Степенные ряды

В статье *Ряды* рассматривались числовые ряды

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots \ .$$

Можно рассматривать ряды, у которых слагаемые являются функциями

$$a_0(x) + a_1(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots \ .$$

Такие ряды называются *функциональными*. При каждом фиксированном x из области определения функций $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), \ldots$ функциональный ряд становится числовым и может либо сходиться, либо расходиться. Множество тех x, при которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Функциональный ряд, в котором $a_n(x) = c_n x^n$, где c_n — фиксированные числа, называется *степенны́м* рядом. Простейшим примером степенного ряда является сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \ . \tag{1}$$

Оказывается, что область сходимости степенного ряда устроена весьма простым образом — это всегда некоторый интервал $(-R, R)$, быть может, включающий один или оба из его концов. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

можно пользоваться следующими формулами

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \\ R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \end{aligned}$$

(если соответствующие пределы существуют).

Степенные ряды играют важную роль в различных разделах математики и, в частности, при приближенном вычислении функций. Если некоторую функцию $f(x)$ удается представить в виде степенного ряда (разложить в степенной ряд)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

то для приближенного вычисления $f(x)$ можно воспользоваться лишь конечным числом слагаемых

$$f(x) \approx c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

Иными словами, функцию в этом случае можно заменить на многочлен подходящей степени, преимущество которого — простота вычисления.

При каких же условиях можно разложить функцию в степенной ряд? Сравнительно простым достаточным условием для такого разложения является ограниченность всех производных в окрестности нуля, т. е. существование такой постоянной M, что для всех x из некоторой окрестности нуля и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

В этом случае функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

называемый *рядом Тейлора* (или *рядом Маклорена*) этой функции.

Таким образом, при выполнении условия ограниченности всех производных в окрестности нуля функция восстанавливается в этой окрестности по значениям всех своих производных в нуле (сама эта окрестность, где ограничены производные, может быть и весьма большой, например, совпадать со всей числовой осью).

Для некоторых элементарных функций разложения в ряд Тейлора легко находятся. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = e^x$. Поскольку любая производная этой функции снова e^x, то $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Следовательно (условие ограниченности в любой окрестности нуля легко проверяется), ряд Тейлора для функции e^x имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \ ,$$

причем он сходится для всех x. Отсюда, положив $x = 1$, получаем

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots \ .$$

Просуммировав шесть первых слагаемых этого ряда, получим приближенное значение числа e с первыми тремя верными цифрами: $2,71666\ldots$.

Вычисляя значения производных функций $\sin x$ и $\cos x$ в нуле, получаем их разложения в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \ , \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ .\end{aligned}$$

При построении математических моделей физических процессов часто для упрощения таких моделей при малых x, пользуясь этими разложениями, полагают

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Если производная или интеграл от конечной суммы функций есть сумма производных или интегралов соответствующих слагаемых, то для "бесконечных" сумм (функциональных рядов) это уже не всегда так. Однако степенные ряды в этом отншении устроены хорошо — внутри области сходимости их можно почленно дифференцировать и интегрировать. Например, если почленно продифференцировать ряд (1), то получится ряд, сумма которого будет равна производной от суммы исходного ряда

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \ .$$

Рассмотрим снова ряд (1), в котором переменную x заменим на $-t$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \ .$$

Если проинтегрировать этот ряд в промежутке от 0 до x ($|x| < 1$), получится степенной ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \ .$$

А сделав то же самое с рядом

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots \ ,$$

получим разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \ .$$

Не только число e, но и число π можно приближенно вычислять с помощью рядов. Положив в разложении для $\operatorname{arctg} x$ $x = 1$, получим

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots \ .$$

(На самом деле этот ряд сходится довольно медленно и для хороших приближений надо брать слишком много слагаемых).

Полученные нами разложения в степенные ряды функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ являются в то же время рядами Тейлора для этих функций, так как оказывается, что всякий степенной ряд есть ряд Тейлора для своей суммы.

Рассматривают степенные ряды и более общего вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \ .$$

В этом случае говорят о степенном ряде с центром в точке x_0. Аналогично определяется ряд Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \ .$$

Эти ряды простой заменой переменной $x - x_0 = y$ сводятся к рядам, рассмотренным ранее.