_0^2(t)$ и в силу нечетности $\operatorname{ctn} z$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{W_0^2(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j^*)\right) dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{W_0^2(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi} t\right) dt = 0.$$

Тем самым $A_{j1} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Используя аналогичные соображения, находим

$$A_{j0} = \frac{K^2}{\pi^2 W_0'^2(t_j)} \int_0^{2\pi} \frac{W_0^2(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2} \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\dfrac{K}{\pi} t\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K}{\pi} t\right)} dt.$$

Из (3.11) можно найти $W_0'(t_j)$ и убедиться, что $A_{10} = \ldots = A_{n0} =:$ A.

Для нахождения величины A воспользуемся равенством (3.9), интегрируя которое, получаем

$$nA = \sum_{j=1}^{n} A_{j0} = \int_0^{2\pi} \frac{1 - W_0^4(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2} dt = (1 - \Delta^2)^{-1} \int_0^{2\pi} (1 - g_0^2(t))\, dt.$$

Делая в последнем интеграле замены переменных $\dfrac{n\Lambda}{\pi} t = z$, $x = \operatorname{sn}(\lambda, t)$, находим

$$A = \frac{2\pi}{n}(1 - \Delta^2)^{-1}(1 - \Lambda^{-1} J_4(\lambda, \Delta)).$$

Итак, доказано равенство

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt - A \sum_{j=1}^{n} f(t_j^*) = \alpha \int_{\Gamma_1} \overline{g_0(\xi)} \psi(\xi) f(\xi)\, d\mu(\xi).$$

Положим для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in l_q^n$ $\langle y_0^*, z\rangle := A \sum_{j=1}^{n} z_j$. Тогда для $\tau^* := (t_1^*, \ldots, t_n^*)$

$$\langle y_0^*, I_{\tau^*} g_0\rangle = A \sum_{j=1}^{n} g_0(t_j^*) = A\delta n^{1-1/p} = \delta \|y_0^*\|.$$

Кроме того, $\|I_{\tau^*} g_0\|_q = \delta$. Применяя теорему 5.3 гл. I, получаем, что квадратурная формула (3.7) является наилучшим методом интегрирования на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ по значениям в системе узлов τ^*, заданным с погрешностью δ в норме l_q^n, причем функция g_0 экстремальная. Следовательно,

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta) \le \int_0^{2\pi} g_0(t)\, dt. \tag{3.12}$$

С другой стороны, так как для любой системы узлов τ функция $g \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ и $\|I_\tau g\|_q = \delta$, то из равенства (3.6) и теоремы 4.2 гл. II, положив

$$\varphi(x) := \varphi_1\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right), \quad \varphi_1(y) := \frac{y^2+\Delta}{1+\Delta y^2},$$

имеем

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta) \geq \inf_{\tau\in\Lambda_n}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\varphi_1(|W_0(t)|)\,dt. \qquad (3.13)$$

Поскольку $\varphi_1(|W_0(t)|) = g_0(t)$, то из (3.12) и (3.13) получаем

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta) = \int_0^{2\pi} g_0(t)\,dt.$$

Выражение для этой величины через функцию J_2 получается аналогично нахождению значения A, а асимптотическое равенство находится с помощью равенств (2.4.26).

Утверждение 3) вытекает из того, что инфимум в (3.13) достигается только для системы точек, равномерно распределенных с шагом $2\pi/n$. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим задачу (3.5) для $W = BH_\infty(Э_c)$ и

$$Lf = \int_{-1}^{1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

При $\delta \geq n^{1/q}$ решение этой задачи тривиально и может быть получено из тех же соображений, которые использовались ранее для класса $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$.

Теорема 3.5. *Пусть $1 \leq q \leq \infty$ и $0 \leq \delta < n^{1/q}$. Тогда*

1) *квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} f(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{n}(1-\Delta^2)^{-1}(1-\Lambda^{-1}J_4(\lambda,\Delta))\sum_{j=1}^{n}\widetilde{f}\left(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \qquad (3.14)$$

в которой $\Delta = \delta n^{-1/q}$, а $\lambda = \kappa(c^{-4n})$, является оптимальным методом интегрирования на классе $BH_\infty(Э_c)$ по значениям, заданным с погрешностью δ в норме $Y = l_q^n$;

2) *имеет место равенство*

$$e_{nq}(BH_\infty(Э_c),\delta) = \pi\Lambda^{-1}J_2(\lambda,\delta n^{-1/q}) = \pi\delta n^{-1/q}$$
$$+\,2\pi(1-\delta^2 n^{-2/q})c^{-2n} + 2\pi\delta(4-3\delta^2 n^{-2/q})n^{-1/q}c^{-4n} + O\left(c^{-6n}\right);$$

