

**ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И
ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО ПРИБЛИЖЕННОЙ
ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ И НЕРАВЕНСТВА
ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ**

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начнем с общей постановки задачи об оптимальном восстановлении. Пусть C — некоторое множество (класс) в векторном пространстве X . Про каждый элемент $x \in C$ мы располагаем информацией $I(x)$, где I — отображение (называемое *информационным*) из C в другое векторное пространство Y . Информация об элементах из C может быть задана неточно и поэтому I , вообще говоря, — многозначное отображение. Пусть, далее, Z — нормированное пространство и $\Lambda: X \rightarrow Z$ — линейный оператор. Задача заключается в том, чтобы восстановить (по возможности наилучшим образом) оператор Λ на классе C в метрике Z по имеющейся информации I . В это вкладывается следующий смысл. Любое отображение $\varphi: Y \rightarrow Z$ будем называть методом восстановления (оператора Λ на классе C по информации I). *Погрешностью* этого метода называется величина

$$e(\Lambda, C, I, \varphi) = \sup_{x \in C, y \in I(x)} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z.$$

Величина

$$(1) \quad E(\Lambda, C, I) = \inf_{\varphi: Y \rightarrow Z} e(\Lambda, C, I, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi: Y \rightarrow Z$, носит название *погрешности оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается эта нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Впервые задача оптимального восстановления была поставлена С. А. Смоляком [1] для случая, когда $Z = \mathbb{R}$, I — линейный оператор и $\dim Y < \infty$. Впоследствии вся эта проблематика интенсивно развивалась в разных направлениях (см. [2]–[5]). Подход к задачам

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00-15-96109 и №02-01-00386) и программы “Университеты России” (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S. CRDF–R.F. Ministry of Education Award VZ-0100-0.

восстановления, основанный на общих принципах теории экстремума, развивался в работах [6]–[8]. Этот подход мы используем и в данной статье.

Перейдем к постановке задач восстановления, рассматриваемых в работе. Пусть S — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R} , S' — соответствующее пространство обобщенных функций, $F: S' \rightarrow S'$ — преобразование Фурье, $1 \leq p \leq \infty$ и $n \in \mathbb{N}$. В качестве пространства X в задаче (1) будем рассматривать пространство

$$X_p^n = \{x \in S' : Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}), x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},$$

а в качестве класса C — множество

$$C_p^n = \{x(\cdot) \in X_p^n : \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1\}.$$

Опишем информационные отображения, которые здесь изучаются. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \sigma \leq \infty$, $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$ и $\delta > 0$. Будем считать, что информация об элементе $x(\cdot) \in C_p^n$ состоит в том, что нам известна функция $y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma)$, такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Таким образом, информационное отображение $I = I_p^{\delta, \sigma}: C_p^n \rightarrow L_p(\Delta_\sigma)$ таково: $I_p^{\delta, \sigma} x(\cdot) = Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma} + \delta BL_p(\Delta_\sigma)$, где $BL_p(\Delta_\sigma)$ — единичный шар в $L_p(\Delta_\sigma)$.

Если $p = \infty$, то мы рассматриваем несколько более общую ситуацию. Пусть $\delta(\cdot)$ — неотрицательная функция из $L_\infty(\Delta_\sigma)$. Будем считать, что информация об элементе $x(\cdot)$ заключается в том, что известна функция $y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma)$ такая, что $|Fx(t) - y(t)| \leq \delta(t)$ для п. в. $t \in \Delta_\sigma$. Если положить

$$B(\delta(\cdot)) = \{y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma) : |y(t)| \leq \delta(t) \text{ п. в.}\},$$

то информационное отображение $I = I_\infty^{\delta(\cdot), \sigma}: C_\infty^n \rightarrow L_\infty(\Delta_\sigma)$ в этом случае имеет вид $I_\infty^{\delta(\cdot), \sigma} x(\cdot) = Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma} + B(\delta(\cdot))$.

Ставится задача об оптимальном восстановлении линейного оператора Λ , $\Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $0 \leq k \leq n - 1$ на классе C_p^n в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по описанным выше информационным отображениям (далее будет показано, что $\Lambda: X_p^n \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ при $2 \leq p \leq \infty$).

Таким образом, в нашем случае задача (1) при $p < \infty$ приобретает вид

$$(2) \quad E(x^{(k)}(\cdot), C_p^n, I_p^{\delta, \sigma}) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_p^n, y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем $\varphi: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Если $p = \infty$, то ее вид таков

$$(3) \quad E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I_\infty^{\delta(\cdot), \sigma}) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_\infty^n, y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma) \\ |Fx(t) - y(t)| \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем $\varphi: L_\infty(\Delta_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

В задаче (2) при $p = 2$ и в задаче (3) мы находим точные значения для погрешности оптимального восстановления и явные выражения для оптимальных методов восстановления. В обоих случаях наблюдается следующее явление: для фиксированной погрешности существует такое конечное $\hat{\sigma} > 0$, что знание преобразования Фурье на интервале большем, чем $(-\hat{\sigma}, \hat{\sigma})$, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Этот вывод представляется нам важным для практических приложений полученных здесь результатов.

В задаче (2) при $p = 2$ и $\sigma = \infty$ информация равносильна (в силу теоремы Планшереля) тому, что известна сама функция с точностью до δ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. В такой постановке задача решена в [9]. Периодические аналоги задачи (2) при $p = 2$ и задачи (3), а также их обобщения на более широкие классы функций изучались в работе [10].

При $2 < p < \infty$ получена оценка снизу величины (2). При этом доказано точное неравенство для k -ой производной функции в L_2 -норме, дающее ее оценку через L_2 -норму n -ой производной и L_p -норму ее преобразования Фурье.

2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-1$, $0 < \sigma \leq \infty$, $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, $\delta(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma)$, $\delta(\cdot) \geq 0$ и

$$\sigma_0 = \sup \left\{ a : 0 < a < \sigma, \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a t^{2n} \delta^2(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Тогда, если $\sigma_0 < \infty$, то

$$(4) \quad E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I_\infty^{\delta(\cdot), \sigma}) = \sqrt{\sigma_0^{-2(n-k)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (t^{2k} - \sigma_0^{-2(n-k)} t^{2n}) \delta^2(t) dt},$$

и

$$(5) \quad \hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (i\tau)^k \left(1 - \left(\frac{\tau}{\sigma_0} \right)^{2(n-k)} \right) y(\tau) e^{i\tau t} d\tau$$

— оптимальный метод.

Если $\sigma_0 = \infty$, то

$$(6) \quad E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I_\infty^{\delta(\cdot), \sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \delta^2(t) dt},$$

и

$$(7) \quad \hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\tau)^k y(\tau) e^{i\tau t} d\tau$$

— оптимальный метод.

Следствие 1. Пусть $\delta(t) \equiv \delta > 0$ и

$$\hat{\sigma} = (\pi(2n+1))^{\frac{1}{2n+1}} \delta^{-\frac{2}{2n+1}}.$$

Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot), C_{\infty}^n, I_{\infty}^{\delta, \sigma}) = \begin{cases} \sqrt{\sigma^{-2(n-k)} + \frac{2\delta^2(n-k)}{\pi(2k+1)(2n+1)} \sigma^{2k+1}}, & \sigma < \hat{\sigma}, \\ \sqrt{\frac{2n+1}{2k+1} \left(\frac{1}{\pi(2n+1)} \right)^{\frac{n-k}{2n+1}} \delta^{\frac{2(n-k)}{2n+1}}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}, \end{cases}$$

и метод (5) при $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$ является оптимальным.

Из этого следствия вытекает, что при фиксированном δ , начиная с $\hat{\sigma}$, дальнейшее увеличение интервала, на котором известно преобразование Фурье функции из C_{∞}^n , заданное с погрешностью δ в равномерной метрике, не ведет к уменьшению погрешности восстановления. Другими словами, если нарушается соотношение

$$(8) \quad \delta^2 \sigma^{2n+1} \leq \pi(2n+1),$$

связывающее исходные данные с величиной интервала, на котором эти данные измеряются, то получаемая информация оказывается уже избыточной.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n-1$, $0 < \sigma \leq \infty$, $\delta > 0$ и

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot), C_2^n, I_2^{\delta, \sigma}) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\frac{n-k}{2\pi n} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \delta^2 + \frac{1}{\sigma^{2n}}}, & \sigma < \hat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{2n}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}, \end{cases}$$

и

$$\hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (i\tau)^k \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\tau}{\sigma_0} \right)^{2n} \right)^{-1} y(\tau) e^{i\tau t} d\tau,$$

где $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$, — оптимальный метод.

Если $k = 0$ и $0 < \sigma < \infty$, то

$$E(x(\cdot), C_2^n, I_2^{\delta, \sigma}) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2n}}}$$

и

$$(9) \quad \hat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 + \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{2n} \right)^{-1} y(\tau) e^{i\tau t} d\tau$$

— оптимальный метод.

Из теоремы 2 следует, что в задаче (2) при $p = 2$ также наблюдается эффект “насыщения”. Здесь аналогом соотношения (8) является неравенство

$$\delta^2 \sigma^{2n} \leq 2\pi \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{n-k}},$$

при нарушении которого имеющаяся информация оказывается избыточной.

Отметим, что метод

$$\tilde{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (i\tau)^k y(\tau) e^{i\tau t} d\tau,$$

сопоставляющий функции $y(\cdot)$ k -ую производную ее обратного преобразования Фурье, при $k = 0$ также оптимален (наряду с методом (9)) в задаче восстановления из теоремы 2. Это легко установить непосредственной оценкой. Однако можно показать, что при $k > 0$ этот, на первый взгляд, естественный метод уже не оптимален и, более того, его погрешность равна ∞ .

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 1$ и $2 \leq p \leq \infty$. Имеет место точное неравенство

$$(10) \quad \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq K(k, n, p) \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k+1/2-1/p}{n+1/2-1/p}},$$

где при $2 < p < \infty$

$$(11) \quad K(k, n, p) = \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}} \left(\frac{\sqrt{k+1/2-1/p} B^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{1/2} (n-k)^{1-1/p}} \right)^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}},$$

$$B = B \left(\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}, 2 \frac{1-1/p}{1-2/p} \right)$$

и $B(\cdot, \cdot)$ — B -функция Эйлера;

(12)

$$K(k, n, \infty) = \sqrt{\frac{2n+1}{2k+1}} \left(\frac{1}{\pi(2n+1)} \right)^{\frac{n-k}{2n+1}}, \quad K(k, n, 2) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{2n}}.$$

При $p = 2$ неравенство (10) (в силу теоремы Планшереля) совпадает с известным неравенством Харди–Литтлвуда–Поля. Неравенства вида (10) с разными метриками, где вместо преобразования Фурье функции стоит сама функция, обычно называют неравенствами для производных колмогоровского типа. Они играют важную роль в различных вопросах анализа и теории приближений. Им посвящена большая литература (см., например, [11, 12]).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Начнем с одного простого утверждения, касающегося оценки снизу погрешности оптимального восстановления.

Лемма 1. Пусть в задаче (1) множество

$$\text{gr } I = \{ (x, y) \in X \times Y : x \in C, y \in I(x) \}$$

центрально-симметрично, а множество

$$I^{-1}(0) = \{ x \in C : 0 \in I(x) \}$$

не пусто. Тогда

$$E(\Lambda, C, I) \geq \sup_{x \in C, x \in I^{-1}(0)} \|\Lambda x\|_Z.$$

Доказательство. Для любого метода φ при всех $x \in C$ таких, что $x \in I^{-1}(0)$, имеем

$$2\|\Lambda x\|_Z \leq \|\Lambda x - \varphi(0)\|_Z + \|\Lambda(-x) - \varphi(0)\|_Z \leq 2e(\Lambda, C, I, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(\Lambda, C, I, \varphi) \geq \sup_{x \in C, x \in I^{-1}(0)} \|\Lambda x\|_Z,$$

откуда сразу же вытекает доказываемая оценка. \square

Доказательства теорем 1 и 2 проводятся по единой схеме. По этой причине мы сначала доказываем один общий результат (содержащий в себе соображения, связанные с подходом, основанным на принципах выпуклой оптимизации), а затем, опираясь на него, получаем упомянутые теоремы. Задача восстановления, относительно которой формулируется данный результат, является некоторой детализацией общей постановки, приведенной в начале статьи.

Пусть T — конечное множество с дискретной мерой или интервал прямой (конечный или бесконечный) с мерой Лебега, $X, Y_t, t \in T$, — векторные пространства с полускалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_X, (\cdot, \cdot)_{Y_t}$ и соответствующими полунормами $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{Y_t}$, Z — нормированное пространство и $\delta(\cdot)$ — неотрицательная измеримая функция на T . Предположим, что Y — некоторое подпространство функций $y(\cdot)$ на T со значениями в $\cup_{t \in T} Y_t$, таких, что $y(t) \in Y_t$ и $t \rightarrow \|y(t)\|_{Y_t}$ — измеримая функция на T . Рассматривается задача оптимального восстановления оператора $\Lambda: X \rightarrow Z$ на классе $BX = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ по информации о линейном операторе $I: X \rightarrow Y$, заданном с погрешностью $\delta(\cdot)$. Точнее говоря, для каждого $x \in BX$ известна функция $y(\cdot) \in Y$ такая, что для п. в. $t \in T$

$$\|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t} \leq \delta(t).$$

Погрешность оптимального восстановления записывается в этом случае в виде

$$(13) \quad E(\Lambda, BX, I, \delta(\cdot)) = \inf_{\varphi: Y \rightarrow Z} \sup_{\substack{x \in BX, y(\cdot) \in Y \\ \|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t} \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z.$$

Нас интересует значение этой величины и оптимальный метод.

Из леммы 1 следует, что

$$(14) \quad E(\Lambda, BX, I, \delta(\cdot)) \geq \sup_{\substack{x \in BX \\ \|Ix(t)\|_{Y_t} \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|\Lambda x\|_Z.$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу (значение которой совпадает с квадратом величины, стоящей в правой части (14)):

$$(15) \quad \|\Lambda x\|_Z^2 \rightarrow \max, \quad \|Ix(t)\|_{Y_t}^2 \leq \delta^2(t) \text{ для п. в. } t \in T, \quad \|x\|_X^2 \leq 1.$$

Положим

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = -\|\Lambda x\|_Z^2 + \int_T \lambda_1(t) \|Ix(t)\|_{Y_t}^2 d\mu + \lambda_2 \|x\|_X^2,$$

где $\lambda_1(\cdot)$ — измеримая неотрицательная функция, $\lambda_2 \geq 0$, а $d\mu$ — мера Лебега, если T — интервал прямой и дискретная мера, если T — конечное множество.

Теорема 4. Пусть существуют измеримая неотрицательная функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$ такие, что функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)\delta^2(\cdot)$ и функции $t \rightarrow \widehat{\lambda}_1(t)(y^1(t), y^2(t))_{Y_t}$ при всех $y^1(\cdot), y^2(\cdot) \in Y$ суммируемы на T и

$$(a) \quad \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Пусть, кроме того, существует такая последовательность $\{x_m\}$ допустимых элементов в (15), что выполнены условия:

$$(b) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_m, \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = 0,$$

$$(c) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_T \widehat{\lambda}_1(t) (\|Ix_m(t)\|_{Y_t}^2 - \delta^2(t)) d\mu + \widehat{\lambda}_2 (\|x_m\|_X^2 - 1) \right) = 0.$$

Тогда, если x_y — решение экстремальной задачи

$$(16) \quad \int_T \widehat{\lambda}_1(t) \|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t}^2 d\mu + \widehat{\lambda}_2 \|x\|_X^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

то

$$(17) \quad \varphi(y) = \Lambda x_y$$

— оптимальный метод восстановления и

$$(18)$$

$$E(\Lambda, BX, I, \delta(\cdot)) = \sup_{\substack{x \in BX \\ \|Ix(t)\|_{Y_t} \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|\Lambda x\|_Z = \sqrt{\int_T \widehat{\lambda}_1(t) \delta^2(t) d\mu + \widehat{\lambda}_2}.$$

Доказательство. 1. Покажем, что значения задачи (15) и задачи

$$(19) \quad \|\Lambda x\|_Z^2 \rightarrow \max, \quad \int_T \widehat{\lambda}_1(t) \|Ix(t)\|_{Y_t}^2 d\mu + \widehat{\lambda}_2 \|x\|_X^2 \leq S,$$

где

$$S = \int_T \widehat{\lambda}_1(t) \delta^2(t) d\mu + \widehat{\lambda}_2,$$

совпадают и равны S . Действительно, для любого допустимого в (15) элемента $x \in X$ имеем с учетом (a)

$$\begin{aligned} -\|\Lambda x\|_Z^2 &\geq -\|\Lambda x\|_Z^2 + \int_T \widehat{\lambda}_1(t) (\|Ix(t)\|_{Y_t}^2 - \delta^2(t)) d\mu \\ &\quad + \widehat{\lambda}_2 (\|x\|_X^2 - 1) \geq -S. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя последовательно (c) и (b), получаем, что

$$\begin{aligned} -\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Lambda x_m\|_Z^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\|\Lambda x_m\|_Z^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_T \widehat{\lambda}_1(t) (\|Ix_m(t)\|_{Y_t}^2 - \delta^2(t)) d\mu + \widehat{\lambda}_2 (\|x_m\|_X^2 - 1) \right) = -S, \end{aligned}$$

т. е. S — значение задачи (15). Но, очевидно, эти же рассуждения доказывают, что S и значение задачи (19).

2. Оценка сверху. Рассмотрим векторное пространство $H = X \times Y$ с полускалярным произведением

$$((x^1, y^1(\cdot)), (x^2, y^2(\cdot)))_H = \int_T \widehat{\lambda}_1(t) (y^1(t), y^2(t))_{Y_t} d\mu + \widehat{\lambda}_2 (x^1, x^2)_X.$$

Тогда экстремальная задача (16) может быть переписана в виде

$$\|(x, Ix(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2 \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Если x_y — решение этой задачи, то легко показать, что для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$((x_y, Ix_y(\cdot)) - (0, y(\cdot)), (x, Ix(\cdot)))_H = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|(x, Ix(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2 &= \|(x, Ix(\cdot)) - (x_y, Ix_y(\cdot))\|_H^2 \\ &\quad + \|(x_y, Ix_y(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2. \end{aligned}$$

Если $\|x\|_X \leq 1$ и $\|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t} \leq \delta(t)$, $t \in T$, то из последнего неравенства вытекает, что

$$\begin{aligned} \|(x, Ix(\cdot)) - (x_y, Ix_y(\cdot))\|_H^2 &\leq \|(x, Ix(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2 \\ &= \int_T \widehat{\lambda}_1(t) \|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t}^2 d\mu + \widehat{\lambda}_2 \|x\|_X^2 \leq S. \end{aligned}$$

Полагая $z = x - x_y$, приходим к неравенству

$$\int_T \widehat{\lambda}_1(t) \|Iz(t)\|_{Y_t}^2 d\mu + \widehat{\lambda}_2 \|z\|_X^2 \leq S$$

и значит,

$$\|\Lambda x - \Lambda x_y\|_Z = \|\Lambda z\|_Z \leq \sup_{\int_T \widehat{\lambda}_1(t) \|Ix_t\|_{Y_t}^2 d\mu + \widehat{\lambda}_2 \|x\|_X^2 \leq S} \|\Lambda x\|_Z = \sqrt{S}.$$

Учитывая (14), получаем равенство (18) и оптимальность метода (17). \square

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\sigma_0 < \infty$. Запишем рассматриваемую задачу в терминах теоремы 4. Здесь $T = \Delta_\sigma$, $X = X_\infty^n$ — векторное пространство с полускалярным произведением

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot))_{X_\infty^n} = \int_{\mathbb{R}} x_1^{(n)}(t) \overline{x_2^{(n)}(t)} dt,$$

$Y_t = \mathbb{C}$ при всех $t \in \Delta_\sigma$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, $Y = L_\infty(\Delta_\sigma)$, $\Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $BX = C_\infty^n$ и оператор $I: X_\infty^n \rightarrow L_\infty(\Delta_\sigma)$ определен равенством $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)$. При таких обозначениях задача (3) совпадает с задачей (13). Функция $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2)$ из теоремы 4 имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = & -\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\Delta_\sigma} \lambda_1(t) |Fx(t)|^2 dt \\ & + \lambda_2 \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1} |Fx(\cdot)|^2 = u(\cdot)$, получим (в силу теоремы Планшереля)

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k} + \lambda_2 t^{2n}) u(t) dt + 2\pi \int_{\Delta_\sigma} \lambda_1(t) u(t) dt.$$

Положим $\widehat{\lambda}_2 = \sigma_0^{-2(n-k)}$ и

$$\widehat{\lambda}_1(t) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} (t^{2k} - \widehat{\lambda}_2 t^{2n}), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0. \end{cases}$$

Тогда при всех $x(\cdot) \in X_\infty^n$

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = \int_{|t| \geq \sigma_0} (-t^{2k} + \widehat{\lambda}_2 t^{2n}) u(t) dt \geq 0.$$

Положим

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} t^{2n} \delta^2(t) dt.$$

Если $\gamma = 0$, то обозначив через $\widehat{x}(\cdot)$ обратное преобразование Фурье функции, совпадающей с $\delta(\cdot)$ в интервале $(-\sigma_0, \sigma_0)$ и равной нулю вне него, легко проверить, что условия (b) и (c) теоремы 4 выполнены для постоянной последовательности $x_m(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$.

Если $\gamma > 0$ (в этом случае, очевидно, $\sigma_0 = \sigma$), то положим для $m > \gamma^{-2}$

$$u_m(t) = \begin{cases} \delta^2(t)/(2\pi), & |t| < \sigma, \\ \sigma^{-2n}(m\gamma - \sqrt{m})/2, & \sigma \leq |t| \leq \sigma + 1/m, \\ 0, & |t| > \sigma + 1/m \end{cases}$$

(через $x_m(\cdot)$ будем обозначать обратные преобразования Фурье функций $\sqrt{2\pi}u_m(\cdot)$). Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_m(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = 0.$$

Кроме того,

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\lambda}_1(t)(2\pi u_m(t) - \delta^2(t)) dt = 0$$

и

$$\begin{aligned} \|x_m^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} t^{2n} u_m(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2n} \delta^2(t) dt + \frac{m\gamma - \sqrt{m}}{\sigma^{2n}} \int_{\sigma}^{\sigma+1/m} t^{2n} dt \\ &= 1 - \gamma + \frac{(m\gamma - \sqrt{m})((\sigma + 1/m)^{2n+1} - \sigma^{2n+1})}{\sigma^{2n}(2n+1)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Из последних равенств следует также, что при достаточно больших m

$$\|x_m^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 < 1 - \frac{1}{2\sqrt{m}},$$

т. е. функции $x_m(\cdot)$ являются допустимыми в задаче (15).

Задача (16) для $y(\cdot) \in L_{\infty}(\Delta_{\sigma})$ имеет вид

$$\int_{\Delta_{\sigma}} \widehat{\lambda}_1(t) |Fx(t) - y(t)|^2 dt + \widehat{\lambda}_2 \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in X_{\infty}^n.$$

С учетом теоремы Планшереля она может быть записана так

$$\int_{\Delta_{\sigma}} \widehat{\lambda}_1(t) |Fx(t) - y(t)|^2 dt + \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2n} |Fx(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in X_{\infty}^n.$$

Нетрудно проверить, что ее решением является функция $\widehat{x}_y(\cdot)$ такая, что

$$F\widehat{x}_y(t) = \begin{cases} \frac{2\pi\widehat{\lambda}_1(t)}{2\pi\widehat{\lambda}_1(t) + \widehat{\lambda}_2 t^{2n}} y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

т. е.

$$F\widehat{x}_y(t) = \begin{cases} \left(1 - \sigma_0^{-2(n-k)} t^{2(n-k)}\right) y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0. \end{cases}$$

Из теоремы 4 вытекает, что оптимальный метод имеет вид (5), а для его погрешности справедлива формула (4).

Если $\sigma_0 = \infty$ (при этом очевидно $\sigma = \infty$), то из леммы 1, обозначив через $\widehat{x}(\cdot)$ обратное преобразование функции $\delta(\cdot)$, будем иметь

$$\begin{aligned} E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I^{\delta(\cdot), \infty}) &\geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_\infty^n \\ |Fx(t)| \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\geq \|\widehat{x}^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \delta^2(t) dt}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для метода (7) имеем

$$\begin{aligned} e(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I^{\delta(\cdot), \infty}, \widehat{\varphi}) &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_\infty^n, y(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}) \\ |Fx(t) - y(t)| \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{\varphi}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_\infty^n, y(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}) \\ |Fx(t) - y(t)| \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} |Fx(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \delta^2(t) dt}. \end{aligned}$$

□

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что если $\delta(t) \equiv \delta > 0$ и $\sigma = \infty$ (см. следствие 1), то

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in C_\infty^n \\ |Fx(t)| \leq \delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = K(k, n, \infty) \delta^{\frac{2(n-k)}{2n+1}},$$

где константа $K(k, n, \infty)$ определена равенствами (12). Отсюда следует точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq K(k, n, \infty) \|Fx(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{\frac{2(n-k)}{2n+1}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n+1}}.$$

Доказательство теоремы 2. Снова запишем рассматриваемую задачу в терминах теоремы 4. Здесь T состоит из одной точки, скажем, $t = 1$. Далее $X = X_2^n$ — векторное пространство с полускалярным произведением

