УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА–ПОЛИА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ–СОБОЛЕВА

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе найден экстремум нормы k-ой производной функции комплексного переменного, аналитической в полосе, в метрике $L_2(\mathbb{R})$ при ограничении на норму самой функции в $L_2(\mathbb{R})$ и норму ее n-ой производной в метрике пространства Харди–Соболева. Изучается также тесно связанная с этой задачей задача об оптимальном восстановлении k-ой производной функции из класса Харди–Соболева по неточно заданному следу этой функции на вещественной оси. Получен оптимальный метод восстановления.

1. Постановки задач

В монографии [1] Харди, Литтлвуд и Полиа доказали, что для всех целых $0 < k < r$ имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-\frac{k}{r}} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k}{r}}, \tag{1}$$

справедливое для всех функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Неравенства типа (1) носят название *неравенств Ландау–Колмогорова*: Ландау [2] первый получил ряд точных результатов в подобных неравенствах, а Колмогоров [3] в 1939 г. получил один из самых ярких результатов в данной проблематике (им была найдена точная константа в неравенстве, подобном (1), когда все нормы задаются в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$). Более подробные сведения о неравенствах типа Ландау–Колмогорова для вещественных функций можно найти в работах [4] и [5].

Надо отметить, что уже в работе Колмогорова [3] был проявлен интерес к неравенствам такого вида для аналитических функций. Аналог неравенства Колмогорова для функций, аналитических в полосе $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$, был получен в [6]. В настоящей работе получен аналог неравенства Харди–Литлвуда-Полиа для функций, аналитических в полосе S_β, а также рассмотрен ряд задач оптимального восстановления, тесно связанных с этим неравенством. Неравенства для производных функций, аналитических

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №05-01-00275, №05-01-00261) и программы “Университеты России"(УР.03.01.130, УР.04.02.536).

в полосе S_β, интересны еще и тем, что при предельном переходе, когда $\beta \to 0$, получаются точные неравенства для вещественного случая.

Перейдем к точной постановке задачи. *Пространством Харди* $\mathcal{H}_2^\beta$ называется множество функций $f(\cdot)$, аналитических в полосе S_β, для которых

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} = \left(\sup_{0\le\eta<\beta}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(|f(t+i\eta)|^2+|f(t-i\eta)|^2)\,dt\right)^{1/2}<\infty.$$

Через $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$ (*пространство Харди–Соболева*) будем обозначать множество аналитических в полосе S_β функций, для которых $f^{(r)}(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta$.

Под точным неравенством Харди–Литтлвуда–Полиа для функций из $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$ будем понимать задачу о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R})\\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}\le\gamma_1\\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\gamma_2}}\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \tag{2}$$

для любых $\gamma_1,\gamma_2>0$. Мы будем рассматривать более общую задачу (об оптимальном восстановлении k-ой производной функции $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по неточным значением самой функции $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}$), при решении которой будет найдена величина (2).

Обозначим через $H_2^{r,\beta}$ множество функций $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}$, для которых $\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}\le 1$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления k-ой производной функции $f(\cdot)\in H_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R})$ по ее следу на $\mathbb{R}$, заданному с погрешностью в метрике $L_2(\mathbb{R})$, т.е. считается, что вместо следа на $\mathbb{R}$ функции $f(\cdot)$ известна функция $y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|f(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta.$$

Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить на $\mathbb{R}$ наилучшим образом функцию $f^{(k)}(\cdot)$.

В качестве *методов восстановления* будут рассматриваться произвольные операторы $\varphi\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$. Для данного метода восстановления φ его *погрешностью* назовем величину

$$e_k(H_2^{r,\beta},\delta,\varphi)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in H_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|f(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}}\|f^{(k)}(\cdot)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_k(H_2^{r,\beta},\delta)=\inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}e_k(H_2^{r,\beta},\delta,\varphi),$$

а *оптимальным методом восстановления* — метод, на котором достигается нижняя грань.

Рассмотрим еще одну экстремальную задачу — об оценке $L_2(\mathbb{R})$-нормы функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ на прямой $\operatorname{Im} z = \rho$, $-\beta < \rho < \beta$, через ее $L_2(\mathbb{R})$-нормы граничных значений на прямых $\operatorname{Im} z = \pm\beta$ (хорошо известно, что у функций из $\mathcal{H}_2^\beta$ почти всюду существуют граничные значения на прямых $\operatorname{Im} z = \pm\beta$, являющиеся функциями из $L_2(\mathbb{R})$). Тем самым речь идет об экстремальной задаче

$$\|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_1, \quad \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_2. \tag{3}$$

Результат подобного типа, когда нормы берутся в пространствах $L_\infty(\mathbb{R})$, а функции являются аналитическими и ограниченными в полосе, известен как теорема о трех прямых (см., например, [7]). Соответствующий результат для круга — теорема Адамара о трех кругах [8].

Свяжем с экстремальной задачей (3) задачу об оптимальном восстановлении функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ на прямой $\operatorname{Im} z = \rho$ по ее приближенным граничным значениям на прямых $\operatorname{Im} z = \pm\beta$. Более точно, будем считать, что для каждой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|f(\cdot - i\beta) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_1, \quad \|f(\cdot + i\beta) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_2.$$

Требуется по функциям $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ восстановить функцию $f(\cdot + i\rho)$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные операторы $\varphi\colon L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Для данного метода φ его погрешность определяется равенством

$$e_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta,\ y_1(\cdot), y_2(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}) \\ \|f(\cdot+i\beta)-y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_1 \\ \|f(\cdot-i\beta)-y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_2}} \|f(\cdot + i\rho) - \varphi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} e_\rho(\mathcal{H}_2^\beta, \delta_1, \delta_2, \varphi).$$

2. Основные результаты

Пусть $r \in \mathbb{N}$ и β — положительное вещественное число. Функция $t^r\sqrt{\operatorname{ch} 2\beta t}$ монотонно возрастает при $t \in \mathbb{R}_+$ от 0 до $+\infty$. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение уравнения

$$t^r\sqrt{\operatorname{ch} 2\beta t} = x,$$

принадлежащее интервалу $[0, +\infty)$. Обозначим его через $\mu_{r\beta}(x)$.