3) *узлы* $\left\{\cos\dfrac{2j-1}{2n}\pi\right\}_{j=1}^{n}$ *— единственные оптимальные узлы.*

Доказательство. Если $f(t) \in BH_\infty(Э_c)$, то $f(\cos t) \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ при $H = \log c$. Применяя теорему 3.4, получим, что погрешность квадратурной формулы (3.14), а следовательно, и оптимального метода интегрирования не превосходит величины

$$\frac{1}{2} e_{2n,q}(B\widetilde{H}_\infty(D_H), 2^{1/q}\delta) = \pi\Lambda^{-1} J_2(\lambda, \delta n^{-1/q}).$$

Для оценки снизу воспользуемся равенством (3.6). С помощью конформного отображения области $Э_c$ на единичный круг (см. (2.4.17)), находим

$$\begin{aligned} e_{nq}(BH_\infty(Э_c), \delta) &= \inf_{\tau \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]^n} \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ \|I_\tau f\|_q \le \delta}} \|f\|_{L_{1k}} \\ &\ge \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \|\varphi_1(B)\|_{L_{1k}} = \inf_{B \in \mathcal{B}_n^0} \left\| \varphi\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} B\right) \right\|_{L_{1k}}, \quad (3.15) \end{aligned}$$

где φ и φ_1 определены в теореме 3.4. Из теоремы 4.3 гл. II имеем

$$e_{nq}(BH_\infty(Э_c), \delta) \ge \pi\Lambda^{-1} J_2(\lambda, \delta n^{-1/q}).$$

Единственность оптимальных узлов вытекает из единственности нулей произведений Бляшке, на которых достигается инфимум в (3.15). Теорема доказана. □

Следствие 3.2. *При всех $c > 1$ и $\nu_j \le 2$*

1) *квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{n} \left(1 - \Lambda^{-1}\lambda^2 I_{40}(\lambda)\right) \sum_{j=1}^{n} f\left(\cos \frac{2j-1}{2n}\pi\right),$$

в которой $\lambda = \kappa(e^{-4n})$, является оптимальным методом интегрирования на классе $BH_\infty(Э_c)$ по точным значениям;

2) *узлы $\left\{\cos \frac{2j-1}{2n}\pi\right\}_{j=1}^{n}$ — единственные оптимальные узлы;*

3) *имеет место равенство*

$$e(\nu, BH_\infty(Э_c), p_0) = \frac{\pi}{\Lambda} I_{20}(\lambda) = 2\pi c^{-2n} + O\left(e^{-6n}\right).$$

Ряд результатов, касающихся асимптотики погрешности оптимальных квадратурных формул на классах аналитических функций, использующих точные значения, можно найти в работах [**6**], [**79**].

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Множества, пространства и классы функций

Погрешности оптимального восстановления и другие аппроксимативные характеристики

Функции, меры и ядра

Другие обозначения

ЛИТЕРАТУРА

1. Арестов В.В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования// Мат. заметки. 1967. Т.1, №2. С.149–154.
2. Арестов В.В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора// Мат. заметки. 1977. Т.22, №2. С.231–244.
3. Арестов В.В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи// Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т.189. С.3–20.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
5. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
6. Бахвалов Н.С. Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1967. Т.7, №5. С.1011–1020.
7. Бахвалов Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1971. Т.11, №4. С.1014–1018.
8. Буслаев А.П. О приближении оператора дифференцирования// Мат. заметки. 1981. Т.29, №5. С.731–742.
9. Васин В.В. Оптимальные методы вычисления значений неограниченных операторов. Препр. №77-59. Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1977.
10. Габушин В.Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах// Мат. заметки. 1970. Т.8, №5. С.551–562.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М: Наука, 1967.
12. Гаркави А.Л. Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Мат. анализ. 1969. С.75–132.
13. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
14. Голузин Г.М. Оценка производной для функций, регулярных и ограниченных в круге// Мат. сб. 1945. Т.16, №3. С.295–306.
15. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
16. Гончар А.А. О задачах Е.И. Золотарева, связанных с рациональными функциями// Мат. сб. 1969. Т.78, №4. С.640–654.
17. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
18. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
19. Женсыкбаев А.А. О наилучшей квадратурной формуле на классе W^rL_p// Докл. АН СССР. 1976. Т.227, №2. С.277–279.
20. Женсыкбаев А.А. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т.41, №5. С.1110–1124.
21. Журавский А.И. Справочник по эллиптическим функциям. М.: Изд-во АН СССР, 1941.
22. Золотарев Е.И. Приложения эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля. Собр. соч. Т.2. М. 1932.

23. Иванов В.В. Об оптимальных по точности алгоритмах приближенного решения операторных уравнений 1-го порядка// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1975. Т.15, №1. С.3–11.
24. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
25. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи// Успехи мат. наук. 1963. Т.18, №6. С.51–116.
26. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
27. Исмагилов Р.С. Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве// Функц. анализ и его прил. 1968. Т.2, №2. С.32–39.
28. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функциональный анализ. М.: Наука, 1972.
29. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
30. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.
31. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
32. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наук. думка, 1982.
33. Крейн М.Г. К теории наилучшего приближения периодических функций// Докл. АН СССР. 1938. Т.18, №4–5. С.245–251.
34. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
35. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М: Наука, 1965.
36. Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой// Мат. сб. 1991. Т.182, №11. С.1635–1656.
37. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным// Мат. заметки. 1991. Т.50, №6. С.85–93.
38. Магарил-Ильяев Г.Г., Чан Тхи Ле. К задаче оптимального восстановления функционалов// Успехи мат. наук. 1987. Т.42, №2. С.237–238.
39. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Наилучшие квадратурные формулы и методы восстановления функций, определяемых ядрами, не увеличивающими осцилляции// Мат. сб. 1986. Т.130, №1. С.105–119.
40. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Некоторые экстремальные задачи на классах функций, задаваемых линейными дифференциальными операторами// Мат. сб. 1989. Т.180, №10. С.1355–1395.
41. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т.10, №3. С.207–256.
42. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами// Успехи мат. наук. 1950. Т.50, №2. С.165–177.
43. Овчинцев М.П. Наилучший метод приближения регулярных ограниченных функций в кольце по их значениям в заданных точках// Изв. вузов. Мат. 1989. №5. С.32–39.
44. Осипенко К.Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций// Мат. заметки. 1972. Т.12, №4. С.465–476.
45. Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек// Мат. заметки. 1976. Т.19, №1. С.29–40.

46. Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения и порядок информативности систем// Мат. сб. 1980. Т.111, №4. С.532–556.
47. Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью// Мат. сб. 1982. Т.118, №3. С.350–370.
48. Осипенко К.Ю. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой// Мат. сб. 1985. Т.126, №4. С.566–575.
49. Осипенко К.Ю. О наилучших методах интегрирования на классах ограниченных аналитических функций. XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Челябинск, 1986. С.97.
50. Осипенко К.Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т.52, №1. С.79–99.
51. Осипенко К.Ю. О произведениях Бляшке, наименее уклоняющихся от нуля// Мат. заметки. 1990. Т.47, №5. С.71–80.
52. Осипенко К.Ю. Оптимальная экстраполяция гладких функций, заданных с ошибкой// Сердика Бълг. мат. спис. 1990. Т.16. С.79–86.
53. Осипенко К.Ю. Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций// Мат. сб. 1991. Т.182, №5. С.723–745.
54. Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении многозначных отображений. Третья Северо-Кавказская региональная конференция по функционально-дифференциальным уравнениям и их приложениям. Махачкала, 1991. С.123.
55. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре// Успехи мат. наук. 1990. Т.45, №5. С.193–194.
56. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана// Мат. заметки. 1991. Т.49, №4. С.95–104.
57. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. Оптимальное восстановление производных ограниченных аналитических и гармонических функций по неточным данным// Мат. заметки. 1993. Т.53, №5. С.87–97.
58. Парфенов О.Г. Поперечники по Гельфанду единичного шара класса р Харди Н в весовых пространствах// Мат. заметки. 1985. Т.37, №2. С.171–175.
59. Певный А.Б. Об оптимальности некоторых сплайновых алгоритмов// Изв. вузов. Мат. 1986. №5. С.43–49.
60. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
61. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
62. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс.: МГУ, 1965.
63. Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов// Мат. заметки. 1967. Т.1, №2. С.137–148.
64. Субботин Ю.Н. Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации// Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т.145. С.152–168.
65. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений// Успехи мат. наук. 1960. Т.15, №3. С.81–120.
66. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Издво МГУ, 1976.
67. Тихомиров В.М. Теория приближений. “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.14 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)”. М., 1987. С.103–260.
68. Тихомиров В.М. Магарил-Ильяев Г.Г. Неравенства для производных// Колмогоров А.Н. Избр. труды. Математика, механика. М.: Наука, 1985. С.387–390.

69. Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
70. Уиттекер Э., Ватсон Дж. Курс современного анализа. Ч.2: Трансцендентные функции. М.: Наука, 1963.
71. Уолш Дж.Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
72. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$// Успехи мат. наук. 1990. Т.45, №5. С.197–198.
73. Хавинсон С.Я. Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций// Успехи мат. наук. 1949. Т.4, №4. С.158–159.
74. Хавинсон С.Я. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области// Успехи мат. наук. 1963. Т.18, №2. С.25–98.
75. Хавинсон С.Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1981.
76. Хавинсон С.Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций с дополнительными условиями. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1981.
77. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М: Наука, 1969.
78. Шведенко С.В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре. “Математический анализ. Т.23 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)”. М., 1985. С.3–124.
79. Anderson J.-E., Bojanov B.D. A note on the optimal quadrature in H // Numer. Math. 1984. V.44, №2. P.301–308.
80. Bojanov B.D. Best quadrature formula for a certain class of analytic functions// Zast. mat. 1974. V.14. P.441–447.
81. Bojanov B.D. Extremal problems in a set of polynomials with fixed multiplicities of zeros// Докл. Болг. АН. 1978. Т.31, №4. С.377–380.
82. Carathwodory C., Fejer L. Tber den Zusammenhung der extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und tber den Picard-Landu'schen Satz// Rend. Circ. mat. Palermo. 1911. №32. S.218–239.
83. Dieudonné J. Recherches sur quelques problems ralatifs aux polinomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe// Ann. sci. Ecole norm. super. 1931. V.3, №48. P.247–358.
84. Duren P.L. Theory of H^p spaces. N.Y.: Acad. Press, 1970.
85. Dzjadyk V.K., Ivanov V.V. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points// Anal. math. 1983. V.9, №2. P.85–97.
86. Ehlich H., Zeller K. Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren// Math. Ann. 1966. V.164. P.105–112.
87. Fejer L. Lagrangesche Interpolation und die zugehorigen konjugierten Punkte// Math. Ann. 1932. V.106. P.1–55.
88. Fisher S.D. Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions// Constr. Approx. 1989. V.5, №2. P.171–187.
89. Fisher S.D., Micchelli C.A. The n-width of sets of analytic functions// Duke Math. J. 1980. V.47, №4. P.789–801.
90. Fisher S.D., Micchelli C.A. Optimal sampling of holomorphic functions// Amer. J. Math. 1984. V.106, №3. P.593–609.
91. Fisher S.D., Micchelli C.A. Optimal sampling of holomorphic functions. II// Math. Ann.1985. V.273, №1. P.131–147.

92. W.Forst, Tber die Brite von Klassen holomorpher periodisher Funktionen, J. Approx. Theory. 1977. V.19. 325–331.
93. Golomb M. Lectures on theory of approximation. Argonn Nat. Lab. Appl. Math. Division. 1962.
94. Graham I. The radial derivative, fractional integrals, and the comparative growth of means of holomorphic functions on the unit ball in $\mathbb{C}^n$// Ann. Math. Stud. 1981. №100. P.171–178.
95. Günter R. Evaluation of Lebesgue constants// SIAM J. Numer. Anal.1980.V.17, №4. P.512–520.
96. Heins M. On a problem of Walsh concerning the Hadamar three circles theorem// Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V.55, №3. P.349–372.
97. Heins M. The problem of Milloux for function analytic throughout the interior of the unit circle// Amer. J. Math. 1945. V.67, №2. P.212–234.
98. Huang Daren, Sun Yongsheng. Optimal interpolation on some class of differentiable functions// Approxim. Theory and Appl. 1988. V.4, №4. P.13–22.
99. Kakeya S. Upper and lower limits of some quantities regarding analic functions// Tohoku Science Rep. 1917. V.6. P.153–168.
100. Karlin S. Total positivity. Stanford, California: Stanford University Press, 1968.
101. Landau E. Abschatzung der Koeffizientensumme einer Poenzreihe// Arch. Math. Phys. 1913. Bd.21. S.42–50, 250–255.
102. Macintyre A., Rogosinski W. Extremum problems in the theory of analytic functions// Acta math. 1950. V.82. P.275–325.
103. Mairhuber J.C., Schoenberg I.J., Williamson R.E. On variation diminishing transformations of the circle// Rend. Circ. mat. Palermo (2). 1959. V.8. P.241–270.
104. Marshall D.E. An elementary proof of the Pick–Nevanlinna interpolation theorem// Mich. Math. J. 1974. V.21. P.219–223.
105. Melkman A.A., Micchelli C.A. Optimal estimation on linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data// SIAM J. Numer. Anal. 1979. V.16, №1. P.87–105.
106. Micchelli C.A. On optimal method for the numerical differentiation of smooth functions// J. Approxim. Theory. 1976. V.18. P.189–204.
107. Micchelli C.A. Optimal estimation of smooth functions from inaccurate data// J. Inst. Math. and Appl. 1979. V.23, №4. P.473–495.
108. Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press. 1977. P.1–54.
109. Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures on optimal recovery// Lect. Notes Math. 1985, 1129. P.21–93.
110. Milloux H. Le throrrme de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions mrromorphes et entirres// J. math. pures et appl. 1924. V.9, №2. P.345–402.
111. Nagy B. Tber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall// Berichte math.-phys. Acad. d. Wiss. Leipzig. 1938. Bd.90. S.103–134.
112. Osipenko K.Yu. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions// Anal. math. 1987. V.13, №3. P.199–210.
113. Osipenko K.Yu. Minimal Blaschke products and optimal quadratures in H_∞. International Symposium on Optimal Algorithms. 1989. Varna: Sofia, 1989. P.135–136.
114. Osipenko K.Yu. On the Lebesgue constants for interpolation of analytic functions// Anal. math. 1990. V.16, №4. P.227-289.

115. Osipenko K.Y., Stessin M.I. On optimal recovery of a holomorphic function in the unit ball of $\mathbb{C}^n$// Constr. Approx. 1992. V.8. P.141–159.
116. Pinkus A. On n-widths of periodic functions// J. Analyse Math. 1979. V.35. P.209–235.
117. Pinkus A. n-widths in approximation theory. Berlin: Springer, 1985.
118. Powell M.J.D. On the maximum errors of polinomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria// Comput. J. 1967. V.9. P.404–407.
119. Rivlin T.J. The Lebesgue constants for polinomial interpolation, Functional Analysis and Its Application, Int. Conf., Madras, 1973. Berlin: Springer, 1974. P.422–437.
120. Rivlin T.J. The optimal recovery of functions// Contemp. Math. 1982. V.9. P.121–151.
121. Rivlin T.J., Ruscheweyh St., Shaffer D., Wirths K.J. Optimal recovery of the derivative of bounded analytic functions// IMA J. Numer. Anal. 1983. V.3, №3. P.327–332.
122. Rivlin T.J., Shaffer D.B. Optimal estimation of the derivative of bounded analytic functions. IBM Reserch Report, RC 9843. 1983.
123. Rogosinski W.W., Shapiro H.S. On certain extremum problems for analytic functions// Acta math. 1953. V.90. P.287–318.
124. Rudin W. Holomorphic Lipshitz functions in balls// Comment. math. helv. 1978. V.53, №1. P.143-147.
125. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas// Amer. J. Math. 1949. V.71. P.80–91.
126. Scharlach R. Optimal recovery by linear functionals// J. Approxim. Theory. 1985. V.44, №2. P.167–172.
127. Schoenberg I.J. The elementary cases of Landau problem of inequalities between derivatives// Amer. Math. Mon. 1973. V.80. P.121–158.
128. Shivakumar P.N., Wong R. Asymptotic expansion of the Lebesgue constants associated with polynomial interpolation// Math. Comput. 1982. V.39, №159. P.195–200.
129. Sukharev A.G. On the existence of optimal affine methods for approximating functionals// J. Complexity. 1986. V.2. P.317–322.
130. Sun Yongsheng. On optimal interpolation for differentiable function class (1)// Approxim. Theory and Appl. 1986. V.2, №4. P.49–54.
131. Sun Yongsheng. Optimal interpolation on a convolution class of functions// Chinese Sci Bull. 1989. V.34, №14. P.1148–1152.
132. Sun Yongsheng. Optimal recovery of differential operators on a class of smooth functions// Approxim. Theory and Appl. 1990. V.6, №1. P.23–31.
133. Sun Yongsheng. Optimal interpolation on some classes of smooth functions defined on the whole real axis// Advances in Math. 1991. V.20, №1. P.1–14.
134. Sun Yongsheng, Li Chun. Optimal recovery for $W_2^r(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$// Acta Math. Sinica. 1991. V.7, №4. P.309–323.
135. Walsh J.L. An interpolation problem for harmonic functions// Amer. J. Math. 1954. V.76. P.259–272.
136. Widom H. Rational approximation and n-dimensional diameter// J. Approxim. Theory. 1972. V.5. P.343–361.
137. Wilderotter K. Optimale Algorithmen zur Approximation analytischer Functionen. Dissertation. Bonn. 1990.