

УДК 517.53

К. Ю. Осипенко

(Россия, Москва, Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского)

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА НА КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через \tilde{A}_H множество 2π -периодических функций, аналитически продолжаемых в полосу $|\operatorname{Im} z| < H$ и удовлетворяющих в ней условию $|f(z)| \leq 1$. Рассматривается задача построения оптимальной квадратурной формулы на классе \tilde{A}_H , использующей приближенные значения функций.

Положим

$$e_{nq}(\tilde{A}_H, \delta) := \inf_{\substack{t_j \in [0, 2\pi) \\ a_j \in \mathbb{C}}} \sup_{f \in \tilde{A}_H} \sup_{\substack{y \in I_q^n \\ \|If - y\|_q \leq \delta}} \left| \int_0^{2\pi} f(t) dt - \sum_{j=1}^n a_j y_j \right|,$$

где $If = (f(t_1), \dots, f(t_n))$. Квадратурную формулу, на которой достигается нижняя грань, будем называть оптимальной, а соответствующие ей узлы — оптимальными узлами.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $0 \leq \delta < n^{1/q}$. Тогда

1) квадратурная формула

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} f(t) dt \approx \frac{2\pi}{n} (1 - \Delta^2)^{-1} (1 - \Lambda^{-1} J_4(\lambda, \Delta)) \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}\left(j \frac{2\pi}{n}\right),$$

в которой $\Delta = \delta n^{-1/q}$,

$$\lambda := 4e^{-Hn} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2Hnm(m+1)} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2Hnm^2} \right)^{-2},$$

$$J_r(\lambda, \Delta) := \int_0^1 \left(\frac{\lambda t^2 + \Delta}{1 + \Delta \lambda t^2} \right)^{r/2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}},$$

является оптимальной;

2) имеет место равенство

$$e_{nq}(\tilde{A}_H, \delta) = 2\pi \Lambda^{-1} J_2(\lambda, \delta n^{-1/q}) = 2\pi \delta n^{-1/q} + 4\pi(1 - \delta^2 n^{-2/q}) e^{-Hn} + 4\pi \delta (4 - 3\delta^2 n^{-2/q}) n^{-1/q} e^{-2Hn} + O(e^{-3Hn});$$

3) узлы $t_j^* = (j-1) \frac{2\pi}{n}$, $j = 1, \dots, n$, — единственные с точностью до сдвига оптимальные узлы.