Теорема 1. *Пусть $r,k\in\mathbb{N}$ и $k\le r$. При всех $\gamma_1,\gamma_2>0$ имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R})\\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}\le\gamma_1\\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\gamma_2}}\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}=\gamma_2\mu_{r\beta}^k\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right).$$

Иными словами, теорема 1 утверждает, что для всех функций из пространства $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$, отличных от тождественного нуля, имеет место точное неравенство

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\mu_{r\beta}^k\left(\frac{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}}{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть $r,k\in\mathbb{N}$, $k\le r$ и $\delta>0$. Тогда для погрешности оптимального восстановления k-ой производной имеет место равенство*

$$E_k(H_2^{r,\beta},\delta)=\delta\mu_{r\beta}^k(\delta^{-1}),$$

а метод

$$\varphi_0(y)(\cdot)=(\mathcal{K}_{k,\delta}^{r,\beta}*y)(\cdot),$$

где

$$\begin{aligned}(4)\quad &\mathcal{K}_{k,\delta}^{r,\beta}(x)\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(it)^k\left(1+\frac{k\delta^2t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}{r-k+\beta\mu_{r\beta}(\delta^{-1})\operatorname{th}(2\beta\mu_{r\beta}(\delta^{-1}))}\right)^{-1}e^{ixt}\,dt,\end{aligned}$$

является оптимальным методом восстановления.

Теорема 3. *При всех $-\beta<\rho<\beta$ и $\delta_1,\delta_2>0$ имеют место равенства*

$$E_\rho(\mathcal{H}_2^\beta,\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta\\ \|f(\cdot-i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_1\\ \|f(\cdot+i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_2}}\|f(\cdot+i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})}=\delta_1^{\frac{\beta-\rho}{2\beta}}\delta_2^{\frac{\beta+\rho}{2\beta}},$$

а метод

$$\begin{aligned}\varphi_0(y_1,y_2)(x)=\delta_2^2(\beta-\rho)(\mathcal{K}_{\delta_1,\delta_2}^{\rho,\beta}*y_1)(x-i(\beta-\rho))\\ +\delta_1^2(\beta+\rho)(\mathcal{K}_{\delta_1,\delta_2}^{\rho,\beta}*y_2)(x+i(\beta+\rho)),\end{aligned}$$

где

$$(5)\qquad \mathcal{K}_{\delta_1,\delta_2}^{\rho,\beta}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixt}}{\delta_2^2(\beta-\rho)e^{2\beta t}+\delta_1^2(\beta+\rho)e^{-2\beta t}}\,dt,$$

является оптимальным.

Из теоремы 3, в частности, вытекает, что при $-\beta < \rho < \beta$ для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^\beta$ имеет место точное неравенство

$$\|f(\cdot + i\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \|f(\cdot - i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{\beta-\rho}{2\beta}} \|f(\cdot + i\beta)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{\rho+\beta}{2\beta}}.$$

3. Доказательства

Для доказательства теорем 1 и 2 нам потребуется один общий результат об оптимальном восстановлении линейных операторов, основанный на методе, разработанном в [9], [10]. Начнем с постановки некоторой общей задачи об оптимальном восстановлении.

Пусть X — линейное пространство, $Y_1, \dots, Y_p$ — линейные пространства с полускалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$, $j = 1, \dots, p$, и соответствующими полунормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j = 1, \dots, p$, $Y_s = L_\infty(\Delta_s)$, $\Delta_s \subseteq \mathbb{R}$, $s = p+1, \dots, m$, $I_j\colon X \to Y_j$, $j = 1, \dots, m$, — линейные операторы, а Z — линейное нормированное пространство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора $T\colon X \to Z$ на множестве

$$W = \{\, x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, l,\ 0 \le l \le p \,\}$$

по значениям операторов $I_{l+1}, \dots, I_m$, заданным с погрешностью (при $l = 0$ полагаем $W = X$). Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_{l+1}, \dots, y_p, y_{p+1}(\cdot), \dots, y_m(\cdot)) \in Y_{l+1} \times \ldots \times Y_m$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j$, $j = l+1, \dots, p$, и $|I_s x(t) - y_s(t)| \le \delta_s(t)$ для почти всех $t \in \Delta_s$, $s = p+1, \dots, m$ (в дальнейшем для функций из $L_\infty(\Delta_s)$ не будем отмечать каждый раз, что неравенства понимаются выполненными почти всюду на Δ_s).

В качестве *методов восстановления* оператора T рассматриваются всевозможные операторы $\varphi\colon Y_{l+1} \times \ldots \times Y_m \to Z$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ называется величина

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in Y_{l+1} \times \ldots \times Y_m \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = l+1, \dots, p \\ |I_s x(t) - y_s(t)| \le \delta_s(t),\ s = p+1, \dots, m}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z$$

(здесь $I = (I_{l+1}, \dots, I_m)$, $\delta = (\delta_{l+1}, \dots, \delta_p, \delta_{p+1}(\cdot), \dots, \delta_m(\cdot))$). *Погрешностью оптимального восстановления* называется величина

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi\colon Y_{l+1} \times \ldots \times Y_m \to Z} e(T, W, I, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется *оптимальным*.

С поставленной задачей восстановления тесно связана экстремальная задача

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le \delta_j^2,\ j = 1, \dots, p, \quad |I_s x(t)|^2 \le \delta_s^2(t),\ s = p+1, \dots, m. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathcal{L}(x,\lambda)$ функцию Лагранжа для этой экстремальной задачи

$$\mathcal{L}(x,\lambda)=-\|Tx\|_Z^2+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\|I_jx\|_{Y_j}^2+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\lambda_s(t)|I_sx(t)|^2\,dt,$$

где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p,\lambda_{p+1}(\cdot),\dots\lambda_m(\cdot))$, $\lambda_j\ge 0$, $j=1,\dots,p$, а $\lambda_s(\cdot)$ — измеримые неотрицательные функции на Δ_s, $s=p+1,\dots,m$.

Теорема 4. *Пусть существуют измеримые неотрицательные на Δ_s функции $\widehat{\lambda}_s(\cdot)$, $s=p+1,\dots,m$ и $\widehat{\lambda}_j\ge 0$, $j=1,\dots,p$, такие, что для $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\dots,\widehat{\lambda}_p,\widehat{\lambda}_{p+1}(\cdot),\dots\widehat{\lambda}_m(\cdot))$*

(a) $\quad\mathcal{L}(x,\widehat{\lambda})\ge 0\quad\forall x\in X.$

Пусть, кроме того, существует такая последовательность $\{x_n\}$ допустимых элементов в (6), что выполнены условия:

(b) $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{L}(x_n,\widehat{\lambda})=0,$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\left(\|I_jx_n\|_{Y_j}^2-\delta_j^2\right)+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)\left(|I_sx_n(t)|^2-\delta_s^2(t)\right)\,dt\right)=0.$$

Тогда значение экстремальной задачи (6) равно

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)\delta_s^2(t)\,dt.$$

Если при этом для всех $y=(y_{l+1},\dots,y_p,y_{p+1}(\cdot),\dots,y_m(\cdot))\in Y_{l+1}\times\dots\times Y_m$ существует x_y — решение экстремальной задачи

$$\sum_{j=1}^{l}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2+\sum_{j=l+1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|_{Y_j}^2+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)|I_sx(t)-y_s(t)|^2\,dt\to\min,\quad x\in X, \tag{7}$$

то

$$\varphi_0(y)=Tx_y \tag{8}$$

— оптимальный метод восстановления и

$$E(T,W,I,\delta)=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)\delta_s^2(t)\,dt}. \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что значения задачи (6) и задачи

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{s=p+1}^{m} \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) |I_s x(t)|^2 \, dt \le S, \tag{10}$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \sum_{s=p+1}^{m} \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) \delta_s^2(t) \, dt,$$

совпадают и равны S. Действительно, для любого допустимого в (6) или в (10) элемента $x \in X$ имеем с учетом (a)

$$\begin{aligned} -\|Tx\|_Z^2 \ge -\|Tx\|_Z^2 &+ \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j x\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) \\ &+ \sum_{s=p+1}^{m} \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) \left(|I_s x(t)|^2 - \delta_s^2(t) \right) \, dt \ge -S. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя последовательно (c) и (b), получаем, что

$$\begin{aligned} -\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \Bigg(&-\|Tx_n\|_Z^2 + \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j x_n\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) \\ &+ \sum_{s=p+1}^{m} \int_{\Delta_s} \widehat{\lambda}_s(t) \left(|I_s x_n(t)|^2 - \delta_s^2(t) \right) \, dt \Bigg) = -S, \end{aligned}$$

т. е. S — значение задач (6) и (10).

Оценка снизу. Для любого метода φ при всех $x \in W$ таких, что $\|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j$, $j = l+1, \ldots, p$ и $|I_s x(t)| \le \delta_s(t)$, $s = p+1, \ldots, m$, имеем

$$2\|Tx\|_Z \le \|Tx - \varphi(0)\|_Z + \|T(-x) - \varphi(0)\|_Z \le 2e(T, W, I, \delta, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) \ge \sup_{\substack{x \in W \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j, \ j = l+1, \ldots, p \\ |I_s x(t)| \le \delta_s(t), \ s = p+1, \ldots, m}} \|Tx\|_Z = \sqrt{S}.$$

Таким образом,

$$E(T, W, I, \delta) \ge \sqrt{S}. \tag{11}$$

Оценка сверху. Рассмотрим линейное пространство $E = Y_1 \times \ldots \times Y_m$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\lambda}_j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j} + \sum_{s=p+1}^{m} \int_{\Delta_j} \widehat{\lambda}_s(t) y_j^1(t) \overline{y_j^2(t)} \, dt.$$

Тогда экстремальная задача (7) может быть переписана в виде

$$\|\widetilde{I} x - \widehat{y}\|_E^2 \to \min, \quad x \in X,$$

где $\widetilde{I}=(I_1,\dots,I_m)$, а $\widehat{y}=(0,\dots,0,y_{l+1},\dots,y_p,y_{p+1}(\cdot),\dots,y_m(\cdot))$. Если x_y — решение этой задачи, то нетрудно показать, что для всех $x\in X$ выполняется равенство

$$(\widetilde{I}x_y-\widehat{y},\widetilde{I}x)_E=0.$$

Отсюда следует, что

$$\|\widetilde{I}x-\widehat{y}\|_E^2=\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|_E^2+\|\widetilde{I}x_y-\widehat{y}\|_E^2. \tag{12}$$

Если $x\in W$, а $\widehat{y}$ таков, что $\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j$, $j=l+1,\dots,p$, $|I_sx(t)-y_s(t)|\le\delta_s(t)$ почти всюду на Δ_s, $s=p+1,\dots,m$, то из (12) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\widetilde{I}x-\widetilde{I}x_y\|_E^2\le\|\widetilde{I}x-\widehat{y}\|_E^2=\sum_{j=1}^{l}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2+\sum_{j=l+1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|I_jx-y_j\|_{Y_j}^2\\+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)|I_sx(t)-y_s(t)|^2\,dt\le S.\end{aligned}$$

Полагая $z=x-x_y$, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)|I_sz(t)|^2\,dt\le S.$$

Тем самым для метода (8) имеем

$$\begin{aligned}&\|Tx-\varphi_0(y)\|_Z=\|Tz\|_Z\\&\quad\le\sup\biggl\{\|Tx\|_Z:\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^2+\sum_{s=p+1}^{m}\int_{\Delta_s}\widehat{\lambda}_s(t)|I_sx(t)|^2\,dt\le S\biggr\}\\&\quad=\sqrt{S}.\end{aligned}$$

Учитывая (11), получаем равенство (9) и оптимальность метода (8). □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2\to\max,\quad\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2\le\gamma_1^2,\quad\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2\le\gamma_2^2. \tag{13}$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=-\|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2+\lambda_1\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}^2+\lambda_2\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

По основной теореме о представлении функций из пространств $\mathcal{H}_2$ над трубчатыми областями (см. [7]) следует, что $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta$ в том и только в том случае, если она имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(t)e^{izt}\,dt, \tag{14}$$

где $\widehat{f}(\cdot)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{|y|<\beta}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(t)|^2e^{-2yt}\,dt<\infty$$

($\widehat{f}(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$). Из теоремы Планшереля вытекает тогда, что

$$\|f(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta}=\frac{1}{2\pi}\sup_{0\le y<\beta}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(t)|^2\operatorname{ch}2yt\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t\,dt.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1}|\widehat{f}(\cdot)|^2=u(\cdot)$, будем иметь

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=\int_{\mathbb{R}}(-t^{2k}+\lambda_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t+\lambda_2)u(t)\,dt.$$

Положим

$$\alpha(t)=-1+\lambda_1t^{2(r-k)}\operatorname{ch}2\beta t+\lambda_2t^{-2k}.$$

Нетрудно убедиться, что $\alpha(t)$ — выпуклая функция при $t>0$. Поэтому если в некоторой точке $t_0>0$ выполняются равенства

$$\alpha(t_0)=\alpha'(t_0)=0, \tag{15}$$

то $\alpha(t)\ge0$ при всех $t\ge0$. Пусть t_0 — положительное решение уравнения

$$\gamma_2^2t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t=\gamma_1^2, \tag{16}$$

т. е. $t_0=\mu_{r\beta}(\gamma_1/\gamma_2)$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ так, чтобы выполнялись равенства (15). Имеем

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{kt_0^{2(k-r)}}{r\operatorname{ch}2\beta t_0+t_0\beta\operatorname{sh}2\beta t_0},$$
$$\widehat{\lambda}_2=\frac{(r-k)t_0^{2k}\operatorname{ch}2\beta t_0+t_0^{2k+1}\beta\operatorname{sh}2\beta t_0}{r\operatorname{ch}2\beta t_0+t_0\beta\operatorname{sh}2\beta t_0}.$$

Таким образом, для так выбранных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ для всех $t\in\mathbb{R}$

$$-t^{2k}+\widehat{\lambda}_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t+\widehat{\lambda}_2\ge0.$$

Следовательно, для всех $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\ge0.$$

Положим для достаточно больших n (таких, что $t_0-1/n>0$)

$$u_n(t)=\begin{cases}\gamma_2^2n, & t\in(t_0-1/n,t_0),\\ 0, & t\notin(t_0-1/n,t_0).\end{cases}$$

Обозначим через $f_n(\cdot)$ последовательность функций, получаемую по формуле (14) для $\widehat{f}(\cdot)=\sqrt{2\pi u_n(\cdot)}$. Имеем

$$\|f_n(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\|u_n(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\gamma_2^2,$$

а

$$\|f_n^{(r)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\gamma_2^2 n\int_{t_0-1/n}^{t_0} t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\,dt\le\gamma_2^2t_0^{2r}\operatorname{ch}2\beta t_0=\gamma_1^2,$$

т. е. функции $f_n(\cdot)$ являются допустимыми в задаче (13). Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(f_n(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0, \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{(r)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\gamma_1^2. \tag{18}$$

Из теоремы 4 следует, что значение экстремальной задачи (13) равно

$$\widehat{\lambda}_1\gamma_1^2+\widehat{\lambda}_2\gamma_2^2=\gamma_2^2\mu_{r\beta}^{2k}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right).$$

□

Доказательство теоремы 2. Положим $\gamma_1=1$, $\gamma_2=\delta$ и для соответствующих $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ при некотором $y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1\|f^{(r)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta}+\widehat{\lambda}_2\|f(\cdot)-y(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\min,\quad f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}).$$

Переходя к образам Фурье, можем записать эту задача в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\widehat{\lambda}_1t^{2r}|\widehat{f}(t)|^2\operatorname{ch}2\beta t+\widehat{\lambda}_2|\widehat{f}(\cdot)-\widehat{y}(\cdot)|^2)\,dt\to\min,$$
$$f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}).$$

Легко показать, что решением этой задачи является функция

$$\widehat{f}_y(t)=\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}\widehat{y}(t).$$

Из теоремы 4 вытекает, что метод

$$\varphi_0(y)(\cdot)=f_y^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным. Так как преобразование Фурье функции $f_y^{(k)}(\cdot)$ равно

$$(it)^k\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t}\widehat{y}(t),$$

то ее можно записать в виде свертки функции $y(\cdot)$ и функции $\mathcal{K}_{k,\delta}^{r,\beta}(\cdot)$, определенной равенством (4). □

Доказательство теоремы 3. Перейдем для удобства к квадратам в экстремальной задаче (3)

$$\|f(\cdot+i\rho)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad\|f(\cdot-i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_1^2,$$
$$\|f(\cdot+i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_2^2. \tag{19}$$

и запишем соответствующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2) = -\|f(\cdot+i\rho)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \lambda_1\|f(\cdot-i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \\ + \lambda_2\|f(\cdot+i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

В силу представления (14), переходя к образам Фурье, по теореме Планшереля будем иметь

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-e^{-2\rho t} + \lambda_1 e^{2\beta t} + \lambda_2 e^{-2\beta t})|\widehat{f}(t)|^2\,dt.$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\gamma(t) = -1 + \lambda_1 e^{2(\beta+\rho)t} + \lambda_2 e^{-2(\beta-\rho)t}$$

является выпуклой на $\mathbb{R}$. Поэтому если для некоторой точки $t_0\in\mathbb{R}$

$$\gamma(t_0) = \gamma'(t_0) = 0, \tag{20}$$

то $\gamma(t)\ge 0$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Положим

$$t_0 = \frac{\ln\delta_1 - \ln\delta_2}{2\beta}$$

и выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условия (20). Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\beta-\rho}{2\beta}e^{-2(\beta+\rho)t_0}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\beta+\rho}{2\beta}e^{2(\beta-\rho)t_0}.$$

Тем самым для всех $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta$

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\ge 0.$$

Обозначим для достаточно больших n через $f_n(\cdot)$ последовательность функций, получаемую по формуле (14) для

$$\widehat{f}_n(t) = \begin{cases} A_n, & t\in(t_0-1/n, t_0+1/n),\\ 0, & t\notin(t_0-1/n, t_0+1/n),\end{cases}$$

где

$$A_n = n\sqrt{\frac{\pi\delta_1\delta_2}{n+1}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|f_n(\cdot-i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}_n(t)|^2e^{2\beta t}\,dt = \delta_1^2\frac{n}{n+1}\frac{\operatorname{sh}2\beta/n}{2\beta/n},$$
$$\|f_n(\cdot+i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}_n(t)|^2e^{-2\beta t}\,dt = \delta_2^2\frac{n}{n+1}\frac{\operatorname{sh}2\beta/n}{2\beta/n}.$$

В силу того, что при достаточно больших n

$$\frac{\operatorname{sh}2\beta/n}{2\beta/n} < 1+1/n,$$

последовательность $\widehat{f}_n(\cdot)$ является при достаточно больших n допустимой в задаче (19), а кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(\cdot-i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\delta_1^2,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(\cdot+i\beta)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\delta_2^2.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(f_n(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0.$$

Тем самым из теоремы 4 вытекает, что значение экстремальной задачи (19) равно

$$\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2=\delta_1^{\frac{\beta-\rho}{\beta}}\delta_2^{\frac{\beta+\rho}{\beta}}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1\|f(\cdot-i\beta)-y_1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+\widehat{\lambda}_2\|f(\cdot+i\beta)-y_2(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\min,\quad f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta.$$

Переходя к образам Фурье и пользуясь равенством (14), перепишем эту задачу в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\widehat{\lambda}_1|\widehat{f}(t)e^{\beta t}-\widehat{y}_1(t)|^2+\widehat{\lambda}_2|\widehat{f}(t)e^{-\beta t}-\widehat{y}_2(t)|^2\right)dt\to\min,$$
$$f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^\beta.$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция $f_{y_1,y_2}(\cdot)$ такая, что

$$\widehat{f}_{y_1,y_2}(t)=\frac{\widehat{\lambda}_1e^{\beta t}\widehat{y}_1(t)+\widehat{\lambda}_2e^{-\beta t}\widehat{y}_2(t)}{\widehat{\lambda}_1e^{2\beta t}+\widehat{\lambda}_2e^{-2\beta t}}.$$

Из теоремы 4 следует, что метод

$$\varphi_0(y_1,y_2)(\cdot)=f_{y_1,y_2}(\cdot+i\rho)$$

является оптимальным. Имеем

$$\begin{aligned}&\varphi_0(y_1,y_2)(x)\\&\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\delta_2^2(\beta-\rho)e^{\beta t}y_1(t)+\delta_1^2(\beta+\rho)e^{-\beta t}y_2(t)}{\delta_2^2(\beta-\rho)e^{2\beta t}+\delta_1^2(\beta+\rho)e^{-2\beta t}}e^{i(x+i\rho)t}\,dt\\&=\delta_2^2(\beta-\rho)(\mathcal{K}^{\rho,\beta}_{\delta_1,\delta_2}*y_1)(x-i(\beta-\rho))+\delta_1^2(\beta+\rho)(\mathcal{K}^{\rho,\beta}_{\delta_1,\delta_2}*y_2)(x+i(\beta+\rho)),\end{aligned}$$

где ядро $\mathcal{K}^{\rho,\beta}_{\delta_1,\delta_2}(\cdot)$ определено равенством (5). $\square$

4. Дальнейшие результаты

4.1. **Восстановление k-ой производной на всей полосе.** Неравенства для производных аналитических функций и связанные с ними задачи восстановления являются в определенном смысле промежуточным случаем между одномерными и многомерными задачами. Однако уже здесь имеется некоторое многообразие, связанное, в частности, с тем, что оптимальное восстановление может быть рассмотрено на различных областях (впрочем как и задание исходной информации о функции). В качестве примера рассмотрим задачу оптимального восстановления k-ой производной функции $f(\cdot) \in H_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$ на всей полосе S_β по ее следу на $\mathbb{R}$, заданному с погрешностью в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

В качестве методов восстановления будут рассматриваться произвольные операторы $\varphi\colon L_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}_2^\beta$. Для данного метода восстановления φ его погрешностью назовем величину

$$e_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in H_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}) \\ \|f(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}} \|f^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{R})\to\mathcal{H}_2^\beta} e_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta, \varphi),$$

а оптимальным методом восстановления — метод, на котором достигается нижняя грань.

Соответствующая задача о точном неравенстве будет иметь вид

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}) \\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}\le\gamma_1 \\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\gamma_2}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \tag{21}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Теорема 5. *Пусть $r, k \in \mathbb{N}$, $k < r$ и $\gamma_1, \gamma_2, \delta > 0$. Тогда*

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R}) \\ \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}\le\gamma_1 \\ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\gamma_2}} \|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} = \gamma_1 \mu_{r\beta}^{k-r}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right),$$

$$E_k(H_2^{r,\beta}, \delta, S_\beta) = \mu_{r\beta}^{k-r}(\delta^{-1}),$$

а метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = (\mathcal{M}_{k,\delta}^{r,\beta} * y)(\cdot),$$

где

$$\mathcal{M}_{k,\delta}^{r,\beta}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(it)^k\left(1+\frac{\delta^2 t_0^{2(r-k)}}{r-k}(k+\beta t_0\operatorname{th}(2\beta t_0))t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\right)^{-1} e^{ixt}\,dt, \tag{22}$$

$$t_0 = \mu_{r\beta}(\delta^{-1}),$$

является оптимальным методом восстановления.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} \to \max, \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} \le \gamma_1^2, \quad \|f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \gamma_2^2. \tag{23}$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2) = -\|f^{(k)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} + \lambda_1\|f^{(r)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} + \lambda_2\|f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{24}$$

Переходя к образам Фурье (пользуясь теоремой Планшереля и представлением (14)), имеем

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2) = \int_{\mathbb{R}}(-t^{2k}\operatorname{ch}2\beta t + \lambda_1 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t + \lambda_2)u(t)\,dt,$$

где $u(\cdot) = (2\pi)^{-1}|\widehat{f}(\cdot)|^2$.

Положим

$$\omega(t) = -1 + \lambda_1 t^{2(r-k)} + \lambda_2 t^{-2k}\operatorname{ch}^{-1}2\beta t.$$

Нетрудно показать, что $\omega(t)$ — выпуклая функция при $t > 0$. Поэтому если в некоторой точке $t_0 > 0$ выполняются равенства

$$\omega(t_0) = \omega'(t_0) = 0, \tag{25}$$

то $\omega(t) \ge 0$ при всех $t \ge 0$. Пусть t_0 — положительное решение уравнения (16), т. е. $t_0 = \mu_{r\beta}(\gamma_1/\gamma_2)$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ так, чтобы выполнялись равенства (25). Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{k\operatorname{ch}2\beta t_0 + t_0\beta\operatorname{sh}2\beta t_0}{t_0^{2(r-k)}(k\operatorname{ch}2\beta t_0 + t_0\beta\operatorname{sh}2\beta t_0) + (r-k)\operatorname{ch}2\beta t_0},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{(r-k)t_0^{2k}\operatorname{ch}^2 2\beta t_0}{t_0^{2(r-k)}(k\operatorname{ch}2\beta t_0 + t_0\beta\operatorname{sh}2\beta t_0) + (r-k)\operatorname{ch}2\beta t_0}.$$

Таким образом, для так выбранных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ для всех $t \in \mathbb{R}$

$$-t^{2k}\operatorname{ch}2\beta t + \widehat{\lambda}_1 t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t + \widehat{\lambda}_2 \ge 0.$$

Следовательно, для всех $f(\cdot) \in \mathcal{H}_2^{r,\beta} \cap L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) \ge 0.$$

Функции $f_n(\cdot)$, определенные в доказательстве теоремы 1, являются допустимыми и в задаче (23). Из равенства (18) и равенства

(17), выполненого для функции Лагранжа (24), следует, что значение экстремальной задачи (23) равно

$$\widehat{\lambda}_1\gamma_1^2+\widehat{\lambda}_2\gamma_2^2=\gamma_1\mu_{r\beta}^{2(k-r)}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right).$$

Погрешность оптимального восстановления и оптимальный метод находятся по той же схеме, которая применялась в доказательстве теоремы 1. □

В частности, из теоремы 5 следует, что для всех функций из пространства $\mathcal{H}_2^{r,\beta}$, отличных от тождественного нуля, имеет место точное неравенство

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}\le\|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\mu_{r\beta}^{k-r}\left(\frac{\|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta}}{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}\right).$$

4.2. **Восстановление k-ой производной по неточно заданному преобразованию Фурье.** Обозначим через $\mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta}$ множество функций $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2^{r,\beta}\cap L_2(\mathbb{R})$, для которых $\widehat{f}(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R})$ (через $\widehat{f}(\cdot)$ по-прежнему обозначаем преобразование Фурье функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$). Через $H_{2,\infty}^{r,\beta}$ обозначим множество функций $\mathcal{H}_{2,\infty}^{r,\beta}\cap H_2^{r,\beta}$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления k-ой производной функции $f(\cdot)\in H_{2,\infty}^{r,\beta}$ по ее преобразованию Фурье $\widehat{f}(\cdot)$, заданному с погрешностью в метрике $L_\infty(\Delta_\sigma)$, где $\Delta_\sigma=(-\sigma,\sigma)$, $0<\sigma\le\infty$, т.е. считается, что вместо функции $\widehat{f}(\cdot)$ известна функция $y(\cdot)\in L_\infty(\Delta_\sigma)$ такая, что

$$\|\widehat{f}(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)}\le\delta.$$

Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить на $\mathbb{R}$ наилучшим образом функцию $f^{(k)}(\cdot)$.

В соответствии с общей постановкой задачи восстановления операторов погрешностью метода восстановления $\varphi\colon L_\infty(\Delta_\sigma)\to L_2(\mathbb{R})$ является величина

$$e_k(H_{2,\infty}^{r,\beta},\delta,\sigma,\varphi)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in H_{2,\infty}^{r,\beta},\ y(\cdot)\in L_\infty(\Delta_\sigma)\\ \|f(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)}\le\delta}}\|f^{(k)}(\cdot)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

погрешностью оптимального восстановления — величина

$$E_k(H_{2,\infty}^{r,\beta},\delta,\sigma)=\inf_{\varphi\colon L_\infty(\Delta_\sigma)\to L_2(\mathbb{R})}e_k(H_{2,\infty}^{r,\beta},\delta,\sigma,\varphi),$$

а оптимальным методом восстановления — метод, на котором достигается эта нижняя грань.

Положим

$$I_{r,\beta}(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\,dt.$$

Из монотонного возрастания функции $I_{r,\beta}(\sigma)$, $\sigma\in(0,+\infty)$, и того, что $I_{r,\beta}(0)=0$, а $I_{r,\beta}(\sigma)\to+\infty$ при $\sigma\to+\infty$, следует, что при всех $\delta>0$ существует и единственно такое $\widehat{\sigma}\in(0,+\infty)$, для которого

$$I_{r,\beta}(\widehat{\sigma})=\delta^{-2}. \tag{26}$$

Теорема 6. *Пусть $r,k\in\mathbb{N}$, $k\le r$, $\delta>0$, а $\widehat{\sigma}$ определено равенством* (26). *Тогда*

$$E_k(H^{r,\beta}_{2,\infty},\delta,\sigma)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\sigma^{-2(r-k)}}{\operatorname{ch}2\beta\sigma}\Big(1-\delta^2I_{r,\beta}(\sigma)\Big)+\dfrac{\delta^2\sigma^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma<\widehat{\sigma},\\ \dfrac{\delta\widehat{\sigma}^{k+1/2}}{\sqrt{\pi(2k+1)}}, & \sigma\ge\widehat{\sigma},\end{cases},$$

а метод

$$\varphi_0(y)(\cdot)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0}(i\tau)^k\left(1-\left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2(r-k)}\frac{\operatorname{ch}2\beta t}{\operatorname{ch}2\beta\sigma_0}\right)y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau,$$

где $\sigma_0=\min\{\sigma,\widehat{\sigma}\}$, является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|f^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|f^{(r)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta}\le1,\quad \|\widehat{f}(\cdot)\|^2_{L_\infty(\Delta_\sigma)}\le\delta^2. \tag{27}$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2(\cdot))=-\|f^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+\lambda_1\|f^{(r)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta}+\int_{\Delta_\sigma}\lambda_2(t)|\widehat{f}(t)|^2\,dt.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1}|\widehat{f}(\cdot)|^2=u(\cdot)$, имеем

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2(\cdot))=\int_{\mathbb{R}}(-t^{2k}+\lambda_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t)u(t)\,dt+2\pi\int_{\Delta_\sigma}\lambda_2(t)u(t)\,dt.$$

Положим $\widehat{\lambda}_1=\sigma_0^{-2(r-k)}\operatorname{ch}^{-1}2\beta\sigma_0$ и

$$\widehat{\lambda}_2(t)=\begin{cases}(2\pi)^{-1}\left(t^{2k}-\widehat{\lambda}_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\right), & |t|<\sigma_0,\\ 0, & |t|\ge\sigma_0.\end{cases}$$

Тогда при всех $f(\cdot)\in\mathcal{H}^{r,\beta}_{2,\infty}$

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2(\cdot))=\int_{|t|\ge\sigma_0}\left(-t^{2k}+\widehat{\lambda}_1t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\right)u(t)\,dt\ge0.$$

Если $\sigma\ge\widehat{\sigma}$, то, обозначив через $g(\cdot)$ обратное преобразование Фурье функции, совпадающей с δ в интервале $(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})$ и равной нулю вне него, легко проверить, что условия (b) и (c) теоремы 4 выполнены для постоянной последовательности $f_n(\cdot)=g(\cdot)$.

Если $\sigma<\widehat{\sigma}$, положим

$$\gamma=1-\delta^2I_{r,\beta}(\sigma).$$

Рассмотрим последовательность функций

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{2\pi}, & |t| < \sigma, \\ \dfrac{n\gamma}{2(\sigma+1/n)^{2r}\operatorname{ch} 2\beta(\sigma+1/n)}, & \sigma \le |t| \le \sigma + 1/n, \\ 0, & |t| > \sigma + 1/n \end{cases}$$

(через $g_n(\cdot)$ будем обозначать обратные преобразования Фурье функций $\sqrt{2\pi u_n(\cdot)}$). Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(g_n(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2(\cdot)) = 0.$$

Кроме того,

$$(28)\quad \|g_n^{(r)}(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta} = \int_{\mathbb{R}} t^{2r} u_n(t) \operatorname{ch} 2\beta t\, dt$$
$$= 1 - \gamma + \frac{n\gamma}{(\sigma+1/n)^{2r}\operatorname{ch} 2\beta(\sigma+1/n)} \int_\sigma^{\sigma+1/n} t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t\, dt < 1,$$

т. е. функции $g_n(\cdot)$ являются допустимыми в задаче (27). Из (28) вытекает также, что

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} = 1.$$

Задача (7) имеет здесь вид

$$\widehat{\lambda}_1 \|f^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^\beta} + \int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_2(t) |\widehat{f}(t) - y(t)|^2\, dt \to \min, \quad f(\cdot) \in \mathcal{H}^{r,\beta}_{2,\infty}.$$

Переходя к образам Фурье, ее можно записать в виде

$$\frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2r} |\widehat{f}(t)|^2 \operatorname{ch} 2\beta t\, dt + \int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_2(t) |\widehat{f}(t) - y(t)|^2\, dt \to \min,$$
$$f(\cdot) \in \mathcal{H}^{r,\beta}_{2,\infty}.$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция $f_y(\cdot)$ такая, что

$$\widehat{f}_y(t) = \begin{cases} \dfrac{2\pi\widehat{\lambda}_2(t)}{2\pi\widehat{\lambda}_2(t) + \widehat{\lambda}_2 t^{2r} \operatorname{ch} 2\beta t} y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \ge \sigma_0, \end{cases}$$

т. е.

$$\widehat{f}_y(t) = \begin{cases} \left(1 - \left(\dfrac{t}{\sigma_0}\right)^{2(r-k)} \dfrac{\operatorname{ch} 2\beta t}{\operatorname{ch} 2\beta\sigma_0}\right) y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \ge \sigma_0. \end{cases}$$

Из теоремы 4 вытекает, что метод

$$\varphi_0(y)(\cdot) = f_y^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а для его погрешности справедливо равенство

$$E_k(H^{r,\beta}_{2,\infty},\delta,\sigma)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1+\delta^2\int_{\Delta_\sigma}\widehat{\lambda}_2(t)\,dt}.$$

Подставляя выражения для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2(\cdot)$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Из теоремы 6 вытекает, что при фиксированном δ, начиная с $\widehat{\sigma}$, дальнейшее увеличение интервала, на котором известно преобразование Фурье функции из класса $H^{r,\beta}_{2,\infty}$, заданное с погрешностью δ в равномерной метрике, не ведет к уменьшению погрешности восстановления. Иными словами, при нарушении соотношения

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}t^{2r}\operatorname{ch}2\beta t\,dt\le 1, \tag{29}$$

связывающего погрешность исходных данных с величиной интервала, на котором эти данные измеряются, получаемая информация оказывается уже избыточной.

4.3. **Теорема о трех окружностях.** Обозначим через $\mathcal{H}_2$ множество функций $f(\cdot)$, аналитических в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\int_{\mathbb{T}}|f(re^{it})|^2\,dt<\infty.$$

Рассмотрим аналог теоремы о трех прямых (теорема 3) для функций из $\mathcal{H}_2$. Нас будет интересовать экстремальная задача о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2\\ \|f(r_1e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_1\\ \|f(r_2e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_2}}\|f(\rho e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $0<r_1<\rho<r_2\le 1$. Свяжем эту задачу с задачей восстановления функции $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2$ на окружности $|z|=\rho$ по приближенным значениям этой функции на окружностях $|z|=r_1$ и $|z|=r_2$. Будем считать, что для каждой функции $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2$ известны функции $y_1(\cdot),y_2(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})$ такие, что

$$\|f(r_je^{i\cdot})-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_j,\quad j=1,2.$$

Требуется по функциям $y_1(\cdot),y_2(\cdot)$ наилучшим образом восстановить функцию $f(\rho e^{i\cdot})$.

Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon L_2(\mathbb{T})\times L_2(\mathbb{T})\to L_2(\mathbb{T})$ назовем величину

$$e_\rho(\mathcal{H}_2,\delta_1,\delta_2,\varphi)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2,\ y_1(\cdot),y_2(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})\\ \|f(r_je^{i\cdot})-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_j,\ j=1,2}}\|f(\rho e^{i\cdot})-\varphi(y_1,y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_\rho(\mathcal{H}_2,\delta_1,\delta_2)=\inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{T})\times L_2(\mathbb{T})\to L_2(\mathbb{T})} e_\rho(\mathcal{H}_2,\delta_1,\delta_2,\varphi),$$

а оптимальным методом — метод, на котором эта нижняя грань достигается.

Теорема 7. *Пусть* $0<r_1<\rho<r_2\le 1$ *и* $\delta_1,\delta_2>0$. *Положим*

$$\Delta_s=[(r_1/r_2)^{s+1},(r_1/r_2)^s),\quad s=0,1,\dots\,,$$

$$\mu_{s1}=\frac{r_2^2-\rho^2}{r_1^{2s}},\quad \mu_{s2}=\frac{\rho^2-r_1^2}{r_2^{2s}}. \tag{30}$$

Тогда

$$E_\rho(\mathcal{H}_2,\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in\mathcal{H}_2\\ \|f(r_1e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_1\\ \|f(r_2e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_2}}\|f(\rho e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\rho^s}{\sqrt{r_2^2-r_1^2}}\sqrt{\delta_1^2\mu_{s1}+\delta_2^2\mu_{s2}} & \delta_1/\delta_2\in\Delta_s,\ s=0,1,\dots\,,\\ \delta_2, & \delta_1\ge\delta_2.\end{cases}$$

При $\delta_1/\delta_2\in\Delta_s$, $s=0,1,\dots$, *метод*

$$\varphi_0(y_1,y_2)(\cdot)=\mu_{s1}\mathcal{K}_{\rho,\delta_1,\delta_2}(\rho r_1e^{i\cdot})*y_1(\cdot)+\mu_{s2}\mathcal{K}_{\rho,\delta_1,\delta_2}(\rho r_2e^{i\cdot})*y_2(\cdot),$$

где

$$\mathcal{K}_{\rho,\delta_1,\delta_2}(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{\mu_{s1}r_1^{2k}+\mu_{s2}r_2^{2k}}, \tag{31}$$

является оптимальным. Если $\delta_1\ge\delta_2$, *то метод*

$$\varphi_0(y_1,y_2)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{r_2}{r_2-\rho e^{ik(t-u)}}y_2(u)\,du$$

— оптимальный.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|f(\rho e^{i\cdot})\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\to\max,\quad \|f(r_je^{i\cdot}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\le\delta_j^2,\quad j=1,2, \tag{32}$$

и запишем соответствующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=-\|f(\rho e^{i\cdot})\|^2_{L_2(\mathbb{T})}+\lambda_1\|f(r_1e^{i\cdot})\|^2_{L_2(\mathbb{T})}+\lambda_2\|f(r_2e^{i\cdot})\|^2_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Для функции $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2$, имеющий вид

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty a_kz^k,$$

при всех $0<r\le 1$ справедливо равенство

$$\|f(re^{i\cdot})\|^2_{L_2(\mathbb{T})}=\sum_{k=0}^\infty|a_k|^2r^{2k}.$$

Поэтому функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{k=0}^{\infty}(-\rho^{2k}+\lambda_1 r_1^{2k}+\lambda_2 r_2^{2k})|a_k|^2.$$

Функция

$$\alpha(x)=-1+\lambda_1\left(\frac{r_1}{\rho}\right)^{2x}+\lambda_2\left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{2x}$$

является выпуклой при всех $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$. Следовательно, если при некотором s

$$\alpha(s)=\alpha(s+1)=0, \tag{33}$$

то $\alpha(x)\ge 0$ при всех $x\in[0,s]\cup[s+1,+\infty)$. Тем самым, если выбрать $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условия (33), то при всех $k\in\mathbb{Z}_+$

$$-\rho^{2k}+\widehat{\lambda}_1 r_1^{2k}+\widehat{\lambda}_2 r_2^{2k}=\rho^{2k}\alpha(k)\ge 0.$$

Для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ имеем

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{\rho^{2s}}{r_2^2-r_1^2}\mu_{s1},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{\rho^{2s}}{r_2^2-r_1^2}\mu_{s2},$$

где μ_{s1} и μ_{s2} определены равенством (30). Таким образом, для всех $f(\cdot)\in\mathcal{H}_2$

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\ge 0.$$

Пусть $\delta_1/\delta_2\in\Delta_s$. Положим

$$g(z)=\widehat{a}_s z^s+\widehat{a}_{s+1}z^{s+1},$$

где

$$\widehat{a}_s=\left(\frac{\delta_1^2 r_2^{2s+2}-\delta_2^2 r_1^{2s+2}}{(r_1r_2)^{2s}(r_2^2-r_1^2)}\right)^{1/2},\quad \widehat{a}_{s+1}=\left(\frac{\delta_2^2 r_1^{2s}-\delta_1^2 r_2^{2s}}{(r_1r_2)^{2s}(r_2^2-r_1^2)}\right)^{1/2}.$$

Легко проверить, что

$$\|g(r_1e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}=\delta_1,\quad \|g(r_2e^{i\cdot})\|_{L_2(\mathbb{T})}=\delta_2,$$

а $\mathcal{L}(g(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0$. Из теоремы 4 вытекает, что значение экстремальной задачи (32) равно

$$\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2=\frac{\rho^{2s}}{r_2^2-r_1^2}(\delta_1^2\mu_{s1}+\delta_2^2\mu_{s2}).$$

Экстремальная задача (7) имеет здесь вид

$$\|f(r_1e^{i\cdot})-y_1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}+\|f(r_2e^{i\cdot})-y_2(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\to\min,\quad f(\cdot)\in\mathcal{H}_2.$$

Нетрудно убедиться, что ее решением является функция

$$f_{y_1,y_2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widehat{\lambda}_1 r_1^k(y_1)_k+\widehat{\lambda}_2 r_2^k(y_2)_k}{\widehat{\lambda}_1 r_1^{2k}+\widehat{\lambda}_2 r_2^{2k}}z^k,$$

где $(y_1)_k, (y_2)_k$, $k = 0, 1, \dots$, — коэффициенты Фурье функции $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ соответственно. Из теоремы 4 вытекает, что метод

$$\begin{aligned}\varphi_0(y_1, y_2)(\cdot) &= f_{y_1,y_2}(\rho e^{i\cdot}) \\ &= \mu_{s1}\mathcal{K}_{\rho,\delta_1,\delta_2}(\rho r_1 e^{i\cdot}) * y_1(\cdot) + \mu_{s2}\mathcal{K}_{\rho,\delta_1,\delta_2}(\rho r_2 e^{i\cdot}) * y_2(\cdot)\end{aligned}$$

является оптимальным.

При $\delta_1 \ge \delta_2$ положим $\widehat{\lambda}_1 = 0$, $\widehat{\lambda}_2 = 1$, $g(\cdot) = \delta_2$. В остальном этот случай рассматривается аналогично предыдущему. $\square$

Список литературы

[1] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

[2] E. Landau, "Ungleichungen für zweimal differenzierbar Funktionen", *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1913), 43–49.

[3] А. Н. Колмогоров, "О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале", *Ибранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 252–261.

[4] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, "О неравенствах для производных колмогоровского типа", *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106.

[5] A. S. Kochurov, G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, "Inequalities for derivatives on a line and a half-line and problems of recovery", *East J. Approx.*, **10**:1–2 (2004), 231–260.

[6] К. Ю. Осипенко, "Неравенства для производных аналитических в полосе функций", *Матем. заметки*, **56**:4 (1994), 114–122.

[7] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[9] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[10] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского