УДК 517.53

ЗАДАЧА ХЕЙНСА И ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ОШИБКОЙ

ОСИПЕНКО К. Ю.

Пусть B — класс аналитических в круге $K = \{z : |z| < 1\}$ функций, ограниченных там по модулю единицей. Хейнсом в работах [1], [2] была поставлена и исследована задача о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f\in B\\ |f(z)|\le\delta,\ z\in[a,b]}} |f(z_0)|, \tag{1}$$

где $[a,b]\subset(-1,1)$, $z_0\in(b,1)$, $\delta\in(0,1)$.

В этих работах было доказано, что экстремальная функция в задаче (1) не зависит от z_0, единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, и является конечным произведением Бляшке с нулями в интервале $(-1,b)$

$$f^*(z)=e^{i\alpha}\prod_{j=1}^{m}\frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}.$$

Эти результаты приведены также в работе [3], где рассматривались более общие постановки. Точное решение поставленной задачи было найдено Хейнсом при $\delta=\delta_n$, $n=1,1,\ldots$, где

$$\delta_n=\inf_{|\alpha_j|<1}\max_{z\in[a,b]}\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}\right|. \tag{2}$$

Экстремальной функцией в этом случае оказывалось произведение Бляшке, на котором достигалась нижняя грань в равенстве (2).

Величина δ_n и соответствующая экстремальная функция могут быть найдены с помощью III задачи Е. И. Золотарева [4] аналогично тому, как в работе [5] исследовалось наименее уклоняющееся от нуля произведение Бляшке на замкнутом множестве из K с помощью обобщенной III задачи Е. И. Золотарева [6] (Хейнс при решении использовал другой метод).

Интересно, что свойства экстремальной функции в задаче (1) аналогичны свойствам экстремальной функции в той же задаче, когда вместо класса B рассматривается класс функций $W_\infty^r(\mathbb{R},M)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(x)$ и удовлетворяющих неравенству $\operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}}|f^{(r)}(x)|\le M$ (см. [7, § 2.5.5]). Соответствующие экстремальные функции являются обобщением многочленов, появляющихся при решении I задачи Е. И. Золотарева (см. [4], [8, с. 314]). В некоторых работах (см. [9], [10]) эти функции называются идеальными сплайнами Золотарева. Отметим, что Хейнс [1] рассматривал, в основном, двойственную к (1) задачу, а именно, задачу о нахождении величины

$$\inf_{f\in B_\mu}\max_{x\in[a,b]}|f(x)|, \tag{3}$$

где $B_\mu=\{f\in B: f(z_0)=\mu\}$, а $z_0\in(b,1)$. Если вместо класса B_μ рассмотреть класс многочленов $p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, удовлетворяющих равенству $p_n(x_0)=\mu$, где $x_0\notin[a,b]$, то задача (3) совпадает со II задачей Е. И. Золотарева [4].

Тем самым наблюдается аналогия между экстремальными задачами на классах гладких и классах аналитических функций, отмечавшаяся ранее в работах [11], [12], а также тесная связь рассматриваемых задач с задачами Е. И. Золотарева.

§ 1. Задача Хейнса и ее дискретный аналог

В дальнейшем удобнее рассматривать задачу (1) для отрезка $[-l,0]$, $0<l<1$. Экстремальной функцией в задаче (2) для этого отрезка (см. [13]) является функция

$$B_n(z,l)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z+l\operatorname{sn}^2\left[\dfrac{2j-1}{2n}L,l\right]}{1+l\operatorname{sn}^2\left[\dfrac{2j-1}{2n}L,l\right]z}, \tag{4}$$

а для соответствующего значения δ_n, которое обозначим через $\delta_n(l)$, справедливо равенство

$$\delta_n(l)=2h^n\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}h^{4nm(m+1)}}{1+2\sum\limits_{m=1}^{\infty}h^{4nm^2}}, \tag{5}$$

где $h=e^{-\frac{\pi L'}{2L}}$; здесь и далее L, L', L_0, L_1, K, K', — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l, $l'=\sqrt{1-l^2}$, l_0, l_1, λ, $\lambda'=\sqrt{1-\lambda^2}$, соответственно.

Функция $B_n(z,l)$ с помощью первого главного преобразования n-й степени (см., например, [14, с. 136, 284]) может быть записана в виде

$$B_n(z,l)=\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left[(2nu+1)K,\lambda\right],\quad z=-l\operatorname{sn}^2[uL,l], \tag{6}$$

где $\lambda=\delta_n^2(l)$. Значение λ может быть также найдено из уравнения

$$\frac{K'}{K}=2n\frac{L'}{L}. \tag{7}$$

В силу того, что отношение $\dfrac{K'}{K}$ является при $\lambda \in (0,1)$ непрерывной и монотонно убывающей от $+\infty$ до 0 функцией, уравнение (7) имеет единственное решение при всех $l \in (0,1)$. Отсюда также следует, что функция $\delta_n(l)$ при фиксированном n непрерывна и монотонно возрастает от 0 до 1 при $l \in (0,1)$ и, следовательно, при любом $\delta \in (0,1)$ уравнение

$$\delta_n(l) = \delta \tag{8}$$

имеет единственное решение.

Положим $\Delta_1(l) \equiv 1$, $\Delta_n(l) = \delta_n(l_1)$, $n > 1$, где l_1 определяется из уравнения

$$l_1 \operatorname{sn}^2 \left[\frac{n-1}{n} L_1, l_1 \right] = l. \tag{9}$$

Аналогично тому, как это было доказано в работе [14, с. 212], можно доказать, что левая часть равенства (9) есть непрерывная и монотонно возрастающая от 0 до 1 функция при $l \in (0,1)$. Тем самым уравнение (9) имеет единственное решение при любом $l \in (0,1)$, причем $l_1 > l$. Отсюда следует, что $\delta_n(l) < \Delta_n(l)$ при всех $n \geq 1$. В дальнем будет показано, что $\Delta_n(l) < \delta_{n-1}(l)$ при всех $n > 1$.

Назовем порядком экстремальной функции в задаче (1) число множителей в соответствующем произведении Бляшке (было отмечено, что экстремальными являются лишь конечные произведения Бляшке).

Теорема 1. *Для задачи* (1) *при* $-1 < a = -l < b = 0$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *если для* $\delta \in (0,1)$ *при некотором* n *выполнено неравенство* $\delta_n(l) \leq \delta \leq \Delta_n(l)$, *то экстремальной функцией, нормированной условием* $f^*(z_0) > 0$, *при всех* $z_0 \in (0,1)$ *является функция* $B_n(z, l_0)$, *где* l_0 *— решение уравнения* (8);

2) *при* $\delta_n(l) \leq \delta < \delta_{n-1}(l)$ $(\delta_0(l) \equiv 1)$ *порядок экстремальной функции равен* n;

3) *при всех* $\delta \in (0,1)$ *для порядка экстремальной функции имеют место неравенства*

$$\frac{2L}{\pi L'} \ln \frac{1}{\delta} \leq n < \frac{2L}{\pi L'} \ln \frac{2}{\delta} + 1, \tag{10}$$

кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ *такое, что при всех* $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ *справедливо неравенство*

$$n > \frac{2L}{\pi L'} \ln \frac{2}{\delta} - \varepsilon. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\delta \in (0,1)$ и n таково, что $\delta_n(l) \leq \delta \leq \Delta_n(l)$. Рассмотрим функцию $B_n(z, l_0)$, где l_0 — решение уравнения (8). Пусть $n > 1$. Из монотонности функции $\delta_n(l)$ и того, что $\Delta_n(l) =$

$\delta_n(l_1)$, где l_1 определено равенством (9), следуют неравенства $l \leq l_0 \leq l_1$. Для точек

$$z_j = -l_0 \operatorname{sn}^2 \left[\frac{j-1}{n} L_0, l_0\right], \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

имеем

$$B_n(z_j, l_0) = (-1)^{j-1}\delta. \tag{13}$$

В силу монотонного возрастания левой части равенства (9) и того, что $l_0 \leq l_1$, получаем $z_n \geq -l$. Итак, на отрезке $[-l, 0]$ имеется n точек $z_1, \ldots, z_n$, в которых выполнены равенства (13) и, кроме того, $|B_n(z, l_0)| \leq \delta$, $z \in [-l, 0]$ (при $n = 1$ это утверждение очевидно). Из неравенства

$$\sup_{\substack{f \in B \\ |f(z_j)| \leq \delta,\ j=1,\ldots,n}} |f(z_0)| \geq \sup_{\substack{f \in B \\ |f(z)| \leq \delta,\ z \in [-l,0]}} |f(z_0)| \tag{14}$$

и того, что по теореме 1.1 из работы [12] на функции $B_n(z, l_0)$ достигается величина, стоящая в левой части неравенства (14), следует экстремальность $B_n(z, l_0)$.

Докажем теперь утверждение 2). При $\delta = \delta_n(l)$ оно вытекает из утверждения 1), поэтому будем считать, что $\delta_n(l) < \delta < \delta_{n-1}(l)$. Обозначим через $B_k(z)$ экстремальную функцию для данного δ, нормированную условием $B_k(z_0) > 0$, где k — ее порядок. Из работ [1], [3], [12] следует, что на отрезке $[-l, 0]$ найдутся k точек $z_1, \ldots, z_k$, в которых $B_k(z_j) = (-1)^{j-1}\delta$, $j = 1, \ldots, k$, кроме того, в силу нормировки $B_k(1) = 1$. Рассмотрим разность $\varphi_1(z) = B_k(z) - B_n(z, l)$. При $z \in [-l, 0]$ имеем $B_n(z, l) \leq \delta_n(l) < \delta$, отсюда $(-1)^{j-1}\varphi_1(z_j) > 0$, $j = 1, \ldots, k$. Тем самым для числа нулей m_1 функции $\varphi_1(z)$ в круге K справедливо неравенство

$$m_1 \geq k - 1. \tag{15}$$

Учитывая, что $\varphi_1(1) = 0$, из оценки для числа нулей разности произведений Бляшке, полученной в лемме 1.1 из работы [12], получаем

$$m_1 \leq \frac{k + n - 1}{2}. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) следует, что $k \leq n + 1$. Однако, если $k = n+1$, то $\varphi_1(-1) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$, а $(-1)^n\varphi_1(z_{n+1}) > 0$. Таким образом, на интервале $(-1, z_{n+1})$ найдется хотя бы один нуль функции $\varphi_1(z)$. Отсюда $m_1 \geq n + 1$, что при $k = n + 1$ противоречит неравенству (16). Тем самым доказано, что $k \leq n$. Аналогично, рассматривая разность $\varphi_2(z) = B_{n-1}(z, l) - B_k(z)$ в точках $u_j = -l \operatorname{sn}^2 \left[\frac{j-1}{n-1} L, l\right]$, $j = 1, \ldots, n$, можно показать, что $k \geq n$. Учитывая предыдущую оценку, имеем $k = n$. Заметим, что

$\Delta_n(l) < \delta_{n-1}(l)$, так как при $\delta_n(l) \le \delta \le \Delta_n(l)$ порядок экстремальной функции равен n.

Для доказательства утверждения 3) воспользуемся результатами работы [5] (см. также [6]), из которой следует неравенство

$$\delta_n(l) \ge e^{-\frac{\pi L'}{2L}n}, \quad n \ge 0. \tag{17}$$

Из равенства (5) имеем

$$\delta_n(l) < 2e^{-\frac{\pi L'}{2L}n}, \quad n \ge 0. \tag{18}$$

Если $\delta \in (0,1)$, то найдется такое n, что $\delta_n(l) \le \delta < \delta_{n-1}(l)$. Используя неравенства (17), (18), получаем

$$e^{-\frac{\pi L'}{2L}n} \le \delta < 2e^{-\frac{\pi L'}{2L}(n-1)}.$$

Отсюда следует неравенство (10).

Положим

$$C_n = \delta_n(l) e^{\frac{\pi L'}{2L}n}.$$

Из (5) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 2$, кроме того, из (18) $C_n < 2$ при всех $n \ge 0$. Тем самым для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\delta_n(l) > 2e^{-\frac{\pi L'}{2L}(n+\varepsilon)}. \tag{19}$$

Если $\delta \in (0, \delta_{N(\varepsilon)}(l))$, то найдется такое $n > N(\varepsilon)$, что $\delta \ge \delta_n(l)$. Последнее неравенство вместе с (19) дает неравенство (11). Теорема доказана. □

Утверждение 2) отмечалось Хейнсом [1], однако оно приводится здесь для полноты изложения с доказательством, отличным от имеющегося у Хейнса.

Из теоремы 1 вытекает, что при достаточно малом δ порядок экстремальной функции равен либо n, либо $n+1$, где n — целая часть числа $\dfrac{2L}{\pi L'} \ln \dfrac{2}{\delta}$.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении величины

$$r_n(z_0, \delta, l) = \inf_{z_j \in [-l,0]} \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z_j)|\le\delta,\ j=1,\dots,n}} |f(z_0)|. \tag{20}$$

Докажем сначала существование точек $z_1^0, \dots, z_n^0$, на которых достигается нижняя грань в (20). Для этого достаточно доказать, что функция

$$\varphi(\overline{z}) = \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z_j)|\le\delta,\ j=1,\dots,n}} |f(z_0)|$$

является непрерывной при $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in [-l, 0]^n$. Положим $\|\overline{z}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^{1/2}$ и рассмотрим $\overline{z}^{(1)}, \overline{z}^{(2)} \in [-l, 0]^n$ такие, что $\|\overline{z}^{(1)} - \overline{z}^{(2)}\| \le \varepsilon\delta(1-l)$. Пусть $f \in B$ удовлетворяет условиям $|f(z_j^{(1)})| \le \delta$, $j = 1, \ldots, n$. Из известной формулы Коши $|f'(z)| \le (1-l)^{-1}$ при $z \in [-l, 0]$. Следовательно,

$$|f(z_j^{(2)})| \le |f(z_j^{(1)})| + |f(z_j^{(2)}) - f(z_j^{(1)})| \le \delta + (1-l)^{-1}\|\overline{z}^{(1)} - \overline{z}^{(2)}\| \\ \le \delta(1+\varepsilon).$$

Функция $g(z) = (1+\varepsilon)^{-1} f(z)$ очевидно принадлежит классу B и удовлетворяет неравенствам $|g(z_j^{(2)})| \le \delta$, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом,

$$|f(z_0)| = (1+\varepsilon)|g(z_0)| \le (1+\varepsilon)\varphi(\overline{z}^{(2)}).$$

Отсюда

$$\varphi(\overline{z}^{(1)}) \le (1+\varepsilon)\varphi(\overline{z}^{(2)}) \le \varphi(\overline{z}^{(2)}) + \varepsilon.$$

Совершенно аналогично получаем

$$\varphi(\overline{z}^{(2)}) \le \varphi(\overline{z}^{(1)}) + \varepsilon.$$

Тем самым справедливо неравенство $|\varphi(\overline{z}^{(1)}) - \varphi(\overline{z}^{(2)})| \le \varepsilon$, из которого следует непрерывность функции φ.

Назовем точки $z_1^0, \ldots, z_k^0$ минимальной экстремальной системой в задаче (20), если они являются экстремальными для той же задачи при $n = k$ и k — наименьшее из чисел, для которых $r_k(z_0, \delta, l) = r_n(z_0, \delta, l)$.

Теорема 2. *При $\delta_k(l) \le \delta < \delta_{k-1}(l)$, $k \le n$, экстремальная функция в задаче* (20) *есть произведение Бляшке порядка k, экстремальное в задаче Хейнса для отрезка $[-l, 0]$. Единственной минимальной экстремальной системой является система из k последовательных экстремумов (начиная с нуля) этого произведения. При $0 < \delta < \delta_n(l)$ экстремальной функцией является произведение Бляшке $B_n(z, l_0)$, где l_0 определяется из уравнения* (8), *а единственной экстремальной системой является система точек* (12).

Доказательство. Пусть $-l \le z_1^0 \le \ldots \le z_n^0 \le 0$ — экстремальная система в задаче (20). Из работы [12] следует, что в задаче о нахождении величины $\varphi(\overline{z}^{(0)})$ экстремальная функция, нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, имеет вид

$$f^*(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 0), \quad k \le n,$$

и существуют точки $z^0_{i_1},\dots,z^0_{i_k}$ такие, что

$$f^*(z^0_{i_m}) = (-1)^{k+m}\delta, \quad m=1,\dots,k.$$

При этом $f^*(z) = g_0(z, z^0_{i_1},\dots,z^0_{i_k})$, где функция $g_0(z,u_1,\dots,u_k) = g_0$ определяется из рекуррентных соотношений

$$g_{m-1}(z) = \left[\frac{z-u_m}{1-u_m z}g_m + \delta_m^{(m-1)}\right]\left[1+\delta_m^{(m-1)}\frac{z-u_m}{1-u_m z}g_m\right]^{-1}, \quad m=1,\dots,k; \tag{21}$$

здесь $g_k = 1$, $\delta_p^{(0)} = (-1)^{k+p}\delta$,

$$\delta_p^{(m)} = \frac{1-u_m u_p}{u_p-u_m}\cdot\frac{\delta_p^{(m-1)}-\delta_m^{(m-1)}}{1-\delta_m^{(m-1)}\delta_p^{(m-1)}}, \quad p=m+1,\dots,k.$$

Нетрудно показать, что при всех $z\in(-1,1)$ и точках $\overline{u} = (u_1,\dots,u_k)$, достаточно близких к точке $(z^0_{i_1},\dots,z^0_{i_k})$, функция $g_0(z,u_1,\dots,u_k)$ дифференцируема и является экстремальной в задаче о нахождении $\varphi(\overline{u})$. Из экстремальности точек $z^0_1,\dots,z^0_n$ следует, что в точке $(z_0, z^0_{i_1},\dots,z^0_{i_k})$

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_j} = 0, \quad j=1,\dots,k, \tag{22}$$

при $-l < z^0_{i_1}$, $z^0_{i_k} < 0$. Если $z^0_{i_1} = -l$ или $z^0_{i_k} = 0$, то соответствующие равенства из (22) заменяются на неравенства

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_1} \ge 0, \quad \frac{\partial g_0}{\partial u_k} \le 0.$$

Из равенств $g_0(u_j,u_1,\dots,u_k) = (-1)^{k+j}\delta$ вытекает, что в точках $(u_j,u_1,\dots,u_k)$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial g_0}{\partial z} + \frac{\partial g_0}{\partial u_j} = 0. \tag{23}$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (21), можно получить, что

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_j} = \Phi_j(z,u_1,\dots,u_k)P_j(u_1,\dots,u_k)\prod_{\substack{m=1\\ m\ne j}}^{k}(z-u_m),$$

где Φ_j и P_j — некоторые функции, причем $\Phi_j > 0$, а P_j не зависит от z. Из последнего равенства, учитывая (22), (23), получаем

$$f^{*\prime}(z^0_{i_j}) = 0, \quad j=1,\dots,k,$$

при $-l < z^0_{i_1}$, $z^0_{i_k} < 0$. Если $z^0_{i_1} = -l$ или $z^0_{i_k} = 0$, то вместо соответствующих равенств имеем

$$(-1)^k f^{*\prime}(z^0_{i_1}) \ge 0, \quad f^{*\prime}(z^0_{i_k}) \ge 0.$$

При $z > z^0_{i_k}$ $f^*(z) > \delta$, поэтому $f^{*\prime}(z^0_{i_k}) > 0$ и, следовательно, $z^0_{i_k} = 0$.

В силу того, что $f^*(z^0_{i_1}) = (-1)^{k+1}\delta$, $f^*(-1) = (-1)^k$, а $(-1)^k f^*(z^0_{i_1}) \ge 0$, найдется точка $\xi \in (-1, z^0_{i_1}]$, в которой $f^{*\prime}(\xi) = 0$. Так как $f^{*\prime}(z)$ имеет в круге K ровно $k-1$ нуль (см. [3, теорема 7.2]), то на интервале $(-1,1)$ функция $f^*(z)$ имеет экстремумы только в точках $\xi, z^0_{i_2}, \dots, z^0_{i_{k-1}}$. Отсюда $|f^*(z)| \le \delta$ при $z \in [z^0_{i_1}, 0]$. В силу очевидных соотношений

$$f^*(z_0) = \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z_j)|\le\delta,\ j=1,\dots,n}} |f(z_0)| \ge \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z)|\le\delta,\ z\in[z^0_{i_1},0]}} |f(z_0)| \ge f^*(z_0)$$

функция $f^*(z)$ является решением задачи Хейнса для отрезка $[z^0_{i_1}, 0]$. Заметим, что при $z^0_{i_1} > -l$ $f^{*\prime}(z^0_{i_1}) = 0$ и функция $f^*(z)$ является наименее уклоняющимся от нуля произведением Бляшке порядка k на отрезке $[-l_0, 0]$, где l_0 определяется из уравнения (8).

Пусть $\delta_k(l) \le \delta < \delta_{k-1}(l)$ при некотором $k \le n$. Из теоремы 1 следует существование экстремальной функции $f^*(z)$ в задаче Хейнса порядка k. Пусть $z^0_1, \dots, z^0_k$ — ее k последовательных экстремумов ($z^0_k = 0$). Для любых точек $z_1, \dots, z_n \in [-l, 0]$ имеем

$$f^*(z_0) = \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z^0_j)|\le\delta,\ j=1,\dots,k}} |f(z_0)| = \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z)|\le\delta,\ z\in[-l,0]}} |f(z_0)| \le \sup_{\substack{f\in B \\ |f(z_j)|\le\delta,\ j=1,\dots,n}} |f(z_0)|.$$

Тем самым $z^0_1, \dots, z^0_k$ — экстремальная система. Покажем, что она является единственной минимальной системой. Предположим, что $z_1, \dots, z_m$ — минимальная экстремальная система, а $g(z)$ — соответствующая ей экстремальная функция (с нормировкой $g(z_0) > 0$). Как было отмечено, $g(z)$ является решением задачи Хейнса на отрезке $[z_1, 0] \subset [-l, 0]$. В силу единственности решения задачи Хейнса $f^*(z) \equiv g(z)$, а система $z_1, \dots, z_m$ совпадает с системой $z^0_1, \dots, z^0_k$.

Пусть теперь $0 < \delta < \delta_n(l)$. Экстремальная функция в задаче Хейнса в этом случае имеет порядок больше n. Поэтому остается рассмотреть наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-l_1, 0]$, $l_1 < l$, произведения Бляшке $f^*_k(z)$ порядка $k \le n$ с уклонением δ. Нетрудно убедиться, что $f^*_k(z_0) > f^*_n(z_0)$ при $k < n$. Тем самым единственной экстремальной системой является система точек (12), где l_0 — решение уравнения (8). Теорема доказана. □

Заметим, что из теорем 1, 2 при $\delta_k(l) \le \delta \le \Delta_k(l)$ следует, что минимальная экстремальная система имеет вид

$$z_j = -l_0 \operatorname{sn}^2\left[\frac{j-1}{k} L_0, l_0\right], \quad j = 1, \dots, k, \tag{24}$$

где l_0 определяется равенством $\delta_k(l_0)=\delta$.

Обозначим через $r_n(z_0,\delta)$ выражение (20), в котором нижняя грань берется по точкам $z_1,\dots,z_n\in(1,0]$. Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *При всех* $l\in[-z_n,1)$ *и всех* $z_0\in(0,1)$ *имеют место равенства*

$$r_n(z_0,\delta)=r_n(z_0,\delta,l)=B_n(z_0,l_0),$$

где l_0 *определяется из уравнения* (8). *Экстремальная система узлов* $z_1,\dots,z_n$ *единственна и имеет вид* (12).

§ 2. Оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой

Рассмотренные задачи тесно связаны с задачей приближения аналитических функций, заданных с ошибкой. Пусть в некоторых точках $z_1,\dots,z_n$ из круга K заданы значения функции $f\in B$ с погрешностью δ, т. е. известны значения $f_1,\dots,f_n$, удовлетворяющие неравенствам

$$|f(z_j)-f_j|\le\delta,\quad j=1,\dots,n.$$

Требуется восстановить значение функции в некоторой точке $z_0\in K$. Погрешностью наилучшего приближения назовем величину

(25)
$$r(z_0,z_1,\dots,z_n,\delta)=\inf_S\sup_{f\in B}\sup_{\substack{f_1,\dots,f_n\\|f(z_j)-f_j|\le\delta,\ j=1,\dots,n}}|f(z_0)-S(f_1,\dots,f_n)|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам приближения) $S\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$. Назовем метод S_0 наилучшим, если на нем достигается нижняя грань в равенстве (25).

Можно рассмотреть задачу минимизации погрешности наилучшего приближения за счет выбора узлов $z_1,\dots,z_n$ из некоторого множества $E\subset K$, т.е. задачу о нахождении величины

$$R_n(z_0,\delta,E)=\inf_{z_1,\dots,z_n\in E}r(z_0,z_1,\dots,z_n,\delta). \tag{26}$$

Если на точках $z_1^0,\dots,z_n^0$ достигается нижняя грань в равенстве (26), то назовем их оптимальными узлами для данного n на множестве E. Наилучший метод приближения по оптимальным узлам будем называть оптимальным для данного n.

Положим

$$R(z_0,\delta,E)=\inf_n R_n(z_0,\delta,E). \tag{27}$$

Если существует конечное число, на котором достигается нижняя грань в равенстве (27), то минимальное из таких чисел будем называть порядком информативности множества E для данных δ и z_0. В противном случае будем считать порядок информативности равным бесконечности. Оптимальные узлы и метод для конечного порядка информативности назовем оптимальными узлами и методом, соответственно, на множестве E.

Известно (см., например, [12]), что

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = \sup_{\substack{f \in B \\ |f(z_j)| \le \delta,\ j=1,\ldots,n}} |f(z_0)|.$$

Таким образом, при $z_0 \in (0,1)$ имеют место равенства

$$R_n(z_0, \delta, [-l, 0]) = r_n(z_0, \delta, l), \quad R_n(z_0, \delta, (-1, 0]) = r_n(z_0, \delta),$$

а из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть при некотором n $\delta_n(l) \le \delta < \delta_{n-1}(l)$. Тогда*

1) *порядок информативности отрезка $[-l, 0]$ равен n при всех $z_0 \in (0,1)$, а оптимальными узлами отрезка $[-l, 0]$ являются n последовательных экстремумов (начиная с нуля) экстремальной функции $f^*(z)$ в задаче Хейнса для этого отрезка. При этом*

$$R(z_0, \delta, l) = f^*(z_0);$$

2) *при $k < n$ имеет место равенство*

$$R_k(z_0, \delta, l) = B_k(z_0, l_0),$$

где l_0 удовлетворяет равенству $\delta_k(l_0) = \delta$, а оптимальные узлы для данного k имеют вид (24).

Обозначим через $z_1, \ldots, z_k$ и $u_1, \ldots, u_k$ оптимальные узлы и нули экстремальной функции в задаче о нахождении величины $R_k(z_0, \delta, l)$, где k не превосходит порядка информативности отрезка $[-l, 0]$. Из работы [12] следует, что оптимальный метод приближения для данного k имеет вид

$$f(z_0) \approx \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(z_j)} f_j,$$

где

$$\omega_j(z) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \ne j}}^{k} (z - z_m) \prod_{m=1}^{k} \frac{1 - z_m z}{(1 - u_m z)^2}.$$

Этот метод может быть записан также в виде

$$f(z_0) \approx \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega(z_0)}{(z_0 - z_j)\omega'(z_j)} f_j, \tag{28}$$

где

$$\omega(z) = \prod_{m=1}^{k} \frac{(z - z_m)(1 - z_m z)}{(1 - u_m z)^2}.$$

Если $\delta_n(l) \le \delta < \delta_{n-1}(l)$ и $k < n$ или $k = n$ и $\delta_n(l) \le \delta < \Delta_n(l)$, то для оптимальных узлов справедливы равенства (24), а нули экстремальной функции

$$u_j = -l_0 \operatorname{sn}^2 \left[\frac{2j-1}{2k} L_0, l_0\right], \quad j = 1, \dots, k;$$

здесь l_0 находится из условия $\delta_k(l_0) = \delta$. Сама экстремальная функция имеет вид

$$f^*(z) = B_k(z, l_0).$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае

$$\omega(z) = Czf^{*\prime}(z),$$

где C — некоторая постоянная, которая несущественна, так как из вида оптимального метода (28) следует, что функцию $\omega(z)$ можно определить с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим теперь величину $R(z_0, \delta, (-1, 0])$. Из следствия 1 вытекает справедливость неравенства

$$R_n(z_0, \delta, (-1, 0]) > R_{n+1}(z_0, \delta, (-1, 0]), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Тем самым

$$R(z_0, \delta, (-1, 0]) = \lim_{n\to\infty} R_n(z_0, \delta, (-1, 0]),$$

а порядок информативности полуинтервала $(-1, 0]$ равен бесконечности.

Пользуясь следствием 1 и равенствами (6), получаем при всех $z \in (0, 1)$

$$R_n(z_0, \delta, (-1, 0]) = \delta \operatorname{sn} \left[\frac{K'}{L'} v + K, \delta^2\right],$$

где

$$z = -l \operatorname{sn}^2[v, l], \tag{29}$$

а l удовлетворяет уравнению (8); здесь K, K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей δ^2, $\sqrt{1-\delta^4}$ соответственно. Если $n \to \infty$, то $l \to 1$ и равенство (29) переходит в равенство

$$z = -\operatorname{th}^2 v, \tag{30}$$

кроме того, $\lim\limits_{l\to 1} L' = \pi/2$ (см. [14, с. 116, 117]). Таким образом, при всех $z \in (0, 1)$

$$R(z_0, \delta, (-1, 0]) = \delta \operatorname{sn} \left[\frac{2}{\pi} K' v + K, \delta^2\right], \tag{31}$$

где v определяется равенством (30).

Следует отметить, что функция (31) является при всех $z_0 \in (0,1)$ экстремальной в задаче Мию о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f \in B \\ |f(z)| \le \delta,\ z \in (-1,0]}} |f(z_0)|,$$

которая была решена Хейнсом в работе [2] (см. также [3]). Экстремальная функция в этой задаче единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$ и является бесконечным произведением Бляшке с нулями в точках

$$u_j = -\operatorname{th}^2 \frac{\pi K}{2K'}(2j-1), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Литература

1. *Heins M.* On a problem of Walsh concerning the Hadamard three circles theorem.— Trans. Amer. Math. Soc, 1944, v. 55, № 3, p. 349–372.
2. *Heins M.* The problem of Milloux for functions analytic throughout the interior of the unit circle.— Amer. Journ. Math., 1945, v. 67, № 2, p. 212–234.
3. *Хавинсон С. Я.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области.— УМН, 1963, т. 18, вып. 2, с. 25–98.
4. *Золотарев Е. И.* Приложения эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля. т. 2. М., 1932, с. 1–59.
5. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек.— Матем. заметки. 1976, т. 19, № 1, с. 29–40.
6. *Гончар А. А.* О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями.— Матем. сб., 1969, т. 78(120), с. 640–654.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
9. *Karlin S.* Oscillatory perfect spolines and related extremum problems. Studies in spline functions and approximation theory. N. Y.: Acad. Press, 1976, p. 371–460.
10. *Pinkus A.* Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval.— J. Approxim. Theory, 1979, v. 23, № 1, p. 37–67.
11. *Rivlin T. J.* A survey of recent results on optimal recovery. Polynom and spline approximat. Proc. NATO Adv. Study Inst., Calgary, 1978, Dordrecht e. a., 1979, p. 225–245.
12. *Осипенко К. Ю.* Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 350–370.
13. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций.— Матем. заметки, 1972, т. 12, № 4, с. 465–476.
14. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Московский авиационный
технологический институт

Поступила в редакцию
22.III.1984