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot))_{X_2^n} = \int_{\mathbb{R}} x_1^{(n)}(t) \overline{x_2^{(n)}(t)} dt,$$

$Y_1 = Y = L_2(\Delta_\sigma)$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, $\Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $BX = C_2^n$, информационный оператор $I: X_2^n \rightarrow L_2(\Delta_\sigma)$ определен равенством $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)$ и $\delta(1) = \delta > 0$. Функция $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2)$ из теоремы 4 имеет здесь вид

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \lambda_1 \int_{\Delta_\sigma} |Fx(t)|^2 dt + \lambda_2 \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2 = u(\cdot)$, получим

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k} + 2\pi\lambda_1\chi_\sigma(t) + \lambda_2 t^{2n}) u(t) dt,$$

где $\chi_\sigma(\cdot)$ — характеристическая функция интервала Δ_σ .

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} \sigma_0^{2k}, & k > 0, \\ \frac{1}{2\pi}, & k = 0, \end{cases} \quad \widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sigma_0^{-2(n-k)}, & k > 0, \\ \sigma^{-2n}, & k = 0, \end{cases}$$

$$\widehat{t} = \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \sigma_0, & k > 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при всех $x(\cdot) \in X_2^n$

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Предположим сначала, что $k > 0$ и $\sigma < \widehat{\sigma}$ (в этом случае $\sigma_0 = \sigma$). Рассмотрим для достаточно больших m последовательность функций

$$u_m(t) = \begin{cases} m \frac{\delta^2}{4\pi}, & \widehat{t} \leq |t| \leq \widehat{t} + 1/m, \\ \frac{m - \sqrt{m}}{2\sigma^{2n}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \widehat{t}^{2n}\right), & \sigma \leq |t| \leq \sigma + 1/m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$2\pi \int_{\Delta_\sigma} u_m(t) dt = \delta^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^{2n} u_m(t) dt &= \frac{m\delta^2}{2\pi} \frac{(\widehat{t} + 1/m)^{2n+1} - \widehat{t}^{2n+1}}{2n+1} \\ &+ \frac{m - \sqrt{m}}{2\sigma^{2n}} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \widehat{t}^{2n}\right) \frac{(\sigma + 1/m)^{2n+1} - \sigma^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Кроме того, при достаточно больших m

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2n} u_m(t) dt < 1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \widehat{t}^{2n}\right) \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Отсюда следует, что для функций $x_m(\cdot)$, являющихся обратным преобразованием Фурье функций $\sqrt{2\pi}u_m(\cdot)$, условие (с) теоремы 4

выполнено. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие (b) той же теоремы также выполнено.

Если $k > 0$ и $\sigma \geq \hat{\sigma}$ или $k = 0$, то следует рассмотреть функции

$$u_m(t) = \begin{cases} (m - \sqrt{m})\delta^2/(4\pi), & \hat{t} \leq |t| \leq \hat{t} + 1/m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача (16) для $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\hat{\lambda}_1 \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 + \hat{\lambda}_2 \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in X_2^n.$$

С учетом теоремы Планшереля она может быть записана в виде

$$\hat{\lambda}_1 \int_{\Delta_\sigma} |Fx(t) - y(t)|^2 dt + \frac{\hat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2n} |Fx(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in X_2^n.$$

Решением этой задачи является функция $\hat{x}_y(\cdot)$ такая, что при $k > 0$

$$F\hat{x}_y(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1} y(t), & |t| < \sigma, \\ 0, & |t| \geq \sigma, \end{cases}$$

а при $k = 0$ —

$$F\hat{x}_y(t) = \begin{cases} \left(1 + \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{2n}\right)^{-1} y(t), & |t| < \sigma, \\ 0, & |t| \geq \sigma. \end{cases}$$

Теперь доказываемая теорема вытекает из теоремы 4. \square

Из теоремы 2 вытекает, что

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in C_2^n \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}},$$

откуда следует точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{n-k}{n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k}{n}}.$$

Доказательство теоремы 3. Случаи $p = \infty, 2$ вытекают из теорем 1, 2. Будем считать, что $2 < p < \infty$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^2 \leq \delta^2, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1.$$

В образах Фурье, обозначив через $u(\cdot) = (2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2$, эту задачу можно переписать в виде

$$(20) \quad \int_{\mathbb{R}} t^{2k} u(t) dt \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}} u^{p/2}(t) dt \leq \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}},$$

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2n} u(t) dt \leq 1, \quad u(t) \geq 0.$$

Свяжем с задачей (20) следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k} u(t) + \lambda_1 u^{p/2}(t) + \lambda_2 t^{2n} u(t)) dt.$$

Если мы найдем такую допустимую в (20) функция $\hat{u}(\cdot)$ и такие множители Лагранжа $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, что

$$(a) \quad \min_{u(t) \geq 0} \mathcal{L}(u(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)^{p/2} dt - \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}} \right) = 0,$$

$$(c) \quad \hat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^{2n} u(t) dt - 1 \right) = 0,$$

то $\hat{u}(\cdot)$ — решение задачи (20). Действительно, для любой допустимой функции $u(\cdot)$ имеем

$$- \int_{\mathbb{R}} t^{2k} u(t) dt \geq - \int_{\mathbb{R}} t^{2k} u(t) dt + \hat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)^{p/2} dt - \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}} \right)$$

$$+ \hat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^{2n} u(t) dt - 1 \right) \geq - \int_{\mathbb{R}} t^{2k} \hat{u}(t) dt + \hat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(t)^{p/2} dt - \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}} \right)$$

$$+ \hat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^{2n} \hat{u}(t) dt - 1 \right) = - \int_{\mathbb{R}} t^{2k} \hat{u}(t) dt.$$

Положим $\hat{\lambda}_2 = \sigma^{-2(n-k)}$, где параметр $\sigma > 0$ определим позже. Тогда для всех $u(t) \geq 0$ и любого $\hat{\lambda}_1 > 0$

$$-t^{2k} u(t) + \lambda_1 u^{p/2}(t) + \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}} u(t) \geq -t^{2k} \hat{u}(t) + \lambda_1 \hat{u}^{p/2}(t) + \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}} \hat{u}(t),$$

где

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{p\hat{\lambda}_1} \left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}} \right) \right)^{\frac{1}{p/2-1}}, & |t| \leq \sigma, \\ 0, & |t| > \sigma. \end{cases}$$

Тем самым выполнено условие (a). Выберем σ и $\widehat{\lambda}_1$ так, чтобы удовлетворить условиям (b) и (c):

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}} dt &= \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}}, \\ \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} \int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2n} \left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} dt &= 1. \end{aligned}$$

Сделаем замену $t = \sigma u$ и выразив полученные интегралы через значение бета-функции B , определенное равенством (11), получим

$$\begin{aligned} \sigma^{\frac{pk}{p/2-1}+1} \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}} \frac{B}{n-k} &= \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}}, \\ \sigma^{\frac{2k}{p/2-1}+2n+1} \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} \frac{(k+1/2-1/p)B}{(n-k)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(21) \quad \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} = \frac{(n-k)^2}{(k+1/2-1/p)B} \sigma^{-\frac{2k}{p/2-1}-2n-1}$$

и

$$(22) \quad \sigma = \left(\frac{(2\pi)^{1/2}(n-k)^{1-1/p}}{\delta(k+1/2-1/p)^{1/2}B^{1/2-1/p}}\right)^{\frac{1}{n+1/2-1/p}}.$$

Учитывая (21), будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2k} \widehat{u}(t) dt = \frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p} \sigma^{-2(n-k)}.$$

Подставив значение σ из (22), получим, что при всех $2 < p < \infty$

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in F_p^n \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = K \delta^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}}.$$

Из этого равенства непосредственно вытекает доказываемое точное неравенство для производных. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс., МГУ, М., 1965.
- [2] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press, New York, 1977, pp. 1–54.
- [3] Traub J. F., Woźniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms. Academic Press, New York, 1980.
- [4] Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Math., Vol. 1129, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 21–93.

- [5] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000.
- [6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа. Матем. сб., **188**. №12. 73–106 (1997).
- [7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2000.
- [8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* Оптимальное восстановление и теория экстремума. Докл. РАН., **379**. №2. 161–164 (2001).
- [9] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal., **16**. 87–105 (1979).
- [10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Матем. сб., **193**. №3. 79–100 (2002).
- [11] *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных. В кн.: Избранные труды А. Н. Колмогорова. Математика и механика. Наука, М., 1985, с. 386–390.
- [12] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи. УМН, **51**. №6. 89–124 (1996).

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО