МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

ОСИПЕНКО Константин Юрьевич

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ИНФОРМАЦИЮ О КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

(01.01.07 - вычислительная математика)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Н.С. БАХВАЛОВ

Москва, 1975

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Диссертация посвящена исследованию задач, связанных с построением наилучших методов приближения функций из некоторых классов, использующих информацию о конечном числе значений функций. В более общем виде рассматриваемые задачи можно сформулировать, как задачу приближения линейного функционала $L(x)$ на некотором множестве W из линейного пространства X по значениям линейных функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$.

Последняя задача часто формулируется, как задача нахождения таких чисел $C_1^0, \ldots, C_n^0$, для которых величина

$$r_n(C_1, \ldots, C_n) = \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} C_j l_j(x) \right|$$

минимальна. Большинство задач о построении наилучшей квадратурной формулы на классе можно сформулировать именно в таком виде.

Желание наиболее полно использовать информацию о значениях функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ приводит к следующей постановке. Среди всевозможных методов приближения $S(l_1(x), \ldots, l_n(x))$ (не обязательно линейных относительно $l_1(x), \ldots, l_n(x)$) найти метод, называемый наилучшим, который минимизирует величину

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \ldots, l_n(x))|.$$

Такая постановка задачи была предложена С.А. Смоляком [**19**] и рассматривалась также в работах Н.С. Бахвалова [**2**] и Б.Д. Боянова [**6**,**7**]. В частности, было доказано ([**19**], см. также [**2**]), что если множество W из линейного вещественного пространства является выпуклым и центрально-симметричным, то среди наилучших методов приближения найдется линейный относительно функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, и имеет место равенство

$$\inf_{\{C_j\}} r_n(C_1, \ldots, C_n) = \inf_S r_n(S) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \ldots = l_n(x) = 0}} |L(x)|.$$

Тот факт, что реально значения функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$ во многих задачах бывают известны приближенно, приводит к следующей постановке. Приблизить линейный функционал $L(x)$ на множестве W из линейного пространства X (вещественного или комплексного) по значениям $\widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x)$, где $\widetilde{l}_j(x) = l_j(x) + \rho_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, а вектор $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_n(x))$ при всех $x \in W$ удовлетворяет неравенству $\|\rho(x)\| \le \delta$; здесь $\|\cdot\|$ — какая-либо норма в пространстве n-мерных вещественных или комплексных векторов, а δ — неотрицательное число, характеризующее погрешность задания линейных функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$.

Погрешностью данного метода приближения $S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))$ линейного функционала $L(x)$ назовем величину

$$r_n(\delta, S) = \sup_{x \in W} \sup_{\|\rho(x)\| \le \delta} |L(x) - S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))|.$$

В работе рассматриваются задачи, связанные с нахождением такого метода $S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))$, называемого наилучшим методом приближения при данном δ, для которого справедливо равенство

$$r_n(\delta, S_0) = \inf_S r_n(\delta, S).$$

Заметим, что в случае $\delta = 0$ рассматриваемая постановка задачи совпадает с постановкой С.А. Смоляка.

Диссертация состоит из введения и трех глав. В первой главе исследуются вопросы, связанные с существованием и единственностью линейного наилучшего метода приближения. В § 1 устанавливается, что для комплексного линейного пространства X в случае, если множество W выпуклое и круговое, при всех $\delta \ge 0$ среди наилучших методов приближения найдется линейный и для его погрешности будет справедливо равенство

$$r_n(\delta, S_0) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|l(x)\| \le \delta}} |L(x)|, \quad l(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x)).$$

Далее, при условии дифференцируемости в нуле по ε функций

$$\varphi_j(\varepsilon, \delta) = \sup_{x \in A_j(\varepsilon, \delta)} \operatorname{Re} L(x), \;\; \psi_j(\varepsilon, \delta) = \sup_{x \in A_j(i\varepsilon, \delta)} \operatorname{Re} L(x), \;\; j = 1, \dots, n,$$

где $A_j(\varepsilon, \delta) = \{x \in W \,|\, \operatorname{Im} L(x) = 0, \;\|l(x) - \varepsilon e_j\| \le \delta\}$, $\{e_j\} = \delta_{kj}$, доказывается, что метод приближения

$$L(x) \approx \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_j(0, \delta)}{\partial \varepsilon} - i \frac{\partial \psi_j(0, \delta)}{\partial \varepsilon} \right] \widetilde{l}_j(x)$$

будет единственным линейным наилучшим методом приближения функционала $L(x)$ по значениям функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$, заданных с погрешностью δ.

В § 2 устанавливаются аналогичные результаты для случая, когда линейные функционалы $L(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ определены на вещественном линейном пространстве X.

Глава 2 посвящена вопросам, связанным с построением наилучших методов приближения аналитических функций, использующих информацию о конечном числе точных значений функций. Обозначим через $A_d(G)$ класс аналитических в односвязной области G функций $f(z)$, представимых в виде $f(z) = d(z)g(z)$, где $d(z)$ фиксированная аналитическая в области G функция, не обращающаяся в нуль, а $g(z)$ принадлежит классу аналитических и не превосходящих по модулю единицы в области G функций. Простейшим примером класса типа $A_d(G)$ является класс функций $A_M(G)$, аналитических и не превосходящих по модулю константы M. В § 3 строится наилучший на классе $A_d(G)$ метод приближения величины $f(z)$, $z \in G$ по значениям

$$f(z_1), \ldots, f^{(k_1)}(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots, f^{(k_n)}(z_n), \text{ где } z_1, \ldots, z_n$$

различные точки из области G, и доказывается единственность построенного метода среди линейных наилучших методов. Для погрешности наилучшего метода $r(z, \underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{k_1+1}, \ldots, \underbrace{z_n, \ldots, z_n}_{k_n+1})$ доказывается равенство

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = |d(z)| \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{W(z) - W(z_j)}{1 - \overline{W(z_j)}W(z)} \right|^{k_j+1},$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G на внутренность единичного круга (область G считается не совпадающей со всей расширенной плоскостью или с расширенной плоскостью с одной выколотой точкой, т.к. в противном случае класс $A_d(G)$ состоит из функций, с точностью до постоянного множителя равных $d(z)$, и задача приближения решается точно).

Обозначим через H_p, $p > 0$, класс аналитических в $|z| < 1$ функций $f(z)$ таких, что для каждой из них интеграл $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi$ ограничен при $0 < r < 1$. Известно (см. **[18]**, **[8]**), что каждая функция из класса H_p имеет почти всюду на $|z| = 1$ определенные предельные значения по некасательным путям, которые обозначаются через $f(e^{i\varphi})$. Пусть $\rho(\varphi)$ неотрицательная с периодом 2π функция такая, что $\ln \rho(\varphi)$ и $[\ln \rho(\varphi)]^p$, $p > 0$, суммируемы на $[0, 2\pi]$. Через H_p^ρ обозначим класс функций $f(z) \in H_p$, для которых почти всюду выполняется неравенство $|f(e^{i\varphi})| \le \rho(\varphi)$. В § 4 показано, что класс H_p^ρ является классом типа $A_d(G)$, где

$G = \{z : |z| < 1\}$, а $d(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi}$, и с помощью результатов, полученных в § 3, строится единственный линейный наилучший метод приближения для функций из класса H_p^ρ. Для симметричной относительно вещественной оси области G и аналитической функции $d(z)$, вещественной и положительной на вещественной оси, обозначим через $A_d^0(G)$ множество функций из $A_d(G)$, вещественных на вещественной оси. Для приближенного вычисления интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ на функциях из класса $A_d^0(G)$ в § 3 строится квадратурная формула, использующая значения $f(z_1),\ldots,f^{(k_1)}(z_1),\ldots,f(z_n),\ldots,f^{(k_n)}(z_n)$. Для погрешности построенной квадратурной формулы доказана оценка

$$r(\underbrace{z_1,\ldots,z_1}_{k_1+1},\ldots,\underbrace{z_n,\ldots,z_n}_{k_n+1}) \le \int_a^b d(x)\prod_{j=1}^{l}\left|\frac{W(z)-W(z_j)}{1-W(z_j)W(z)}\right|^{k_j+1} \times \prod_{j=l+1}^{n}\left|\frac{W(z)-W(z_j)}{1-\overline{W(z_j)}W(z)}\right|^{2(k_j+1)} p(x)\,dx, \quad (0.1)$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G на внутренность единичного круга, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, а точки $z_1,\ldots,z_n$ таковы, что

$$\operatorname{Im} z_j = 0, \quad j = 1,\ldots,l, \quad z_i \ne z_j, \quad l+1 \le i,j \le n.$$

В случае, когда $k_j = 2k'_j+1$, $j = 1,\ldots,l$, доказано, что построенная квадратурная формула является наилучшим методом интегрирования на классе $A_d^0(G)$ и неравенство (0.1) обращается в равенство. Задачи, связанные с исследованием квадратурных формул на классе $A_M^0(G)$, рассматривались ранее Н.С. Бахваловым в работе [**1**].

В § 5 исследуется задача минимизации погрешности наилучшего на классе $A_d(G)$ метода приближения $r(z_1,\ldots,z_n)$ на некотором замкнутом множестве $E \subset G$ со связным дополнением за счет выбора узлов $z_1,\ldots,z_n$. Положим

$$R_n(G,E) = \inf_{\{z_j\}\in G}\max_{z\in E} r(z_1,\ldots,z_n), \quad (0.2)$$

$$R_n^*(G,E) = \inf_{\{z_j\}\in E}\max_{z\in E} r(z_1,\ldots,z_n). \quad (0.3)$$

Точки $z_1^0,\ldots,z_n^0$, на которых достигается нижняя грань в равенствах (0.2) или (0.3), будем называть оптимальными узлами для соответствующей задачи. Для величин $R_n(G,E)$ и $R_n^*(G,E)$ доказываются следующие соотношения:

$$R_n^*(G,E) \geq R_n(G,E) \geq \min_{z\in E} |d(z)| e^{-nh(E,CG)}, \quad n \geq 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} = e^{-h(E,CG)};$$

здесь $h(E,CG)$ — модуль конденсатора, образованного множеством E и дополнением множества G.

В некоторых случаях для класса $A_M(G)$ задача нахождения величин $R_n(G,E)$, $R_n^*(G,E)$ и соответствующих оптимальных узлов может быть решена точно. Рассмотрению таких случаев посвящен § 6. В частности, в этом параграфе доказывается, что для эллипса $Э_c$ с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c справедливы равенства

$$R_n^*(Э_c, [-1,1]) = R_n(Э_c, [-1,1]) = 2Mc^{-n} \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} c^{-4nm(m+1)}}{1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} c^{-4nm^2}},$$

а оптимальными узлами являются узлы Чебышева $z_j^0 = \cos \dfrac{2j-1}{2n}\pi$, $j = 1, \ldots, n$.

В главе 3 исследуются задачи, связанные с построением наилучших методов приближения, использующих информацию о значениях функций, заданных с погрешностью. Одним из простейших методов приближения функции по ее значениям $f(x_1), \ldots, f^{(k-1)}(x_1)$, $\ldots, f(x_n), \ldots, f^{(k-1)}(x_n)$ является интерполяционная формула Эрмита $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} P_{ij}(x) f^{(j)}(x_i)$, погрешность которой обычно оценивается на классе функций, имеющих непрерывную производную $f^{(nk)}(x)$, удовлетворяющую на некотором отрезке $[a,b]$ условию $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(nk)}(x)| \leq M$ (будем обозначать такой класс через $W^{(nk)}(M;a,b)$). В § 7 доказывается, что интерполяционная формула Эрмита, в которой вместо точных значений используются приближенные значения $\widetilde{f^{(j)}}(x_i) = f^{(j)}(x_i) + \rho_{ij}(f)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, k-1$, где векторы $\rho^j(f) = (\rho_{1j}(f), \ldots, \rho_{nj}(f))$ при всех $f \in W^{(nk)}(M;a,b)$ удовлетворяют неравенству

$$\|\rho^j(f)\|_{p_j} \leq \delta_j \quad \left(\|\rho\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\rho_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \right.$$
$$\left. \|\rho\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\rho_i| \right),$$

для любых $\delta_1, \dots, \delta_{k-1} \ge 0$ будет единственным линейным наилучшим методом приближения величины $f(x)$ на классе $W^{(nk)}(M; a, b)$. Для погрешности наилучшего метода приближения в точке x доказывается равенство

$$r(x, \delta_1, \dots, \delta_{k-1}\, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{k}) = \frac{M}{(nk)!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|^k + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \|\overline{P_j(x)}\|_{q_j},$$

где $\overline{P_j(x)} = (P_{1j}(x), \dots, P_{nj}(x))$, $\dfrac{1}{p_j} + \dfrac{1}{q_j} = 1$.

Через $r(\delta, x_1, \dots, x_n)$ обозначим погрешность наилучшего метода интегрирования для задачи приближенного вычисления интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ на классе $W^{(2n)}(M; a, b)$ по значениям $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i) + \rho_i(f)$, $i = 1, \dots, n$, где при всех $f \in W^{(2n)}(M; a, b)$ выполняется неравенство $\max\limits_{1 \le i \le n} |\rho_i(f)| \le \delta$. Наилучший метод интегрирования, использующий значения $\widetilde{f}(x_1^0), \dots, \widetilde{f}(x_n^0)$, будем называть оптимальным, если имеет место равенство

$$r(\delta, x_1^0, \dots, x_n^0) = \inf_{\{x_i\}} r(\delta, x_1, \dots, x_n).$$

В § 3 доказывается, что единственным линейным методом интегрирования на классе $W^{(2n)}(M; a, b)$ является квадратурная формула Гаусса, в которой вместо точных значений используются значения $\widetilde{f}(x_1^0), \dots, \widetilde{f}(x_n^0)$, а для погрешности оптимального метода интегрирования справедливо равенство

$$r(\delta, x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 p(x)\,dx + \delta \int_a^b p(x)\,dx;$$

здесь $x_1^0, \dots, x_n^0$ — узлы квадратуры Гаусса для веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Задаче построения наилучшего метода приближения на классе $A_d^0(G)$, использующего значения $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i) + \rho_i(f)$, $i = 1, \dots, n$, где при всех $f \in A_d^0(G)$ выполнено неравенство $\max\limits_{1 \le i \le n} |\rho_i(f)| \le \delta$, посвящен § 8. При некоторых условиях на малость δ в этом параграфе строится наилучший метод приближения величины $f(x)$ по значениям $\widetilde{f}(x_1), \dots, \widetilde{f}(x_n)$, $x, x_1, \dots, x_n \in G \cap \mathbb{R}$, и доказывается единственность построенного метода среди линейных наилучших методов приближения.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [**14**–**16**] и докладывались на семинарах факультета ВМК МГУ и механико-математического факультета МГУ.

В заключение автор глубоко признателен своему научному руководителю профессору Н.С. БАХВАЛОВУ за постоянное внимание к работе.

Глава 1

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ДРУГИХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

§1. Существование и условия единственности линейного наилучшего метода приближения в комплексном случае

Пусть $L, l_1, \ldots, l_n$ — линейные функционалы на комплексном линейном пространстве X. Рассмотрим задачу приближения функционала $L(x)$ на некотором подмножестве W пространства X по значениям функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, известным с некоторой погрешностью. Будем считать, что известны значения $\widetilde{l}_k(x) = l_k(x) + \rho_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, причем при всех $x \in W$ вектор $\rho(x) = (\rho_1(x), \ldots, \rho_n(x))$ удовлетворяет неравенству $\|\rho(x)\| \leq \delta$, где $\|\cdot\|$ — какая-либо норма в пространстве комплексных векторов $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, а $\delta \geq 0$ — погрешность вычисления линейных функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$.

Всякий метод приближения функционала $L(x)$ на множестве W, использующий информацию только о значениях $\widetilde{l}_1, \ldots, \widetilde{l}_n$ и δ, может быть представлен в виде некоторой комплекснозначной функции

$$L(x) \approx S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x)), \quad x \in W.$$

Погрешностью данного метода приближения назовем величину

$$r_n(\delta, S) = \sup_{x \in W} \sup_{\|\rho(x)\| \leq \delta} |L(x) - S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))|.$$

Метод $S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))$ будем называть наилучшим методом приближения функционала $L(x)$ на множестве W по значениям функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, заданных с погрешностью δ, если имеет место равенство

$$r_n(\delta, S_0) = \inf_S r_n(\delta, S),$$

где нижняя грань берется по всем комплекснозначным функциям $S(\delta, z_1, \ldots, z_n)$. Метод $S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))$ в дальнейшем будем называть просто наилучшим методом приближения.

Линейными методами приближения назовем методы, имеющие вид

$$S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\delta)\widetilde{l}_l(x).$$

Оказывается, что для довольно широкого класса множеств $W \subset X$ среди наилучших методов приближения существует линейный метод.

Теорема 1.1. *Пусть $L(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ — линейные функционалы на комплексном линейном пространстве X. Если множество $W \subset X$ удовлетворяет условиям:*

1) W — выпукло,

2) W — круговое множество, то есть из $x \in W$ следует, что $e^{i\varphi} \in W$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$, то для любого $\delta \geq 0$ существуют такие комплексные числа $C_j(\delta)$, $j = 1, \dots, n$, что метод

$$S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\delta)\widetilde{l}_l(x)$$

является наилучшим методом, и для его погрешности имеет место равенство

$$r_n(\delta, S_0) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|l(x)\| \leq \delta}} |L(x)|,$$

где $l(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$.

Доказательство. Рассмотрим множество точек в $(2n+2)$-мерном вещественном евклидовом пространстве

$$(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (\operatorname{Re} L(x), \operatorname{Im} L(x),$$
$$\operatorname{Re} \widetilde{l}_1(x), \operatorname{Im} \widetilde{l}_1(x), \dots, \operatorname{Re} \widetilde{l}_n(x), \operatorname{Im} \widetilde{l}_n(x))$$

при всех $x \in W$ и всех таких $\rho(x)$, что $\|\rho(x)\| \leq \delta$, $x \in W$, которое обозначим через $W_n(\delta)$.

Покажем, что $W_n(\delta)$ выпуклое множество. Положим $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in W_n(\delta)$, а $\lambda \in (0,1)$. Из принадлежности векторов ξ_1, ξ_2 множеству $W_n(\delta)$ следует существование таких $x_1, x_2 \in W$ и таких векторов $\rho^1 = (\rho^1_1, \dots, \rho^1_n)$, $\rho^2 = (\rho^2_1, \dots, \rho^2_n)$, удовлетворяющих неравенствам $\|\rho^1\| \leq \delta$, $\|\rho^2\| \leq \delta$, что

$$\xi_1 = (\operatorname{Re} L(x_1), \operatorname{Im} L(x_1), \operatorname{Re}[l_1(x_1) + \rho^1_1], \operatorname{Im}[l_1(x_1) + \rho^1_1], \dots,$$
$$\operatorname{Re}[l_n(x_1) + \rho^1_n], \operatorname{Im}[l_n(x_1) + \rho^1_n]),$$

$$\xi_2 = (\operatorname{Re} L(x_2), \operatorname{Im} L(x_2), \operatorname{Re}[l_1(x_2) + \rho^2_1], \operatorname{Im}[l_1(x_2) + \rho^2_1], \dots,$$
$$\operatorname{Re}[l_n(x_2) + \rho^2_n], \operatorname{Im}[l_n(x_2) + \rho^2_n]).$$

Таким образом,

$$\xi = (\operatorname{Re} L(x), \operatorname{Im} L(x), \operatorname{Re}[l_1(x) + \rho_1], \operatorname{Im}[l_1(x) + \rho_1], \dots,$$
$$\operatorname{Re}[l_n(x) + \rho_n], \operatorname{Im}[l_n(x) + \rho_n]),$$

где $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, а $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) = \lambda\rho^1 + (1-\lambda)\rho^2$. В силу неравенства $\|\rho\| \le \lambda\|\rho^1\| + (1-\lambda)\|\rho^2\| \le \delta$ и выпуклости множества W получаем, что $\xi \in W_n(\delta)$ при любом $\lambda \in (0,1)$ и, следовательно, доказана выпуклость множества $W_n(\delta)$.

Обозначим через $W_n^{\varphi}(\delta)$ множество точек, получающихся из точек множества $W_n(\delta)$ при линейном преобразовании P_φ, которое вектору $(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)$ ставит в соответствие вектор $(x_0', y_0', \dots, x_n', y_n')$ по формулам

$$\begin{aligned} x_k' &= x_k \cos\varphi - y_k \sin\varphi, \\ y_k' &= x_k \sin\varphi + y_k \cos\varphi, \end{aligned} \qquad k = 0, \dots, n.$$

Покажем, что множество точек $W_n^{\varphi}(\delta)$ совпадает с множеством $W_n(\delta)$. Пусть $\xi' \in W_n^{\varphi}(\delta)$, то есть $\xi' = P_\varphi \xi$, где $\xi \in W_n(\delta)$. Существует $x \in W$ и вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\|\rho\| \le \delta$, что

$$\xi = (\operatorname{Re} L(x), \operatorname{Im} L(x), \operatorname{Re}[l_1(x) + \rho_1], \operatorname{Im}[l_1(x) + \rho_1], \dots,$$
$$\operatorname{Re}[l_n(x) + \rho_n], \operatorname{Im}[l_n(x) + \rho_n]),$$

Для вектора $\xi' = P_\varphi \xi$ имеем

$$\xi' = (\operatorname{Re} L(e^{i\varphi}x), \operatorname{Im} L(e^{i\varphi}x), \operatorname{Re}[l_1(e^{i\varphi}x) + e^{i\varphi}\rho_1], \operatorname{Im}[l_1(e^{i\varphi}x) + e^{i\varphi}\rho_1],$$
$$\dots, \operatorname{Re}[l_n(e^{i\varphi}x) + e^{i\varphi}\rho_n], \operatorname{Im}[l_n(e^{i\varphi}x) + e^{i\varphi}\rho_n]),$$

В силу свойства 2) множества W и того, что $\|e^{i\varphi}\rho\| = \|\rho\| \le \delta$, вектор $\xi' \in W_n(\delta)$.

Обратно, если $\xi \in W_n(\delta)$, то $\xi' = P_\varphi^{-1}\xi \in W_n(\delta)$, так как $P_\varphi^{-1} = P_{-\varphi}$, а из предыдущего утверждения $P_\varphi \eta \in W_n(\delta)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ и $\eta \in W_n(\delta)$. Таким образом, $\xi = P_\varphi P_\varphi^{-1}\xi = P_\varphi \xi' \in W_n^{\varphi}(\delta)$.

Положим

$$R(\delta) = \sup_{(x_0, y_0, 0, \dots, 0) \in W_n(\delta)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

и предположим, что $R(\delta) < \infty$. Вследствие выпуклости и инвариантности относительно преобразований P_φ множества $W_n(\delta)$ вместе с каждой точкой $(x_0, y_0, 0, \dots, 0) \in W_n(\delta)$ все точки $(x_0', y_0', 0, \dots, 0)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x_0')^2 + (y_0')^2 \le x_0^2 + y_0^2$, будут также принадлежать множеству $W_n(\delta)$. Отсюда следует, что точки $(x_0, y_0, 0, \dots, 0)$, где $x_0^2 + y_0^2 = R^2(\delta)$ являются граничными точками множества $W_n(\delta)$.

Известно, что через каждую граничную точку выпуклого множества можно провести к нему опорную гиперплоскость. Уравнение опорной гиперплоскости к $W_n(\delta)$, проходящей через граничную точку $(R(\delta), 0, \dots, 0)$, можно записать в виде

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} (a_j(\delta)x_j + b_j(\delta)y_j) + R(\delta). \tag{1.1}$$

При линейном преобразовании P_φ эта гиперплоскость перейдет в опорную гиперплоскость к $W_n^\varphi = W_n$, проходящую через граничную точку $(R(\delta)\cos\varphi, R(\delta)\sin\varphi, 0, \dots, 0)$ и имеющую вид

$$x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi = \sum_{j=1}^{n} [a_j(\delta)\cos\varphi - b_j(\delta)\sin\varphi] x_j + \sum_{j=1}^{n} [a_j(\delta)\sin\varphi + b_j(\delta)\cos\varphi] y_j + R(\delta).$$

Отсюда следует, что при любом $\varphi \in \mathbb{R}$ точки множества $W_n(\delta)$ лежат в замкнутом полупространстве

$$\left[x_0 - \sum_{j=1}^{n} (a_j(\delta)x_j + b_j(\delta)y_j)\right] \cos\varphi + \left[y_0 - \sum_{j=1}^{n} (-b_j(\delta)x_j + a_j(\delta)y_j)\right] \sin\varphi \le R(\delta).$$

Множество точек (A, B), удовлетворяющих неравенству $A\cos\varphi + B\sin\varphi \le R$ при любом $\varphi \in \mathbb{R}$, лежит в круге радиуса R. Следовательно, для всех точек из $W_n(\delta)$ справедливо неравенство

$$\left[x_0 - \sum_{j=1}^{n} (a_j(\delta)x_j + b_j(\delta)y_j)\right]^2 + \left[y_0 - \sum_{j=1}^{n} (-b_j(\delta)x_j + a_j(\delta)y_j)\right]^2 \le R^2(\delta).$$

Вспоминая определение множества $W_n(\delta)$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} (a_j(\delta) - ib_j(\delta)) \widetilde{l}_j(x) \right| \le R(\delta).$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $x \in W$ и всех $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_n(x))$, $\|\rho(x)\| \le \delta$, получаем

$$\sup_{x \in W} \sup_{\|\rho(x)\| \le \delta} \left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} C_j(\delta) \widetilde{l}_j(x) \right| \le R(\delta), \tag{1.2}$$

где $C_j(\delta) = a_j(\delta) - ib_j(\delta)$.

Докажем теперь, что для произвольного метода $S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))$ справедливо неравенство

$$r_n(\delta, S) \ge R(\delta).$$

Из определения $R(\delta)$ и множества $W_n(\delta)$ имеем

$$R(\delta) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|l(x)\| \leq \delta}} |L(x)|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in W$, для которого $\|l(x_\varepsilon)\| \leq \delta$ и $|L(x_\varepsilon)| > R(\delta) - \varepsilon$. Этим же неравенствам будет удовлетворять $-x_\varepsilon \in W$. Положим $\rho(x_\varepsilon) = -l(x_\varepsilon)$, $\rho(-x_\varepsilon) = l(x_\varepsilon)$. Тогда $\widetilde{l}_1(\pm x_\varepsilon) = \ldots = \widetilde{l}_n(\pm x_\varepsilon) = 0$ и $S(\delta, \widetilde{l}_1(\pm x_\varepsilon), \ldots, \widetilde{l}_n(\pm x_\varepsilon)) = S(\delta, 0, \ldots, 0)$. Из неравенств

$$|L(x_\varepsilon) - S(\delta, 0, \ldots, 0)| + |L(-x_\varepsilon) - S(\delta, 0, \ldots, 0)| \\ \geq 2|L(x_\varepsilon)| > 2[R(\delta) - \varepsilon]$$

вытекает, что либо для x_ε, либо для $-x_\varepsilon$, погрешность приближения функционала L больше $R(\delta) - \varepsilon$. Отсюда

$$r_n(\delta, S) = \sup_{x \in W} \sup_{\|\rho(x)\| \leq \delta} |L(x) - S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))| > R(\delta) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и произвольности рассматриваемого метода получаем неравенство

$$\inf_S r_n(\delta, S) \geq R(\delta) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|l(x)\| \leq \delta}} |L(x)|. \tag{1.3}$$

Из последнего неравенства и неравенства (1.2) имеем

$$\inf_S r_n(\delta, S) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|l(x)\| \leq \delta}} |L(x)| \geq r_n(\delta, S_0), \tag{1.4}$$

где

$$S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\delta) \widetilde{l}_j(x).$$

Множество всевозможных методов приближения содержит в себе множество линейных методов, поэтому неравенства (1.4) обращаются в равенства.

В случае, когда $R(\delta) = \infty$, для любого $N > 0$ существует $x_N \in W$, для которого $\|l(x_N)\| \leq \delta$ и $|L(x_N)| > N$. Положим $\rho(x_N) = -l(x_N)$, тогда $\widetilde{l}_1(x_N) = \ldots = \widetilde{l}_n(x_N) = 0$. Из неравенства

$$|L(x_N) - S(\delta, 0, \ldots, 0)| \geq N - |S(\delta, 0, \ldots, 0)|$$

вытекает, что для любого метода $S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))$ справедливо равенство $r_n(\delta, S) = \infty$. Таким образом, в этом случае всякий метод, а значит, и всякий линейный метод, будет являться наилучшим. Теорема доказана. $\square$

В общем случае наилучший метод не единственен. Более того, существуют примеры, когда величина $\inf\limits_{S} r_n(\delta, S)$ конечна, а множество линейных наилучших методов имеет мощность континуум. Для построения одного из таких примеров рассмотрим класс комплекснозначных функций $L_M(G)$, определенных на некотором множестве точек G из комплексной плоскости и удовлетворяющих неравенству $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le M|\xi_1 - \xi_2|$ при всех $\xi_1, \xi_2 \in G$. Пусть z_1, z_2 некоторые точки, принадлежащие G, такие, что $\dfrac{z_1+z_2}{2} \in G$. Положим $L(f) = f\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$, $l_1(f) = f(z_1)$, $l_2(f) = f(z_2)$, $\|\rho\| = \max\limits_{1\le i\le 2} |\rho_i|$. Будем считать, что значения $f(z_1)$, $f(z_2)$ задаются с погрешностью δ, т.е. известны значения $\widetilde{f}(z_1) = f(z_1) + \rho_1(f)$, $\widetilde{f}(z_2) = f(z_2) + \rho_2(f)$, и при всех $f \in L_M(G)$ $\rho(f) = (\rho_1(f), \rho_2(f))$ удовлетворяет неравенству $\|\rho(f)\| \le \delta$. Тогда при всех $\lambda \in [0,1]$ метод

$$S_\lambda(\delta, \widetilde{f}(z_1), \widetilde{f}(z_2)) = \lambda \widetilde{f}(z_1) + (1-\lambda)\widetilde{f}(z_2)$$

является наилучшим методом приближения величины $f\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ на классе $L_M(G)$ для любого $\delta \ge 0$. Действительно, из неравенства

$$\left| f\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \lambda \widetilde{f}(z_1) - (1-\lambda)\widetilde{f}(z_2) \right| \le \frac{M}{2}|z_1 - z_2| + \delta,$$

справедливого для любой функции из класса $L_M(G)$, следует, что

$$r_2(\delta, S_\lambda) \le \frac{M}{2}|z_1 - z_2| + \delta.$$

В силу равенства

$$\sup_{\substack{f\in L_M(G)\\ |f(z_1)|,|f(z_2)|\le\delta}} \left| f\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right| = \frac{M}{2}|z_1 - z_2| + \delta,$$

которое нетрудно проверить, имеем

$$r_2(\delta, S_\lambda) = \inf_{S} r_2(\delta, S) = \frac{M}{2}|z_1 - z_2| + \delta.$$

В том случае, когда линейные функционалы $L(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, для линейного наилучшего метода может быть доказана теорема единственности. Для доказательства теоремы единственности нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть выпуклое множество точек V лежит в замкнутой полуплоскости $y = ax+b$, где $y = ax+b$ уравнение опорной гиперплоскости к множеству V, проходящей через граничную* *точку* $(0,b)$ *множества* V. *Тогда, если функция* $\varphi(\varepsilon) = \sup\limits_{(\varepsilon,y)\in V} y$ *дифференцируема в нуле, то* $a = \varphi'(0)$.

Доказательство. Для всех точек вида $(\varepsilon, y) \in V$ имеет место неравенство $y \le a\varepsilon + b$. Следовательно, $\varphi(\varepsilon) \le a\varepsilon + b$. Точка $(0,b)$ является граничной точкой множества V, поэтому $b = \varphi(0)$. Таким образом, $\dfrac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} \le a$ при $\varepsilon > 0$ и $\dfrac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} \ge a$ при $\varepsilon < 0$. Отсюда следует, что $\varphi'(0) = a$. □

Теорема 1.2. *Пусть относительно множества* W *выполнены предположения теоремы* 1.1. *Тогда, если функции*

$$\varphi_j(\varepsilon,\delta) = \sup_{x\in A_j(\varepsilon,\delta)} \operatorname{Re} L(x) \text{ и } \psi_j(\varepsilon,\delta) = \sup_{x\in A_j(i\varepsilon,\delta)} \operatorname{Re} L(x), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

где

$$A_j(\varepsilon,\delta) = \{\, x \in W \,|\, \operatorname{Im} L(x) = 0,\ \|l(x) - \varepsilon e_j\| \le \delta\,\}, \quad \{e_j\}_k = \delta_{kj},$$

дифференцируемы в нуле по ε *при всех* $j = 1,\dots,n$ *для некоторого* $\delta \ge 0$, *то метод*

$$S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x),\dots,\widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial\varphi_j(0,\delta)}{\partial\varepsilon} - i\frac{\partial\psi_j(0,\delta)}{\partial\varepsilon}\right]\widetilde{l}_j(x)$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения функционала $L(x)$ *по значениям функционалов* $l_1(x),\dots,$ $l_n(x)$, *заданным с погрешностью* δ.

Доказательство. В теореме 1.1 было доказано, что метод

$$S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x),\dots,\widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n}[a_j(\delta) - ib_j(\delta)]\widetilde{l}_j(x)$$

является наилучшим методом, если гиперплоскость

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n}[a_j(\delta)x_j + b_j(\delta)y_j] + R(\delta) \tag{1.5}$$

будет опорной гиперплоскостью к множеству точек $W_n(\delta)$. Верно и обратное: если метод

$$S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x),\dots,\widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\delta)\widetilde{l}_j(x)$$

есть наилучший метод приближения, то гиперплоскость

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n}[\operatorname{Re} C_j(\delta)x_j - \operatorname{Im} C_j(\delta)y_j] + R(\delta) \tag{1.6}$$

будет опорной к множеству $W_n(\delta)$. Действительно, из определения наилучшего метода имеем

$$\left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} C_j(\delta)\widetilde{l}_j(x) \right| \le R(\delta) = \sup_{\substack{x\in W \\ \|l(x)\|\le\delta}} |L(x)|$$

при всех $x \in W$ и всех $\rho(x)$, $\|\rho(x)\| \le \delta$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} L(x) - \sum_{j=1}^{n} \left[\operatorname{Re} C_j(\delta) \operatorname{Re} \widetilde{l}_j(x) - \operatorname{Im} C_j(\delta) \operatorname{Im} \widetilde{l}_j(x) \right] \le R(\delta).$$

Последнее неравенство означает, что все точки множества $W_n(\delta)$ содержатся в замкнутом полупространстве

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} [\operatorname{Re} C_j(\delta) x_j - \operatorname{Im} C_j(\delta) y_j] \le R(\delta).$$

Таким образом, гиперплоскость (1.6) является опорной к множеству $W_n(\delta)$.

Остается доказать, что для произвольной опорной гиперплоскости (1.5) выполняются равенства

$$a_j(\delta) = \frac{\partial \varphi_j(0,\delta)}{\partial \varepsilon}, \quad b_j(\delta) = \frac{\partial \psi_j(0,\delta)}{\partial \varepsilon}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Пусть гиперплоскость (1.5) есть некоторая опорная гиперплоскость к множеству $W_n(\delta)$, проходящая через граничную точку $(R(\delta), \dots, 0)$. Обозначим множества точек из $W_n(\delta)$, лежащих в плоскостях (x_j, x_0), (y_j, y_0) через $X_n^j(\delta)$ и $Y_n^j(\delta)$. Множества $X_n^j(\delta)$ и $Y_n^j(\delta)$ будут выпуклыми и будут содержаться в замкнутых полуплоскостях $x_0 \le a_j(\delta)x_j + R(\delta)$, $x_0 \le b_j(\delta)y_j + R(\delta)$, соответственно. Для функций $\varphi_j(\varepsilon, \delta)$ и $\psi_j(\varepsilon, \delta)$ справедливы равенства

$$\varphi_j(\varepsilon,\delta) = \sup_{(\varepsilon,x_0)\in X_n^j(\delta)} x_0, \tag{1.8}$$

$$\psi_j(\varepsilon,\delta) = \sup_{(\varepsilon,x_0)\in Y_n^j(\delta)} x_0. \tag{1.9}$$

Докажем справедливость равенства (1.8). Из определения функции $\varphi_j(\varepsilon,\delta)$ следует, что для любого $\eta > 0$ существует такой элемент $x_\eta \in W$, для которого $\operatorname{Im} L(x_\eta) = 0$, $\|l(x_\eta) - \varepsilon e_j\| \le \delta$ и $\operatorname{Re} L(x_\eta) > \varphi_j(\varepsilon,\delta) - \eta$. Положим $\rho(x_\eta) = -l(x_\eta) + \varepsilon e_j$, тогда $\widetilde{l}(x_\eta) = l(x_\eta) + \rho(x_\eta) = \varepsilon e_j$. Следовательно, точка

$$(\operatorname{Re} L(x_\eta), \operatorname{Im} L(x_\eta), \operatorname{Re} \widetilde{l}_1(x_\eta), \operatorname{Im} \widetilde{l}_1(x_\eta), \dots, \operatorname{Re} \widetilde{l}_n(x_\eta), \operatorname{Im} \widetilde{l}_n(x_\eta))$$

лежит в плоскости (x_j, x_0) и $x_j = \operatorname{Re} \widetilde{l}_j(x_\eta) = \varepsilon$. Отсюда

$$\sup_{(\varepsilon,x_0)\in X_n^j(\delta)} x_0 \ge \operatorname{Re} L(x_\eta) > \varphi_j(\varepsilon,\delta) - \eta.$$

Вследствие произвольности $\eta > 0$ имеем

$$\sup_{(\varepsilon, x_0) \in X_n^j(\delta)} x_0 \geq \varphi_j(\varepsilon, \delta). \tag{1.10}$$

Пусть теперь x_0^η такое действительное число, что $(\varepsilon, x_0^\eta) \in X_n^j(\delta)$ и $x_0^\eta > \sup\limits_{(\varepsilon, x_0) \in X_n^j(\delta)} x_0 - \eta$. Из определения множества $X_n^j(\delta)$ следует существование элемента $x_\eta \in X_n^j(\delta)$ и функции $\rho(x)$, $\|\rho(x)\| \leq \delta$, для которых $\operatorname{Re} L(x_\eta) = x_0^\eta$, $\operatorname{Im} L(x_\eta) = 0$, $l_k(x_\eta) + \rho_k(x_\eta) = \varepsilon \delta_{kj}$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда вытекает, что $x_\eta \in A_j(\varepsilon, \delta)$ и

$$\varphi_j(\varepsilon, \delta) \geq \operatorname{Re} L(x_\eta) > \sup_{(\varepsilon, x_0) \in X_n^j(\delta)} x_0 - \eta.$$

В силу произвольности $\eta > 0$ и неравенства (1.10) получаем равенство (1.8). Равенство (1.9) доказывается аналогично. Соотношения (1.7) теперь следуют из леммы 1.1. Теорема доказана. $\square$

§2. Существование и условия единственности линейного наилучшего метода приближения в вещественном случае

Задачу наилучшего приближения функционала $L(x)$ по приближенным значениям функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$ на множестве W из вещественного линейного пространства X сформулируем в несколько отличной от комплексного случая форме. Будем считать, что известны значения $\widetilde{l}_k(x) = l_k(x) + \rho_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, где при всех $x \in W$ векторы

$$\begin{aligned}
&\rho^1(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_{k_1}(x)),\\
&\rho^2(x) = (\rho_{k_1+1}(x), \dots, \rho_{k_1+k_2}(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\rho^p(x) = (\rho_{k_1+\dots+k_{p-1}+1}(x), \dots, \rho_n(x))
\end{aligned}$$

удовлетворяют неравенствам $\|\rho^1(x)\|_{k_1} \leq \delta_1, \dots, \|\rho^p(x)\|_{k_p} \leq \delta_p$; здесь $\|\cdot\|_{k_1}, \dots, \|\cdot\|_{k_p}$ — какие-либо нормы в пространствах $\mathbb{R}^{k_1}, \dots, \mathbb{R}^{k_p}$.

Погрешностью данного метода приближения $S(\delta_1, \dots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))$ назовем величину

$$r_n(\delta_1, \dots, \delta_p, S) = \sup_{x \in W} \sup_{\|\rho^s(x)\|_{k_s} \leq \delta_s,\ s=1,\dots,p} |L(x) - S(\delta_1, \dots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))|.$$

Метод $S_0(\delta_1, \dots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))$ будем называть наилучшим методом приближения для данных $\delta_1, \dots, \delta_p$, если имеет место равенство

$$r_n(\delta_1, \dots, \delta_p, S_0) = \inf_S r_n(\delta_1, \dots, \delta_p, S).$$

Аналогом теоремы 1.1 в вещественном случае является

Теорема 2.1. *Пусть $L(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ — линейные функционалы, определенные на вещественном линейном пространстве X. Если множество $W \subset X$ удовлетворяет условиям:*

1) W — выпукло,

2) W — центрально-симметричное множество с центром симметрии в нуле, то для любых $\delta_1, \dots, \delta_p \geq 0$ существуют такие вещественные числа $D_j(\delta_1, \dots, \delta_p)$, $j = 1, \dots, n$, что метод

$$S_0(\delta_1, \dots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1, \dots, \delta_p)\widetilde{l}_j(x)$$

является наилучшим методом приближения, и для его погрешности справедливо равенство

$$r_n(\delta_1, \dots, \delta_p, S_0) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|l^s(x)\|_{k_s} \leq \delta_s,\ s=1,\dots,p}} |L(x)|,$$

где $l^s(x) = (l_{k_0+\ldots+k_{s-1}+1}(x), \dots, l_{k_0+\ldots+k_s}(x))$, $k_0 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим множество точек в $(n+1)$-мерном вещественном евклидовом пространстве

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) = (L(x), \widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x))$$

при всех $x \in W$ и всех таких $\rho^1(x), \dots, \rho^p(x)$, что $\|\rho^1(x)\|_{k_1} \leq \delta_1, \dots, \|\rho^p(x)\|_{k_p} \leq \delta_p$, которое обозначим через $W_n(\delta_1, \dots, \delta_p)$. Из равенств

$$\begin{aligned}\lambda(L(x_1), l_1(x_1) + \alpha_1, \dots, l_n(x_1) + \alpha_n)& \\ + (1-\lambda)(L(x_2), l_1(x_2) + \beta_1, \dots, l_n(x_2) + \beta_n)& \\ = (L(x), l_1(x) + \rho_1, \dots, l_n(x) + \rho_n)&,\end{aligned}$$

где $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\rho = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$,

$$\begin{aligned}-(L(x), l_1(x) + \rho_1, \dots, l_n(x) + \rho_n)& \\ = (L(-x), l_1(-x) - \rho_1, \dots, l_n(-x) - \rho_n)&\end{aligned}$$

и неравенств

$$\|\rho^s\|_{k_s} \leq \lambda\|\alpha^s\|_{k_s} + (1-\lambda)\|\beta^s\|_{k_s} \leq \delta_s, \quad \|-\rho^s\|_{k_s} = \|\rho^s\|_{k_s} \leq \delta_s$$

следует, что $W_n(\delta_1, \dots, \delta_p)$ выпуклое и центрально-симметричное множество с центром симметрии в начале координат. Положим

$$R(\delta_1, \dots, \delta_p) = \sup_{(x_0, 0, \dots, 0) \in W_n(\delta_1, \dots, \delta_p)} |x_0|$$

и предположим, что $R(\delta_1, \dots, \delta_p) < \infty$. Вследствие центральной симметрии множества $W_n(\delta_1, \dots, \delta_p)$ точка $(R(\delta_1, \dots, \delta_p), 0, \dots, 0)$ является граничной точкой этого множества. Проведем через нее опорную к $W_n(\delta_1,\dots,\delta_p)$ гиперплоскость, уравнение которой запишем в виде

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1,\dots,\delta_p)x_j = R(\delta_1,\dots,\delta_p).$$

Множество точек $W_n(\delta_1,\dots,\delta_p)$ будет лежать в замкнутом полупространстве

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1,\dots,\delta_p)x_j \le R(\delta_1,\dots,\delta_p). \tag{2.1}$$

В силу центральной симметрии относительно начала координат множества $W_n(\delta_1,\dots,\delta_p)$ для всех его точек будет также справедливо неравенство

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1,\dots,\delta_p)x_j \ge -R(\delta_1,\dots,\delta_p).$$

Из последнего неравенства и неравенства (2.1) имеем

$$\left|x_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1,\dots,\delta_p)x_j\right| \le R(\delta_1,\dots,\delta_p)$$

при всех $(x_0,\dots,x_n)\in W_n(\delta_1,\dots,\delta_p)$. Вспоминая определение множества $W_n(\delta_1,\dots,\delta_p)$, получаем

$$\left|L(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1,\dots,\delta_p)\widetilde{l}_j(x)\right| \le R(\delta_1,\dots,\delta_p)$$

для всех $x\in W$ и всех $\rho^1(x),\dots,\rho^p(x)$ таких, что $\|\rho^1(x)\|_{k_1}\le \delta_1,\dots,\|\rho^p(x)\|_{k_p}\le\delta_p$. Отсюда

$$\sup_{x\in W}\ \sup_{\|\rho^s(x)\|_{k_s}\le\delta_s,\ s=1,\dots,p}\left|L(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1,\dots,\delta_p)\widetilde{l}_j(x)\right| \le R(\delta_1,\dots,\delta_p). \tag{2.2}$$

Из определения $R(\delta_1,\dots,\delta_p)$ и множества $W_n(\delta_1,\dots,\delta_p)$ следует, что

$$R(\delta_1,\dots,\delta_p) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|l^s(x)\|_{k_s}\le\delta_s,\ s=1,\dots,p}} |L(x)|.$$

С незначительными изменениями повторяя доказательство неравенства (1.3), получим неравенство

$$\inf_S r_n(\delta_1,\dots,\delta_p,S) \ge \sup_{\substack{x\in W\\ \|l^s(x)\|_{k_s}\le\delta_s,\ s=1,\dots,p}} |L(x)|.$$

Последнее неравенство вместе с (2.2) дает

$$\inf_S r_n(\delta_1,\dots,\delta_p,S) = r_n(\delta_1,\dots,\delta_p,S_0) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|l^s(x)\|_{k_s}\le\delta_s,\ s=1,\dots,p}} |L(x)|,$$

где

$$S_0(\delta_1, \ldots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p)\widetilde{l}_j(x).$$

В случае, когда $R(\delta_1, \ldots, \delta_p) = \infty$, вследствие равенства $\inf_S r_n(\delta_1, \ldots, \delta_p, S) = \infty$ всякий метод, а значит, и всякий линейный метод, является наилучшим. Теорема доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть относительно множества W выполнены предположения теоремы 2.1. Тогда, если функции*

$$\varphi_j(\varepsilon, \delta_1, \ldots, \delta_p) = \sup_{x \in B_j(\varepsilon, \delta_1, \ldots, \delta_p)} L(x),$$

где $B_j(\varepsilon, \delta_1, \ldots, \delta_p) = \{ x \in W | \|l^s(x) - \varepsilon e_j^s\|_{k_s} \leq \delta_s \;\; s = 1, \ldots, n\}$, $\{e_j^s\}_k = \delta_{j,k_0+\ldots+k_{s-1}+k}$, $s = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, k_p$, дифференцируемы в нуле по ε при всех $j = 1, \ldots, n$ для некоторых $\delta_1, \ldots, \delta_p \geq 0$, то метод

$$S_0(\delta_1, \ldots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(0, \delta_1, \ldots, \delta_p)}{\partial \varepsilon} \widetilde{l}_j(x)$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения функционала $L(x)$ по значениям функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, заданным с погрешностью $\delta_1, \ldots, \delta_p$.

Доказательство. В теореме 2.1 доказано, что метод

$$S_0(\delta_1, \ldots, \delta_p, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p)\widetilde{l}_j(x)$$

будет наилучшим методом, если гиперплоскость

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p) x_j = R(\delta_1, \ldots, \delta_p) \tag{2.3}$$

есть опорная гиперплоскость к множеству точек $W_n(\delta_1, \ldots, \delta_p)$. Обратное утверждение вытекает из неравенства

$$\left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p)\widetilde{l}_j(x) \right| \leq R(\delta_1, \ldots, \delta_p),$$

справедливого для наилучшего метода при всех $x \in W$ и всех $\rho^1(x), \ldots, \rho^p(x)$ таких, что $\|\rho^s(x)\|_{k_s} \leq \delta_s$, $s = 1, \ldots, p$. Из этого неравенства следует, что все точки множества $W_n(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ лежат в замкнутом полупространстве

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p) x_j \leq R(\delta_1, \ldots, \delta_p),$$

т.е. гиперплоскость (2.3) является опорной к множеству $W_n(\delta_1, \ldots, \delta_p)$.

Остается доказать, что для произвольной опорной гиперплоскости (2.3) имеют место равенства

$$D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p) = \frac{\partial \varphi_j(0, \delta_1, \ldots, \delta_p)}{\partial \varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

из которых будет следовать единственность такой гиперплоскости, а следовательно, и линейного наилучшего метода. Обозначим множество точек из $W_n(\delta_1, \ldots, \delta_p)$, лежащих в плоскости (x_j, x_0), через $X_n^j(\delta_1, \ldots, \delta_p)$. Это множество является выпуклым и содержится в замкнутой полуплоскости

$$x_0 \leq D_j(\delta_1, \ldots, \delta_p) x_j + R(\delta_1, \ldots, \delta_p).$$

Равенства (2.4) теперь вытекают из леммы 1.1 и соотношений

$$\varphi_j(\varepsilon, \delta_1, \ldots, \delta_p) = \sup_{(\varepsilon, x_0) \in X_n^j(\delta_1, \ldots, \delta_p)} x_0,$$

доказательство которых аналогично доказательству равенств (1.8), (1.9). Теорема доказана. □

При $\delta = \delta_1 = \ldots = \delta_p = 0$ из теорем 1.1, 1.2 и теорем 2.1, 2.2 получаются соответствующие утверждения относительно линейных наилучших методов приближения функционала $L(x)$ по точным значениям функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$. Теоремы 2.1 и 2.2 (без доказательства единственности) были для этого случая доказаны в работах [**19**], [**2**].

Глава 2

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ТОЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

§3. Наилучший метод приближения для функций из класса $A_d(G)$

Рассмотрим в комплексном линейном пространстве функций, аналитических в некоторой области G комплексной плоскости, выпуклый и круговой класс функций $W(G)$. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — некоторые отличные друг от друга точки из области G. Ставится задача о наилучшем приближении величины $f(z)$, $f \in W(G)$, по значениям $f(z_1), \dots, f^{(k_1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(k_n)}(z_n)$ на классе $W(G)$ при любом $z \in G$.

Метод $S_0(z, f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n))$ назовем наилучшим методом приближения на классе $W(G)$, если при всех $z \in G$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in W(G)} |f(z) - S_0(z, f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n))| = \inf_S \sup_{f \in W(G)} |f(z) - S(z, f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n))|.$$

Величину

$$r(z, \underbrace{z_1, \dots, z_1}_{k_1+1}, \dots, \underbrace{z_n, \dots, z_n}_{k_n+1}) = \inf_S \sup_{f \in W(G)} |f(z) - S(z, f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n))|$$

будем называть погрешностью наилучшего приближения в точке $z \in G$.

Рассмотрим в качестве функционала $L(f)$ значение функции $f \in W(G)$ в точке $z \in G$, а в качестве функционалов $l(f)$ значения функции f и ее производных до порядка k_j включительно в точке z_j. Из теоремы 1.1 при $\delta = 0$ получаем, что для любого $z \in G$ существуют такие комплексные числа $C_{jk}(z)$, $j = 1, \dots, n$, $k = 0. \dots, k_j$, что метод

$$S_0(z, f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{k_j} C_{jk}(z) f^{(k)}(z_j)$$

является наилучшим методом, и для его погрешности справедливо равенство

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = \sup_{\substack{f \in W(G) \\ f(z_1)=\dots=f(z_n)=0}} |f(z)|. \tag{3.1}$$

Рассмотрим задачу о построении наилучшего метода приближения и нахождения его погрешности для класса $A_d(G)$ функций, имеющих представление

$$f(z) = d(z)g(z),$$

где $d(z)$ некоторая фиксированная аналитическая в односвязной области G функция такая, что $|d(z)| > 0$, $z \in G$, а $g(z) \in A_1(G)$. Через $A_1(G)$ будем обозначать класс функций, аналитических и не превосходящих по модулю единицы в области G.

Будем считать, что односвязная область G не является всей расширенной плоскостью или расширенной плоскостью с одной выколотой точкой, так как в этих случаях класс $A_d(G)$ состоит из функций, которые с точностью до множителя, по модулю равного единице, равны $d(z)$.

Для построения наилучшего метода на классе $A_d(G)$ и нахождения его погрешности докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Для того, чтобы функция $f(z) \in A_1(G)$ удовлетворяла условиям $f(z_1) = \dots = f^{(k_1)}(z_1) = \dots = f(z_n) = \dots = f^{(k_n)}(z_n) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы она имела представление*

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z) g(z),$$

где $W_j(z)$ — конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точку z_j в нуль, а $g(z)$ некоторая функция из класса $A_1(G)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z) \in A_1(G)$ и $f(z_1) = \dots = f^{(k_1)}(z_1) = \dots = f(z_n) = \dots = f^{(k_n)}(z_n) = 0$. Функция

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z)},$$

где $W_j(z)$ — конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точку z_j в нуль, аналитична внутри G при надлежащем определении в точках z_j. При стремлении изнутри к границе

G модуль произведения $\prod\limits_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z)$ стремится к единице, а модуль $g(z)$ не может стремиться к пределу, превосходящему единицу. По принципу максимума имеем $|g(z)| \leq 1$, $z \in G$, откуда

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z) g(z), \quad g(z) \in A_1(G).$$

Достаточность. Функция

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z) g(z), \quad g(z) \in A_1(G),$$

аналитична в области G и $|f(z)| \leq |g(z)| \leq 1$ при $z \in G$. Следовательно, $f(z) \in A_1(G)$. Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что

$$f(z_1) = \ldots = f^{(k_1)}(z_1) = \ldots = f(z_n) = \ldots = f^{(k_n)}(z_n) = 0.$$

$\square$

Лемма 3.2. *Пусть $f_0^0, \ldots, f_n^0$ комплексные числа такие, что $|f_0^0| < 1$. Положим при $n > 0$*

$$\begin{pmatrix} f_0^1 \\ \vdots \\ f_{n-1}^1 \end{pmatrix} = A_n^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dz} \left[\dfrac{f_0(z) - f_0^0}{1 - \overline{f_0^0} f_0(z)} \right]_{\big| z=w} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n}{dz^n} \left[\dfrac{f_0(z) - f_0^0}{1 - \overline{f_0^0} f_0(z)} \right]_{\big| z=w} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $f_0(z)$ некоторая функция, для которой $f_0^{(k)}(w) = f_k^0$, $k = 0, \ldots, n$, A_n квадратная матрица порядка n с элементами

$$a_{pq} = \begin{cases} C_p^{q-1} W^{(p-q+1)}(w), & q \leq p, \\ 0, & q > p, \end{cases} \quad (1 \leq p, q \leq n),$$

а $W(z)$ — конформное отображение области G круг в единичный, переводящее точку w в нуль. Тогда для того чтобы функция $g_0(z) \in A_1(G)$ удовлетворяла условиям

$$g_0(w) = f_0^0,\ g_0'(w) = f_1^0, \ldots, g_0^{(n)}(w) = f_n^0, \tag{3.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$g_0(z) = \frac{W(z) g_1(z) + f_0^0}{1 + \overline{f_0^0} g_1(z)}, \tag{3.4}$$

где $g_1(z) \in A_1(G)$ и при $n > 0$ $g_1^{(k)} = f_k^1$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть $g_0(z) \in A_1(G)$ и удовлетворяет условиям (3.3). Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{g_0(z) - f_0^0}{1 - \overline{f_0^0} g_0(z)}.$$

Эта функция принадлежит классу $A_1(G)$ при $|f_0^0| < 1$ и обращается в нуль в точке w. Из леммы 3.1 следует, что

$$\varphi(z) = W(z) g_1(z), \tag{3.5}$$

где $W(z)$ — конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точку w в нуль, а $g_1(z) \in A_1(G)$. Отсюда вытекает равенство (3.4). Пусть $n > 0$. Дифференцируя равенство (3.5), получаем систему

$$\frac{d^p}{dz^p}\left[\frac{f_0(z) - f_0^0}{1 - \overline{f_0^0} f_0(z)}\right]_{\big| z=w} = \sum_{q=1}^{p} C_p^{q-1} W^{(p-q+1)}(w) g_1^{(q-1)}(w),$$

$$p = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Для определителя матрицы A_n системы (3.6) имеем

$$\det A_n = n! [W'(w)]^n \neq 0.$$

Следовательно, матрица A_n обратима и для функции $g_1(z)$ справедливы равенства $g_1^{(k)}(w) = f_k^1$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Пусть $g_1(z) \in A_1(G)$. Положим

$$g_0(z) = \frac{W(z) g_1(z) + f_0^0}{1 + \overline{f_0^0} W(z) g_1(z)}.$$

В силу того,что $|W(z) g_1(z)| \leq 1$ и $|f_0^0| < 1$, функция $g_0(z)$ принадлежит классу $A_1(G)$ и принимает значение f_0^0 в точке w. Докажем выполнение равенств (3.3) для $g_0(z)$ при $n > 0$ и $g_1^{(k)}(w) = f_k^1$, $k = 0, \ldots, n-1$. Любая функция $f_0(z)$ такая, что $f_0^{(k)}(w) = f_k^0$, $k = 0, \ldots, n$, может быть представлена в виде

$$f_0(z) = \frac{\widetilde{g}_1(z) + f_0^0}{1 + \overline{f_0^0} \widetilde{g}_1(z)},$$

где $\widetilde{g}_1(z)$ некоторая функция, для которой $\widetilde{g}_1(w) = 0$ и

$$\begin{pmatrix} \widetilde{g}_1^1(w) \\ \vdots \\ \widetilde{g}_1^{(n)}(w) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} f_0^1 \\ \vdots \\ f_{n-1}^1 \end{pmatrix}.$$

(Достаточно взять $\widetilde{g}_1(z) = \dfrac{f_0(z) - f_0^0}{1 - \overline{f_0^0} f_0(z)}$). Из равенства

$$g_0(z) - f_0(z) = [W(z) g_1(z) - \widetilde{g}_1(z)] \frac{1 - |f_0^0|^2}{[1 + \overline{f_0^0} W(z) g_1(z)][1 + \overline{f_0^0} \widetilde{g}_1(z)]}$$

следует, что $g_0^{(k)}(w) = f_0^{(k)}(w) = f_k^0$, $k = 0, \dots, n$, так как

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[W(z)g_1(z)\right]_{|z=w} = \widetilde{g}_1^{(k)}(w), \quad k = 0, \dots, n.$$

□

Лемма 3.3. *Пусть заданы комплексные числа $f_0^0, \dots, f_n^0$. Определим последовательность чисел $f_0^m, \dots, f_{n-m}^m$, $m = 1, \dots, n$, следующим образом:*

$$\begin{pmatrix} f_0^m \\ \vdots \\ f_{n-m}^m \end{pmatrix} = A_{n-m+1}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f_{m-1}(z) - f_0^{m-1}}{1 - \overline{f_0^{m-1}} f_{m-1}(z)}\right]_{|z=w} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-m+1}}{dz^{n-m+1}}\left[\dfrac{f_{m-1}(z) - f_0^{m-1}}{1 - \overline{f_0^{m-1}} f_{m-1}(z)}\right]_{|z=w} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где A_{n-m+1} квадратная матрица порядка $n - m + 1$ с элементами, определенными в лемме 3.2, а $f_{m-1}(z)$ некоторые функции, для которых $f_{m-1}^{(k)}(w) = f_k^{m-1}$, $k = 0, \dots, n - m + 1$. Предположим, что $|f_0^m| < 1$, $m = 0, \dots, n$. Тогда для того чтобы функция $g_0(z) \in A_1(G)$ удовлетворяла условиям (3.3), необходимо и достаточно, чтобы для нее имело место представление

$$g_0(z) = \frac{a_0(z)g_{n+1}(z) + b_0(z)}{c_0(z) + d_0(z)g_{n+1}(z)}, \tag{3.8}$$

где $g_{n+1}(z) \in A_1(G)$, а $a_0(z)$, $b_0(z)$, $c_0(z)$ и $d_0(z)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} a_m(z) &= W(z)a_{m+1}(z) + f_0^m d_{m+1}(z), \\ b_m(z) &= W(z)b_{m+1}(z) + f_0^m c_{m+1}(z), \\ c_m(z) &= c_{m+1}(z) + \overline{f_0^m} W(z) b_{m+1}(z), \\ d_m(z) &= d_{m+1}(z) + \overline{f_0^m} W(z) a_{m+1}(z), \end{aligned} \qquad m = n, \dots, 0; \tag{3.9}$$

здесь $a_{n+1}(z) = c_{n+1}(z) = 1$, $b_{n+1}(z) = d_{n+1}(z) = 0$.

Доказательство. Пусть $g_0(z) \in A_1(G)$ и удовлетворяет условиям (3.3). По лемме 3.2

$$g_0(z) = \frac{W(z)g_1(z) + f_0^0}{1 + \overline{f_0^0} W(z) g_1(z)},$$

где $g_1(z) \in A_1(G)$ и $g_1^{(k)}(w) = f_k^1$, $k = 0, \dots, n - 1$. Применяя лемму 3.2 к функции $g_1(z)$, получим

$$g_1(z) = \frac{W(z)g_2(z) + f_0^1}{1 + \overline{f_0^1} W(z) g_2(z)},$$

где $g_2(z) \in A_1(G)$ и $g_2^{(k)}(w) = f_k^2$, $k = 0, \dots, n-2$. Продолжая этот процесс, будем иметь

$$g_m(z) = \frac{W(z)g_{m+1}(z) + f_0^m}{1 + \overline{f_0^m} W(z) g_{m+1}(z)}, \quad m = 0, \dots, n, \tag{3.10}$$

здесь $g_{n+1}(z)$ — некоторая функция из класса $A_1(G)$, а $g_{m+1}(z)$ при $0 \le m \le n-1$ удовлетворяет условиям $g_{m+1}(z) \in A_1(G)$ и

$$\begin{pmatrix} g_{m+1}(w) \\ \vdots \\ g_{m+1}^{(n-m-1)}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^{m+1} \\ \vdots \\ f_{n-m-1}^{m+1} \end{pmatrix}$$
$$= A_{n-m}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{g_m(z) - f_0^m}{1 - \overline{f_0^m} g_m(z)}\right]_{\big| z=w} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}\left[\dfrac{g_m(z) - f_0^m}{1 - \overline{f_0^m} g_m(z)}\right]_{\big| z=w} \end{pmatrix}.$$

Докажем теперь равенство (3.8) и соотношения (3.9). Для функции $g_{n+1}(z)$ имеем

$$g_{n+1}(z) = \frac{a_{n+1}(z)g_{n+1}(z) + b_{n+1}(z)}{c_{n+1}(z) + d_{n+1}(z)g_{n+1}(z)}$$

при $a_{n+1}(z) = c_{n+1}(z) = 1$ и $b_{n+1}(z) = d_{n+1}(z) = 0$. Пусть

$$g_{m+1}(z) = \frac{a_{m+1}(z)g_{n+1}(z) + b_{m+1}(z)}{c_{m+1}(z) + d_{m+1}(z)g_{n+1}(z)}.$$

Подставляя выражение для функции $g_{m+1}(z)$ в равенство (3.10), получаем

$$\begin{aligned} &g_m(z) \\ &= \frac{[W(z)a_{m+1}(z) + f_0^m d_{m+1}(z)]g_{n+1}(z)}{c_{m+1}(z) + \overline{f_0^m}W(z)b_{m+1}(z) + [d_{m+1}(z) + \overline{f_0^m}W(z)a_{m+1}(z)]g_{n+1}(z)} \\ &+ \frac{W(z)b_{m+1}(z) + f_0^m c_{m+1}(z)}{c_{m+1}(z) + \overline{f_0^m}W(z)b_{m+1}(z) + [d_{m+1}(z) + \overline{f_0^m}W(z)a_{m+1}(z)]g_{n+1}(z)}, \end{aligned}$$

что доказывает соотношения (3.9) и равенство (3.8).

Последовательное применение леммы 3.2 к функциям $g_m(z)$ доказывает, что для любой $g_{n+1}(z) \in A_1(G)$ функция, определенная равенством (3.8), будет принадлежать классу $A_1(G)$ и удовлетворять условиям (3.3). □

Лемма 3.4. *Пусть $f_0^0(\varepsilon), \dots, f_n^0(\varepsilon)$ комплекснозначные функции действительного переменного ε, дифференцируемые в нуле, для которых $f_0^0(0) = \dots = f_n^0(0) = 0$. Тогда функция $\varphi(z, \varepsilon) =$*

$\sup\limits_{g\in A(\varepsilon)} \operatorname{Re} g(z)$, *где* $A(\varepsilon) = \{g \in A_1(G) | \operatorname{Im} g(z) = 0,\ g^{(s)}(w) = f_s^0(\varepsilon), s = 0, \dots, n\}$, *дифференцируема в нуле по* ε *и имеет место равенство*

$$\frac{\partial \varphi(z,0)}{\partial \varepsilon} = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{n} W^m(z) \left[1 - |W(z)|^{2(n-m+1)}\right] \sum_{s=0}^{m} a_{m+1,s+1} \frac{d}{d\varepsilon} f_s^0(0); \tag{3.11}$$

здесь $W(z)$ — *конформное отображение области* G *в единичный круг, переводящее точку* w *в нуль,* $a_{m+1,s+1}$ — *элементы матрицы* $(B_1 B_2 \dots B_{n+1})^{-1}$, *а матрицы* B_l *определяются следующим образом:*

$$\{B_l\}_{pq} = \begin{cases} C_{p-l}^{q-l-1} W^{(p-q+1)}(w) & \textit{при } p \geq q > l, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad 1 \leq p, q \leq n+1.$$

Доказательство. Построим последовательность функций $f_0^m(\varepsilon), \dots, f_{n-m}^m(\varepsilon)$ по формулам

$$\begin{pmatrix} f_0^m(\varepsilon) \\ \vdots \\ f_{n-m}^m(\varepsilon) \end{pmatrix} = A_{n-m+1}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} \left[\dfrac{f_{m-1}(z,\varepsilon) - f_0^{m-1}(\varepsilon)}{1 - \overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)} f_{m-1}(z,\varepsilon)} \right]_{\big| z=w} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{n-m+1}}{\partial z^{n-m+1}} \left[\dfrac{f_{m-1}(z,\varepsilon) - f_0^{m-1}(\varepsilon)}{1 - \overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)} f_{m-1}(z,\varepsilon)} \right]_{\big| z=w} \end{pmatrix},$$

где A_{n-m+1} квадратная матрица порядка $n-m+1$ с элементами, определенными в лемме 3.2, а $f_{m-1}(z,\varepsilon)$ некоторая функция, удовлетворяющая условию $\dfrac{\partial^s}{\partial z^s} f_{m-1}(w,\varepsilon) = f_s^{m-1}(\varepsilon)$, $s = 0, \dots, n-m+1$. Из равенства

$$\frac{\partial^s}{\partial z^s} \left[\frac{f_{m-1}(z,\varepsilon) - f_0^{m-1}(\varepsilon)}{1 - \overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)} f_{m-1}(z,\varepsilon)} \right]_{\big| z=w} = \sum_{p=0}^{s} C_s^p f_{s-p}^{m-1}(\varepsilon) \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left[\frac{1}{1 - \overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)} f_{m-1}(z,\varepsilon)} \right]_{\big| z=w}$$

следует, что $f_0^m(0) = \ldots = f_{n-m}^m(0) = 0$ при $m = 1, \ldots, n$. Так как при $p > 1$

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left[\frac{1}{1-\overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)}f_{m-1}(z,\varepsilon)}\right]_{\big|z=w}$$

$$=\overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)}\sum_{q=0}^{p-1}C_{p-1}^q f_{q+1}^{m-1}(\varepsilon)\frac{\partial^{p-q-1}}{\partial z^{p-q-1}}\left[\frac{1}{1-\overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)}f_{m-1}(z,\varepsilon)}\right]^2_{\big|z=w},$$

то справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\partial^s}{\partial z^s}\left(\frac{f_{m-1}(z,\varepsilon)-f_0^{m-1}(\varepsilon)}{1-\overline{f_0^{m-1}(\varepsilon)}f_{m-1}(z,\varepsilon)}\right)_{\big|z=w}\right]_{\big|\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}f_s^{m-1}(0).$$

Таким образом, функции $f_0^m(\varepsilon), \ldots, f_{n-m}^m(\varepsilon)$ дифференцируемы в нуле, и имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d}{d\varepsilon}f_0^m(0)\\ \vdots\\ \dfrac{d}{d\varepsilon}f_{n-m}^m(0)\end{pmatrix} = A_{n-m+1}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{d}{d\varepsilon}f_1^{m-1}(0)\\ \vdots\\ \dfrac{d}{d\varepsilon}f_{n-m+1}^{m-1}(0)\end{pmatrix}.$$

Введя векторы

$$F_m = \left(\frac{d}{d\varepsilon}f_0^0(0), \ldots, \frac{d}{d\varepsilon}f_0^m(0), \frac{d}{d\varepsilon}f_1^m(0), \ldots, \frac{d}{d\varepsilon}f_{n-m}^m(0)\right),$$
$$m = 0, \ldots, n,$$

это равенство можно записать в виде $F_m = B_m^{-1}F_{m-1}$, где B_m квадратная матрица порядка $n+1$, имеющая вид

$$B_m = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & A_{n-m+1}\end{array}\right).$$

Отсюда

$$F_n = (B_1 B_2 \ldots B_{n+1})^{-1}F_0 \quad (B_{n+1} = E).$$

Если обозначить через $a_{m+1,s+1}$ элементы матрицы $(B_1B_2\ldots B_{n+1})^{-1}$, получим

$$\frac{d}{d\varepsilon}f_0^m(0) = \sum_{s=0}^{n} a_{m+1,s+1}\frac{d}{d\varepsilon}f_s^0(0).$$

В силу того, что B_m треугольные матрицы, матрица $(B_1B_2\ldots B_{n+1})^{-1}$ также является треугольной, и окончательно будем иметь

$$\frac{d}{d\varepsilon}f_0^m(0) = \sum_{s=0}^{m} a_{m+1,s+1}\frac{d}{d\varepsilon}f_s^0(0). \tag{3.12}$$

В силу того, что $f_0^0(\varepsilon), \ldots, f_0^n(\varepsilon)$ обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$ и непрерывны в нуле, для достаточно малых $|\varepsilon|$ $|f_0^m(\varepsilon)| < 1$ при всех $m = 0, \ldots, n$. Применяя лемму 3.3, получаем, что функция $g(z)$ из класса $A_1(G)$ удовлетворяет условиям $g(w) = f_0^0(\varepsilon), \ldots, g^{(n)}(w) = f_n^0(\varepsilon)$ при достаточно малых $|\varepsilon|$, тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$g(z) = \frac{a_0(z,\varepsilon)\omega(z) + b_0(z,\varepsilon)}{c_0(z,\varepsilon) + d_0(z,\varepsilon)\omega(z)},$$

где $\omega(z) \in A_1(G)$, а $a_0(z,\varepsilon)$, $b_0(z,\varepsilon)$, $c_0(z,\varepsilon)$ и $d_0(z,\varepsilon)$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} a_m(z,\varepsilon) &= W(z)a_{m+1}(z,\varepsilon) + f_0^m(\varepsilon)d_{m+1}(z,\varepsilon),\\ b_m(z,\varepsilon) &= W(z)b_{m+1}(z,\varepsilon) + f_0^m(\varepsilon)c_{m+1}(z,\varepsilon),\\ c_m(z,\varepsilon) &= c_{m+1}(z,\varepsilon) + \overline{f_0^m(\varepsilon)}W(z)b_{m+1}(z,\varepsilon),\\ d_m(z,\varepsilon) &= d_{m+1}(z,\varepsilon) + \overline{f_0^m(\varepsilon)}W(z)a_{m+1}(z,\varepsilon), \end{aligned} \qquad m = n, \ldots, 0; \quad (3.13)$$

здесь $a_{n+1}(z,\varepsilon) = c_{n+1}(z,\varepsilon) = 1$, $b_{n+1}(z,\varepsilon) = d_{n+1}(z,\varepsilon) = 0$. Таким образом,

$$\varphi(z,\varepsilon) = \sup \operatorname{Re} \frac{a_0(z,\varepsilon)u + b_0(z,\varepsilon)}{c_0(z,\varepsilon) + d_0(z,\varepsilon)u},$$

а верхняя грань берется по множеству таких u, что

$$\operatorname{Im} \frac{a_0(z,\varepsilon)u + b_0(z,\varepsilon)}{c_0(z,\varepsilon) + d_0(z,\varepsilon)u} = 0, \quad |u| \le 1. \tag{3.14}$$

При $z = w$ $\varphi(z,\varepsilon) = \operatorname{Re} f_0^0(\varepsilon)$ и равенство (3.11) выполняется. Пусть $z \ne w$. Из соотношений (3.13) имеем

$$\begin{aligned} &a_m(z,\varepsilon)c_m(z,\varepsilon) - b_m(z,\varepsilon)d_m(z,\varepsilon)\\ &\quad = W(z)(1 - |f_0^m(\varepsilon)|^2)(a_{m+1}(z,\varepsilon)c_{m+1}(z,\varepsilon) - b_{m+1}(z,\varepsilon)d_{m+1}(z,\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_0(z,\varepsilon)c_0(z,\varepsilon) - b_0(z,\varepsilon)d_0(z,\varepsilon) = W(z)^{n+1}\prod_{m=0}^{n}(1 - |f_0^m(\varepsilon)|^2) \ne 0.$$

Из свойств дробно-линейных функций [**12**] следует, что при $|c_0(z,\varepsilon)| \ne |d_0(z,\varepsilon)|$ функция

$$v = \frac{a_0(z,\varepsilon)u + b_0(z,\varepsilon)}{c_0(z,\varepsilon) + d_0(z,\varepsilon)u}$$

взаимно-однозначно отображает окружность $|u| = 1$ на окружность $|v - v_0(\varepsilon)| = \rho(\varepsilon)$, где

$$v_0(\varepsilon) = \frac{b_0(z,\varepsilon)\overline{c_0(z,\varepsilon)} - a_0(z,\varepsilon)\overline{d_0(z,\varepsilon)}}{|c_0(z,\varepsilon)|^2 - |d_0(z,\varepsilon)|^2},$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{|a_0(z,\varepsilon)c_0(z,\varepsilon) - b_0(z,\varepsilon)d_0(z,\varepsilon)|}{||c_0(z,\varepsilon)|^2 - |d_0(z,\varepsilon)|^2|}.$$

При $\rho(\varepsilon) \geq |\operatorname{Im} v_0(\varepsilon)|$ существуют точки u, удовлетворяющие условию (3.14), и в этом случае

$$\varphi(z,\varepsilon) = \operatorname{Re} v_0(\varepsilon) + \sqrt{\rho^2(\varepsilon) - [\operatorname{Im} v_0(\varepsilon)]^2}. \tag{3.15}$$

Докажем, что для достаточно малых $|\varepsilon|$ $|c_0(z,\varepsilon)| \neq |d_0(z,\varepsilon)|$ и $\rho(\varepsilon) \geq |\operatorname{Im} v_0(\varepsilon)|$. Вследствие непрерывности $f_0^0(\varepsilon), \ldots, f_0^n(\varepsilon)$ в нуле, пользуясь соотношениями (3.13), получим, что $a_0(z,\varepsilon)$, $b_0(z,\varepsilon)$, $c_0(z,\varepsilon)$ и $d_0(z,\varepsilon)$ непрерывны по ε в нуле и

$$\begin{gathered} a_0(z,0) = W^{n+1}(z), \quad c_0(z,0) = 1, \\ b_0(z,0) = d_0(z,0) = 0. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Следовательно, при достаточно малых $|\varepsilon|$ $|c_0(z,\varepsilon)| > |d_0(z,\varepsilon)|$. В силу последнего неравенства функции $\rho(\varepsilon)$ и $v_0(\varepsilon)$ непрерывны в нуле и $v_0(0) = 0$, $\rho(0) = W^{n+1}(z)$. Отсюда следует существование окрестности нуля, в которой $\rho(\varepsilon) \geq |\operatorname{Im} v_0(\varepsilon)|$. Докажем теперь дифференцируемость функции $\varphi(z,\varepsilon)$ по ε в нуле. Для этого достаточно доказать дифференцируемость функций $a_0(z,\varepsilon)$, $b_0(z,\varepsilon)$, $c_0(z,\varepsilon)$ и $d_0(z,\varepsilon)$. Используя соотношения (3.13), получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_0(z,0) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} c_0(z,0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} b_0(z,0) = \sum_{m=0}^{n} W^m(z) \frac{d}{d\varepsilon} f_0^m(0), \\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} d_0(z,0) = \sum_{m=0}^{n} W^{n-m+1}(z) \frac{d}{d\varepsilon} \overline{f_0^m(0)}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Продифференцировав функции $\rho(\varepsilon)$ и $v_0(\varepsilon)$, будем иметь

$$v_0'(0) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} b_0(z,0) - a_0(z,0) \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \overline{d_0(z,0)}, \quad \rho'(0) = 0.$$

Из равенств (3.13), (3.16) и (3.12) следует, что

$$v_0'(0) = \sum_{m=0}^{n} W^m(z) \left[1 - |W(z)|^{2(n-m+1)}\right] \sum_{s=0}^{m} a_{m+1,s+1} \frac{d}{d\varepsilon} f_s^0(0).$$

Дифференцируя равенство (3.15), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(z,0)}{\partial\varepsilon} &= \operatorname{Re} v_0'(0) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{n} W^m(z) \left[1 - |W(z)|^{2(n-m+1)}\right] \sum_{s=0}^{m} a_{m+1,s+1} \frac{d}{d\varepsilon} f_s^0(0). \end{aligned}$$

□

Теорема 3.1. *Метод*

$$S_0(z, f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n))$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \omega_j(z) \sum_{m=0}^{k_j} W_j^m(z) \left[1 - |W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}\right] \sum_{k=0}^{m} C^j_{m+1,k+1} f^{(k)}(z_j)$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения величины $f(z)$ по значениям $f(z_1), \dots, f^{(k_1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(k_n)}(z_n)$ на классе $A_d(G)$, и для его погрешности в точке z имеет место равенство

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = |d(z)| \prod_{j=1}^{n} |W_j(z)|^{k_j+1};$$

здесь $W_j(z)$ — конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точку z_j в нуль, $\omega_j(z) = d(z) \prod\limits_{l \neq j} W_l^{k_l+1}(z)$, а $C^j_{m+1,k+1}$ элементы матрицы $(\Omega_j B_1^j B_2^j \dots B^j_{k_j+1})^{-1}$, где

$$\{\Omega_j\}_{pq} = \begin{cases} C_{p-1}^{q-1} \omega_j^{(p-q)}(z_j) & \text{при } p \geq q, \\ 0 & \text{при } p < q, \end{cases} \quad 1 \leq p, q \leq k_j + 1;$$

$$\{B_l^j\}_{pq} = \begin{cases} C_{p-l}^{q-l-1} W_j^{(p-q+1)}(z_j) & \text{при } p \geq q > l, \\ \delta_{pq} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$1 \leq p, q \leq k_j + 1.$$

Доказательство. Класс функций $A_d(G)$ является выпуклым и круговым, так как этим свойством обладает класс $A_1(G)$. Следовательно, класс $A_d(G)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 и для него справедливо равенство (3.1). Пусть $f(z) \in A_d(G)$ и $f(z_1) = \ldots = f^{(k_n)}(z_n) = 0$. В силу того, что $f(z) = d(z)g(z)$, где $g(z) \in A_1(G)$ и $|d(z)| > 0$, $z \in G$, для функции $g(z)$ должны выполняться равенства $g(z_1) = \ldots = g^{(k_n)}(z_n) = 0$. Из леммы 3.1 имеем

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z) g_1(z), \quad g_1(z) \in A_1(G).$$

Следовательно, функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = d(z) \prod_{j=1}^{n} W_j^{k_j+1}(z) g_1(z), \quad g_1(z) \in A_1(G). \tag{3.18}$$

Таким образом, равенство (3.1) вместе с представлением (3.18) дают

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = |d(z)| \prod_{j=1}^{n} |W_j(z)|^{k_j+1}.$$

Для построения линейного наилучшего метода приближения и доказательства его единственности рассмотрим функции

$$\varphi_{jk}(z,\varepsilon) = \sup_{f\in F_{jk}(\varepsilon)} \operatorname{Re} f(z), \quad \psi_{jk}(z,\varepsilon) = \sup_{f\in F_{jk}(i\varepsilon)} \operatorname{Re} f(z),$$

где

$$F_{jk}(\varepsilon) = \{\, f \in A_d(G) |\operatorname{Im} f(z) = 0,\ f^{(s)}(z_l) = \varepsilon\delta_{jl}\delta_{ks},\\ l = 1,\dots,n,\ s = 0,\dots,k_l\,\}.$$

Зафиксируем точку $z \in G$ и рассмотрим функцию $f(\xi) \in A_d(G)$ такую, что $f^{(s)}(z_l) = \varepsilon\delta_{jl}\delta_{ks}$, $l = 1,\dots,n$, $s = 0,\dots,k_l$. Из (3.18) следует, что функция $f(\xi)$ представима в виде

$$f(\xi) = \omega_j(\xi)g_1(\xi), \quad g_1(\xi) \in A_1(G).$$

Умножив и разделив правую часть последнего равенства на $e^{i\arg\omega_j(z)}$ будем иметь представление

$$f(\xi) = e^{-i\arg\omega_j(z)}\omega_j(\xi)g(\xi), \quad g(\xi) \in A_1(G). \tag{3.19}$$

Дифференцируя равенство (3.19) в точке z_j, получим систему для нахождения значений $g(z_j),\dots,g^{(k_j)}(z_j)$

$$f^{(p-1)}(z_j) = \varepsilon\delta_{k+1,p} = e^{-i\arg\omega_j(z)}\sum_{q=1}^{p-1} C_{p-1}^{q-1}\omega_j^{(p-q)}(z_j)g^{(q-1)}(z_j),\\ p = 1,\dots,k_j+1. \tag{3.20}$$

Введем матрицу Ω_j с элементами

$$\{\Omega_j\}_{pq} = \begin{cases} C_{p-1}^{q-1}\omega_j^{(p-q)}(z_j) & \text{при } p \ge q,\\ 0 & \text{при } p < q,\end{cases} \quad 1 \le p,q \le k_j+1.$$

Тогда система (3.20) запишется в виде

$$\varepsilon e^{i\arg\omega_j(z)}\mathbf{e}_{k+1}^j = \Omega_j \begin{pmatrix} g(z_j)\\ \vdots \\ g^{(k_j)}(z_j)\end{pmatrix},$$

где $\{\mathbf{e}_{k+1}^j\}_p = \delta_{k+1,p}$, $p = 1,\dots,k_j+1$. Матрица Ω_j обратима, так как $\det\Omega_j = [\omega_j(z_j)]^{k_j+1} \ne 0$. Таким образом, для функции $f(\xi)$ имеет место представление

$$f(\xi) = e^{-i\arg\omega_j(z)}\omega_j(\xi)g(\xi),$$

где $g(\xi) \in A_1(G)$ и

$$\begin{pmatrix} g(z_j)\\ \vdots \\ g^{(k_j)}(z_j)\end{pmatrix} = \varepsilon e^{i\arg\omega_j(z)}\Omega_j^{-1}\mathbf{e}_{k+1}^j. \tag{3.21}$$

Отсюда

$$\varphi_{jk}(z,\varepsilon)=|\omega_j(z)|\sup_{g\in F'_{jk}(\varepsilon)}\operatorname{Re}g(z),\quad \psi_{jk}(z,\varepsilon)=|\omega_j(z)|\sup_{g\in F'_{jk}(i\varepsilon)}\operatorname{Re}g(z);$$

$F'_{jk}(\varepsilon)$ — множество функций из $A_1(G)$, для которых выполнено равенство (3.21) и, кроме того, $\operatorname{Im}g(z)=0$. Из леммы 3.4 следует, что

$$\frac{\partial\varphi_{jk}(z,0)}{\partial\varepsilon}=|\omega_j(z)|\operatorname{Re}e^{i\arg\omega_j(z)}\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(z)\left[1-|W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}\right]\times\sum_{s=0}^{m}a^j_{m+1,s+1}\{\Omega_j^{-1}\}_{s+1,k+1},$$

$$\frac{\partial\psi_{jk}(z,0)}{\partial\varepsilon}=|\omega_j(z)|\operatorname{Re}ie^{i\arg\omega_j(z)}\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(z)\left[1-|W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}\right]\times\sum_{s=0}^{m}a^j_{m+1,s+1}\{\Omega_j^{-1}\}_{s+1,k+1};$$

здесь $a^j_{m+1,s+1}$ — элементы матрицы $(B_1^jB_2^j\dots B^j_{k_j+1})^{-1}$, а

$$\{B_l^j\}_{pq}=\begin{cases}C_{p-l}^{q-l-1}W_j^{(p-q+1)}(z_j) & \text{при } p\ge q>l,\\ \delta_{pq} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\qquad 1\le p,q\le k_j+1.$$

Обозначим через $C^j_{m+1,k+1}$ элементы матрицы $(B_1^jB_2^j\dots B^j_{k_j+1})^{-1}\Omega_j^{-1}$ $=(\Omega_jB_1^j\dots B^j_{k_j+1})^{-1}$. В силу того, что матрицы $\Omega_j,B_1^j,\dots,B^j_{k_j+1}$ треугольные, будем иметь

$$\sum_{s=0}^{m}a^j_{m+1,s+1}\{\Omega_j^{-1}\}_{s+1,k+1}=C^j_{m+1,k+1}\quad\text{и}\quad C^j_{m+1,k+1}=0\quad\text{при}\quad k>m.$$

По теореме 1.2 метод

$$\begin{aligned}S_0(z,f(z_1),\dots,f^{(k_n)}(z_n))&=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_{jk}(z,0)}{\partial\varepsilon}-i\frac{\partial\psi_{jk}(z,0)}{\partial\varepsilon}\right]f^{(k)}(z_j)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{k_j}\omega_j(z)\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(z)\left[1-|W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}\right]C^j_{m+1,k+1}f^{(k)}(z_j)\\&=\sum_{j=1}^{n}\omega_j(z)\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(z)\left[1-|W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}\right]\sum_{k=0}^{m}C^j_{m+1,k+1}f^{(k)}(z_j)\end{aligned}$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения значения $f(z)$ по значениям $f(z_1),\dots,f^{(k_1)}(z_1),\dots,f(z_n),\dots,$ $f^{(k_n)}(z_n)$ на классе $A_d(G)$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что конформные отображения $W_j(z)$ определены с точностью до множителя, по модулю равного единице, однако, в силу определения коэффициентов $C^j_{m+1,k+1}$ величина

$$\omega_j(z)W_j^m(z)C^j_{m+1,k+1}$$

будет определена однозначно для любой точки $z\in G$. Тем самым однозначно определен метод $S_0(z,f(z_1),\dots,f^{(k_n)}(z_n))$.

Если известно какое-либо конформное отображение $W(z)$ области G в единичный круг, то функции $W_j(z)$ могут быть определены равенствами

$$W_j(z)=\frac{W(z)-W(z_j)}{1-\overline{W(z_j)}W(z)},\quad j=1,\dots,n.$$

Из последнего замечания и теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Метод*

$$\begin{aligned}&S_0(z,f(z_1),\dots,f(z_n))\\&\qquad=d(z)[1-|W(z)|^2]\sum_{j=1}^{n}t_j(z)\frac{1-|W(z_j)|^2}{t_j(z_j)d(z_j)|1-\overline{W(z_j)}W(z)|^2}f(z_j)\end{aligned}$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения величины $f(z)$ по значениям $f(z_1),\dots,f(z_n)$ на классе $A_d(G)$, и для его погрешности справедливо равенство

$$r(z,z_1,\dots,z_n)=|d(z)|\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{W(z)-W(z_j)}{1-\overline{W(z_j)}W(z)}\right|;$$

здесь $t_j(z)=\prod\limits_{l\neq j}\dfrac{W(z)-W(z_l)}{1-\overline{W(z_l)}W(z)}$, а $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G в единичный круг.

Следствие 3.2. *Пусть $f(z)\in A_d(G)$ и удовлетворяет условиям*

$$|f^{(k)}(z_j)|\le\varepsilon_{jk},\quad z_j\in G,\quad j=1,\dots,n,\quad k=0,\dots,k_j.$$

Тогда для всех точек $z \in G$ имеет место неравенство

$$|f(z)| \le |d(z)| \prod_{j=1}^{n} |W_j(z)|^{k_j+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |\omega_j(z)| \sum_{m=0}^{k_j} |W_j(z)|^m \left[1 - |W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}\right] \sum_{k=0}^{m} |C^j_{m+1,k+1}| \varepsilon_{jk}, \tag{3.22}$$

где $W_j(z)$, $\omega_j(z)$ и $C^j_{m+1,k+1}$ определены в теореме 3.1.

Неравенство (3.22) для случая, когда $d(z) = 1$, $G = \{z : |z| < 1\}$, $k_1 = \ldots = k_n = 0$ было получено в работе **[22]** (теорема 11.1).

При $d(z) \equiv M$ класс $A_d(G)$ совпадает с классом функций, аналитических и ограниченных по модулю константой M в области G. Другие примеры классов типа $A_d(G)$ будут рассмотрены в следующем параграфе.

§4. Наилучшие методы приближения на классах H_p^ρ. Квадратурные формулы для классов $A_d^0(G)$ и $H_p^{\rho,0}$

Обозначим через H_p, $p > 0$, класс функций $f(z)$, аналитических в $|z| < 1$ и таких, что для каждой из них интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi$$

ограничен при $0 < r < 1$. Известно (см. **[18]**, **[8]**), что каждая функция из класса H_p имеет почти всюду на $|z| = 1$ определенные предельные значения по некасательным путям, которые обозначаются через $f(e^{i\varphi})$.

Пусть $\rho(\varphi)$ неотрицательная с периодом 2π функция такая, что $\ln \rho(\varphi)$ и $[\rho(\varphi)]^p$, $p > 0$, суммируемы на $[0, 2\pi]$. Через H_p^ρ обозначим класс функций $f(z)$ таких, что $f(z) \in H_p$ и почти всюду $|f(e^{i\varphi})| \le \rho(\varphi)$.

Теорема 4.1. *Метод*

$$S_0(z, f(z_1), \ldots, f^{(k_n)}(z_n)) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(z) \sum_{m=0}^{k_j} \left(\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}\right)^m$$
$$\times \left[1 - \left|\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}\right|^{2(k_j-m+1)}\right] \sum_{k=0}^{m} C^j_{m+1,k+1} f^{(k)}(z_j)$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения величины $f(z)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f^{(k_1)}(z_1), \ldots, f(z_n)$,

$\ldots, f^{(k_n)}(z_n)$ на классе H_p^ρ, и для его погрешности в точке z справедливо равенство

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi} \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}\right|^{k_j+1};$$

здесь

$$\omega_j(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi} \prod_{l\neq j} \left(\frac{z-z_l}{1-\overline{z_l}z}\right)^{k_l+1},$$

$C^j_{m+1,k+1}$ элементы матрицы $(\Omega_j B_1^j B_2^j \ldots B_{k_j+1}^j)^{-1}$, где

$$\{\Omega_j\}_{pq} = \begin{cases} C_{p-1}^{q-1}\omega_j^{(p-q)}(z_j) & \text{при } p \geq q, \\ 0 & \text{при } p < q, \end{cases} \quad 1 \leq p, q \leq k_j + 1;$$

$$\{B_l^j\}_{pq} = \begin{cases} \dfrac{(p-l)!(\overline{z_j})^{p-q}}{(q-l-1)!(1-|z_j|^2)^{p-q+1}} & \text{при } p \geq q > l, \\ \delta_{pq} & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$
$$1 \leq p, q \leq k_j + 1.$$

Доказательство. Из теоремы Сеге [**24**] (см. также [**18**]) следует, что для класса H_p^ρ существует, так называемая, максимальная функция

$$d(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi},$$

которая принадлежит классу H_p^ρ, почти всюду $|d(e^{i\varphi})| = \rho(\varphi)$, и для всех функций $f(z) \in H_p^\rho$ выполнено неравенство $|f(z)| \leq d(z)$ при $|z| < 1$. Таким образом, для класса функций H_p^ρ справедливо представление

$$f(z) = d(z)g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая внутри единичного круга функция, не превосходящая по модулю единицы. Применяя к классу H_p^ρ теорему 3.1, заметив, что конформное отображение единичного круга на себя, переводящее точку z_j в нуль, с точностью до множителя, по модулю равного единице, может быть записано в виде

$$W_j(z) = \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z},$$

а для $W_j^{(k)}(z_j)$, имеет место равенсто

$$W_j^{(k)}(z_j) = \frac{k!(\overline{z_j})^{k-1}}{(1-|z_j|^2)^k},$$

получим утверждение теоремы. □

Из теоремы 4.1 и следствия 3.1 вытекает

Следствие 4.1.

$$S_0(z, f(z_1), \ldots, f(z_n)) = (1-|z|^2) \times \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{z-z_j}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi}-z)(e^{i\varphi}-z_j)}\,d\varphi} t_j(z)\frac{1-|z_j|^2}{t_j(z_j)|1-\overline{z_j}z|^2} f(z_j),$$

где $t_j(z) = \prod_{l\neq j}\frac{z-z_l}{1-\overline{z_l}z}$, *является единственным линейным наилучшим методом приближения величины* $f(z)$ *по значениям* $f(z_1),\ldots,f(z_n)$ *на классе* H_p^ρ, *и для его погрешности справедливо равенство*

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi}\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}\right|.$$

Пусть функция $d(z)$ аналитична в односвязной и симметричной относительно вещественной оси области G, положительна при вещественных z и $|d(z)|>0$, $z\in G$. Через $A_d^0(G)$ обозначим класс функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = d(z)g(z),$$

где $g(z)$ вещественна при вещественных z и принадлежит классу $A_1(G)$.

Рассмотрим задачу приближенного вычисления интеграла

$$I(f) = \int_a^b f(x)p(x)\,dx$$

при неотрицательной весовой функции $p(x)$ и $[a,b]\subset G$ на функциях из класса $A_d^0(G)$, используя информацию о значениях $f(z_1),\ldots,f^{(k_n)}(z_n)$. Погрешностью метода интегрирования $S(f(z_1),\ldots,f^{(k_n)}(z_n))$ назовем величину

$$r(\underbrace{z_1,\ldots,z_1}_{k_1+1},\ldots,\underbrace{z_n,\ldots,z_n}_{k_n+1}) = \sup_{f\in A_d^0(G)}|I(f)-S(f(z_1),\ldots,f^{(k_n)}(z_n))|.$$

Метод интегрирования $S_0(f(z_1),\ldots,f^{(k_n)}(z_n))$ будем называть наилучшим методом интегрирования, если имеет место равенство

$$r_{S_0}(z_1,\ldots,z_n) = \inf_S r_S(z_1,\ldots,z_n).$$

Рассмотрим точки $z_1,\ldots,z_n$ из области G такие, что

$$\mathrm{Im}\, z_j = 0, \quad j=1,\ldots,l, \quad z_i\neq z_j, \quad l+1\le i,j\le n. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Пусть точки $z_1, \dots, z_n$ из области G удовлетворяют условию* (4.1). *Тогда для погрешности квадратурной формулы*

$$S(f(z_1), \dots, f^{(k_n)}(z_n)) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=0}^{k_j} D_{jm} \sum_{k=0}^{m} C^j_{m+1,k+1} f^{(k)}(z_j) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=l+1}^{n} \sum_{m=0}^{k_j} D_{jm} \sum_{k=0}^{m} C^j_{m+1,k+1} f^{(k)}(z_j), \quad (4.2)$$

где

$$D_{jm} = \int_a^b \omega_j(x) W_j^m(x) [1 - |W_j(x)|^{2(k_j - m+1)}] p(x)\, dx,$$

на классе $A_d^0(G)$ имеет место неравенство

$$r_S(z_1, \dots, z_n) \le \int_a^b d(x) \prod_{j=1}^{l} |W_j(x)|^{k_j+1} \prod_{j=l+1}^{n} |W_j(x)|^{2(k_j+1)}] p(x)\, dx; \quad (4.3)$$

здесь

$$\omega_j(z) = \begin{cases} d(z) \prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{l} W_p^{k_p+1}(z) \prod\limits_{p=l+1}^{n} [W_p(z) \widetilde{W}_p(z)]^{k_p+1}, & j = 1, \dots, l, \\ d(z) \widetilde{W}_j^{k_j+1} \prod\limits_{p=1}^{l} W_p^{k_p+1}(z) \prod\limits_{\substack{p=l+1 \\ p\neq j}}^{n} [W_p(z) \widetilde{W}_p(z)]^{k_p+1}, & \\ & j = l+1, \dots, n, \end{cases}$$

$$W_j(z) = \frac{W(z) - W(z_j)}{1 - \overline{W(z_j)} W(z)}, \quad \widetilde{W}_j(z) = \frac{W(z) - \overline{W(z_j)}}{1 - W(z_j) W(z)}, \quad (4.4)$$

а $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси. Коэффициенты $C^j_{m+1,k+1}$ определяются через функции $W_j(z)$ и $\omega_j(z)$ так же, как в теореме 3.1.

При $k_j = 2k'_j + 1$, $j = l, \dots, l$, квадратурная формула (4.2) *является наилучшим методом интегрирования на классе $A_d^0(G)$, и неравенство* (4.3) *обращается в равенство.*

Доказательство. Для функций из класса $A_d^0(G)$ справедливо равенство $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, $z \in G$. Отсюда имеем $f^{(k)}(\overline{z_j}) = \overline{f^{(k)}(z_j)}$, $j = l+1, \dots, n$, $k = 0, \dots, k_j$. В силу теоремы 3.1 и того, что класс $A_d^0(G)$ содержится в классе $A_d(G)$, для функций из класса $A_d^0(G)$

будет справедливо неравенство

$$\Bigg|f(z)-\sum_{j=1}^{n}\omega_j(z)\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(z)[1-|W_j(z)|^{2(k_j-m+1)}]\sum_{k=0}^{m}C^j_{m+1,k+1}f^{(k)}(z_j)$$
$$-\sum_{j=l+1}^{n}\widetilde{\omega}_j(z)\sum_{m=0}^{k_j}\widetilde{W}_j^m(z)[1-|\widetilde{W}_j(z)|^{2(k_j-m+1)}]\sum_{k=0}^{m}C^j_{m+1,k+1}f^{(k)}(\overline{z_j})\Bigg|$$
$$\leq |d(z)|\prod_{j=1}^{l}|W_j(z)|^{k_j+1}\prod_{j=l+1}^{n}|W_j(z)\widetilde{W}_j(z)|^{k_j+1}, \quad (4.5)$$

где $W_j(z)$, $\widetilde{W}_j(z)$ и $\omega_j(z)$ определены равенствами (4.4), а $\widetilde{\omega}(z) = \dfrac{\omega_j(z)W_j^{k_j+1}(z)}{\widetilde{W}_j^{k_j+1}(z)}$, $j = l+1,\ldots,n$. Из того, что для функций $W(z)$ и $d(z)$ выполняются равенства $W(\overline{z}) = \overline{W(z)}$, $d(\overline{z}) = \overline{d(z)}$, следуют соотношения

$$\widetilde{W}^{(k)}(\overline{z_j}) = \overline{W_j^{(k)}(z)}, \quad \widetilde{\omega}^{(k)}(\overline{z_j}) = \overline{\omega_j^{(k)}(z)}.$$

Следовательно, для элементов матриц Ω_j, B_l^j, $\widetilde{\Omega}_j$ и $\widetilde{B}_l^j$, через которые определяются коэффициенты $C^j_{m+1,k+1}$ и $\widetilde{C}^j_{m+1,k+1}$, будем иметь

$$\{\widetilde{\Omega}_j\}_{pq} = \{\overline{\Omega_j}\}_{pq}, \quad \{\widetilde{B}_l^j\}_{pq} = \{\overline{B_l^j}\}_{pq}.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\widetilde{C}^j_{m+1,k+1} = \overline{C^j_{m+1,k+1}}.$$

Для вещественных x вследствие того, что $\widetilde{W}_j(x) = \overline{W_j(x)}$ и $\widetilde{\omega}_j(x) = \overline{\omega_j(x)}$, неравенство (4.5) записывается в виде

$$\Bigg|f(x)-\sum_{j=1}^{l}\omega_j(x)\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(x)[1-|W_j(x)|^{2(k_j-m+1)}]\sum_{k=0}^{m}C^j_{m+1,k+1}f^{(k)}(z_j)$$
$$-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=l+1}^{n}\omega_j(x)\sum_{m=0}^{k_j}W_j^m(x)[1-|W_j(x)|^{2(k_j-m+1)}]\sum_{k=0}^{m}C^j_{m+1,k+1}f^{(k)}(z_j)\Bigg|$$
$$\leq d(x)\prod_{j=1}^{l}|W_j(x)|^{k_j+1}\prod_{j=l+1}^{n}|W_j(x)|^{2(k_j+1)}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка (4.3).

Докажем теперь, что при $k_j = 2k'_j + 1$, $j = 1,\ldots,l$, квадратурная формула (4.2) будет наилучшим методом интегрирования.

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = d(z) \prod_{j=1}^{l} W_j^{2(k_j'+1)}(z) \prod_{j=l+1}^{n} [W_j(z)\widetilde{W}_j(z)]^{k_j+1},$$

которая принадлежит классу $A_d^0(G)$, удовлетворяет условиям

$$f_0(z_1) = \ldots = f_0^{(k_1)}(z_1) = \ldots = f_0(z_n) = \ldots = f_0^{(k_n)}(z_n) = 0$$

и, кроме того, неотрицательна при вещественных z. По теореме 2.1 при $\delta_1 = \ldots = \delta_p = 0$ и $L(f) = \int_a^b f(x)p(x)\,dx$ для погрешности наилучшего метода интегрирования имеем

$$r_{S_0}(z_1, \ldots, z_n) = \sup_{\substack{f \in A_d^0(G) \\ f(z_1) = \ldots = f^{(k_n)}(z_n) = 0}} \left| \int_a^b f(x)p(x)\,dx \right| \geq \int_a^b f_0(x)p(x)\,dx. \quad (4.6)$$

Из неравенств

$$r_{S_0}(z_1, \ldots, z_n) \leq r_S(z_1, \ldots, z_n) \leq \int_a^b f_0(x)p(x)\,dx$$

и неравенства (4.6) следует, что квадратурная формула (4.2) является наилучшим методом интегрирования, и справедливо равенство

$$r_S(z_1, \ldots, z_n) = \int_a^b d(x) \prod_{j=1}^{l} W_j^{2(k_j'+1)}(x) \prod_{j=l+1}^{n} |W_j(x)|^{2(k_j+1)} p(x)\,dx.$$

Теорема доказана. □

Следствие 4.2. *Пусть точки $z_1, \ldots, z_n$ из области G удовлетворяют условию* (4.1). *Тогда квадратурная формула*

$$\begin{aligned} &S_0(f(z_1), f'(z_1), \ldots, f(z_l), f'(z_l), f(z_{l+1}), \ldots, f(z_n)) \\ &= \sum_{j=1}^{l} (D_j - 2C_j D_j^1) f(z_j) + \sum_{j=1}^{l} D_j^1 f'(z_j) + 2 \sum_{j=l+1}^{n} \operatorname{Re} D_j \operatorname{Re} f(z_j) \\ &\qquad - 2 \sum_{j=l+1}^{n} \operatorname{Im} D_j \operatorname{Im} f(z_j), \quad (4.7) \end{aligned}$$

где

$$D_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_j(z_j)} \displaystyle\int_a^b \omega_j(x)[1 - W_j^4(x)]p(x)\,dx, & j = 1,\dots,l, \\ \dfrac{1}{\omega_j(z_j)} \displaystyle\int_a^b \omega_j(x)[1 - |W_j(x)|^2]p(x)\,dx, & j = l+1,\dots,n, \end{cases}$$

$$D_j^1 = \frac{1 - W^2(z_j)}{W'(z_j)\omega_j(z_j)} \int_a^b \omega_j(x) W_j(x)[1 - W_j^2(x)]p(x)\,dx,$$

$$C_j = \frac{d'(z_j)}{2d(z_j)} + W'(z_j) \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n} \frac{1 - |W(z_p)|^2}{[W(z_j) - W(z_p)][1 - \overline{W(z_p)}W(z_j)]},$$

является наилучшим методом интегрирования на классе $A_d^0(G)$, *и для ее погрешности имеет место равенство*

$$r_{S_0}(z_1,\dots,z_n) = \int_a^b d(x) \prod_{j=1}^{n} |W_j(x)|^2 p(x)\,dx.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\omega_j(z) = \begin{cases} d(z) \displaystyle\prod_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n} W_p(z)\widetilde{W}_p(z), & j = 1,\dots,l, \\ d(z)\widetilde{W}_j(z) \displaystyle\prod_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n} W_p(z)\widetilde{W}_p(z), & j = l+1,\dots,n, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$W_j(z) = \frac{W(z) - W(z_j)}{1 - \overline{W(z_j)}W(z)}, \quad \widetilde{W}_j(z) = \frac{W(z) - \overline{W(z_j)}}{1 - W(z_j)W(z)},$$

а $W(z)$ — *какое-либо конформное отображение области* G *в единичный круг, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси.*

Доказательство. Из теоремы 4.2 при $k_j = 1$, $j = 1,\dots,l$, и $k_j = 0$, $j = l+1,\dots,n$, получаем, что квадратурная формула

$$\begin{aligned} &S_0(f(z_1), f'(z_1),\dots,f(z_l), f'(z_l), f(z_{l+1}),\dots,f(z_n)) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{l} D_{j0} C_{11}^j f(z_j) + \sum_{j=1}^{l} D_{j1}[C_{21}^j f(z_j) + C_{22}^j f'(z_j)] \\ &\qquad + 2\operatorname{Re} \sum_{j=l+1}^{n} D_{j0} C_{11}^j f(z_j), \end{aligned}$$

где

$$D_{j0} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \omega_j(x)[1 - W_j^4(x)]p(x)\,dx, & j = 1, \dots, l, \\ \displaystyle\int_a^b \omega_j(x)[1 - |W_j(x)|^2]p(x)\,dx, & j = l+1, \dots, n, \end{cases}$$

$$D_{j1} = \int_a^b \omega_j(x)W_j(x)[1 - W_j^2(x)]p(x)\,dx,$$

$\omega_j(x)$ определены равенствами (4.8), а C_{11}^j, C_{21}^j и C_{22}^j — элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} \omega_j(z_j) & 0 \\ \omega_j'(z_j) & W_j'(z_j)\omega_j(z_j) \end{pmatrix}^{-1},$$

является наилучшим методом интегрирования и для ее погрешности имеет место равенство

$$r_{S_0}(z_1, \dots, z_n) = \int_a^b d(x) \prod_{j=1}^n |W_j(x)|^2 p(x)\,dx.$$

Положим

$$D_j = C_{11}^j D_{j0}, \quad D_j^1 = C_{22}^j D_{j1}, \quad C_j = -\frac{C_{21}^j}{2C_{22}^j}.$$

В силу того, что

$$C_{11}^j D_{j0} = \frac{1}{\omega_j(z_j)} D_{j0} \text{ и } C_{22}^j D_{j1} = \frac{1}{\omega_j(z_j)W_j'(z_j)} D_{j1} = \frac{1 - W^2(z_j)}{W'(z_j)\omega_j(z_j)} D_{j1},$$

для доказательства следствия осталось доказать равенство

$$C_j = \frac{d'(z_j)}{2d(z_j)} + W'(z_j)\operatorname{Re}\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^n \frac{1 - |W(z_p)|^2}{[W(z_j) - W(z_p)][1 - \overline{W(z_p)}W(z_j)]},$$
$$j = 1, \dots, l.$$

Действительно,

$$-\frac{C_{21}^j}{2C_{22}^j} = \frac{\omega_j'(z_j)}{2\omega_j(z_j)} = \frac{d'(z_j)}{2d(z_j)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^n \frac{W_p'(z_j)\widetilde{W}_p(z_j) + W_p(z_j)\widetilde{W}_p'(z_j)}{W_p(z_j)\widetilde{W}_p(z_j)}$$

$$= \frac{d'(z_j)}{2d(z_j)} + W'(z_j)\operatorname{Re}\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^n \frac{1 - |W(z_p)|^2}{[W(z_j) - W(z_p)][1 - \overline{W(z_p)}W(z_j)]},$$
$$j = 1, \dots, l.$$

Следствие доказано. □

Пусть $\rho(\varphi)$ — неотрицательная с периодом 2π функция такая, что $\ln\rho(\varphi)$ и $[\rho(\varphi)]^p$, $p > 0$, суммируемы на $[0, 2\pi]$ и $\rho(\varphi) = \rho(2\pi - \varphi)$. Обозначим через $H_p^{\rho,0}$ класс функций, вещественных на вещественной оси и принадлежащих классу H_p^ρ. В силу того, что для вещественных x справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\varphi}+x}{e^{i\varphi}-x}\,d\varphi = 0,$$

для функций $f(z) \in H_p^{\rho,0}$ имеет место представление

$$f(z) = d(z)g(z),$$

где функция $d(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\rho(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi}$ положительна на вещественной оси, а $g(z)$ — аналитична, не превосходит единицы при $|z| < 1$ и вещественна на вещественной оси. Из теоремы 4.2 получаем

Следствие 4.3. *Пусть точки $z_1, \ldots, z_n$ лежат внутри единичного круга, удовлетворяют условиям (4.1) и $[a, b] \subset (-1, 1)$. Тогда для погрешности квадратурной формулы (4.2), где*

$$D_{jm} = \int_a^b \omega_j(x)\left(\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}\right)^m\left[1-\left|\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}\right|^{2(k_j-m+1)}\right]p(x)\,dx,$$

$$\omega_j(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi}\displaystyle\prod_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{l}\left(\frac{z-z_p}{1-z_pz}\right)^{k_p+1} \\ \qquad\times\displaystyle\prod_{p=l+1}^{n}\left[\frac{(z-z_p)(z-\overline{z_p})}{(1-\overline{z_p}z)(1-z_pz)}\right]^{k_p+1}, \ j = 1, \ldots, l, \\ e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi}\left(\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}\right)^{k_j+1} \\ \qquad\times\displaystyle\prod_{p=1}^{l}\left(\frac{z-z_p}{1-z_pz}\right)^{k_p+1}\prod_{\substack{p=l+1\\p\neq j}}^{n}\left[\frac{(z-z_p)(z-\overline{z_p})}{(1-\overline{z_p}z)(1-z_pz)}\right]^{k_p+1}, \\ \qquad\qquad j = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

а $C^j_{m+1,k+1}$ определяются через функцию $\omega_j(z)$ так же, как в теореме 4.1, на классе $H_p^{\rho,0}$ справедливо неравенство

$$r_S(z_1, \ldots, z_n) \le \int_a^b e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+x}{e^{i\varphi}-x}\,d\varphi}\prod_{j=1}^{l}\left|\frac{x-z_j}{1-z_jx}\right|^{k_j+1} \times\prod_{j=l+1}^{n}\left|\frac{x-z_j}{1-\overline{z_j}x}\right|^{2(k_j+1)}p(x)\,dx. \quad (4.9)$$

При $k_j = 2k'_j + 1$, $j = 1, \ldots, l$, определенная таким образом квадратурная формула есть наилучший метод интегрирования на классе $H_p^{\rho,0}$, и неравенство (4.9) обращается в равенство.

Рассмотрим частный случай, когда $k_j = 1$, $j = 1, \ldots, l$, $k_j = 0$, $j = l+1, \ldots, n$. Из следствий 4.2 и 4.3 вытекает, что квадратурная формула (4.7), где

$$D_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_j(z_j)} \displaystyle\int_a^b \omega_j(x) \left[1 - \left(\dfrac{x - z_j}{1 - z_j x}\right)^4\right] p(x)\, dx, & j = 1, \ldots, l, \\[2ex] \dfrac{1}{\omega_j(z_j)} \displaystyle\int_a^b \omega_j(x) \left[1 - \left|\dfrac{x - z_j}{1 - \overline{z_j} x}\right|^2\right] p(x)\, dx, & j = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$D'_j = \frac{(1 - z_j^2)^2}{\omega_j(z_j)} \int_a^b \omega_j(x) \frac{(x - z_j)(1 - x^2)}{(1 - x z_j)^3} p(x)\, dx, \quad j = 1, \ldots, l,$$

$$C_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \rho(\varphi) \frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - z_j)^2}\, d\varphi + \operatorname{Re} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{n} \frac{1 - |z_p|^2}{(z_j - z_p)(1 - \overline{z_p} z_j)}, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

$$\omega_j(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \rho(\varphi) \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi} \displaystyle\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{n} \left(\frac{z - z_p}{1 - \overline{z_p} z} \frac{z - \overline{z_p}}{1 - z_p z}\right), & j = 1, \ldots, l, \\[2ex] e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \rho(\varphi) \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi} \dfrac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \displaystyle\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{n} \left(\frac{z - z_p}{1 - \overline{z_p} z} \frac{z - \overline{z_p}}{1 - z_p z}\right), & j = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

является наилучшим методом интегрирования на классе $H_p^{\rho,0}$, и для ее погрешности имеет место равенство

$$r_{S_0}(z_1, \ldots, z_n) = \int_a^b e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \rho(\varphi) \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + x}{e^{i\varphi} - x}\, d\varphi} \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{x - z_j}{1 - \overline{z_j} x}\right|^2 p(x)\, dx.$$

Рассмотрим еще один пример классов типа $A_d(G)$ и $A_d^0(G)$. Пусть $\rho(\varphi)$ неотрицательная с периодом 2π функция, ограниченная сверху и такая, что $\ln \rho(\varphi)$ суммируема на $[0, 2\pi]$. Обозначим через B_ρ класс аналитических ограниченных внутри круга $|z| < 1$ функций, граничные значения которых (ограниченная функция имеет по теореме Фату **[23]** угловые граничные значения почти везде на $|z| = 1$) удовлетворяют неравенству

$$|f(e^{i\varphi})| \le \rho(\varphi)$$

почти везде на $[0, 2\pi]$.

Класс B_ρ содержится в классе H_p^ρ при любом p в силу того, что функция $[\rho(\varphi)]^p$ суммируема и класс ограниченных аналитических функций содержится в H_p при любом p. Таким образом, каждую функцию $f(z)$ из B_ρ можно представить в виде

$$f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi} g(z), \tag{4.10}$$

где $g(z)$ аналитична и ограничена по модулю единицей внутри круга $|z| < 1$. Из ограниченности $\rho(\varphi)$ следует ограниченность функции

$$d(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\varphi)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi}.$$

Следовательно, для любой $g(z)$ аналитической и ограниченной по модулю единицей внутри круга $|z| < 1$ функция, определенная равенством (4.10), будет ограниченной и почти всюду удовлетворять неравенству

$$|f(e^{i\varphi})| \le |d(e^{i\varphi})| = \rho(\varphi).$$

В результате получаем, что для ограниченных функций $\rho(\varphi)$ класс B_ρ совпадает с классом H_p^ρ при всех p.

При $\rho(\varphi) = \rho(2\pi - \varphi)$ через B_ρ^0 обозначим класс функций из B_ρ, вещественных на вещественной оси. Из предыдущих рассуждений вытекает, что для ограниченных $\rho(\varphi)$ класс B_p^0 совпадает с классом $H_p^{\rho,0}$ при всех p.

§5. Минимизация погрешности наилучшего приближения на классе $A_d(G)$ за счет выбора узлов

Пусть в области G задано замкнутое множество E со связным дополнением CE. Рассмотрим задачу минимизации погрешности наилучшего приближения на классе $A_d(G)$ в точках множества E за счет выбора узлов $z_1, \ldots, z_n$. Положим

$$R_n(G,E) = \inf_{z_1,\ldots,z_n \in G} \max_{z\in E} r(z, z_1, \ldots, z_n), \tag{5.1}$$

$$R_n^*(G,E) = \inf_{z_1,\ldots,z_n \in E} \max_{z\in E} r(z, z_1, \ldots, z_n). \tag{5.2}$$

Точки $z_1^0, \ldots, z_n^0$, на которых достигается нижняя грань в равенстве (5.1) или (5.2), будем называть оптимальными узлами для соответствующей задачи.

Ассимптотически точное решение задач (5.1) и (5.2) дается в терминах емкости (или модуля) конденсатора (E, CG). Конденсатором называется пара (E, F), где E и F — непересекающиеся замкнутые множества из расширенной комплексной плоскости, каждое из которых имеет связное дополнение. Понятие емкости конденсатора было введено и подробно исследовано в работах Пойа и Сеге (см. [**17**]).

Одним из эквивалентных определений емкости конденсатора является следующее (см. [**9**], а также [**13**]). Пусть H — обобщенное решение задачи Дирихле в области $D = C(E \cup F)$, построенное по граничным значениям, равным 0 на множестве ∂E и 1 на множестве ∂F, а Γ — произвольный контур, состоящий из конечного числа аналитических жордановых кривых, принадлежащих D и в совокупности разделяющих множества E и F. Обозначим через $\dfrac{\partial}{\partial n}$ производную по нормали к контуру Γ, внешней по отношению к множеству, ограниченному Γ и содержащему E. Емкостью конденсатора (E, F) называется величина

$$c(E,F) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial H}{\partial n}\, ds.$$

Величина $h(E,F) = c^{-1}(E,F)$ называется модулем конденсатора (E,F) (при $c = 0$ $h = +\infty$).

Если E и F — континуумы, то риманов модуль ρ кольца $D = C(E \cup F)$ связан с модулем конденсатора (E,F) следующим равенством:

$$\rho = e^{h(E,F)}. \tag{5.3}$$

Теорема 5.1. *Для величин $R_n(G,E)$ и $R_n^*(G,E)$ имеют место соотношения:*

$$R_n^*(G,E) \ge R_n(G,E) \ge \min_{z\in E} |d(z)| e^{-nh(E,CG)}, \quad n \ge 1, \tag{5.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} = e^{-h(E,CG)}, \tag{5.5}$$

где $h(E,CG)$ — модуль конденсатора (E,CG).

Доказательство. Из теоремы 3.1 для величин $R_n(G,E)$ и $R_n^*(G,E)$ имеем

$$R_n(G,E) = \inf_{z_1,\ldots,z_n\in G} \max_{z\in E} \left| d(z) \prod_{j=1}^n \frac{W(z) - W(z_j)}{1 - \overline{W(z_j)}W(z)} \right|, \tag{5.6}$$

$$R_n^*(G,E) = \inf_{z_1,\ldots,z_n\in E} \max_{z\in E} \left| d(z) \prod_{j=1}^n \frac{W(z) - W(z_j)}{1 - \overline{W(z_j)}W(z)} \right|, \tag{5.7}$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G в единичный круг. Обозначим через $\widetilde{E}$ образ множества E при отображении $\xi = W(z)$, и положим $\widetilde{d}(\xi) = d(W^{-1}(\xi))$. Тогда справедливы равенства

$$R_n(G,E) = \inf_{|\xi_j|<1} \max_{\xi\in\widetilde{E}} \left| \widetilde{d}(\xi) \prod_{j=1}^n \frac{\xi - \xi_j}{1 - \overline{\xi_j}\xi} \right|,$$

$$R_n^*(G,E) = \inf_{\{\xi_j\}\in\widetilde{E}} \max_{\xi\in\widetilde{E}} \left| \widetilde{d}(\xi) \prod_{j=1}^n \frac{\xi - \xi_j}{1 - \overline{\xi_j}\xi} \right|.$$

В силу последних равенств, инвариантности модуля конденсатора (E, CG) относительно конформного отображения области $G \setminus E$ и того, что $\min\limits_{\xi \in \widetilde{E}} |\widetilde{d}(\xi)| = \min\limits_{z \in E} |d(z)|$, достаточно доказать теорему для случая, когда G — внутренность единичного круга.

Докажем сначала неравенства (5.4). В случае, когда G — внутренность единичного круга, при $W(z) \equiv z$ из равенств (5.6), (5.7) имеем

$$R_n^*(G, E) \geq R_n(G, E) \geq \min_{z \in E} |d(z)| \inf_{|z_j|<1} \max_{z \in E} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \right|. \qquad (5.8)$$

Рассмотрим множество F, симметричное множеству E относительно единичной окружности, и положим

$$\sigma_n(E, F) = \sup_{r_n} \frac{\min\limits_{z \in F} |r_n(z)|}{\max\limits_{z \in E} |r_n(z)|},$$

где верхняя грань берется в классе всех рациональных функций порядка не выше n. Очевидно, что

$$\sigma_n(E, F) \geq \sup_{B_n} \frac{\min\limits_{z \in F} |B_n(z)|}{\max\limits_{z \in E} |B_n(z)|},$$

где верхняя грань берется в классе всех рациональных функций вида $B_n(z) = \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$, $|z_j| < 1$, $j = 1, \ldots, n$. Вследствие равенства $\left| B_n\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) \right| = |B_n(z)|^{-1}$ получаем, что

$$\min_{z \in F} |B_n(z)| = \left[\max_{z \in E} |B_n(z)| \right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\sigma_n(E, F) \geq \sup_{B_n} \left[\max_{z \in E} |B_n(z)| \right]^{-2},$$

или

$$\inf_{B_n} \max_{z \in E} |B_n(z)| \geq \sigma_n(E, F)^{-1/2}.$$

Пользуясь оценкой

$$\sigma_n(E, F) \leq e^{nh(E,F)}, \quad n \geq 0,$$

полученной в работе **[9]**, и замечая, что $h(E, F) = 2h(E, CG)$, получим

$$\inf_{|z_j|<1} \max_{z \in E} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \right| \geq e^{-nh(E,CG)}.$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (5.8) доказывают соотношение (5.4).

Из доказательства одной теоремы Уолша ([**21**], § 8.7, теорема 9) вытекает следующий факт. Пусть E_0 — замкнутое множество со связным дополнением, лежащее внутри единичного круга и ограниченное конечным числом непересекающихся аналитических кривых, F_0 — множество, симметричное E_0 относительно единичной окружности, $D_0 = C(E_0 \cup F_0)$ и $H_0(z)$ непрерывна в $\overline{D_0}$, гармонична в D_0, $H_0(z) = 0$, $z \in \partial E_0$, $H_0(z) = 1$, $z \in \partial F_0$. Предположим, что точки $z_1, \ldots, z_n$ равномерно распределены на ∂E_0 относительно параметра σ, $d\sigma = \dfrac{\partial H_0}{\partial n}\, ds$. Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_{j,n}}{z - \dfrac{1}{\overline{z_{j,n}}}}\right|} = e^{h(E_0,F_0)H_0(z)}, \quad z \in D_0, \tag{5.9}$$

равномерно внутри D_0.

Лемма 5.1. *Пусть E — произвольное замкнутое множество со связным дополнением, лежащее внутри единичного круга. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ найдутся такие точки $z_{1n}(\varepsilon), \ldots, z_{nn}(\varepsilon)$, для которых*

$$\frac{\min\limits_{z\in F} |B_n(z)|}{\max\limits_{z\in E} |B_n(z)|} > e^{n[h(E,F)-\varepsilon]}, \tag{5.10}$$

где $B_n(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_{jn}(\varepsilon)}{1 - \overline{z_{jn}(\varepsilon)}z}$, *а F — множество, симметричное E относительно единичной окружности.*

Доказательство этой леммы вытекает из равенства (5.9) и существенно не отличается от доказательства леммы 2 из работы [**9**]. В силу равенств

$$\left|B_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right| = |B_n(z)|^{-1}, \quad h(E,F) = 2h(E,CG) \tag{5.11}$$

из неравенства (5.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n найдутся такие точки $z_{1n}(\varepsilon), \ldots, z_{nn}(\varepsilon)$, что

$$\max_{z\in E}\left|\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_{jn}(\varepsilon)}{1 - \overline{z_{jn}(\varepsilon)}z}\right| < e^{-n[h(E,CG)-\varepsilon]}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$R_n(G,E) \le R_n^*(G,E) \le \max_{z\in E} |d(z)| e^{-n[h(E,CG)-\varepsilon]}.$$

Отсюда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} \le e^{-h(E,CG)}. \tag{5.12}$$

Из неравенств (5.4) имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} \ge \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} \ge xe^{-h(E,CG)}.$$

Последние неравенства вместе с неравенствами (5.12) дают

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} = e^{-h(E,CG)}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 5.1. *Пусть E — континуум. Тогда имеют место соотношения*

$$R_n^*(G,E) \ge R_n(G,E) \ge \min_{z\in E} |d(z)| \frac{1}{\rho^n}, \quad n \ge 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} = \frac{1}{\rho},$$

где ρ — риманов модуль кольца $G \setminus E$.

Доказательство следствия вытекает из теоремы 5.1 и равенства (5.3).

Следствие 5.2. *Пусть $E \subset G$ — множество со связным дополнением, ограниченное конечным числом непересекающихся аналитических кривых, и $H(z)$ — обобщенное решение задачи Дирихле в области $G \setminus E$, построенное по граничным данным, равным 0 на множестве ∂E и 1 на множестве ∂G. Тогда точки $z_{1n}, \dots, z_{nn}$, равномерно распределенные на ∂E относительно параметра σ, $d\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial n} ds$, будут оптимальными по порядку для задач (5.1) и (5.2), т.е. будут выполнены равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(G,E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n^*(G,E)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{z\in E} r(z, z_{1n}, \dots, z_{nn})}.$$

Доказательство. Пусть функция $\xi = W(z)$ конформно отображает область G в единичный круг и $\widetilde{E} = W(E)$. Тогда, если точки $\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}$ являются оптимальными по порядку для задачи нахождения величин $R_n(\widetilde{G}, \widetilde{E})$ и $R_n^*(\widetilde{G}, \widetilde{E})$ на классе $A_{\widetilde{d}}(\widetilde{G})$ (где $\widetilde{d}(\xi) = d(W^{-1}(\xi))$, $\widetilde{G} = \{\xi : |\xi| < 1\}$), то точки $z_{jn} = W^{-1}(\xi_{jn})$, $j = 1, \dots, n$, будут оптимальными по порядку для задач (5.1) и (5.2). Следовательно, в силу того, что точки $z_{1n}, \dots, z_{nn}$, равномерно распределенные на ∂E относительно параметра σ, $d\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial n} ds$, перейдут при конформном отображении в точки, равномерно распределенные на $\partial \widetilde{E}$ относительно параметра σ', $d\sigma' = \dfrac{\partial H'}{\partial n} ds$ ($H'(\xi)$

— решение задачи Дирихле в области $\widetilde{G}\setminus\widetilde{E}$, построенное по граничным значениям 0 на $\partial\widetilde{E}$ и 1 на единичной окружности), достаточно доказать утверждение следствия 5.2 для случая, когда G — внутренность единичного круга.

Обозначим через $H(z)$ решение задачи Дирихле в области $G\setminus E$, построенное по граничным значениям 0 на множестве ∂E и 1 на единичной окружности ∂G, а через F — множество, симметричное E относительно единичной окружности. Вследствие того, что F симметрично E, функцию $H(z)$ можно гармонически продолжить в область $C(F\cup G)$, при этом $H(z)=2$, $z\in\partial F$. Положим $U(z)=\frac{1}{2}H(z)$. Тогда для точек $z_{1n},\ldots,z_{nn}$, распределенных равномерно на ∂E относительно параметра σ, $d\sigma=\dfrac{\partial H}{\partial n}\,ds$ (а следовательно, и относительно параметра τ, $d\tau=\dfrac{\partial U}{\partial n}\,ds$), будет справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_{j,n}}{z-\dfrac{1}{\overline{z_{j,n}}}}\right|}=e^{h(E,F)U(z)}$$

равномерно внутри $C(E\cup F)$ (см. (5.9)). Положим $\Gamma_\rho=\{z\in C(E\cup F):U(z)=\rho\}$. Для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n имеем

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_{j,n}}{z-\dfrac{1}{\overline{z_{j,n}}}}\right|<e^{nh(E,F)2\varepsilon},\quad z\in\Gamma_\varepsilon,$$

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_{j,n}}{z-\dfrac{1}{\overline{z_{j,n}}}}\right|>e^{nh(E,F)(1-2\varepsilon)},\quad z\in\Gamma_{1-\varepsilon}.$$

В силу принципа максимума и минимума модуля аналитических функций для достаточно больших n будут выполнены неравенства

$$\max_{z\in E}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_{j,n}}{z-\dfrac{1}{\overline{z_{j,n}}}}\right|<e^{nh(E,F)2\varepsilon},\quad \min_{z\in F}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_{j,n}}{z-\dfrac{1}{\overline{z_{j,n}}}}\right|>e^{nh(E,F)(1-2\varepsilon)}.$$

Отсюда

$$\frac{\min\limits_{z\in F}\left|\prod\limits_{j=1}^{n}\dfrac{z-z_{j,n}}{1-\overline{z_{j,n}}z}\right|}{\max\limits_{z\in E}\left|\prod\limits_{j=1}^{n}\dfrac{z-z_{j,n}}{1-\overline{z_{j,n}}z}\right|} > e^{nh(E,F)(1-4\varepsilon)}.$$

Из последнего неравенства и равенств (5.4) вытекает, что при достаточно больших n

$$\max_{z\in E}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_{j,n}}{1-\overline{z_{j,n}}z}\right| < e^{-nh(E,CG)(1-4\varepsilon)}.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{z\in E} r(z,z_{1n},\ldots,z_{nn})} \le e^{-h(E,CG)}. \tag{5.13}$$

Используя неравенства

$$\max_{z\in E} r(z,z_{1n},\ldots,z_{nn}) \ge R_n^*(G,E) \ge R_n(G,E) \ge \min_{z\in E}|d(z)|e^{-nh(E,CG)},$$

получаем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{z\in E} r(z,z_{1n},\ldots,z_{nn})} \ge e^{-h(E,CG)},$$

что вместе с (5.13) и (5.5) доказывает следствие 5.2. □

§6. Точное решение задачи минимизации погрешности наилучшего приближения на некоторых множествах

Обозначим через $A_M(G)$ класс аналитических в односвязной области G функций, ограниченных по модулю константой M. Для некоторых множеств E задача нахождения на классе $A_M(G)$ величин $R_n(G,E)$, $R_n^*(G,E)$, определенных равенствами (5.1), (5.2), и определения соответствующих оптимальных узлов может быть решена точно.

Приведем точное решение этой задачи для случая, когда G — внутренность единичного круга, а множество E является кругом радиуса r, $r<1$, или отрезком вещественной оси $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$, $k<1$. Из рассуждений, аналогичных рассуждениям, проводившимся в предыдущем параграфе, вытекает, что тем самым будут решены поставленные выше задачи для всех пар G, E таких, для которых существует конформное отображение, переводящее G во внутренность единичного круга, а множество E либо в круг радиуса r, либо в отрезок $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$.

Теорема 6.1. *При $G=\{z:|z|<1\}$ и $E=\{z:|z|\le r,\ r<1\}$ для величин $R_n(G,E)$, $R_n^*(G,E)$ на классе $A_M(G)$ имеют место равенства*

$$R_n(G,E)=R_n^*(G,E)=Mr^n,$$

а оптимальными узлами для соответствующих задач являются точки $z_1^0 = \ldots = z_n^0 = 0$.

Доказательство. В силу того, что для риманова модуля области $G \setminus E$ справедливо равенство $\rho = \dfrac{1}{r}$, из следствия 5.1 имеем

$$R_n^*(G,E) \geq R_n(G,E) \geq Mr^n.$$

С другой стороны,

$$R_n(G,E) \leq R_n^*(G,E) \leq \max_{z\in E} r(z,0,\ldots,0) = Mr^n.$$

Теорема доказана. □

Теорема 6.2. *При* $G = \{z : |z| < 1\}$ *и* $E = \{z : z \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}],\ k < 1\}$ *для величин* $R_n(G,E)$, $R_n^*(G,E)$ *на классе* $A_M(G)$ *имеют место равенства*

$$R_n^*(G,E) = R_n(G,E) = Mk^{\frac{n}{2}} \operatorname{sn}^2\left[\frac{K}{n}, k\right] \operatorname{sn}^2\left[\frac{3K}{n}, k\right] \ldots$$

$$\times \operatorname{sn}^2\left[\frac{\mu K}{n}, k\right] = 2Mh^n \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} h^{4nm(m+1)}}{1 + 2\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} h^{4nm^2}}, \quad (6.1)$$

где $h = e^{-\frac{\pi K'}{4K}}$, K, K' — *полные эллиптические интегралы первого рода для модулей* k *и* $k' = \sqrt{1-k^2}$ *соответственно, а* μ — *наибольшее нечетное число, меньшее, чем* n; *оптимальными узлами для соответствующих задач являются точки*

$$z_j^0 = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1\right) K, k\right], \quad j = 1, \ldots, n. \quad (6.2)$$

Доказательство. Для рассматриваемого случая величины $R_n(G,E)$ и $R_n^*(G,E)$ определены равенствами

$$R_n(G,E) = M \inf_{|z_j|<1} \max_{z\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \right|,$$

$$R_n^*(G,E) = M \inf_{z_j\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]} \max_{z\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right|.$$

Докажем, что при всех $n \geq 1$ $R_n(G,E) = R_n^*(G,E)$. Для этого достаточно доказать, что для любой функции $B_n(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$, существует функция $B_n^*(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j^*}{1 - z_j^* z}$ такая, что $z_j^* \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$,

$j = 1, \ldots, n$, и для всех $z \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ выполнено неравенство

$$|B_n^*(z)| \leq |B_n(z)|. \tag{6.3}$$

Пусть $z_j = \alpha_j + i\beta_j$. Положим

$$z_j^* = \begin{cases} \alpha_j, & \alpha_j \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}], \\ -\sqrt{k}, & \alpha_j < -\sqrt{k}, \\ \sqrt{k}, & \alpha_j > \sqrt{k}. \end{cases}$$

Тогда при $z \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \right|^2 = \frac{(z - \alpha_j)^2 + \beta_j^2}{(1 - \alpha_j z)^2 + \beta_j^2 z^2} \geq \left(\frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z} \right)^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\left(\frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z} \right)^2 \geq \left(\frac{z - z_j^*}{1 - z_j^* z} \right)^2, \quad z \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}].$$

Таким образом,

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \right| \geq \left| \frac{z - z_j^*}{1 - z_j^* z} \right|.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства (6.3).

При нахождении оптимальных узлов будет существенно использоваться решение III задачи из классического мемуара Е.И. Золотарева “Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля” (см. [**10**, стр. 1–59]). Эта задача формулируется следующим образом. Найти вещественную рациональную функцию $r_n^0(x)$ порядка не выше n, для которой

$$\min_{|x| \geq \frac{1}{k}} |r_n^0(x)| = \sup_{r_n} \min_{|x| \geq \frac{1}{k}} |r_n(x)|, \quad k < 1,$$

где верхняя грань берется в классе всех вещественных рациональных функций порядка не выше n, удовлетворяющих условию $\max\limits_{|x| \leq 1} |r_n(x)| \leq 1$. Нам удобно выписать решение для несколько измененной задачи, которая легко сводится с помощью линейного преобразования к предыдущей. Будем искать функцию $r_n^0(x)$ такую, что

$$\min_{|x| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}} |r_n^0(x)| = \sup_{r_n} \min_{|x| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}} |r_n(x)|, \quad k < 1,$$

где верхняя грань берется в классе всех вещественных рациональных функций порядка не выше n, удовлетворяющих условию $\max\limits_{|x| \leq \sqrt{k}} |r_n(x)| \leq 1$. Решение этой задачи:

$$r_n^0(x) = C(k, n) \prod_{j=1}^{n} \frac{x - z_j^0}{1 - z_j^0 x},$$

где

$$z_j^0 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1\right) K, k\right],$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k, а $C(k,n)$ — константа, несущественная в дальнейшем. Кроме того, для функции $r_n^0(x)$ справедливы равенства

$$\max_{|x|\le\sqrt{k}} |r_n^0(x)| = 1, \qquad \min_{|x|\ge\frac{1}{\sqrt{k}}} |r_n^0(x)|$$
$$= k^{-n}\left(\mathrm{sn}\left[\frac{K}{n}, k\right]\mathrm{sn}\left[\frac{3K}{n}, k\right]\ldots\mathrm{sn}\left[\frac{\mu K}{n}, k\right]\right)^{-4},$$

где μ — наибольшее нечетное число, меньшее, чем n. Положим

$$\sigma_n(k) = \sup_{r_n} \frac{\min\limits_{|x|\ge\frac{1}{\sqrt{k}}} |r_n(x)|}{\max\limits_{|x|\le\sqrt{k}} |r_n(x)|},$$

здесь верхняя грань берется в классе всех вещественных рациональных функций $r_n(x)$ ($r_n(x) \not\equiv 0$) порядка не выше n. Вследствие равенства

$$\sigma_n(k) = \sup_{r_n} \min_{|x|\ge\frac{1}{k}} \left|\frac{r_n(x)}{\max\limits_{|x|\le\sqrt{k}} |r_n(x)|}\right|$$

имеем

$$\sigma_n(k) = \min_{|x|\ge\frac{1}{\sqrt{k}}} |r_n^0(x)|$$
$$= k^{-n}\left(\mathrm{sn}\left[\frac{K}{n}, k\right]\mathrm{sn}\left[\frac{3K}{n}, k\right]\ldots\mathrm{sn}\left[\frac{\mu K}{n}, k\right]\right)^{-4}. \qquad (6.4)$$

В силу соотношения

$$\left|\prod_{j=1}^{n} \frac{\frac{1}{x} - z_j}{1 - \frac{z_j}{x}}\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} \frac{x - z_j}{1 - z_j x}\right|^{-1}$$

справедливо равенство

$$R_n^*(G,E) = M\left[\sup_{z_j\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]} \frac{\min\limits_{|x|\ge\frac{1}{\sqrt{k}}} \left|\prod\limits_{j=1}^{n} \frac{x - z_j}{1 - z_j x}\right|}{\max\limits_{|x|\le\sqrt{k}} \left|\prod\limits_{j=1}^{n} \frac{x - z_j}{1 - z_j x}\right|}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$R_n^*(G,E) \ge M\sigma_n^{-\frac{1}{2}}(k). \qquad (6.5)$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{r}_n(x) = \frac{r_n^0(x)}{C(k,n)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - z_j^0}{1 - z_j^0 x}.$$

Из равенств

$$\sigma_n(k) = \frac{\min\limits_{|x| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}} |r_n^0(x)|}{\max\limits_{|x| \leq \sqrt{k}} |r_n^0(x)|} = \frac{\min\limits_{|x| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}} |\widetilde{r}_n(x)|}{\max\limits_{|x| \leq \sqrt{k}} |\widetilde{r}_n(x)|} = \left[\max_{|x| \leq \sqrt{k}} |\widetilde{r}_n(x)|\right]^{-2}$$

следует, что

$$R_n^*(G,E) \leq M \max_{|x| \leq \sqrt{k}} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{x - z_j^0}{1 - z_j^0 x} \right| = M \sigma_n^{-\frac{1}{2}}(k).$$

Последнее неравенство вместе с соотношениями (6.5), (6.4) доказывает, что точки, определенные равенством (6.2) являются оптимальными узлами, и справедливы равенства

$$R_n(G,E) = R_n^*(G,E) = M k^{\frac{n}{2}} \operatorname{sn}^2 \left[\frac{K}{n}, k\right] \operatorname{sn}^2 \left[\frac{3K}{n}, k\right] \ldots \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\mu K}{n}, k\right].$$

Решение рассматриваемой задачи может быть получено также из работы **[25]**, в которой найдены точки $x_1^0, \ldots, x_n^0$, удовлетворяющие условию

$$\max_{x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j^0}{x + x_j^0} \right| = \inf_{x_j \in \left[a, \frac{1}{a}\right]} \max_{x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x + x_j} \right|, \quad a < 1,$$

и получено соотношение

$$\max_{x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j^0}{x + x_j^0} \right| = 2h^n \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} h^{4nm(m+1)}}{1 + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} h^{4nm^2}}; \tag{6.6}$$

здесь $h = e^{-\frac{\pi L'}{L}}$, L и L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $l = \sqrt{1 - a^4}$ и $l' = \sqrt{1 - l^2}$, соответственно. Сделав замену $x = \dfrac{1+z}{1-z}$ в равенстве (6.6) и положив $a = \dfrac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$, получим

$$R_n^*(G,E) = R_n(G,E) = M \inf_{z_j \in [\sqrt{k},\sqrt{k}]} \max_{z \in [\sqrt{k},\sqrt{k}]} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{x - z_j}{1 - z_j x} \right|$$

$$= 2Mh^n \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} h^{4nm(m+1)}}{1 + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} h^{4nm^2}},$$

где $h = e^{-\frac{\pi L'}{L}}$, а модули l, l' равны $\sqrt{1 - \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4}$ и $\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2$, соответственно. Положим $p = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, тогда $l = \frac{2\sqrt{p}}{1+p}$. Используя известные формулы

$$\begin{aligned} L\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right) &= (1+p)L(p), \\ L'\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right) &= \frac{1+p}{2} L'(p) \end{aligned} \tag{6.7}$$

(см. [**4**], [**20**], будем иметь $h = e^{-\frac{\pi L'(p)}{2L(p)}} = e^{-\frac{\pi K'(k)}{4K(k)}}$. Теорема доказана. □

Теорема 6.3. *Пусть множества G и E таковы, что существует конформное отображение $\xi = W(z)$ области G в эллипс $Э_c$ с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c, переводящее множество E в отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Тогда имеют место равенства*

$$R_n(G,E) = R_n^*(G,E) = 2Mc^{-n} \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} c^{-4nm(m+1)}}{1 + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} c^{-4nm^2}},$$

и точки

$$z_j^0 = W^{-1}\left(\cos \frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

являются оптимальными узлами для задач нахождения величин $R_n(G,E)$ и $R_n^*(G,E)$.

Доказательство. Из теоремы 6.2 вытекает, что достаточно доказать равенства $c = e^{\frac{\pi K'}{4K}}$ и

$$\Phi\left(\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1\right)K, k\right]\right) = \cos \frac{2j-1}{2n}\pi, \tag{6.8}$$

где $\xi = \Phi(z)$ — конформное отображение внутренности единичного круга в эллипс с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c, при котором отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \sin\left[\frac{\pi}{2L}\varphi\left(\frac{2z}{l(1+z^2)}\right)\right],$$

здесь

$$\varphi(\xi) = \int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l^2t^2)}},$$

а l определяется из условия $c = \exp\dfrac{\pi L'}{2L}$. При $l = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$ функция $\Phi(z)$ конформно отображает внутренность единичного круга на внутренность эллипса $Э_c$, причем отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$. Из равенств (6.7) сразу следует, что $c = e^{\frac{\pi K'}{4K}}$. Остается доказать равенства (6.8). Пользуясь соотношением

$$\operatorname{sn}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = (1+k)\frac{\operatorname{sn}[u,k]}{1+k\operatorname{sn}^2[u,k]}$$

(см. [**4**], [**20**]), а также равенствами (6.7), будем иметь

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\sqrt{k}\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n}-1\right)K, k\right]\right) \\
&\quad = \sin\left[\frac{\pi}{2L}\varphi\left(\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n}-1\right)L, l\right]\right)\right] = \sin\left(\frac{2j-1}{2n}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\qquad = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 6.3 основана фактически на том интересном факте, что узлы Золотарева в промежутке $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ при конформном отображении внутренности единичного круга на внутренность эллипса с фокусами в точках ± 1, переводящим отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ в отрезок $[-1, 1]$, переходят в узлы Чебышева.

Глава 3

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

§7. Наилучший метод приближения на классе $W^{(nk)}(M;a,b)$. Оптимальный метод интегрирования на классе $W^{(2n)}(M;a,b)$

Одним из простейших методов приближения функций по их значениям $f(x_1),\dots,f^{(k-1)}(x_1),\dots,f(x_n),\dots,f^{(k-1)}(x_n)$ в некоторых точках из отрезка $[a,b]$ является интерполяционная формула Эрмита

$$f(x)\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}P_{ij}(x)f^{(j)}(x_i), \tag{7.1}$$

где $P_{ij}(x)$ — многочлены степени $nk-1$, удовлетворяющие условиям

$$P_{ij}^{(l)}(x_m)=\delta_{im}\delta_{jl},\quad m=1,\dots,n,\quad l=0,\dots,k-1. \tag{7.2}$$

Хорошо известно (см. **[3]**, **[5]**), что для функций, имеющих непрерывную производную $f^{(nk)}(x)$, удовлетворяющую условию $\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(nk)}(x)|\le M$ (в дальнейшем класс всех таких функций будем обозначать через $W^{(nk)}(M;a,b)$) справедливо неравенство

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}P_{ij}(x)f^{(j)}(x_i)\right|\le\frac{M}{(nk)!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|^k. \tag{7.3}$$

Оказывается, что интерполяционная формула Эрмита будет наилучшим методом приближения на классе $W^{(nk)}(M;a,b)$, если вместо точных значений функций используются значения, заданные с некоторой погрешностью. Пусть известны значения $\widetilde{f^{(j)}}(x_i)=f^{(j)}(x_i)+\rho_{ij}$, $i=1,\dots,n$, $j=0,\dots,k-1$, и пусть для всех функций из класса $W^{(nk)}(M;a,b)$ векторы $\rho^j(f)=(\rho_{1j}(f),\dots,\rho_{nj}(f))$ удовлетворяют неравенству $\|\rho^j(f)\|_{p_j}\le\delta_j$, $j=0,\dots,k-1$; здесь $\|\rho\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\rho_i|^p\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$, и $\|\rho\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|\rho_i|$. Через $q_0,\dots,q_{k-1}$

обозначим числа, удовлетворяющие равенствам $\dfrac{1}{p_j}+\dfrac{1}{q_j}=1$, $j=0,\dots,k-1$ ($q_j=\infty$ при $p_j=1$ и $q_j=1$ при $p_j=\infty$).

Теорема 7.1. *Метод*

$$S_\delta(x,\widetilde{f}(x_1),\dots,\widetilde{f}^{(k-1)}(x_1),\dots,\widetilde{f}(x_n),\dots,\widetilde{f}^{(k-1)}(x_n)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} P_{ij}(x)\widetilde{f}^{(j)}(x_i), \quad (7.4)$$

где $P_{ij}(t)$ — многочлены степени $nk-1$, удовлетворяющие условиям (7.2), является единственным линейным наилучшим методом приближения на классе $W^{(nk)}(M;a,b)$ величины $f(x)$ по значениям $f(x_1),\dots,f^{(k-1)}(x_1),\dots,f(x_n),\dots,f^{(k-1)}(x_n)$, заданным с погрешностями $\delta_0,\dots,\delta_{k-1}$ в нормах $\|\cdot\|_{p_0},\dots,\|\cdot\|_{p_{k-1}}$, соответственно, при всех $\delta_0,\dots,\delta_{k-1}\geq 0$ и всех $1\leq p_0,\dots,p_{k-1}\leq\infty$. Для погрешности наилучшего метода имеет место равенство

$$r_n(x,\delta_0,\dots,\delta_{k-1},\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{k},\dots,\underbrace{x_n,\dots,x_n}_{k}) = \frac{M}{(nk)!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|^k + \sum_{j=0}^{k-1}\delta_j\left\|\overline{P_j(x)}\right\|_{q_j},$$

где $\overline{P_j(x)}=(P_{1j}(x),\dots,P_{nj}(x))$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_{ij}(x,\varepsilon,\delta_0,\dots,\delta_{k-1}) = \sup_{f\in W_{ij}(\varepsilon)} f(x),$$

где

$$W_{ij}(\varepsilon)=\left\{\, f\in W^{(nk)}(M;a,b) \,|\, \|f_l-\varepsilon\delta_{lj}e_i\|_{p_l}\leq\delta_l,\ l=0,\dots,k-1 \,\right\};$$

здесь

$$f_l=\left(f^{(l)}(x_1),\dots,f^{(l)}(x_n)\right), \quad \{e_i\}_m=\delta_{mi}, \quad m,i=1,\dots,n.$$

Из неравенства (7.3) вытекает, что для функций $\varphi_{ij}(x,\varepsilon,\delta_0,\dots,\delta_{k-1})$ справедливо соотношение

$$\varphi_{ij}(x,\varepsilon,\delta_0,\dots,\delta_{k-1}) \leq \frac{M}{(nk)!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|^k + \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=0}^{k-1}P_{ml}(x)\left[f^{(l)}(x_m)-\varepsilon\delta_{mi}\delta_{lj}\right]+\varepsilon P_{ij}(x). \quad (7.5)$$

Пользуясь неравенством $|(a,b)| \le \|a\|_p \|b\|_q \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ и тем, что функция $f(x)$ в неравенстве (7.5) принадлежит классу $W_{ij}(\varepsilon)$, получаем

$$\varphi_{ij}(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_{k-1}) \le \frac{M}{(nk)!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|^k + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \|\overline{P_j(x)}\|_{q_j} + \varepsilon P_{ij}(x).$$

Зафиксируем точку $x \in [a,b]$ и положим

$$\alpha_{ml} = \begin{cases} \delta_l \dfrac{|P_{ml}(x)|^{q_l - 1}}{\|\overline{P_l(x)}\|_{q_l}^{q_l - 1}} \operatorname{sign} P_{ml}(x) & \text{при } 1 < p_l < \infty, \\ \delta_l \operatorname{sign} P_{ml}(x) & \text{при } p_l = \infty, \end{cases}$$

при $p_l = 1$ положим

$$\alpha_{ml} = \begin{cases} 0, & \text{если } |P_{ml}(x)| \ne \max\limits_{1 \le s \le n} |P_{sl}(x)|, \\ \delta_l \operatorname{sign} P_{ml}(x), & \text{если } |P_{ml}(x)| = \max\limits_{1 \le s \le n} |P_{sl}(x)|. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f(y) = \frac{M}{(nk)!} \prod_{i=1}^{n} (y - x_i)^k \operatorname{sign} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^k + \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{ml} P_{ml}(y) + \varepsilon P_{ij}(y).$$

В силу определения величин α_{ml} функции $f(y)$ принадлежит классу $W_{ij}(\varepsilon)$ и в точке x принимает значение

$$f(x) = \frac{M}{(nk)!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|^k + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \|\overline{P_j(x)}\|_{q_j} + \varepsilon P_{ij}(x).$$

Таким образом, доказано, что для $\varphi_{ij}(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_{k-1})$ справедливо равенство

$$\varphi_{ij}(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_{k-1}) = \frac{M}{(nk)!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|^k + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \|\overline{P_j(x)}\|_{q_j} + \varepsilon P_{ij}(x).$$

Последнее равенство дает

$$\frac{\partial \varphi_{ij}(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_{k-1})}{\partial \varepsilon} = P_{ij}(x).$$

Применяя теорему 2.2, получим, что метод (7.4) является единственным линейным наилучшим методом приближения. Вследствие равенства

$$\sup_{\substack{f \in W^{(nk)}(M;a,b) \\ \|f_l\|_{p_l} \le \delta_l,\ l=0,\dots,k-1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f \in W^{(nk)}(M;a,b) \\ \|f_l\|_{p_l} \le \delta_l,\ l=0,\dots,k-1}} f(x) = \varphi_{ij}(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_{k-1})$$

и теоремы 2.1 имеем

$$r(x,\delta_0,\dots,\delta_{k-1},x_1,\dots,x_n)=\frac{M}{(nk)!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|^k+\sum_{j=0}^{k-1}\delta_j\|\overline{P_j(x)}\|_{q_j}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 7.1. *Метод*

$$S_0(x,\widetilde{f}(x_1),\dots,\widetilde{f}(x_n))=\sum_{j=1}^{n}P_j(x)\widetilde{f}(x_j),\quad P_j(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i},$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения на классе $W^{(n)}(M;a,b)$ величины $f(x)$ по значениям $f(x_1),\dots,f(x_n)$, заданным с погрешностью δ в норме $\|\cdot\|_p$ при всех $\delta\ge 0$ и всех $1\le p\le\infty$. Для погрешности наилучшего метода имеет место равенство

$$r(x,\delta,x_1,\dots,x_n)=\frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|+\delta\|\overline{P(x)}\|_q,$$

где $\overline{P(x)}=(P_1(x),\dots,P_n(x))$.

Рассмотрим теперь задачу наилучшего приближения интеграла $I(f)=\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ с неотрицательной весовой функцией $p(x)$ на классе $W^{(2n)}(M;a,b)$ по значениям $f(x_1),f'(x_1),\dots,f(x_n),f'(x_n)$, заданным с погрешностью. Будем считать, что известны значения

$$\widetilde{f}(x_i)=f(x_i)+\rho_i^0(f),\quad \widetilde{f}'(x_i)=f'(x_i)+\rho_i'(f),\quad i=1,\dots,n,$$

и при всех $f\in W^{(2n)}(M;a,b)$ векторы $\rho^0(f)=(\rho_1^0(f),\dots,\rho_n^0(f))$, $\rho'(f)=(\rho_1'(f),\dots,\rho_n'(f))$ удовлетворяют неравенствам $\|\rho^0(f)\|_p\le\delta_0$, $\|\rho'(f)\|_p\le\delta_1$.

Теорема 7.2. *Квадратурная формула*

$$S_0(\widetilde{f}(x_1),\widetilde{f}'(x_1),\dots,\widetilde{f}(x_n),\widetilde{f}'(x_n))=\sum_{i=1}^{n}\left[C_i-2\frac{\omega_i'(x_i)}{\omega_i(x_i)}D_i\right]\widetilde{f}(x_i)+\sum_{i=1}^{n}D_i\widetilde{f}'(x_i),$$

где $\omega_i(x)=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)$,

$$C_i=\frac{1}{\omega_i^2(x_i)}\int_a^b\omega_i^2(x)p(x)\,dx,\quad D_i=\frac{1}{\omega_i^2(x_i)}\int_a^b(x-x_i)\omega_i^2(x)p(x)\,dx,\tag{7.6}$$

является единственным линейным наилучшим методом интегрирования на классе $W^{(2n)}(M,a,b)$ по значениям $f(x_1), f'(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_n)$, заданным с погрешностями δ_0, δ_1 в нормах $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ соответственно, при всех $\delta_0,\delta_1 \ge 0$ и всех $1 \le p,q \le \infty$. Для погрешности наилучшего метода интегрирования имеет место равенство

$$r(\delta_0,\delta_1,x_1,\dots,x_n) = \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 p(x)\,dx + \delta_0\|E_0\|_{q_0} + \delta_1\|E_1\|_{q_1};$$

здесь

$$E_0 = \left(C_1 - 2\frac{\omega_1'(x_1)}{\omega_1(x_1)}D_1, \dots, C_n - 2\frac{\omega_n'(x_n)}{\omega_n(x_n)}D_n\right),$$

$$E_1 = (D_1,\dots,D_n), \quad \frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_{ij}(\varepsilon,\delta_0,\delta_1) = \sup_{f\in\Omega_{i,j}(\varepsilon)} \int_a^b f(x)p(x)\,dx,$$

где $\Omega_{i,j}(\varepsilon) = \{f \in W^{(2n)}(M,a,b) \mid \|f^k - \varepsilon\delta_{jk}e_i\|_{p_k} \le \delta_k,\ k=0,1\}$,

$$f^k = (f^{(k)}(x_1),\dots,f^{(k)}(x_n)), \quad \{e_i\}_m = \delta_{im}, \quad i,m = 1,\dots,n.$$

Интегрируя неравенство (7.3), получим

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \le \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 p(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_a^b P_{i0}(x)p(x)\,dx f(x_i) + \sum_{i=1}^n \int_a^b P_{i1}(x)p(x)\,dx f'(x_i).$$

Отсюда

$$\varphi_{ij}(\varepsilon,\delta_0,\delta_1) \le \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 p(x)\,dx + \delta_0\|E_0\|_{q_0} + \delta_1\|E_1\|_{q_1} + \varepsilon\int_a^b P_{ij}(x)p(x)\,dx, \quad (7.7)$$

где $E_0 = (E_{10},\dots,E_{n0})$, $E_1 = (E_{11},\dots,E_{n1})$,

$$E_{ij} = \int_a^b P_{ij}(x)p(x)\,dx.$$

Положим

$$\alpha_{ml} = \begin{cases} \delta_l \dfrac{|E_{ml}|^{q_l-1}}{\|E_{ml}\|_{q_l}^{q_l-1}} \operatorname{sign} E_{ml} & \text{при } 1 < p_l < \infty, \\ \delta_l \operatorname{sign} E_{ml} & \text{при } p_l = \infty, \end{cases}$$

при $p_l = 1$ положим

$$\alpha_{ml} = \begin{cases} 0, & \text{если } |E_{ml}| \neq \max\limits_{1\le s\le n} |E_{sl}|, \\ \delta_l \operatorname{sign} E_{ml}, & \text{если } |E_{ml}| = \max\limits_{1\le s\le n} |E_{sl}|. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{M}{(2n)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 + \sum_{m=1}^{n} [\alpha_{m0} P_{m0}(x) + \alpha_{m1} P_{m1}(x)] + \varepsilon P_{ij}(x).$$

В силу определения величин α_{m0} и α_{m1} функция $f(x)$ принадлежит классу $\Omega_{ij}(\varepsilon)$. Имеем

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 p(x)\,dx + \delta_0 \|E_0\|_{q_0} + \delta_1 \|E_1\|_{q_1} + \varepsilon \int_a^b P_{ij}(x)p(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (7.7) вытекает, что для функций $\varphi_{ij}(\varepsilon, \delta_0, \delta_1)$ справедливы равенства

$$\varphi_{ij}(\varepsilon, \delta_0, \delta_1) = \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 p(x)\,dx + \delta_0 \|E_0\|_{q_0} + \delta_1 \|E_1\|_{q_1} + \varepsilon \int_a^b P_{ij}(x)p(x)\,dx.$$

Пользуясь теоремой 2.2, получаем, что квадратурная формула

$$\begin{aligned} &S_0(\widetilde{f}(x_1), \widetilde{f}'(x_1), \dots, \widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}'(x_n)) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_{i0}(0, \delta_0, \delta_1)}{\partial \varepsilon} \widetilde{f}(x_i) + \frac{\partial \varphi_{i1}(0, \delta_0, \delta_1)}{\partial \varepsilon} \widetilde{f}'(x_i) \right] \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_a^b P_{i0}(x)p(x)\,dx\, \widetilde{f}(x_i) + \int_a^b P_{i1}(x)p(x)\,dx\, \widetilde{f}'(x_i) \right] \end{aligned}$$

является единственным линейным наилучшим методом интегрирования. Вследствие равенств

$$P_{i0}(x) = \frac{\omega_i^2(x)}{\omega_i^2(x_i)} \left[1 - 2\frac{\omega_i'(x_i)}{\omega_i(x_i)}(x - x_i) \right], \quad P_{i1}(x) = \frac{\omega_i^2(x)(x - x_i)}{\omega_i^2(x_i)}$$

(см. [**5**]) имеем

$$\int_a^b P_{i0}(x)p(x)\,dx = C_i - \frac{2\omega_i'(x_i)}{\omega_i(x_i)} D_i, \quad \int_a^b P_{i1}(x)p(x)\,dx = D_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где C_i и D_i определены равенствами (7.6). Из теоремы 2.1 будем иметь

$$r(\delta_0,\delta_1,x_1,\ldots,x_n)=\frac{M}{(2n)!}\int_a^b\prod_{i=1}^n(x-x_i)^2p(x)\,dx+\delta_0\|E_0\|_{q_0}+\delta_1\|E_1\|_{q_1}.$$

Теорема доказана. $\square$

Назовем наилучший метод интегрирования, использующий значения $f(x_1^0),\ldots,f(x_n^0)$, заданные с погрешностью δ в некоторой норме, оптимальным, если выполнено равенство

$$r(\delta,x_1^0,\ldots,x_n^0)=\inf_{x_1,\ldots,x_n\in[a,b]}r(\delta,x_1,\ldots,x_n).$$

Точки $x_1^0,\ldots,x_n^0$ в этом случае будем называть оптимальными узлами.

Следствие 7.2. *Квадратурная формула*

$$S_0(\widetilde{f}(x_1^0),\ldots,\widetilde{f}(x_n^0))=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\omega_i'(x_i^0)}\int_a^b\omega_i^2(x)p(x)\,dx\widetilde{f}(x_i^0),$$

где $x_1^0,\ldots,x_n^0$ — узлы квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[a,b]$ при весовой функции $p(x)$, а $\omega_i(x)=\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n(x-x_j^0)$, является единственным оптимальным методом интегрирования на классе $W^{(2n)}(M;a,b)$ среди методов интегрирования, использующих значения $f(x_1),\ldots,f(x_n)$, заданные с погрешностью δ в норме $\|\cdot\|_\infty$. Для погрешности оптимального метода справедливо равенство

$$r(\delta,x_1^0,\ldots,x_n^0)=\frac{M}{(2n)!}\int_a^b\prod_{i=1}^n(x-x_i^0)^2p(x)\,dx+\delta\int_a^b p(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим наилучший метод интегрирования, использующий значения $f(x_1),f'(x_1),\ldots,f(x_n),f'(x_n)$, где величины $f'(x_1),\ldots,f'(x_n)$ известны точно, а $f(x_1),\ldots,f(x_n)$ заданы с погрешностью δ в норме $\|\cdot\|_\infty$. Из теоремы 7.2 следует, что для погрешности этого наилучшего метода справедливо равенство

$$\begin{aligned}r(\delta,0,x_1,x_1\ldots,x_n,x_n)&=\frac{M}{(2n)!}\int_a^b\prod_{i=1}^n(x-x_i)^2p(x)\,dx\\&+\delta\sum_{i=1}^n\left|\int_a^b\frac{\omega_i^2(x)}{\omega_i^2(x_i)}\left[1-2\frac{\omega_i'(x_i)}{\omega_i(x_i)}(x-x_i)\right]p(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

Интерполяционная формула Эрмита (7.1) точна на многочленах степени не выше $nk-1$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n P_{i0}(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\omega_i^2(x)}{\omega_i^2(x_i)}\left[1-2\frac{\omega_i'(x_i)}{\omega_i(x_i)}(x-x_i)\right]=1,$$

таким образом,

$$\begin{aligned} r(\delta, x_1, \dots, x_n) &\ge r(\delta, 0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) \\ &\ge \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2 p(x)\, dx + \delta \int_a^b p(x)\, dx. \end{aligned}$$

В силу свойств узлов квадратуры Гаусса для веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство

$$\int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2 p(x)\, dx \ge \int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i^0)^2 p(x)\, dx.$$

Отсюда

$$r(\delta, x_1, \dots, x_n) \ge \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i^0)^2 p(x)\, dx + \delta \int_a^b p(x)\, dx.$$

Вследствие равенств

$$\int_a^b (x - x_i^0) \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^n (x - x_j^0)^2 p(x)\, dx = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеем

$$\begin{aligned} r(\delta, x_1^0, \dots, x_n^0) &= r(\delta, 0, x_1^0, x_1^0, \dots, x_n^0, x_n^0) \\ &= \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i^0)^2 p(x)\, dx + \delta \int_a^b p(x)\, dx. \end{aligned}$$

Единственность линейного оптимального метода интегрирования следует из единственности линейного наилучшего метода интегрирования, использующего приближенные значения $\widetilde{f}(x_1^0), \widetilde{f'}(x_1^0), \dots, \widetilde{f}(x_n^0), \widetilde{f'}(x_n^0)$. □

Следствие 7.2 фактически утверждает, что на классе $W^{(2n)}(M; a, b)$ оптимальным методом является квадратурная формула Гаусса, в которой вместо точных значений функций используются их приближенные значения.

§8. Наилучший метод приближения на классе $A_d^0(G)$

Пусть G — односвязная и симметричная относительно вещественной оси область комплексной плоскости, не являющаяся всей расширенной плоскостью или расширенной плоскостью с одной выколотой точкой. Положим $G_R = G \cap \mathbb{R}$. Тогда, если $d(z)$ — аналитическая в G функция, вещественная и положительная на множестве G_R, то через $A_d^0(G)$ (см. § 2) обозначается класс всех функций из $A_d(G)$, вещественных на множестве G_R.

Рассмотрим задачу приближения величины $f(x)$, $f \in A_d^0(G)$, $x \in G_R$, по значениям $f(x_1), \dots, f(x_n)$, $x_i \ne x_j$, $i \ne j$, $x_i \in G_R$, заданным с погрешностью. Будем считать, что известны значения $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i) + \rho_i(f)$, $i = 1, \dots, n$, и при всех $f \in A_d^0(G)$ выполнено неравенство $\max\limits_{1 \le i \le n} |\rho_i(f)| \le \delta$.

Для построения наилучшего метода приближения на классе $A_d^0(G)$ величины $f(x)$ по значениям $f(x_1), \dots, f(x_n)$, заданным с погрешностью δ, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 8.1. *Пусть $\delta_1, \dots, \delta_n$ таковы, что существуют хотя бы две функции из класса $A_d^0(G)$, удовлетворяющие условиям*

$$f(x_i) = \delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.1}$$

Тогда имеет место равенство

$$s(x, \delta_1, \dots, \delta_n) \equiv \sup_{\substack{f \in A_d^0(G) \\ f(x_i)=\delta_i,\ i=1,\dots,n}} f(x) = \frac{p_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)}{q_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)}, \tag{8.2}$$

где $p_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$ и $q_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$ находится из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} p_{\nu-1}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = W_\nu(x) p_\nu(x, \delta_1, \dots, \delta_n) + \delta_\nu^{(\nu-1)} q_\nu(x, \delta_1, \dots, \delta_n), \\ q_{\nu-1}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = q_\nu(x, \delta_1, \dots, \delta_n) + \delta_\nu^{(\nu-1)} W_\nu(x) p_\nu(x, \delta_1, \dots, \delta_n), \\ \nu = 1, \dots, n, \\ p_n(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = \operatorname{sign} \prod_{\nu=1}^{n} W_\nu(x), \quad q_n(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = 1. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Здесь $W_\nu(x) = \dfrac{W(x) - W(x_\nu)}{1 - W(x_\nu) W(x)}$, $W(x)$ — какое-либо конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, а $\delta_k^{(\nu)}$ определяются равенствами

$$\begin{gathered} \delta_k^{(\nu)} = \frac{1}{W_k(x_\nu)} \frac{\delta_k^{(\nu-1)} - \delta_\nu^{(\nu-1)}}{1 - \delta_\nu^{(\nu-1)} \delta_k^{(\nu-1)}}, \quad k = \nu, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n, \\ \delta_k^{(0)} = \delta_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{8.4}$$

Доказательство. Р. Неванлинной были исследованы условия существования ограниченных аналитических функций, принимающих заданные значения в заданных точках области и получен общий вид таких функций. В случае, когда функция $f(z)$ из класса $A_1^0(G)$, удовлетворяющая условиям (8.1), не единственна, общий вид таких функций задается формулами

$$g_{\nu-1}(z) = \frac{W_\nu(z) g_\nu(z) + \delta_\nu^{(\nu-1)}}{1 + \delta_\nu^{(\nu-1)} W_\nu(z) g_\nu(z)}, \quad \nu = 1, \dots, n, \tag{8.5}$$

где $g_0(z) \equiv f(z)$, $g_n(z)$ является произвольной функцией из класса $A_1^0(G)$, а $\delta_\nu^{(\nu-1)}$ определяются равенствами (8.4) (см. [**21**]). Из равенств (8.5) вытекает, что функции с требуемыми свойствами можно представить в виде

$$f(z) = \frac{a_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)q_n(z) + b_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{c_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) + d_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)q_n(z)}, \tag{8.6}$$

где $a_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $b_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $c_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ и $d_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
a_{\nu-1}(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) &= W_\nu(z)a_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) + \delta_\nu^{(\nu-1)}d_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n),\\
b_{\nu-1}(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) &= W_\nu(z)b_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) + \delta_\nu^{(\nu-1)}c_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n),\\
c_{\nu-1}(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) &= c_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) + \delta_\nu^{(\nu-1)}W_\nu(z)b_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n),\\
d_{\nu-1}(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) &= d_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) + \delta_\nu^{(\nu-1)}W_\nu(z)a_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n),\\
&\qquad \nu = 1,\ldots,n,\\
a_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) \equiv c_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) &\equiv 1, \quad b_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)\\
&\equiv d_\nu(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

В силу равенства (8.6) и того, что функции $a_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $b_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $c_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ и $d_0(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ — вещественны при $z \in G_{\mathbb{R}}$, имеем

$$s(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) = \sup_{y\in[-1,1]} \frac{a_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)y + b_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{c_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) + d_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)y}.$$

Рассмотрим функцию

$$\alpha(y) = \frac{a_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)y + b_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{c_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) + d_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)y}.$$

Для ее производной будем иметь равенство

$$\begin{aligned}
&\alpha'(y)\\
&= \frac{a_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)c_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) - b_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)d_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{[c_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) + d_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)y]^2}.
\end{aligned}$$

Из соотношений (8.7) следуют равенства

$$\begin{aligned}
&a_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)c_{\nu-1}(z,\delta_1,\ldots,\delta_n)\\
&\quad - b_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)d_{\nu-1}(z,\delta_1,\ldots,\delta_n) = W_\nu(x)\left[1 - (\delta_\nu^{(\nu-1)})^2\right]\\
&\qquad \times [a_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)c_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)\\
&\qquad\qquad - b_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)d_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\alpha'(y) = \prod_{\nu=1}^{n} W_\nu(x) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left[1 - (\delta_\nu^{(\nu-1)})^2\right]}{\left[c_0(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) + d_0(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) y\right]^2}.$$

Отсюда

$$s(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) = \frac{a_0(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) \operatorname{sign} \prod\limits_{\nu=1}^{n} W_\nu(x) + b_0(x, \delta_1, \ldots, \delta_n)}{c_0(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) + d_0(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) \operatorname{sign} \prod\limits_{\nu=1}^{n} W_\nu(x)}.$$

Положив

$$p_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) = a_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) \operatorname{sign} \prod_{\nu=1}^{n} W_\nu(x) + b_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n),$$

$$q_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) = c_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) + d_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n) \operatorname{sign} \prod_{\nu=1}^{n} W_\nu(x),$$
$$\nu = 0, \ldots, n,$$

и заметив, что вследствие соотношений (8.7) для $p_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n)$, $q_\nu(x, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ будут выполнены равенства (8.3), получаем равенство (8.2). □

Лемма 8.2. *Пусть $\delta_1^0, \ldots, \delta_n^0$ таковы, что матрица*

$$\left\{A(\delta_1^0, \ldots, \delta_n^0)\right\}_{ij} = \frac{1 - \delta_i^0 \delta_j^0}{1 - W(x_i) W(x_j)},$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, положительно определена. Тогда для функции $s(x, \delta_1, \ldots, \delta_n)$, определенной в лемме 8.1, имеет место равенство

$$\frac{\partial s(x, \delta_1^0, \ldots, \delta_n^0)}{\partial \delta_j} = \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)} \left[1 - W_j^2(x)\right] \frac{q_{j0}^2(x_j, \delta_1^0, \ldots, \delta_n^0)}{q_{j0}^2(x, \delta_1^0, \ldots, \delta_n^0)},$$

где $\omega_j(x) = \prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{n} W_\nu(x)$, $W_\nu(x) = \dfrac{W(x) - W(x_\nu)}{1 - W(x_\nu)W(x)}$, *а* $q_{j0}(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$ *определяются из рекуррентных соотношений*

$$p_{j,\nu-1}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = W_{j\nu}(x) p_{j,\nu}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) + \delta_{j\nu}^{(\nu-1)} q_{j\nu}(x, \delta_1, \dots, \delta_n),$$

$$q_{j,\nu-1}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = q_{j\nu}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) + \delta_{j\nu}^{(\nu-1)} W_{j\nu}(x) p_{j\nu}(x, \delta_1, \dots, \delta_n), \quad \nu = 1, \dots, n,$$

$$p_{jn}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = \operatorname{sign} \prod_{\nu=1}^{n} W_\nu(x), \; q_{jn}(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = 1, \; j = 1, \dots, n;$$

здесь

$$W_{j\nu}(x) = \begin{cases} W_\nu(x), & \nu \neq j, n, \\ W_n(x), & \nu = j, \\ W_j(x), & \nu = n, \end{cases}$$

а $\delta_{jk}^{(\nu)}$ *определяются равенствами*

$$\delta_{jk}^{(\nu)} = \frac{1}{W_{jk}(x_{j\nu})} \frac{\delta_{jk}^{(\nu-1)} - \delta_{j\nu}^{(\nu-1)}}{1 - \delta_{j\nu}^{(\nu-1)} \delta_{jk}^{(\nu-1)}}, \quad k = \nu + 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

$$\delta_{jk}^{(0)} = \begin{cases} \delta_k, & k \neq j, n, \\ \delta_n, & k = j, \\ \delta_j, & k = n, \end{cases} \qquad x_{jk} = \begin{cases} x_k, & k \neq j, n, \\ x_n, & k = j, \\ x_j, & k = n. \end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что функция $s(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$ будет определена в достаточно малой окрестности точки $(\delta_1^0, \dots, \delta_n^0)$. Положительная определенность матрицы $A(\delta_1^0, \dots, \delta_n^0)$ является необходимым и достаточным условием существования хотя бы двух функций из класса $A_1^0(G)$, удовлетворяющих условиям $f(x_i) = \delta_i^0$, $i = 1, \dots, n$ (см. [**11**, стр. 273]). В силу существования достаточно малой окрестности $(\delta_1^0, \dots, \delta_n^0)$ такой, что матрица $A(\delta_1, \dots, \delta_n)$ в ней положительно определена, функция $s(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$ будет определена в этой окрестности и для нее будет справедливо равенство, доказанное в лемме 8.1

$$s(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = \frac{p_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)}{q_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)}.$$

Величины $\delta_k^{(\nu)}$, через которые определяются $p_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$ и $q_0(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$, зависят лишь от $\delta_1, \dots, \delta_k$, $k = \nu + 1, \dots, n$. Следовательно, $\delta_\nu^{(\nu-1)}$ при $\nu < n$ не зависят от δ_n, а $\delta_n^{(n-1)}$ дифференцируемым образом зависит от δ_n (последнее легко доказать, доказав дифференцируемость $\delta_n^{(\nu)}$ в предположении дифференцируемости

$\delta_n^{(\nu-1)}$ по δ_n). Таким образом, из (8.3) получаем

$$\frac{\partial p_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} = W_\nu(x)\frac{\partial p_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} + \delta_\nu^{(\nu-1)}\frac{\partial q_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n},$$

$$\frac{\partial q_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} = \frac{\partial q_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} + \delta_\nu^{(\nu-1)}W_\nu(x)\frac{\partial p_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n},$$

$$\frac{\partial p_{n-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} = \frac{\partial \delta_n^{(n-1)}}{\partial \delta_n}, \quad \frac{\partial q_{n-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} = W_n(x)\frac{\partial \delta_n^{(n-1)}}{\partial \delta_n}\operatorname{sign}\prod_{\nu=1}^{n} W_\nu(x).$$

Из последних соотношений имеем

$$\frac{\partial p_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n}q_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) - \frac{\partial q_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n}p_{\nu-1}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)$$
$$= W_\nu(x)\left[1-(\delta_\nu^{(\nu-1)})^2\right]\left[\frac{\partial p_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n}q_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n) - \frac{\partial q_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n}p_\nu(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)\right], \quad \nu = 1,\ldots,n-1.$$

Отсюда

$$\frac{\partial s(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n} = \frac{\frac{\partial p_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n}q_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{q_0^2(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)} - \frac{\frac{\partial q_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial \delta_n}p_0(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{q_0^2(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}$$
$$= \omega_n(x)\left[1-W_n^2(x)\right]\frac{\partial \delta_n^{(n-1)}}{\partial \delta_n}\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left[1-(\delta_\nu^{(\nu-1)})^2\right]}{q_0^2(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}$$
$$= \omega_n(x)\left[1-W_n^2(x)\right]\frac{\alpha(\delta_1,\ldots,\delta_n)}{q_0^2(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)}.$$

Вследствие равенства $s(x_n,\delta_1,\ldots,\delta_n) \equiv \delta_n$ находим

$$\alpha(\delta_1,\ldots,\delta_n) = \frac{q_0^2(x_n,\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\omega_n(x_n)}.$$

Окончательно имеем равенство

$$\frac{\partial s(x,\delta_1^0,\ldots,\delta_n^0)}{\partial\delta_n}=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_n)}\left[1-W_n^2(x)\right]\frac{q_0^2(x_n,\delta_1^0,\ldots,\delta_n^0)}{q_0^2(x,\delta_1^0,\ldots,\delta_n^0)}.$$

Поменяв местами δ_j, x_j и δ_n, x_n и построив соответствующие функции $\delta_{jk}^{(\nu)}$, $p_{j\nu}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)$ и $q_{j\nu}(x,\delta_1,\ldots,\delta_n)$, получим

$$\frac{\partial s(x,\delta_1^0,\ldots,\delta_n^0)}{\partial\delta_j}=\frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}\left[1-W_j^2(x)\right]\frac{q_{j0}^2(x_j,\delta_1^0,\ldots,\delta_n^0)}{q_{j0}^2(x,\delta_1^0,\ldots,\delta_n^0)}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 8.1. *Пусть $\delta_0>0$ таково, что матрица*

$$\{A(\delta_1,\ldots,\delta_n)\}_{ij}=\frac{1-\dfrac{\delta_i\delta_j}{d(x_i)d(x_j)}}{1-W(x_i)W(x_j)},$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, положительно определена в n- мерном кубе $|\delta_i|\le\delta_0$, $i=1,\ldots,n$. Тогда для всех $0\le\delta\le\delta_0$ единственным линейным наилучшим методом приближения на классе $A_d^0(G)$ величины $f(x)$ по значениям $f(x_1),\ldots,f(x_n)$, заданным с погрешностью δ, является метод

$$S_0(x,\delta,\widetilde{f}(x_1),\ldots,\widetilde{f}(x_n))=\sum_{j=1}^{n}\frac{d(x)\omega_j(x)}{d(x_j)\omega_j(x_j)}\left[1-W_j^2(x)\right]\frac{q_{j,0}^2(x_j,\delta)}{q_{j,0}^2(x,\delta)}\widetilde{f}(x_j),\quad(8.8)$$

и для его погрешности имеет место равенство

$$r(x,\delta,x_1,\ldots,x_n)=\frac{p_{1,0}(x,\delta)}{q_{1,0}(x,\delta)}=\ldots=\frac{p_{n,0}(x,\delta)}{q_{n,0}(x,\delta)}.\quad(8.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\omega_j(x)=\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne j}}^{n}W_\nu(x),\quad W_\nu(x)=\frac{W(x)-W(x_\nu)}{1-W(x_\nu)W(x)},$$

величины $p_{j,0}(x,\delta)$ и $q_{j,0}(x,\delta)$ находятся из рекуррентных соотношений:

$$p_{j,\nu-1}(x,\delta)=W_{j,\nu}(x)p_{j,\nu}(x,\delta)+\delta_{j\nu}^{(\nu-1)}q_{j,\nu}(x,\delta),$$

$$q_{j,\nu-1}(x,\delta)=q_{j,\nu}(x,\delta)+\delta_{j\nu}^{(\nu-1)}W_{j,\nu}(x)p_{j,\nu}(x,\delta),\quad\nu=1,\ldots,n,$$

$$p_{j,n}(x,\delta)=\operatorname{sign}\prod_{\nu=1}^{n}W_\nu(x),\quad q_{j,n}(x,\delta)=1,$$

где

$$\delta_{jk}^{(\nu)} = \frac{1}{W_{jk}(x_{j\nu})} \frac{\delta_{jk}^{(\nu-1)} - \delta_{j\nu}^{(\nu-1)}}{1 - \delta_{j\nu}^{(\nu-1)} \delta_{jk}^{(\nu-1)}}, \quad k = \nu+1, \ldots, n, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

$$\delta_{jk}^{(0)} = \begin{cases} \dfrac{\delta}{d(x_k)} \operatorname{sign} \dfrac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, & k \neq j, n, \\ \dfrac{\delta}{d(x_n)} \operatorname{sign} \dfrac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_n)}, & k = j, \\ \dfrac{\delta}{d(x_j)} \operatorname{sign} \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}, & k = n, \end{cases}$$

$$W_{j\nu}(x) = \begin{cases} W_\nu(x), & \nu \neq j, n, \\ W_n(x), & \nu = j, \\ W_j(x), & \nu = n, \end{cases} \qquad x_{jk} = \begin{cases} x_k, & k \neq j, n, \\ x_n, & k = j, \\ x_j, & k = n. \end{cases}$$

Доказательство. Для построения линейного наилучшего метода и доказательства его единственности рассмотрим функции

$$\varphi_j(x, \varepsilon, \delta) = \sup_{\substack{f \in A_d^0(G) \\ |f(x_i) - \varepsilon\delta_{ij}| \leq \delta, \ i=1,\ldots,n}} f(x).$$

Из положительной определенности матрицы $A(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ в кубе $|\delta_i| \leq \delta_0$, $i = 1, \ldots, n$, следует, что для любой точки из этого куба существует такая ее окрестность, в которой определена функция

$$s\left(x, \frac{\delta_1}{d(x_1)}, \ldots, \frac{\delta_n}{d(x_n)}\right) = \sup_{\substack{f \in A_d^0(G) \\ f(x_i) = \frac{\delta_i}{d(x_i)}, \ i=1,\ldots,n}} f(x).$$

Следовательно, для достаточно малых $|\varepsilon|$ справедливо равенство

$$\varphi_j(x, \varepsilon, \delta) = d(x) \sup_{\substack{|\delta_i| \leq \delta, \ i \neq j \\ -\delta+\varepsilon \leq \delta_j \leq \delta+\varepsilon}} s\left(x, \frac{\delta_1}{d(x_1)}, \ldots, \frac{\delta_n}{d(x_n)}\right).$$

Из леммы 8.2 имеем

$$\frac{\partial s\left(x, \dfrac{\delta_1}{d(x_1)}, \ldots, \dfrac{\delta_n}{d(x_n)}\right)}{\partial \delta_j} \operatorname{sign} \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)} \geq 0.$$

Отсюда

$$\sup_{\substack{|\delta_i|\le\delta,\ i\ne j\\ -\delta+\varepsilon\le\delta_j\le\delta+\varepsilon}} s\left(x, \frac{\delta_1}{d(x_1)}, \dots, \frac{\delta_n}{d(x_n)}\right)$$

$$= s\left(x, \frac{\delta}{d(x_1)} \operatorname{sign} \frac{\omega_1(x)}{\omega_1(x_1)}, \dots, \frac{\varepsilon + \delta \operatorname{sign} \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}}{d(x_j)}, \dots, \frac{\delta_n}{d(x_n)} \operatorname{sign} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_n)}\right).$$

Таким образом, функции $\varphi_j(x, \varepsilon, \delta)$ дифференцируемы в нуле по ε и справедливо равенство

$$\frac{\partial \varphi_j(x, 0, \delta)}{\partial \varepsilon} = \frac{d(x)}{d(x_j)} \frac{\partial s\left(x, \dfrac{\delta}{d(x_1)} \operatorname{sign} \dfrac{\omega_1(x)}{\omega_1(x_1)}, \dots, \dfrac{\delta}{d(x_n)} \operatorname{sign} \dfrac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_n)}\right)}{\partial \delta_j}.$$

Применяя теорему 2.2 и лемму 8.2, обозначив через

$$p_{j\nu}(x, \delta) = p_{j\nu}\left(x, \frac{\delta}{d(x_1)} \operatorname{sign} \frac{\omega_1(x)}{\omega_1(x_1)}, \dots, \frac{\delta}{d(x_n)} \operatorname{sign} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_n)}\right)$$

и через

$$q_{j\nu}(x, \delta) = q_{j\nu}\left(x, \frac{\delta}{d(x_1)} \operatorname{sign} \frac{\omega_1(x)}{\omega_1(x_1)}, \dots, \frac{\delta}{d(x_n)} \operatorname{sign} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_n)}\right),$$

получим, что метод получим, что метод (8.8) является единственным линейным наилучшим методом приближения величины $f(x)$ на классе $A_d^0(G)$. Равенство (8.9) вытекает из теоремы 2.1 и соотношений

$$\sup_{\substack{f\in A_d^0(G)\\ |f(x_i)|\le\delta,\ i=1,\dots,n}} |f(x)| = \sup_{\substack{f\in A_d^0(G)\\ |f(x_i)|\le\delta,\ i=1,\dots,n}} f(x) = \varphi_1(x, 0, \delta) = \dots = \varphi_n(x, 0, \delta).$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1 БАХВАЛОВ Н.С., Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 5 (1967), IOII–1020.

2 БАХВАЛОВ Н.С., Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 11, № 4 (1971), 1014–1018.

3 БАХВАЛОВ Н.С., Численные методы, М., 1973.

4 БЕЙТМЕН Г., ЭРДЕЙН А., Высшие трансцендентные функции, М., 1934.

5 БЕРЕЗИН И.С. и ЖИДКОВ Н.П., Методы вычислений, т. 1, М., 1966.

6 БОЯНОВ Б.Д., Оптимальная скорость интегрирования и ε-энтропия одного класса аналитических функций, Матем. заметки, 14, № 1 (1973), 3–10.

7 БОЯНОВ Б.Д., Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций. Матем. заметки, I7, № 4 (1975), 511–524.

8 ГОЛУЗИН Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.

9 ГОНЧАР А.А., О задачах Е.И. Золотарева, связанных с рациональными функциями, Матем. сб. 78(120), № 4 (1969), 640–654.

10 ЗОЛОТАРЕВ Е.И., Собрание сочинений,т. 2, М., 1932.

11 КРЕЙН М.Г., НУДЕЛЬМАН А.А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973.

12 ЛАВРЕНТЬЕВ М.А. и ШАБАТ Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, М., 1973.

13 ЛАНДКОФ Н.С., Основы современной теории потенциала, М., 1966.

14 МАРЧУК А.Г., ОСИПЕНКО К.Ю., Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, Матем. заметки, I7, № 3 (1975), 359–368.

15 ОСИПЕНКО К.Ю., Оптимальная интерполяция аналитических функций, Матем. заметки, 12, № 4 (1972), 465–476.

16 ОСИПЕНКО К.Ю., Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек, Матем. заметки, 19, № 1 (1976) 29–40.

17 ПОЛИА Г. и СЕГЕ Г., Изоперимитрические неравенства в математической физике, М., 1962.

18 ПРИВАЛОВ И.И., Граничные свойства аналитических функций, М.-Л., 1950.

19 СМОЛЯК С.А., Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Кандид. дисс., МГУ, 1965.

20 УИТТЕКЕР Е.Т., ВАТСОН Г.И., Курс современного анализа, т. 2, М., 1934.

21 УОЛШ Дж.Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.

22 ХАВИНСОН С.Я., Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, Успехи матем. наук, 18, вып. 2 (110) (1963), 25–98.

23 FATOU P., Series trigonometriques et series de Taylor, Acta Math., 30 (1906), 335–400.
24 SZEGÖ G., Über die Randwerte einer analyrtishen Function, Math. Ann., 84 (1921), 232–244.
25 WACHSPRESS E.L., Extended application of alternating direction implicit iteration model problem theory, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 11, № 4 (1963), 994–1016.