

УДК 512  
©1991 г.

## НАИЛУЧШИЕ И ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА КЛАССАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Рассматриваются задачи наилучшего восстановления функционала  $Lu = \lambda_0 u(x) + \dots + \lambda_k u^{(k)}(x)$ ,  $x \in (-1, 1)$ , в пространстве гармонических функций  $h_p$  при  $p = \infty, 2$  по значениям функций и их производных в точках из интервала  $(-1, 1)$ . В пространстве  $h_\infty$  решаются задачи построения наилучших квадратурных формул. Доказано существование оптимальной квадратурной формулы и при некоторых условиях единственность оптимальных узлов.

### § 1. Постановки задач и некоторые общие теоремы о восстановлении

Для произвольных множеств  $A$  и  $B$  через  $F(A, B)$  обозначим множество всех операторов  $f: A \rightarrow B$ . Пусть  $X, Y$  — линейные пространства, а  $Z$  — линейное нормированное пространство. Рассмотрим задачу восстановления оператора  $L \in F(W, Z)$ ,  $W \subset X$ , по значениям информационного оператора  $I \in F(W, Y)$ . В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные операторы  $S \in F(Y, Z)$ .

Погрешностью наилучшего восстановления оператора  $L$  называется величина

$$(1.1) \quad E(L, I) = \inf_{S \in F(Y, Z)} \sup_{x \in W} \|Lx - SIx\|.$$

Метод  $S_0$  называется наилучшим, если на нем достигается нижняя грань в (1.1), при этом элемент  $x_0 \in W$  экстремальный, если имеет место равенство

$$\sup_{x \in W} \|Lx - S_0Ix\| = \|Lx_0 - S_0Ix_0\|.$$

Многочисленные конкретные примеры рассматриваемой задачи и соответствующие ссылки можно найти в обзорных статьях [1], [2] и книге [3].

Если имеются некоторые множества  $M \subset F(W, Z)$  и  $U \subset F(W, Y)$ , то под задачей оптимального восстановления будем понимать задачу о нахождении величины

$$(1.2) \quad R(M, U) = \inf_{I \in U} \sup_{L \in M} E(L, I)$$

и оператора  $I_0$ , на котором достигается нижняя грань. Оператор  $I_0$  и соответствующий ему наилучший метод будем называть оптимальными.

**Теорема 1.1.** Пусть существуют такие  $x_0 \in W$  и  $S_0 \in F(Y, Z)$ , что  $-x_0 \in W$ ,  $L(-x_0) = -Lx_0$ ,  $I(-x_0) = I(x_0)$  и

$$\sup_{x \in W} \|Lx - S_0Ix\| = \|Lx_0\|.$$

Тогда  $S_0$  является наилучшим методом восстановления,  $x_0$  — экстремальным элементом, а

$$(1.3) \quad E(L, I) = \|Lx_0\|.$$

*Доказательство.* Из (1.1) имеем

$$(1.4) \quad E(L, I) \leq \sup_{x \in W} \|Lx - S_0Ix\| = \|Lx_0\|.$$

Для любого метода  $S$  справедливо неравенство

$$(1.5) \quad \|Lx_0 - SIx_0\| + \|L(-x_0) - SI(-x_0)\| \geq 2\|Lx_0\|.$$

Отсюда

$$\sup_{x \in W} \|Lx - SIx\| \geq \|Lx_0\|.$$

Тем самым

$$(1.6) \quad E(L, I) \geq \|Lx_0\|.$$

Из соотношений (1.4) и (1.6) следует, что  $S_0$  — наилучший метод восстановления и имеет место равенство (1.3).

В силу (1.4)

$$\|Lx_0 - S_0Ix_0\| \leq \|Lx_0\|, \quad \|L(-x_0) - S_0I(-x_0)\| \leq \|Lx_0\|,$$

что вместе с неравенством (1.5) для  $S = S_0$  дает

$$\|Lx_0 - S_0Ix_0\| = \|Lx_0\|.$$

Следовательно,  $x_0$  — экстремальный элемент. Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим некоторое множество  $\Omega \in \mathbb{C}$  и положительную меру  $\mu$  на нем. Через  $L_p(\Omega, \mu)$  обозначим пространство комплекснозначных (или вещественных) функций, для которых

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(z)|^p d\mu(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Пусть  $X_p$  — некоторое линейное подпространство  $L_p(\Omega, \mu)$ , а  $BX_p = \{f \in X_p : \|f\|_p \leq 1\}$ . Положим в задаче (1.1)  $X = X_p$ ,  $W = BX_p$  и  $Z = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ .

**Теорема 1.2.** Пусть существует  $g \in X_p$ ,  $\|g\|_p \neq 0$ , и  $S_0$  такие, что для  $g_0 = g/\|g\|_p$   $L(-g_0) = -Lg_0$ ,  $I(-g_0) = Ig_0$ ,  $S_0 0 = 0$  и при всех  $f \in BX_p$  имеет место равенство

$$(1.7) \quad Lf - S_0If = \begin{cases} \alpha \int_{\Omega} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) d\mu(z), & 1 \leq p < \infty, \\ \int_{\Omega} \overline{g(z)} |\varphi(z)| f(z) d\mu(z), & p = \infty, \end{cases}$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ ),  $\varphi \in L_1(\Omega, \mu)$ , а  $|g(z)| = 1$  почти всюду, если  $p = \infty$ . Тогда метод восстановления  $S_0$  является наилучшим,  $g_0$  — экстремальная функция, а

$$E(L, I) = |Lg_0| = \begin{cases} |\alpha| \|g\|_p^{p-1}, & 1 \leq p < \infty, \\ \|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Из равенства (1.7), пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\sup_{f \in BX_p} |Lf - S_0If| \leq |\alpha| \|g\|_p^{p-1} = |Lg_0| = |Lg_0 - S_0Ig_0|.$$

Отсюда следует, что

$$(1.8) \quad \sup_{f \in BX_p} |Lf - S_0If| = |Lg_0|.$$

Аналогично доказывается равенство (1.8) при  $p = \infty$ . Теперь доказываемое утверждение следует из теоремы 1.1. Теорема доказана.  $\square$

Теоремы 1.1 и 1.2 являются обобщениями теоремы 1 из работы [4].

Из очевидных соотношений

$$\sup_{\substack{f \in BX_p \\ If=0}} |Lf| \geq |Lg_0| = E(L, I) = \sup_{f \in BX_p} |Lf - S_0If| \geq \sup_{\substack{f \in BX_p \\ If=0}} |Lf|$$

следует, что при выполнении условий теоремы 1.2 имеет место равенство

$$(1.9) \quad E(L, I) = \sup_{\substack{f \in BX_p \\ If=0}} |Lf|.$$

Это равенство для выпуклого уравновешенного множества  $W$ , линейного функционала  $L$  и линейного оператора  $I$  отмечалось в работе [5], а ранее при некоторых дополнительных условиях доказывалось многими авторами (см. [1–3]).

## § 2. Восстановление значений гармонических функций и их производных

Пусть  $h_p$  — пространство гармонических в  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  функций, удовлетворяющих условию

$$(2.1) \quad \|u\|_{h_p} := \sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{h_\infty} := \sup_{z \in D} |u(z)|, \quad p = \infty.$$

Рассматривая вместо гармонических аналитические в  $D$  функции, удовлетворяющие условию (2.1), получаем пространство Харди  $H_p$ .

Обозначим через

$$(2.2) \quad Z_\nu = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n, x \\ \nu_1, \dots, \nu_n, l \end{pmatrix}$$

систему различных точек  $x_j, x \in (-1, 1)$  с кратностями  $\nu_j, l$ . Положим в задаче (1.1)  $W = Bh_p$ ,

$$Iu = \{u(x_1), \dots, u^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, u(x), \dots, u^{(l-1)}(x)\},$$

$$Lu = L_x^\lambda u = \lambda_0 u(x) + \dots + \lambda_k u^{(k)}(x),$$

где  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ ,  $l < k$ . Величину  $E(L, I)$  обозначим в этом случае через  $E_p(x, \lambda, Z_\nu)$ .

Введем следующие обозначения:

$$W(z) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{z - x_j}{1 - x_j z} \right)^{\nu_j}, \quad \omega_j(z) = W(z) \left( \frac{1 - x_j z}{z - x_j} \right)^{\nu_j},$$

$$W_0(z) = \left( \frac{z - x}{1 - xz} \right)^l W(z),$$

$$P(\beta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma}{1 + \sqrt{(\gamma - \beta)^2 + 1 - \beta^2}}, & |\beta| < 1, \\ \frac{\text{sign } \beta}{|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}}, & |\beta| \geq 1, \end{cases}$$

$$G(\beta) = \begin{cases} 1 + \beta^2, & |\beta| < 1, \\ 2|\beta|, & |\beta| \geq 1, \end{cases}$$

$$\beta(x) = \frac{1 - x^2}{2} \left( \frac{W'(x)}{W(x)} \frac{1 - W_0^2(x)}{1 + W_0^2(x)} + \frac{\lambda_{k-1}}{k\lambda_k} \right) + \frac{k-1}{2}x,$$

$$\gamma(x) = 2\beta(x) + (1 - x^2) \frac{W_0^2(x)}{1 + W_0^2(x)} \left( \frac{W'(x)}{W(x)} - \frac{\lambda_{k-1}}{k\lambda_k} \right),$$

$$D_1 = \{x \in (-1, 1) : |\beta(x)| < 1\}, \quad D_0 = (-1, 1) \setminus (D_1 \cup \{x_1, \dots, x_n\}),$$

$$b = \begin{cases} P(\beta(x), \gamma(x)), & \lambda_k \neq 0, \\ 0, & \lambda_k = 0, \end{cases}, \quad a = \frac{x-b}{1-xb},$$

$$u_x(z) = \begin{cases} 1, & x \in D_1, \\ \frac{z-a}{1-az}, & x \in D_0, \end{cases} \quad W_1(z) = \frac{z-a}{1-az} \frac{W_0(z)}{u_x(z)},$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{k! \lambda_k W(x)}{u_x(x)(1-ax)^2(1-x^2)^{k-3}(1+W_1^2(x))}, & \lambda_k \neq 0, \\ \frac{(k-1)! \lambda_{k-1} W(x)}{(1-x^2)^{k-2}(1+W_1^2(x))}, & \lambda_k = 0. \end{cases}$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $l = k - 1$ ,  $k \geq 1$ . Тогда метод

$$(2.3) \quad S_0 I u = \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-1} c_{jm}(x) u^{(m)}(x_j) + \sum_{m=0}^{l-1} d_m(x) u^{(m)}(x),$$

$$c_{jm}(x) = -\frac{\alpha(x)}{m!(\nu_j - m - 1)!} \times \frac{\partial^{\nu_j - m - 1}}{\partial z^{\nu_j - m - 1}} \left[ \frac{u_x(z)(1-az)^2(1-xz)^{k-3}(1-x_j z)^{\nu_j}}{(z-x)^{k+1} \omega_j(z)} \right] \Big|_{z=x_j},$$

$$d_m(x) = \lambda_m - \frac{\alpha(x)}{m!(k-m)!} \times \frac{\partial^{k-m}}{\partial z^{k-m}} \left[ \frac{u_x(z)(1-az)^2(1-xz)^{k-3}}{W(z)} (1+W_1^2(z)) \right] \Big|_{z=x},$$

является наилучшим методом восстановления функционала  $L_x^\lambda$  на классе  $Bh_\infty$ . При этом функция

$$g(z) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} W_1(z)$$

является экстремальной, а

$$(2.4) \quad E_\infty(x, \lambda, Z_\nu) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{k! |\lambda_k|}{(1-x^2)^k} |W(x)| G(\beta(x)), & k \geq 2, \lambda_k \neq 0, \\ \frac{4}{\pi} \frac{(k-1)! |\lambda_{k-1}|}{(1-x^2)^{k-1}} |W(x)|, & k \geq 2, \lambda_k = 0, \\ \frac{4}{\pi} \left| \lambda_0 \operatorname{arctg} W_1(x) + \lambda_1 \frac{W_1'(x)}{1+W_1^2(x)} \right|, & k = 1. \end{cases}$$

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что при всех  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$   $P(\beta, \gamma) \in [-1, 1]$ , поэтому  $a \in [-1, 1]$ . Положим

$$Jf = \alpha(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z-a)(1-az)(1+W_1^2(z))}{(z-x)^2(1-xz)^2 W_1(z)} f(z) dz.$$

С помощью теоремы о вычетах можно убедиться, что для любой функции  $f \in H_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , имеет место равенство

$$L_x^\lambda f - S_0 I f = J f.$$

Поскольку  $\lambda_j, c_{jm}(x), d_m(x) \in \mathbb{R}$  и при  $z = e^{i\theta}$  справедливы соотношения

$$\frac{z(z-a)(1-az)}{(z-x)^2(1-xz)^2} \geq 0, \quad W_1^{-1}(z) = \overline{W_1(z)}, \quad g(z) = \text{sign Re } W_1(z),$$

то, обозначив через  $u = \text{Re } f$ , будем иметь

$$(2.5) \quad L_x^\lambda u - S_0 I u = \text{Re } J f \\ = \alpha(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{z(z-a)(1-az)}{(z-x)^2(1-xz)^2} 2 \text{Re } W_1(z) \right| g(z) u(z) d\theta.$$

Если  $u \in h_\infty \subset h_2$ , то сопряженная функция  $v \in h_2$  (см. [6, с. 380]) и, следовательно,  $u + iv \in H_2$ . Таким образом, равенство (2.5) справедливо при всех  $u \in h_\infty$ . Так как  $g \in h_\infty$ ,  $|g(e^{i\theta})| = 1$  почти всюду и  $Ig = 0$ , то из теоремы 1.2 следует, что метод  $S_0$  является наилучшим методом восстановления, функция  $g$  — экстремальной, а

$$E_\infty(x, \lambda, Z_\nu) = |L_x^\lambda g|.$$

Отсюда следует равенство (2.4) при  $k = 1$ . Пусть  $k \geq 2$ . Тогда

$$L_x^\lambda g = L_x^\lambda f^* = J f^*,$$

где

$$f^*(z) = \frac{4}{\pi} \text{arctg } W_1(z) = \frac{4}{\pi} W_1(z) + W_1^3(z) w(z), \quad w \in H_2.$$

Имеем

$$J f^* = \frac{4}{\pi} \alpha(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z-a)(1-az)}{(z-x)^2(1-xz)^2} dz \\ = \frac{4}{\pi} \alpha(x) \frac{1+b^2}{(1-x^2)(1-xb)^2}.$$

Принимая во внимание определения величин  $\alpha(x)$   $a$  и  $b$ , получаем равенство (2.4). Теорема доказана.  $\square$

Положим

$$Z_k(h) = \begin{pmatrix} -h, & h, & 0 \\ 1, & 1, & k-1 \end{pmatrix}, \quad h \in (0, 1), \quad e_k = (0, \dots, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

Из теоремы 2.1 следует, что наилучшим методом восстановления значения  $u'(0)$  по информации о значениях в системе  $Z_2(h)$  на классе  $Bh_\infty$  является метод

$$(2.6) \quad u'(0) \approx (1-h^4) \frac{u(h) - u(-h)}{2h},$$

а значения  $u''(0)$  по информации в системе  $Z_3(h)$  — метод

$$(2.7) \quad u''(0) \approx (1 - h^4) \frac{u(h) - 2u(0) + u(-h)}{h^2},$$

При этом

$$E_\infty(0, e_k, Z_k(h)) = \frac{4(k-1)}{\pi} h^2, \quad k = 2, 3,$$

а функция

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \left[ z^{k-1} \frac{z^2 - h^2}{1 - h^2 z^2} \right]$$

является экстремальной. Отметим, что в наилучшем методе (2.6) не используется значение  $u(0)$ , а в (2.7) —  $u'(0)$ .

Пусть теперь  $\lambda = (0, 1)$ . Тогда из (2.4) можно получить, что

$$E_\infty(x, (0, 1), Z_\nu) = \frac{4}{\pi} \frac{|W'(x)|}{1 + W^2(x)} \frac{c^2 + 1}{2c},$$

где

$$c = \min \left\{ 1, \frac{|\gamma(x)|}{1 + \sqrt{1 + \gamma^2(x)W^2(x)}} \right\}, \quad \gamma(x) = \frac{W'(x)}{W(x)} \frac{1 - x^2}{1 + W^2(x)}.$$

Если  $Z_\nu = Z_n^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ ,  $n \geq 1$ , то

$$\beta(x) = n \frac{1 - x^2}{2x} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}},$$

а уравнение  $\beta(x) = 1$  при  $x \in (0, 1)$  имеет единственный корень, который обозначим через  $r_n$ . Нетрудно убедиться, что  $c = 1$  для  $|x| \leq r_n$  и  $c \in (0, 1)$  для  $r_n < |x| < 1$ . Таким образом,

$$(2.8) \quad E_\infty(x, (0, 1), Z_n^0) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{n|x|^{n-1}}{1 + x^{2n}}, & |x| \leq r_n, \\ \frac{2}{\pi|x|^n} \left[ \sqrt{n^2 x^{2n-2} + \left( \frac{1 + x^{2n}}{1 - x^{2n}} \right)^2} - \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} \right], & |x| > r_n. \end{cases}$$

В силу равенства (1.9)

$$E_\infty(x, (0, 1), Z_n^0) = \sup_{\substack{u \in B_{h_\infty} \\ u(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0}} |u'(x)|.$$

Поэтому при  $n = 1$  из (2.8) имеем

$$(2.9) \quad \sup_{\substack{u \in Bh_\infty \\ u(0)=0}} |u'(x)| = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & |x| \leq r_1, \\ \frac{2}{\pi|x|} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} - 1 \right], & |x| > r_1, \end{cases}$$

где  $r_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ . Равенство (2.9) является аналогом теоремы Дьедонне [7] для гармонических функций.

**Следствие 2.1.** Пусть  $z, z_1 \in D$ ,  $Lu = u(z)$ ,  $Iu = u(z_1)$  и  $W = Bh_\infty$ . Тогда метод

$$(2.10) \quad S_0 Iu = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} u(z_1), \quad \rho = \left| \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z} \right|$$

является наилучшим методом восстановления функционала  $L$ , а для его погрешности справедливо равенство

$$(2.11) \quad E(L, I) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho.$$

*Доказательство.* Рассмотрим конформное преобразование единичного круга  $D$ , переводящее точку  $z_1$  в нуль, а  $z$  — в точку  $x \in [0, 1)$ . Для задачи наилучшего восстановления значения  $u(x)$  по значению  $u(0)$  из теоремы 2.1 имеем

$$\inf_S \sup_{u \in Bh_\infty} |u(x) - S(u(0))| = \sup_{u \in Bh_\infty} \left| u(x) - \frac{1-x^2}{1+x^2} u(0) \right| = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Пользуясь инвариантностью рассматриваемой задачи относительно конформного преобразования круга  $D$  и учитывая, что псевдогиперболическое расстояние  $\rho$  не меняется при этом (т. е.  $\rho = x$ ), получаем утверждение следствия. Следствие доказано.  $\square$

Пусть теперь оператор  $I$  ставит в соответствие  $u \in Bh_\infty$  ее след на интервале  $(-1, 1)$ :  $Iu = u_0$ , где  $u_0$  — функция, определенная на интервале  $(-1, 1)$  и совпадающая там с  $u$ .

**Следствие 2.2.** Метод (2.10), в котором

$$z_1 = \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 + |z|^2 + \sqrt{(1 + |z|^2)^2 - 4(\operatorname{Re} z)^2}},$$

является наилучшим методом восстановления функционала  $Lu = u(z)$  для  $Iu = u_0$  на классе  $Bh_\infty$ , а для его погрешности имеет место равенство (2.11).

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$v(\xi) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \left( i \frac{\xi - z_1}{1 - z_1 \xi} \right).$$

Легко проверить, что  $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{1 - z_1 z} = 0$ , поэтому  $|v(z)| = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho$ .  
 Таким образом, из следствия 2.1 имеем

$$\sup_{u \in Bh_\infty} \left| u(z) - \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} u(z_1) \right| = |v(z)|.$$

Поскольку  $v \in Bh_\infty$  и  $Iv = 0$ , то, применяя теорему 1.1, получаем утверждение следствия. Следствие доказано.  $\square$

Обозначим через  $Bh_\infty(G)$  класс функций, гармонических в односвязной и симметричной относительно вещественной оси области  $G$ , удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in G} |u(z)| \leq 1.$$

Рассмотрим задачу (1.2) для  $W = Bh_\infty(G)$

$$\begin{aligned} M &= \{ L : Lu = u(x), x \in [a, b] \}, \quad [a, b] \subset G, \\ U &= \{ I : Iu = (u(x_1), \dots, u(x_n)), x_j \in \mathbb{R} \cap G \}. \end{aligned}$$

Соответствующую величину  $R(M, U)$  обозначим в этом случае через  $R_n(G, [a, b])$ . Тем самым

$$(2.12) \quad R_n(G, [a, b]) = \inf_{x_j \in \mathbb{R} \cap G} \sup_{x \in [a, b]} E(L, I).$$

Точки, на которых достигается нижняя грань в равенстве (2.12), будем называть оптимальными узлами.

**Следствие 2.3.** *При всех  $k \in (0, 1)$  имеют место равенства*

$$(2.13) \quad R_n(D, [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda} = \frac{4}{\pi} h^{n/4} + O(h^{3n/4}),$$

где

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \sqrt{\lambda} &= k^{n/2} \prod_{j=1}^{[n/2]} \operatorname{sn}^2 \left( \frac{2j-1}{n} K, k \right) \\ &= 2h^{n/4} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} h^{nm(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} h^{nm^2}}, \quad h = e^{-\pi K'/K}. \end{aligned}$$

Точки

$$(2.15) \quad x_j^0 = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \left( \frac{2j-1}{n} - 1 \right) K, k \right], \quad j = 1, \dots, n,$$

являются оптимальными узлами. Здесь и далее через  $K, L$  и  $\Lambda$  обозначаются полные эллиптические интегралы первого рода для модулей  $k, l$  и  $\lambda$ , а через  $K', L'$  и  $\Lambda'$  — для дополнительных модулей.

*Доказательство.* Из теоремы 2.1 для

$$Z_1 = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ 1, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$E_\infty(x, 1, Z_1) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \prod_{j=1}^n \frac{x - x_j}{1 - x_j x} \right|.$$

Отсюда в силу монотонного возрастания арктангенса

$$R_n(D, [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \inf_{x_j \in (-1, 1)} \sup_{x \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]} \left| \prod_{j=1}^n \frac{x - x_j}{1 - x_j x} \right| \right].$$

Теперь равенства (2.13) и оптимальность узлов (2.15) следуют из работы [8]. Следствие доказано.  $\square$

Задача (2.12) является конформно инвариантной. Иными словами, если  $\varphi(z)$  — конформное отображение области  $G$  на единичный круг, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, а отрезок  $[a, b]$  — в отрезок  $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ , то

$$R_n(G, [a, b]) = R_n(D, [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]),$$

причем оптимальными узлами будут точки  $z_j = \varphi^{-1}(x_j^0)$ , где  $x_j^0$  определены равенствами (2.15).

Обозначим через  $\mathcal{E}_c$  внутренность эллипса с фокусами в точках  $\pm 1$  и суммой полуосей  $c$ . Функция

$$(2.16) \quad z = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left( \frac{2K}{\pi} \arcsin w, k \right), \quad \frac{K'}{\pi} = \frac{4}{\pi} \ln c,$$

конформно отображает область  $\mathcal{E}_c$  на единичный круг, при этом отрезок  $[-1, 1]$  переходит в отрезок  $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ , а точки

$$(2.17) \quad z_j^0 = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = 1, \dots, n,$$

переходят в точки (2.15). Таким образом, получаем

**Следствие 2.4.** *При всех  $c > 1$  имеют место равенства*

$$R_n(\mathcal{E}_c, [-1, 1]) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sum_{m=0}^{\infty} c^{-4nm(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} c^{-4nm^2}} \right] = \frac{4}{\pi} c^{-n} + O(c^{-3n}).$$

*Точки (2.17) являются оптимальными узлами.*

Рассмотрим теперь задачу восстановления на классе  $Bh_2$ . Положим  $\psi_1(z) = W^{-1}(z)$ ,  $\psi_2(z) = (1 - xz)^l z^{-1} \psi_1(z)$ ,  $\alpha(z) = \sum_{j=0}^{k+1-l} \alpha_j (z - x)^j$ ,  $\beta(z) = \alpha(z^{-1}) z^{k+1-l}$ , где при  $x = 0$   $\alpha_0 = 0$ ,

$$\alpha_j = W(0) \left[ (k+1-j)! \lambda_{k+1-j} - \sum_{m=1}^{j-1} \frac{\alpha_m}{(j-m)!} \psi_1^{(j-m)}(0) \right],$$

$$j = 1, \dots, \min(k, k+1-l),$$

$$\alpha_{k+1} := \frac{W(0)}{1 + W^2(0)} \left[ \lambda_0 - \sum_{m=1}^k \frac{\alpha_m}{(k+1-m)!} \psi_1^{(k+1-m)}(0) \right], \quad \text{если } l = 0,$$

а при  $x \neq 0$

$$\alpha_j = \frac{xW(x)}{(1-x^2)^l} \left[ (k-j)! \lambda_{k-j} - \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\alpha_m}{(j-m)!} \psi_2^{(j-m)}(x) \right],$$

$$j = 0, \dots, k-l,$$

$$\alpha_{k+1-l} = \frac{(-1)^{k-l}}{x^{k+1-l} (1 + x^{2l} W^2(0))} \sum_{j=0}^{k-l} (-1)^j x^j a_j.$$

**Теорема 2.2.** Пусть  $Z_\nu$  — система (2.2) при  $0 \leq l \leq k$ . Метод (2.3), в котором

$$(2.18) \quad c_{jm}(x) = -\frac{1}{m!(\nu_j - m - 1)!} \times \frac{\partial^{\nu_j - m - 1}}{\partial z^{\nu_j - m - 1}} \left[ \frac{\alpha(z)(1 - xz)^l (1 - x_j z)^{\nu_j}}{z(z-x)^{k+1} \omega_j(z)} \right] \Big|_{z=x_j},$$

$$d_m(x) = \lambda_m - \frac{1}{m!(k-m)!} \frac{\partial^{k-m}}{\partial z^{k-m}} [\alpha(z) \psi_2(z)] \Big|_{z=x},$$

является наилучшим методом восстановления функционала  $L_x^\lambda$  на классе  $Bh_2$ . При этом функция

$$g_0(z) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{Re} \left[ W(z) \beta(z) \frac{(z-x)^l}{(1-xz)^{k+1}} \right],$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{2}{(k-l)!} \frac{\partial^{k-l}}{\partial z^{k-l}} \left[ \frac{\alpha(z) \beta(z)}{z(1-xz)^{k+1-l}} \right] \Big|_{z=x}, & x \neq 0, \\ 2 \sum_{j=1}^{k+1-l} \alpha_j^2, & x = 0, l \neq 0, \\ 2 \left[ \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 + (1 + W^2(0)) \alpha_{k+1}^2 \right], & x = l = 0, \end{cases}$$

является экстремальной, а

$$E_2(x, \lambda, Z_\nu) = \sqrt{\varepsilon}.$$

*Доказательство.* Положим

$$W_0(z) = \left( \frac{z-x}{1-xz} \right)^l W(z), \quad f_0(z) = W_0(z) \frac{\beta(z)}{(1-xz)^{k+1-l}},$$

$$g(z) = 2 \operatorname{Re} f_0(z), \quad Jf = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} g(z) f(z) \frac{dz}{z}.$$

Поскольку при  $|z| = 1$

$$g(z) = f_0(z) + \overline{f_0(z)} = f_0(z) + \frac{\alpha(z)}{W_0(z)(z-x)^{k+1-l}},$$

то, применяя теорему о вычетах, можно убедиться, что

$$Jf = L_x^\lambda f - S_0 I f,$$

где  $S_0$  — метод (2.3) с коэффициентами (2.18). Если  $u \in h_2$ , то  $f = u + iv \in H_2$  ( $v$  — сопряженная функция). Поэтому при всех  $u \in h_2$  имеют место равенства

$$(2.19) \quad L_x^\lambda u - S_0 I u = \operatorname{Re} Jf = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Так как  $g \in h_2$  и  $Ig = 0$ , то из теоремы 1.2 следует, что метод  $S_0$  является наилучшим методом восстановления, функция  $g_0 = g/\|g\|_2$  — экстремальная, а  $E_2(x, \lambda, Z_\nu) = |L_x^\lambda g_0|$ . В силу равенства (2.19)

$$L_x^\lambda g = \|g\|_2^2 = 2 \operatorname{Re} Jf_0$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left( f_0^2(z) + \frac{\alpha(z)\beta(z)}{[(z-x)(1-xz)]^{k+1-l}} \right) \frac{dz}{z} \right] = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$E_2(x, \lambda, Z_\nu) = \frac{L_x^\lambda g}{\|g\|_2} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Теорема доказана. □

**Следствие 2.5.** *Метод*

$$S_0 I u = \frac{1}{1+W^2(0)} \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)} \frac{1-x_j^2}{1-x_j x} (1+x_j \omega_j^2(0)x) u(x_j)$$

является наилучшим методом восстановления функционала  $L_x^1 u = u(x)$  на классе  $Bh_2$  для системы  $Z_1$ , функция

$$g_0(z) = \sqrt{\frac{2}{1+W^2(0)} \frac{1-x^2}{1+x^2 W^2(0)}} \operatorname{Re} \left[ W(z) \frac{1+xW^2(0)z}{1-xz} \right]$$

является экстремальной и

$$E_2(x, 1, Z_1) = \sqrt{\frac{2}{1+W^2(0)} \frac{1+x^2W^2(0)}{1-x^2}} |W(x)|.$$

Обозначим через  $a_2$  пространство гармонических в  $D$  функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\| = \left( \frac{1}{\pi} \int_D |u(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty$$

( $\sigma$  — плоская мера Лебега). При замене гармонических на аналитические в  $D$  функции получаем пространство Бергмана  $A_2$ .

Введем следующие обозначения:

$$a = \frac{1+xy^{2n+1}}{n((1-y^2)+1-yx)}, \quad \alpha(x) = \frac{(x-y)^n}{(a+y^{2n})(1-yx)^{n+1}},$$

$$\psi(z) = \frac{1-yz}{1-xz}(a+xy^{2n}z),$$

$$\varphi(z) = (n+1) \frac{1-y^2}{(1-yz)^2} \psi(z) + \frac{z-y}{1-yz} \psi'(z).$$

**Теорема 2.3.** Пусть  $x, y$  — различные точки из интервала  $(-1, 1)$ , а  $Iu = (u(y), \dots, u^{(n-1)}(y))$ . Тогда метод

$$(2.20) \quad S_0 Iu = \sum_{m=0}^{n-1} c_m(x) u^{(m)}(y),$$

где

$$c_m(x) = \frac{\alpha(x)}{m!(n-m-1)!} \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial z^{n-m-1}} \left[ \frac{(1-yz)^{n+1}(az+xy^{2n})}{(x-z)z} \right] \Big|_{z=y},$$

является наилучшим методом восстановления функционала  $Lu = u(x)$  на классе  $Ba_2$ , функция

$$(2.21) \quad g_0(z) = \sqrt{\frac{2}{(1-yx)(a+y^{2n})\varphi(x)}} \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{z-y}{1-yz} \right)^n \varphi(z) \right]$$

является экстремальной, а для погрешности наилучшего восстановления справедливо равенство

$$(2.22) \quad E(L, I) = \left| \frac{x-y}{1-yx} \right|^n \sqrt{\frac{2\varphi(x)}{(1-yx)(a+y^{2n})}}.$$

*Доказательство.* Для  $f \in H_\infty$  рассмотрим интеграл

$$Jf = \alpha(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[ \frac{(1-yz)^{n+1}(az+xy^{2n})}{(z-y)^n(z-x)z} + \frac{1}{z} \left( \frac{z-y}{1-yz} \right)^n \varphi(z) \right] f(z) dz.$$

Пользуясь теоремой о вычетах, можно показать, что

$$Jf = f(x) - S_0If.$$

С другой стороны, по формуле Стокса

$$\begin{aligned} Jf &= \alpha(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[ \left( \frac{\bar{z}-y}{1-y\bar{z}} \right)^{n+1} \psi(\bar{z}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{z} \left( \frac{z-y}{1-yz} \right)^n \varphi(z) \right] f(z) dz \\ &= \alpha(x) \frac{1}{\pi} \int_D \left[ \left( \frac{\bar{z}-y}{1-y\bar{z}} \right)^n \overline{\varphi(z)} + \left( \frac{z-y}{1-yz} \right)^n \varphi(z) \right] f(z) d\sigma. \end{aligned}$$

Тем самым при всех  $f \in H_\infty$  имеет место равенство

$$(2.23) \quad f(x) - S_0If = \alpha(x) \frac{1}{\pi} \int_D g(z) f(z) d\sigma,$$

где

$$g(z) = 2 \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{z-y}{1-yz} \right)^n \varphi(z) \right].$$

В силу того, что функции из  $H_\infty$  плотны в  $A_2$ , равенство (2.23) справедливо для всех  $f \in A_2$ . Положим  $u = \operatorname{Re} f$ , из (2.23) получаем

$$(2.24) \quad u(x) - S_0Iu = \alpha(x) \frac{1}{\pi} \int_D g(z) u(z) d\sigma.$$

Если  $u \in a_2$ , то аналогично доказательству теоремы 4 при  $p = 2$  из работы [7, с. 380] доказывается, что сопряженная функция  $v \in a_2$ . Тогда  $u+iv \in A_2$  и, следовательно, равенство (2.24) имеет место для всех  $u \in a_2$ . Поскольку  $g \in a_2$  и  $Ig = 0$ , то из теоремы 1.2 следует, что метод (2.20) является наилучшим, а функция  $g_0 = g/\|g\|$  — экстремальной. Из равенства (2.24) при  $u = g$  получаем

$$\alpha(x) \|g\|^2 = g(x).$$

Таким образом,

$$g_0 = \sqrt{\frac{\alpha(x)}{g(x)}} g, \quad E(L, I) = |\alpha(x)| \|g\| = \sqrt{\alpha(x)g(x)}.$$

Подставляя в эти равенства выражения для  $\alpha(x)$  и  $g(x)$ , получим равенства (2.21) и (2.22). Теорема доказана.  $\square$

### § 3. Наилучшие квадратурные формулы

Рассмотрим задачу (1.1) для  $W = BH_\infty(G)$ ,

$$(3.1) \quad Lu = \int_a^b u(x) p(x) dx,$$

$$(3.2) \quad Iu = \{ u(x_1), \dots, u^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, u(x_n), \dots, u^{(\nu_n-1)}(x_n) \},$$

где  $x_j$  — различные вещественные точки из области  $G$ ,  $(a, b) \subset G$ , а  $p$  — неотрицательная и неэквивалентная нулю весовая функция. Соответствующую погрешность наилучшего восстановления (интегрирования) обозначим через  $r(G, Z_\nu, p)$ , где

$$(3.3) \quad Z_\nu = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix}.$$

В случае, когда  $\nu_1 = \dots = \nu_n = q$ , будем обозначать эту систему через  $Z_q$ .

**Теорема 3.1.** При четных  $\nu_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , квадратурная формула

$$(3.4) \quad S_0 I u = \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-1} a_{jm} u^{(m)}(x_j),$$

где

$$a_{jm} = \int_a^b c_{jm}(x) p(x) dx,$$

$$c_{jm}(x) = \frac{W(x)(1-x^2)}{m!(\nu_j - m - 1)!(1+W^2(x))} \times \frac{\partial^{\nu_j-m-1}}{\partial \nu_j-m-1} \left[ \frac{(1-x_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1-xz)(x-z)} \right] \Big|_{z=x_j},$$

является наилучшим методом интегрирования на классе  $Bh_\infty$ . Для ее погрешности имеет место равенство

$$r(D, Z_\nu, p) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} W(x) p(x) dx.$$

*Доказательство.* Из теоремы 2.1 следует, что при всех  $u \in Bh_\infty$  и всех  $x \in (-1, 1)$  справедливо неравенство

$$\left| u(x) - \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-1} c_{jm}(x) u^{(m)}(x_j) \right| \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} W(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} r(D, Z_\nu, p) &\leq \sup_{u \in Bh_\infty} \left| \int_a^b u(x) p(x) dx - S_0 I u \right| \\ &\leq \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} W(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} W(z) \in Bh_\infty$  и в силу равенства (1.9)

$$r(D, Z_\nu, p) \geq \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} W(x) p(x) dx.$$

Теорема доказана.  $\square$

Обозначим через  $Z_\nu^0$  систему (3.3) для узлов, определенных равенствами (2.15).

**Теорема 3.2.** Пусть  $[a, b] = [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ ,  $k \in (0, 1)$ . Тогда при всех четных  $q$  для системы  $Z_q^0$  и веса

$$(3.5) \quad s(x) = [(k - x^2)(1 - kx^2)]^{-1/2},$$

в квадратурной формуле (3.4)

$$(3.6) \quad a_{j,q-1} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Эта квадратурная формула является наилучшим методом интегрирования для системы  $Z_\nu^0$  на классе  $Bh_\infty$  при всех  $q-1 \leq \nu_j \leq q$ . Имеют место равенства

$$(3.7) \quad r(D, Z_\nu^0, s) = \frac{8K}{\pi\Lambda} J_q(\lambda) = \frac{8K}{\pi} \frac{2^{q/2}(q-1)!!}{(q/2)!} h^{qn/4} + O(h^{qn/4+n}),$$

где  $\lambda$  определено равенствами (2.14), а

$$I_q(\lambda) = \int_0^1 \frac{\arctan(\lambda^{q/2} x^q)}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)}} dx.$$

*Доказательство.* Из теоремы 3.1 имеем

$$a_{j,q-1} = \frac{[1 - (x_j^0)^2]^q}{(q-1)! \omega_j(x_j^0)} A_j,$$

где

$$A_j = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{W(x)}{1+W^2(x)} \frac{1-x^2}{(1-x_j^0 x)(x-x_j^0)} s(x) dx.$$

Сделаем замены

$$(3.8) \quad t = \frac{x + \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}x}, \quad t_j = \frac{x_j^0 + \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}x_j^0}.$$

Получаем

$$(3.9) \quad A_j = \frac{(1 - \sqrt{k}t_j)^2}{1 - k^2} \int_0^l \frac{\Phi^q(t)}{1 + \Phi^{2q}(t)} \frac{1-t^2}{(1-t_j t)(t-t_j)} s_1(t) dt,$$

где

$$\Phi(t) = \prod_{j=1}^n \frac{t - t_j}{1 - t_j t}, \quad s_1(t) = [t(l-t)(1-lt)]^{-1/2}, \quad l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Пользуясь преобразованием Гаусса эллиптических функций и первым главным преобразованием  $2n$ -й степени [9, сс. 134, 136], можно убедиться, что

$$(3.10) \quad t_j = l \operatorname{sn}^2 \frac{2j-1}{2n} L, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Phi(l \operatorname{sn}^2 y) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left[ \left( \frac{2ny}{L} + 1 \right) \Lambda, \lambda \right]$$

(здесь и далее зависимость эллиптических функций от модуля не отмечается, если он равен  $l$ ). Сделаем в интеграле (3.9) замену  $t = l \operatorname{sn}^2 y$ . Тогда, положив  $f(x) = \lambda^{q/2} x^q (1 + \lambda^q x^{2q})^{-1}$ ,  $y_j = \frac{2j-1}{2n} L$ , будем иметь

$$A_j = \frac{(1 - \sqrt{k} t_j)^2}{(1 - k)\sqrt{k}} \int_0^L f \left( \operatorname{sn} \left[ \left( \frac{2ny}{L} + 1 \right) \Lambda, \lambda \right] \right) \times \frac{1 - l^2 \operatorname{sn}^4 y}{(1 - l^2 \operatorname{sn}^2 y_j \operatorname{sn}^2 y)(\operatorname{sn}^2 y - \operatorname{sn}^2 y_j)} dy.$$

Из леммы 2.2 работы [10] следует теперь, что  $A_j = 0$ .

Рассмотрим систему  $Z_\nu^0$  при  $q-1 \leq \nu_j \leq q$ . Имеем

$$r(D, Z_\nu^0, s) \leq \sup_{u \in Bh_\infty} \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} u(x) s(x) dx - \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{q-2} a_{jm} u^{(m)}(x_j^0) \right| = r(D, Z_q^0, s) \leq r(D, Z_\nu^0, s).$$

Тем самым

$$r(D, Z_\nu^0, s) = r(D, Z_q^0, s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} W(x) s(x) dx.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся теми же заменами переменных, что и при вычислении  $A_j$ . Тогда

$$r(D, Z_\nu^0, s) = \frac{8L}{\pi(1+k)} \int_0^L \operatorname{arctg} \left\{ \lambda^{\frac{q}{2}} \operatorname{sn}^q \left[ \left( \frac{2ny}{L} + 1 \right) \Lambda, \lambda \right] \right\} dy = \frac{8K}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arctg} \left[ \lambda^{\frac{q}{2}} \operatorname{sn}^q(t\Lambda, \lambda) \right] dt = \frac{8K}{\pi\Lambda} J_q(\lambda).$$

В силу равенств

$$J_q(\lambda) = \lambda^{\frac{q}{2}} \int_0^1 \frac{x^q}{\sqrt{1-x^2}} dx + O\left(\lambda^{\frac{q}{2}+2}\right), \quad \Lambda = \frac{\pi}{2} + O(\lambda^2),$$

имеем

$$r(D, Z_\nu^0, s) = \frac{8K}{\pi} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{\frac{q}{2}} \frac{(q-1)!!}{\left( \frac{q}{2} \right)!} + O\left(\lambda^{\frac{q}{2}+2}\right).$$

Из равенств (2.14) следует, что

$$(3.11) \quad \lambda = 4h^{\frac{n}{2}} + O\left(h^{\frac{3n}{2}}\right).$$

Отсюда вытекают равенства (3.7). Теорема доказана.  $\square$

Обозначим через  $T_\nu$  систему (3.3) для узлов (2.17).

**Теорема 3.3.** Пусть  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $q$  — четное число и

$$(3.12) \quad p_0(t) = (1 - t^2)^{-1/2}.$$

Тогда при всех  $q - 1 \leq \nu_j \leq q$  и  $c > 1$  имеют место равенства

$$(3.13) \quad r(\mathfrak{D}_c, T_\nu, p_0) = \frac{4}{\Lambda} J_q(\lambda) = 2^{\frac{q}{2}+2} \frac{(q-1)!!}{\left(\frac{q}{2}\right)!} c^{-qn} + O(c^{-(q+4)n}),$$

где  $\lambda$  определяется из равенства

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{4n}{\pi} \ln c.$$

Для всех  $\nu_j \leq 2$  и  $c > 1$  квадратурная формула

$$(3.14) \quad \int_{-1}^1 u(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \pi \frac{1-d_n(c)}{n} \sum_{j=1}^n u\left(\cos \frac{2j-1}{2n} \pi\right),$$

где

$$(3.15) \quad d_n(c) = \frac{2\lambda^2}{\Lambda} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+\lambda^2 x^4) \sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)}} = 12c^{-4n} + O(c^{-8n}),$$

является наилучшим методом интегрирования на классе  $Bh_\infty(\mathfrak{D}_c)$ .

*Доказательство.* С помощью конформного отображения (2.16), переводящего внутренность эллипса  $\mathfrak{D}_c$  на единичный круг, а отрезок  $[-1, 1]$  в отрезок  $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ , задача построения наилучшего метода интегрирования на классе  $Bh_\infty(\mathfrak{D}_c)$  для системы  $T_\nu$  и веса  $p_0$  сводится к соответствующей задаче на классе  $Bh_\infty$  для системы  $Z_\nu^0$  и веса  $\frac{\pi}{2K}s$ . Тем самым

$$(3.16) \quad r(\mathfrak{D}_c, T_\nu, p_0) = \frac{\pi}{2K} r(D, Z_\nu^0, s).$$

Из равенств (2.14) следует, что  $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K}$  (см. [9, с. 284]). Следовательно,  $h = c^{-4}$ . Равенства (3.13) вытекают теперь из (3.16) и (3.7).

Заметим, что коэффициенты  $c_{jm}(x)$  из теоремы 3.1 лишь множителем  $[1 + W^2(x)]^{-1}$  отличаются от коэффициентов  $D_{jm}(x)$ , появляющихся в аналогичной задаче для класса  $BH_\infty$  в работе [10]. Поэтому, принимая во внимание (3.6), из леммы 2.1 работы [10] для

системы  $Z_2^0$  получаем равенства

$$\sum_{j=1}^n a_{j0} = \frac{\pi}{2K} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1 - W^2(x)}{1 + W^2(x)} s(x) dx,$$

$$a_{j0} = \frac{\pi}{2K} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} g_j(x) \frac{1 + W(x)}{1 + W^2(x)} s(x) dx,$$

где

$$g_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\varphi_j(x_j^0)} \frac{(1 - x^2)[1 - (x_j^0)^2]}{(1 - x_j^0 x)^2}, \quad \varphi_j(x) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{x - x_m^0}{1 - x_m^0 x}.$$

Сделав замены (3.8), будем иметь

$$a_{j0} = \frac{\pi}{2K(1+k)} \int_0^l \frac{\psi_j(t)}{\psi_j(t_j)} \frac{(1-t^2)(1-t_j^2)}{(1-t_j t)^2} \frac{1 + \Phi^2(t)}{1 + \Phi^4(t)} s_1(t) dt,$$

$$\psi_j(t) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{t - t_m}{1 - t_m t}.$$

В силу равенств (3.10)

$$\psi_j(t_j) = \Phi'(t_j)(1 - t_j^2) = (-1)^j \sqrt{\lambda} \frac{n\Lambda}{lL} \frac{1 - t_j^2}{\operatorname{sn} y_j \operatorname{cn} y_j \operatorname{dn} y_j}.$$

Отсюда, произведя замену  $t = l \operatorname{sn}^2 y$  и обозначив через  $f_1(x) = x(1 + \lambda x^2)(1 + \lambda^2 x^4)^{-1}$ , получим

$$a_{j0} = (-1)^{j+1} \frac{\pi}{n\Lambda} \int_0^L f_1 \left( \operatorname{sn} \left[ \left( \frac{2ny}{L} + 1 \right) \Lambda, \lambda \right] \right) \times \frac{\operatorname{sn} y_j \operatorname{cn} y_j \operatorname{dn} y_j (1 - l^2 \operatorname{sn}^4 y)}{\operatorname{sn}^2 y_j - \operatorname{sn}^2 y} (1 - l^2 \operatorname{sn}^2 y_j \operatorname{sn}^2 y) dy.$$

Из леммы 2.2 работы [10] следует, что  $a_{10} = \dots = a_{n0}$ . Таким образом,

$$a_{j0} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2K} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1 - W^2(x)}{1 + W^2(x)} s(x) dx.$$

Проведя серию замен, используемых в теореме 3.2 для вычисления величины  $r(D, Z_\nu^0, s)$ , находим

$$a_{j0} = \frac{\pi}{n\Lambda} \int_0^\Lambda \frac{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^4(t, \lambda)}{1 + \lambda^2 \operatorname{sn}^4(t, \lambda)} dt = \frac{\pi}{n} [1 - d_n(c)].$$

Равенство (3.15) получается из разложения  $d_n(c)$  по степеням  $\lambda$  и того, что вследствие равенства (3.11)  $\lambda = 4c^{-2n} + O(c^{-6n})$ . Теорема доказана.  $\square$

#### § 4. Оптимальные квадратурные формулы

Рассмотрим задачу (1.2) для случая, когда  $W = Bh_\infty(G)$ ,  $M$  состоит из одного функционала (3.1), а  $U$  состоит из операторов вида (3.2) для фиксированных кратностей  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  и различных вещественных точек  $x_1 < \dots < x_n$  из области  $G$ . Соответствующую величину  $R(M, U)$  обозначим в этом случае через  $R(G, \nu, p)$ , т. е.

$$(4.1) \quad R(G, \nu, p) = \inf_{\alpha < x_1 < \dots < x_n < \beta} r(G, Z_\nu, p),$$

где  $(\alpha, \beta) = G \cap \mathbb{R}$ . Точки  $x_1 < \dots < x_n$ , на которых достигается нижняя грань в (4.1), назовем оптимальными узлами.

Прежде всего докажем существование оптимальных узлов. Не ограничивая общности можно считать, что  $G = D$ .

Введем следующие обозначения:

$$W(x, \bar{y}) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{x - y_j}{1 - y_j x} \right)^{\nu_j}, \quad \Phi(x, \bar{y}) = W(x, \bar{y})w(x),$$

$$\varphi(\bar{y}) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} \Phi(x, \bar{y}) p(x) dx, \quad \varphi_j(\bar{y}) = \frac{\partial \varphi(\bar{y})}{\partial y_j};$$

здесь  $w(x)$  — непрерывная, неотрицательная и не равная тождественно нулю на  $[a, b]$  функция.

**Лемма 4.1.** Пусть  $-1 \leq a < b \leq 1$  и  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — четные натуральные числа. Тогда существует система точек  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , являющаяся решением задачи

$$(4.2) \quad \varphi(\bar{y}) \rightarrow \inf, \quad -1 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq 1.$$

Причем всякая такая система удовлетворяет неравенствам

$$(4.3) \quad a < x_1 < \dots < x_n < b.$$

*Доказательство.* Существование решения задачи (4.2) очевидным образом вытекает из непрерывности функции  $\varphi(\bar{y})$ . Остается доказать, что для любой точки минимума  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  выполнены неравенства (4.3). Докажем, что  $x_1 > a$ . Если  $a = -1$ , то это следует из соотношений

$$1 = \left| \frac{x - a}{1 - ax} \right| > \left| \frac{x - y}{1 - yx} \right|,$$

справедливых при всех  $x, y \in (-1, 1)$ . Пусть  $-1 < x_1 = \dots = x_m \leq a$  и  $x_m < x_{m+1}$ , если  $m < n$ . Рассмотрим систему  $\bar{x}_\xi := (\xi, \dots, \xi, x_{m+1}, \dots, x_n)$  и функцию  $\alpha(\xi) = \varphi(\bar{x}_\xi)$ . Поскольку

$$\alpha'(x_m) = -\frac{4(\nu_1 + \dots + \nu_m)}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(x, \bar{x})}{1 + \Phi^2(x, \bar{x})} \times \frac{1 - x^2}{(1 - x_m x)(x - x_m)} p(x) dx < 0,$$

то существует  $\xi \in (x_m, x_{m+1})$  такое, что  $\varphi(\bar{x}_\xi) = \alpha(\xi) < \alpha(x_m) = \varphi(\bar{x})$ , а это противоречит экстремальности  $\bar{x}$ . Аналогично доказывается, что  $x_n < b$ .

Пусть теперь  $x_j = x_{j+1} = \dots = x_m = c$  и  $x_{j-1} < x_j$ , если  $j > 1$ , а  $x_m < x_{m+1}$ , если  $m < n$ . Рассмотрим для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  систему  $\bar{x}_\varepsilon = (x_1, \dots, x_{j-1}, c_1, c, \dots, c, c_2, x_{m+1}, \dots, x_n)$ , где  $c_1 = c - \nu_m \varepsilon$ ,  $c_2 = c + \nu_j \varepsilon$ . Положим  $\beta(\varepsilon) = \varphi(\bar{x}_\varepsilon)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \beta'(\varepsilon) = & -\varepsilon \frac{4\nu_j \nu_m (\nu_j + \nu_m)}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(x, \bar{x}_\varepsilon)}{1 + \Phi^2(x, \bar{x}_\varepsilon)} \\ & \times \frac{1 - [2c + (\nu_j - \nu_m)\varepsilon]x + x^2}{(1 - c_1 x)(x - c_1)(1 - c_2 x)(x - c_2)} (1 - x^2) p(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \beta''(0) = & -\frac{4\nu_j \nu_m (\nu_j + \nu_m)}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(x, \bar{x}_\varepsilon)}{1 + \Phi^2(x, \bar{x}_\varepsilon)} \\ & \times \frac{1 - 2cx + x^2}{(1 - cx)^2 (x - c)^2} (1 - x^2) p(x) dx < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно малых  $\varepsilon > 0$   $\varphi(\bar{x}_\varepsilon) = \beta(\varepsilon) < \beta(0) = \varphi(\bar{x})$ , что противоречит экстремальности  $\bar{x}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 4.1.** Пусть  $-1 \leq a < b \leq 1$ . Для любых кратностей  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  оптимальные узлы существуют и удовлетворяют условиям (4.3). Если  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — четные натуральные числа, то при всех  $\nu_j - 1 \leq \mu_j \leq \nu_j$  оптимальные узлы  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  совпадают с решением экстремальной задачи (4.2) для  $w(x) \equiv 1$ ; при этом квадратурная формула (3.4) является оптимальным методом интегрирования на классе  $Bh_\infty$  для всех  $\nu_j - 1 \leq \mu_j \leq \nu_j$ , а

$$R(D, \mu, p) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} W(x, \bar{x}) p(x) dx.$$

*Доказательство.* Из леммы 4.1 следует, что решение задачи (4.2) существует и всякое решение удовлетворяет условию (4.3). Пусть  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — какое-либо из этих решений для  $w(x) \equiv 1$ . Рассмотрим квадратурную формулу (3.4) для системы (3.3). Из теоремы 3.1 имеем

$$(4.4) \quad a_{j, \nu_j - 1} = -\frac{\pi(1 - x_j^2)^{\nu_j}}{4\nu_j! \omega_j(x_j)} \varphi_j(\bar{x}).$$

С другой стороны, в силу необходимого условия экстремума

$$(4.5) \quad \varphi_j(\bar{x}) = 0$$

и, следовательно,  $a_{j,\nu_j-1} = 0$ . Таким образом, при всех  $\nu_j - 1 \leq \mu_j \leq \nu_j$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} r(D, Z_\nu, p) &= \sup_{u \in Bh_\infty} \left| \int_a^b u(x)p(x) dx - \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-1} a_{jm}(x)u^{(m)}(x_j) \right| \\ &\geq r(D, Z_\mu, p) \geq R(D, \mu, p) \geq R(D, \nu, p) = r(D, Z_\nu, p). \end{aligned}$$

Отсюда

$$R(D, \mu, p) = r(D, Z_\mu, p) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} W(x, \bar{x})p(x) dx.$$

Пусть теперь  $\bar{x}$  — система оптимальных узлов для кратностей  $\mu$ . Тогда

$$\inf_{-1 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq 1} \varphi(\bar{y}) = R(D, \mu, p) = r(D, Z_\mu, p) \geq r(D, Z_\nu, p) = \varphi(\bar{x}).$$

Тем самым  $\bar{x}$  является решением задачи (4.2). Теорема доказана.  $\square$

Оказывается, что в общем случае оптимальные узлы могут быть неединственными. Рассмотрим в качестве примера случай, когда  $n = 1$ ,  $\nu_1 \leq 2$  и  $[a, b] = [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ . Из теоремы 4.1 следует, что оптимальные узлы совпадают в этом случае с точками, минимизирующими функцию

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-y}{1-yx} \right)^2 p(x) dx.$$

Покажем, что при всех  $k \in (2 - \sqrt{3}, 1]$  существует весовая функция, для которой  $\varphi$  имеет более одного минимума.

Положим  $p(x) = |x|^\alpha(1+x^4)^2$ ,  $\alpha > 0$ . Функция  $\varphi$  является в данном случае четной, поэтому, если  $y = 0$  не является минимумом, то минимумов более одного. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &= \frac{8}{\pi} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (1-x^4)(x^4-4x^2+1)|x|^\alpha dx \\ &= \frac{16k^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\pi(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+7)(\alpha+9)} [(1-k^2)(1-4k+k^2)\alpha^3 \\ &\quad + (19-68k+52k^3-11k^4)\alpha^2 + a_1(k)\alpha + a_2(k)]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при  $k \in (2 - \sqrt{3}, 1]$  для достаточно больших  $\alpha$   $\varphi''(0) < 0$  и, следовательно,  $y = 0$  не является минимумом.

Тем не менее мы докажем, что при некоторых условиях, которые фактически означают достаточную малость отрезка  $[a, b]$  (либо достаточно большую область гармоничности при фиксированном отрезке интегрирования), единственность есть.

Будем считать в дальнейшем, что  $[a, b] = [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ ,  $k \in (0, 1)$ . Положим

$$J(y_1, \dots, y_n, w, p, k) = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)},$$

$$\gamma_m(p, k) = \inf_{t_j} \int_{-1}^1 \prod_{j=1}^m (t - t_j)^2 p^*(\sqrt{kt}) dt,$$

где

$$p^*(\sqrt{kt}) = p(\sqrt{kt}) \left[ \int_{-1}^1 p(\sqrt{kt}) dt \right]^{-1}.$$

**Лемма 4.2.** Пусть  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — четные натуральные числа,  $N = \sum_{j=1}^n \nu_j$ ,  $\nu = \min_{1 \leq j \leq n} \nu_j$  и  $0 \leq w(x) \leq 1$ ,  $x \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ . Тогда если выполнено неравенство

$$(4.6) \quad N2^{N-1} \gamma_{\frac{N}{2}-1}^{-1}(wp, k) k(1 - k^2) \leq \nu - 1 - (9\nu - 7)k,$$

то для всех точек  $-\sqrt{k} < x_1 < \dots < x_n < \sqrt{k}$ , удовлетворяющих равенствам (4.5),  $J(x_1, \dots, x_n, w, p, k) > 0$ .

*Доказательство.* Обозначим элементы якобиана  $J(x_1, \dots, x_n, w, p, k)$  через  $a_{jm}$ . Тогда

$$a_{jj} = \frac{4\nu_j}{\pi} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{\Phi(x, \bar{x})(1 - x^2)}{[1 + \Phi^2(x, \bar{x})](1 - x_j x)^2 (x - x_j)^2} \times \left[ \nu_j \frac{1 - \Phi^2(x, \bar{x})}{1 + \Phi^2(x, \bar{x})} (1 - x^2) - 1 + 2x_j x - x^2 \right] p(x) dx.$$

В силу равенств (4.5)

$$a_{jj} = a_{jj} + \frac{2x_j}{1 + x_j^2} \varphi_j(\bar{x}) = \frac{4\nu_j}{\pi} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{\Phi(x, \bar{x})(1 - x^2)}{[1 + \Phi^2(x, \bar{x})](1 - x_j x)^2 (x - x_j)^2} \times \left[ \nu_j \frac{1 - \Phi^2(x, \bar{x})}{1 + \Phi^2(x, \bar{x})} (1 - x^2) - \frac{1 - x_j^2}{1 + x_j^2} (1 + x^2) \right] p(x) dx.$$

Положим  $\lambda = [2\sqrt{k}/(1 + k)]^N$ . Из неравенств (4.6) следует, что  $k \leq (\nu - 1)(9\nu - 7) < 1/9$ . Следовательно,  $\lambda < (0, 6)^2$ . Пользуясь этими неравенствами и тем, что  $\Phi(x, \bar{x}) \leq \lambda$  при  $x \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ , получаем

$$\begin{aligned} \nu_j \frac{1 - \Phi^2(x, \bar{x})}{1 + \Phi^2(x, \bar{x})} (1 - x^2) - \frac{1 - x_j^2}{1 + x_j^2} (1 + x^2) \\ \geq \nu \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} (1 - k) - 1 - k > \nu \frac{16}{27} - \frac{10}{9} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы при  $n = 1$ . Пусть теперь  $n > 1$ . Имеем

$$a_{jj} > \frac{4\nu_j}{\pi} \left[ \nu \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} (1 - k) - 1 - k \right] \frac{1 - k}{(1 + k)^{N+2} (1 + \lambda^2)} \\ \times \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (x - x_j)^{\nu_j - 2} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (x - x_m)^{\nu_m} w(x) p(x) dx.$$

Сделав замену  $x = \sqrt{kt}$ , будем иметь

$$(4.7) \quad a_{jj} > \frac{4\nu_j}{\pi} \left[ \nu \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} (1 - k) - 1 - k \right] \frac{k^{\frac{N-1}{2}} (1 - k)}{(1 + k)^{N+2} (1 + \lambda^2)} \\ \times \gamma_{\frac{N}{2}-1}(wp, k) \int_{-1}^1 w(\sqrt{kt}) p(\sqrt{kt}) dt.$$

При  $m \neq j$

$$a_{jm} = \frac{4\nu_j \nu_m}{\pi} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1 - \Phi^2(x, \bar{x})}{[1 + \Phi^2(x, \bar{x})]^2} \\ \times \frac{\Phi(x, \bar{x})(1 - x^2)^2}{(1 - x_j x)(x - x_j)(1 - x_m x)(x - x_m)} p(x) dx.$$

Отсюда

$$a_{jm} = a_{jm} + \frac{\nu_m(1 + x_j^2)\varphi_j(\bar{x}) - \nu_j(1 + x_m^2)\varphi_m(\bar{x})}{(x_j - x_m)(1 - x_m x_j)} = -\frac{8\nu_j \nu_m}{\pi} \\ \times \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{\Phi(x, \bar{x})(1 - x^2)[x^2 + \Phi^2(x, \bar{x})]}{[1 + \Phi^2(x, \bar{x})]^2 (1 - x_j x)(x - x_j)(1 - x_m x)(x - x_m)} p(x) dx.$$

Из неравенств

$$\frac{1}{1 - yx} \leq \frac{1}{1 - k}, \quad \frac{1 - x^2}{(1 - yx)^2} \leq \frac{1}{1 - k}, \quad \frac{x^2 + \Phi^2(x, \bar{x})}{[1 + \Phi^2(x, \bar{x})]^2} \leq \frac{k + \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2},$$

справедливых при всех  $x, y \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ , следует, что

$$|a_{jm}| \leq \frac{8\nu_j \nu_m}{\pi} \left( \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \right)^{N-2} \frac{k + \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2 (1 - k)^2} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} w(x) p(x) dx.$$

Тем самым

$$(4.8) \quad \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n |a_{jm}| < \frac{4\nu_j}{\pi} N 2^{N-1} \frac{k^{\frac{N-1}{2}} (k + \lambda^2)}{(1 + k)^{N-2} (1 + \lambda^2)^2 (1 - k)^2} \\ \times \int_{-1}^1 w(\sqrt{kt}) p(\sqrt{kt}) dt.$$

Для положительности якобиана  $J(x_1, \dots, x_n, w, p, k)$  достаточно потребовать выполнения неравенств

$$a_{jj} > \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n |a_{jm}|, \quad j = 1, \dots, n$$

(см., например, [11, с. 415]), которые в силу (4.7) и (4.8) будут выполнены, если

$$(4.9) \quad \alpha \frac{k + \lambda^2}{1 + \lambda^2} \leq \left[ \nu \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} (1 - k) - 1 - k \right] \left( \frac{1 - k}{1 + k} \right)^4,$$

где  $\alpha = N2^{N-1}\gamma_{\frac{N}{2}-1}^{-1}$ . Неравенство (4.9) эквивалентно неравенству

$$(4.10) \quad \alpha k + \frac{\lambda^2(1 - k)}{1 + \lambda^2} \left[ 2\nu \left( \frac{1 - k}{1 + k} \right)^4 + \alpha \right] \leq [\nu - 1 - k(\nu + 1)] \left( \frac{1 - k}{1 + k} \right)^4.$$

Можно показать, что для  $k \in [0, 1)$

$$(4.11) \quad [\nu - 1 - k(\nu + 1)] \left( \frac{1 - k}{1 + k} \right)^4 \geq \frac{\nu - 1 - (9\nu - 7)k}{1 - k^2} + \frac{39(\nu - 1)k^2}{(1 - k)(1 + k)^4}.$$

Из условия (4.6) и того, что при  $n > 1$   $N \geq 2\nu \geq 4$ , имеем

$$k \leq \frac{\nu - 1}{9\nu - 7 + \alpha(1 - k^2)}, \quad \lambda^2 \leq \left( \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \right)^8 \leq \frac{2^8 k^4}{(1 + k)^4}.$$

Пользуясь этими неравенствами, получаем

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda^2(1 - k)}{1 + \lambda^2} \left[ 2\nu \left( \frac{1 - k}{1 + k} \right)^4 + \alpha \right] &\leq \lambda^2(2\nu + \alpha) \\ &\leq \frac{2^8 k^2}{(1 + k)^4} \frac{(\nu - 1)^2(2\nu + \alpha)}{[9\nu - 7 + \alpha(1 - k^2)]^2} \\ &\leq \frac{2^8 k^2(\nu - 1)^2}{(1 - k^2)(1 + k)^4 [9\nu - 7 + \alpha(1 - k^2)]} \leq \frac{39(\nu - 1)k^2}{(1 - k)(1 + k)^4}. \end{aligned}$$

Справедливость неравенства (4.10) вытекает теперь из (4.11), (4.12) и (4.6). Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 4.2.** Пусть  $\mu_1, \dots, \mu_n$  — произвольные натуральные числа,  $\nu_j = 2 \left\lfloor \frac{\mu_j + 1}{2} \right\rfloor$ ,  $N = \sum_{j=1}^n \nu_j$ ,  $\nu = \min_{1 \leq j \leq n} \nu_j$ . Тогда при выполнении условия (4.6) для  $w(x) \equiv 1$  оптимальные узлы с кратностями  $\mu_1, \dots, \mu_n$  единственны, а необходимым и достаточным условием оптимальности узлов  $x_1 < \dots < x_n$  является выполнение для них равенств (4.5).

*Доказательство.* Из теоремы 4.1 следует, что достаточно доказать единственность точек  $x_1 < \dots < x_n$ , удовлетворяющих равенствам (4.5). Докажем, что для любой непрерывной функции  $0 \leq w(x) \leq 1$ , не равной тождественно нулю, решение системы (4.5) при выполнении условия (4.6) единственно. Для  $n = 1$  это утверждение следует из того, что по лемме 4.2 во всех точках, в которых  $\varphi_1(x_1) = 0$ ,  $\varphi_1'(x_1) > 0$ . Предположим, что единственность доказана для  $n - 1$ . Положим

$$w_\xi(x) = \left( \frac{x - \xi}{1 - \xi x} \right)^{\nu_n} w(x).$$

При любом  $\xi \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 w_\xi(\sqrt{kt})p(\sqrt{kt}) dt &\leq \left( \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right)^{\nu_n} \int_{-1}^1 w(\sqrt{kt})p(\sqrt{kt}) dt, \\ \inf_{t_j} \int_{-1}^1 \prod_{j=1}^m (t - t_j)^2 w_\xi(\sqrt{kt})p(\sqrt{kt}) dt \\ &\geq \left( \frac{\sqrt{k}}{1+k} \right)^{\nu_n} \inf_{t_j} \int_{-1}^1 \prod_{j=1}^{m+\frac{\nu_n}{2}} (t - t_j)^2 w(\sqrt{kt})p(\sqrt{kt}) dt. \end{aligned}$$

Тем самым

$$(4.13) \quad \gamma_m(w_\xi p, k) \geq 2^{-\nu_n} \gamma_{m+\frac{\nu_n}{2}}(wp, k).$$

Пусть  $\nu' = \min_{1 \leq j \leq n-1} \nu_j$ . Тогда из неравенства (4.13) и того, что  $\nu' \geq \nu$ , а  $k < 1/9$ , имеем

$$\begin{aligned} &(N - \nu_n) 2^{N-\nu_n-1} \gamma_{\frac{N-\nu_n}{2}-1}^{-1}(w_\xi p, k) k(1 - k^2) \\ &\leq N 2^{N-1} \gamma_{\frac{N}{2}-1}^{-1}(wp, k) k(1 - k^2) \leq \nu - 1 - (9\nu - 7)k \leq \nu' - 1 - (9\nu' - 7)k. \end{aligned}$$

Отсюда в силу предположения индукции вытекает, что в задаче с кратностями  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$  и функцией  $w_\xi(x)$  при всех  $\xi \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$  существует единственная система точек  $-\sqrt{k} < x_1(\xi) < \dots < x_{n-1}(\xi) < \sqrt{k}$ , удовлетворяющая равенствам (4.5). Далее, повторяя схему рассуждений из работ [12], [10], доказывается существование единственной точки  $\xi$  такой, что система  $-\sqrt{k} < x_1(\xi) < \dots < x_{n-1}(\xi) < \xi < \sqrt{k}$  удовлетворяет равенствам (4.5). Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть  $q$  — четное число. Тогда при всех

$$(4.14) \quad k \leq \frac{q - 1}{9q - 7 + nq4^{nq-2}}$$

узлы, определенные равенством (2.15), являются единственными оптимальными узлами для веса (3.5) и всех  $q - 1 \leq \mu_j \leq q$ ,  $j = 1, \dots, n$ , на классе  $Bh_\infty$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\int_{-1}^1 s(\sqrt{kt}) dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} K.$$

Для нормированного веса получаем

$$s^*(\sqrt{kt}) = \frac{1}{2K\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \geq \frac{1}{2K\sqrt{(1-t^2)}}.$$

Поэтому при  $m \geq 1$

$$\gamma_m(s, k) \geq \frac{1}{2K} \inf_{t_j} \int_{-1}^1 \prod_{j=1}^m (t - t_j)^2 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{1}{2K} \frac{\pi}{2^{2m-1}}.$$

С помощью разложения эллиптического интеграла  $K$  по степеням модуля  $k$  (см. [9, с. 152]) легко получить оценку

$$K \leq \frac{\pi}{2}(1 - k^2)^{-1}.$$

Таким образом, при  $m \geq 1$

$$(4.15) \quad \gamma_m^{-1}(s, k) \leq 2^{2m-1}(1 - k^2)^{-1}.$$

Пусть  $n > 1$ . Тогда условие (4.6) для  $w(x) \equiv 1$  и  $\nu_1 = \dots = \nu_n = q$  с учетом (4.15) будет выполнено, если

$$nq2^{nq-4}k \leq q - 1 - (9q - 7)k,$$

что эквивалентно неравенству (4.14). При  $n = 1$ , как следует из доказательства леммы 4.2, условие (4.6) может быть заменено на менее сильное —  $k < 1/9$ , которое очевидным образом является следствием (4.14). В силу теоремы 4.2 остается доказать, что узлы, определенные равенством (2.15), удовлетворяют системе (4.5). Из равенств (4.4) и (3.6) получаем

$$\varphi_j(\bar{x}) = -\frac{4q!\omega_j(x_j^0)}{\pi[1 - (x_j^0)^2]^q} a_{j,q-1} = 0.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 4.1.** Пусть  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $q$  — четное число. Тогда для всех

$$(4.16) \quad c \geq 2\sqrt{\frac{9q - 7 + nq4^{nq-2}}{q - 1}}$$

система узлов (2.17) является единственной оптимальной системой узлов для веса (3.12) при всех  $q - 1 \leq \mu_j \leq q$ ,  $j = 1, \dots, n$ , на классе  $Bh_\infty(\mathcal{E}_c)$ . В частности, при

$$c \geq \sqrt{44 + n2^{4n-1}}$$

квадратурная формула (3.14) является оптимальным методом интегрирования для всех  $\mu_j \leq 2$  на классе  $Bh_\infty(\mathcal{E}_c)$ .

*Доказательство.* С помощью конформного отображения (2.16) задача нахождения оптимальных узлов для веса (3.12) на классе  $Bh_\infty(\mathcal{E}_c)$  сводится к соответствующей задаче для веса  $\frac{\pi}{2K}$  на классе  $Bh_\infty$ , решение которой при выполнении условия (4.14) найдено в теореме 4.3. Из известных в теории эллиптических функций равенств

$$\sqrt{k} = 2h^{\frac{1}{4}} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} h^{m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} h^{m^2}}, \quad h = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

следует, что  $\sqrt{k} < 2h^{1/4} = 2c^{-1}$ . Тем самым неравенство (4.14) будет выполнено, если

$$4c^{-2} \leq \frac{q-1}{9q-7+nq4^{nq-2}},$$

что эквивалентно (4.16). Следствие доказано.  $\square$

### Список литературы

1. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. Optimal estimation in approximation theory. N. Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
2. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lect. Notes Math. 1985. V. 1129. P. 21–93.
3. *Трауб Дж., Вожьянковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
4. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991.
5. *Магарил-Ильев Г. Г., Чан Тхи Ле.* К задаче оптимального восстановления функционалов // УМН. 1987. Т. 42, № 2. С. 237–238.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. *Dieudonné J.* Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe // Ann. Ecole Norm. sup. 1931. S. 3. V. 48. P. 247–358.
8. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 4. С. 465–476.
9. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
10. *Осипенко К. Ю.* О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, № 1. С. 79–99.

11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
12. Војанов В. D. Extremal problems in a set of polynomials with fixed multiplicities of zeros // С. R. Acad. Bulgare Sci. 1978. V. 31, № 4. P. 377–380.

Московский авиационный  
технологический институт

Поступила в редакцию  
19.05.1989