ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ НА ОКРУЖНОСТИ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе строится оптимальный метод восстановления аналитических в единичном круге функций, первая производная которых ограничена, по информации о значениях этих функций в равномерной сетке на окружности $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$.

Обозначим через H^r_∞, $r \in \mathbb{Z}_+$, множество функций, аналитических в единичном круге комплексной плоскости $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию $|f^{(r)}(z)| \le 1$, $z \in D$. Под задачей оптимального восстановления функции $f \in H^r_\infty$ в точке $\xi \in D$ по ее значениям в системе точек $z_1, \dots, z_n \in D$ понимается задача о нахождении величины

$$(1)\quad E(\xi, H^r_\infty, z_1, \dots, z_n) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}} \sup_{f \in H^r_\infty} |f(\xi) - \varphi(f(z_1), \dots, f(z_n))|,$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, а также функции φ, на которой достигается нижняя грань в (1), называемой *оптимальным методом восстановления*.

При $r = 0$ задача (1) была поставлена и решена в работах [1, 2]. Случай $r > 0$ является более сложным и здесь известны результаты лишь при $\xi, z_1, \dots, z_n \in (-1, 1)$ (см. [3]) и $z_1 = \ldots = z_n = 0$ [4].

Данная работа посвящена случаю $r = 1$, $\xi \in D$ и $z_j = \tau_j = \rho e^{i(j-1)2\pi/n}$, $j = 1, \dots, n$, $0 < \rho < 1$. Оптимальный метод восстановления для этого случая приводился в работе [4] без доказательства (при этом для его построения эвристически применялся принцип Лагранжа). Здесь приводится построение оптимального метода восстановления с полным доказательством, используя метод параметризации экстремальной функции, предложенный в работе [3].

Начнем с одного простого вспомогательного результата.

Лемма 1. *Пусть комплекснозначная функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ как функция вещественных переменных x, y*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №02-01-39012 и №02–01–00386) и программы “Университеты России"(УР.04.03.013).

$(z = x + iy)$. Тогда если $|f(z)|$ имеет экстремум в точке z_0, то в этой точке выполняется равенство

$$f\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + \overline{f}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Доказательство. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$. Тогда из необходимого условия экстремума вытекает, что в точке z_0

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f + \overline{f})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i}(f - \overline{f})\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2}(f + \overline{f})\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2i}(f - \overline{f})\frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Умножив второе равенство на i и сложив его с первым, будем иметь

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)& \\ + \overline{f}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) &= f\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + \overline{f}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \end{aligned}$$

□

Из общих результатов о задачах восстановления (см. [2], [5]) вытекает, что в задаче (1) существует линейный оптимальный метод восстановления

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n} C_j f(z_j), \tag{2}$$

а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E(\xi, H_\infty^r, z_1, \dots, z_n) = \sup_{\substack{f \in H_\infty^r \\ f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0}} |f(\xi)|. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\xi \in D$, $0 < \rho < 1$, $\xi_j = e^{i(j-1)2\pi/n}$ и $\tau_j = \rho\xi_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда*

$$E(\xi, H_\infty^1, \tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{|\xi^n - \rho^n|}{n}, \tag{4}$$

а единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$f(\xi) \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k \xi_j^{-k}\right) f(\tau_j),$$

где $b_0 = 1$,

$$b_k = \frac{\rho^n(q_k\overline{\xi}^{n-k} - \xi^{n+k}) + \xi^k(r_k - q_k|\xi|^{2(n-k)})}{\rho^k(r_k - \rho^{2n})}, \tag{5}$$

$$q_k = \frac{n+k}{n-k}, \quad r_k = \frac{(2n-k)(n+k)}{k(n-k)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Напомним, что произведением Бляшке порядка n называется функция вида

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z},$$

где $|\lambda| = 1$, а $|\alpha_j| < 1$, $j = 1, \dots, n$. В работе [6] было доказано, что если функция f_0 такова, что $f_0(z_1) = \ldots = f_0(z_n) = 0$ и f_0' — произведение Бляшке порядка $n-1$, то она является экстремальной в задаче (3) при $r = 1$. Отсюда вытекает, что для $r = 1$ и $z_j = \tau_j$, $j = 1, \dots, n$, экстремальной функцией в задаче (3) является функция

$$f_0(z) = \frac{z^n - \rho^n}{n}.$$

Тем самым доказано равенство (4).

Займемся теперь построением оптимального метода. Положим $B_0(z) \equiv 1$ и

$$B_k(z) = \frac{zB_{k-1}(z) + \varepsilon_k}{1 + \overline{\varepsilon}_k z B_{k-1}(z)}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где $|\varepsilon_k| < 1$, $k = 1, \dots, n-1$. Легко убедиться, что $B_{n-1} \in H_\infty$. Для $P = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in D^n$ рассмотрим функцию

$$f_P(z) = \varepsilon_0 + \int_0^z B_{n-1}(z)\, dz.$$

Очевидно, что $f_P \in H^1_\infty$ и $f_{P_0} = f_0$, где $P_0 = (-\rho^n/n, 0, \dots, 0)$. Пусть метод (2) является оптимальным в задаче (1) при $r = 1$. Тогда при всех $P \in D^n$ имеет место неравенство

$$\left| f_P(\xi) - \sum_{j=1}^{n} C_j f_P(\tau_j) \right| \le |f_{P_0}(\xi)|.$$

Следовательно, модуль функции

$$g(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = f_P(\xi) - \sum_{j=1}^{n} C_j f_P(\tau_j)$$

в точке P_0 достигает своего максимума. Из леммы 1 вытекает, что в точке P_0 должны выполняться равенства

$$g\overline{\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_j}} + \overline{g}\frac{\partial g}{\partial \overline{\varepsilon}_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{6}$$

В силу того, что

$$\frac{\partial B_{n-1}}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{P=P_0} = z^{n-j-1}\frac{\partial B_j}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{P=P_0} = z^{n-j-1}, \quad j=1,\dots,n-1,$$

имеем

$$\frac{\partial f_P}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{P=P_0} = \frac{z^{n-j}}{n-j}, \quad j=1,\dots,n-1, \quad \frac{\partial f_P}{\partial \varepsilon_0} = 1.$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial f_P}{\partial \overline{\varepsilon}_j}\Big|_{P=P_0} = -\frac{z^{n+j}}{n+j}, \quad j=1,\dots,n-1, \quad \frac{\partial f_P}{\partial \overline{\varepsilon}_0} = 0.$$

Тем самым

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{P=P_0} = \frac{1}{n-j}\left(\xi^{n-j} - \sum_{k=1}^{n} C_k \tau_k^{n-j}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{\varepsilon}_j}\Big|_{P=P_0} = \frac{1}{n+j}\left(\xi^{n+j} - \sum_{k=1}^{n} C_k \tau_k^{n+j}\right), \quad j=1,\dots,n-1,$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_0} = 1 - \sum_{j=1}^{n} C_j, \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{\varepsilon}_0} = 0.$$

Учитывая, что $\tau_k^n = \rho^n$, $k=1,\dots,n$, из уравнения (6) будем иметь

$$\begin{aligned}(7)\quad & \frac{\xi^n - \rho^n}{n-j}\left(\overline{\xi}^{n-j} - \rho^{n-j}\sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \overline{\xi}_k^{-j}\right) \\ & \qquad - \frac{\overline{\xi}^n - \rho^n}{n+j}\left(\xi^{n+j} - \rho^{n+j}\sum_{k=1}^{n} C_k \xi_k^{j}\right) = 0, \quad j=1,\dots,n-1,\end{aligned}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = 1.$$

Положим

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} C_k \xi_k^j. \tag{8}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \overline{\xi}_k^{-j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \overline{\xi}_k^{n-j} = \overline{b}_{n-j}.$$

Положив $\alpha = \arg(\xi^n - \rho^n)$, равенство (7) можно переписать в виде

$$\frac{e^{2i\alpha}}{n-j}\left(\overline{\xi}^{n-j} - \rho^{n-j} b_{n-j}\right) = \frac{1}{n+j}\left(\xi^{n+j} - \rho^{n+j} b_j\right), \quad j=1,\dots,n-1.$$

Введя обозначения
$$p_j = e^{2i\alpha}\frac{n+j}{n-j}\rho^{-2j}, \quad \tau = \frac{\xi}{\rho},$$
получаем систему
$$b_j - p_j\overline{b}_{n-j} = \tau^{n+j} - p_j\overline{\tau}^{n-j}, \quad j = 1,\dots,n-1.$$
Взяв из этой системы равенство, сопряженное к равенству, получаемому при $j = n-k$, и равенство при $j = k$, будем иметь
$$\begin{aligned} -\overline{p}_k b_k + \overline{b}_{n-k} &= \overline{\tau}^{2n-k} - \overline{p}_{n-k}\tau^k, \\ b_k - p_k\overline{b}_{n-k} &= \tau^{n+k} - p_k\overline{\tau}^{n-k}, \quad k = 1,\dots,n-1. \end{aligned}$$
Отсюда
$$b_k = \frac{p_k\overline{\tau}^{n-k}(\overline{\tau}^n - 1) + \tau^k(\tau^n - p_k\overline{p}_{n-k})}{1 - p_k\overline{p}_{n-k}}.$$
Это выражение для b_k легко привести к виду (5). Из равенств (8) и того, что $b_0 = 1$, получаем
$$C_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k\xi_j^{-k}.$$
□

Список литературы

[1] *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12, №4. С. 465–476.

[2] *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19, №1. С. 29–40.

[3] *Осипенко К. Ю.* Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192. С. 67–86.

[4] *Magaril-Il'yaev G.G, Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M.* Optimal recovery and extremum theory // CMFT. 2002. V. 2. №1. (в печати).

[5] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50. №6. С. 85–93.

[6] *Horwitz, A., Newman, D. J.,* An extremal problem for analytic functions with prescribed zeros and rth derivative in H^∞ // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 295. №2. P. 699–713.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского