ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КАРЛСОНА СО МНОГИМИ ВЕСАМИ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматриваются точные неравенства типа Карлсона вида

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \le K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T)} \left(\max_{1\le j\le n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}\right)^{1-\gamma},$$

где T — конус в $\mathbb{R}^d$, а веса w_j, $j = 1,\dots,n$, обладают некоторым свойством симметрии.

1. Введение

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(T,\mu)$ обозначим совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{vraisup}_{t\in T} |x(t)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $T \subset \mathbb{R}^d$ и $d\mu = dt$, $t \in \mathbb{R}^d$, положим $L_p(T) = L_p(T,\mu)$.

Неравенство Карлсона [1]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \sqrt{\pi}\|x(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|tx(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad \mathbb{R}_+ = [0,+\infty),$$

обобщалось многими авторами (см. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). В работе [7] была найдена точная константа в неравенстве вида

$$(1) \qquad \|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \le K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu))}\|w_1(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)},$$

где T — конус в линейном пространстве, $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot)$ — однородные функции, μ — однородная мера и $1 \le q < p, r < \infty$ (при $T = \mathbb{R}^d$ точная константа была получена в работе [5]). Напомним, что константа K называется точной, если ее нельзя заменить на меньшую. Само неравенство в таком случае называется точным.

Нахождение точной константы в неравенстве (1) тесно связано со следующей экстремальной задачей:

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \to \max, \quad \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu))} \le \delta, \quad \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \le 1,$$

где $\delta > 0$. В этой работе изучается экстремальная задача

$$(2) \quad \|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \to \max, \quad \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu))} \le \delta,$$
$$\|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \le 1, \ j = 1,\dots,n,$$

где $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ и $w_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, — однородные функции с некоторыми дополнительными свойствами симметрии на функции $w_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$. Полученные результаты применяются для получения точных неравенств типа Карлсона со многими весами.

2. Однородные весовые функции на конусе в линейном пространстве

Пусть T — конус в линейном пространстве, $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка d, $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$ — однородные функции порядков θ, θ_0, а $|w_j(\cdot)|$, $j=1,\dots,n$, — однородные функции порядка θ_1. Будем предполагать, что $w(t), w_0(t)\neq 0$ и $\sum_{j=1}^n |w_j(t)|\neq 0$ для почти всех $t\in T$. Если $1\le q<p,r<\infty$, то при $k\in[0,1)$ функция $k^{\frac{1}{p-q}}(1-k)^{-\frac{1}{r-q}}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно существует функция $k(\cdot)$ такая, что для почти всех $t\in T$

$$\frac{k^{\frac{1}{p-q}}(t)}{(1-k(t))^{\frac{1}{r-q}}}=\left|\frac{w(t)}{w_0(t)}\right|^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}\left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{w_j(t)}{w_0(t)}\right|^r\right)^{-\frac{1}{r-q}}. \tag{3}$$

Положим

$$\gamma=\frac{\theta_1-\theta-d(1/q-1/r)}{\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $1\le q<p,r<\infty$ и $\theta_0-\theta_1+d(1/p-1/r)\neq 0$. Предположим, что*

$$I_1=\int_T\left|\frac{w(z)}{w_0(z)}\right|^{\frac{pq}{p-q}}k^{\frac{p}{p-q}}(z)\,d\mu(z)<\infty,$$
$$I_{j+1}=\int_T\frac{|w(z)|^{\frac{qr}{p-q}}}{|w_0(z)|^{\frac{pr}{p-q}}}|w_j(z)|^r k^{\frac{r}{p-q}}(z)\,d\mu(z)<\infty,\quad j=1,\dots,n,$$

и, кроме того, $I_2=\ldots=I_{n+1}$. Тогда для всех $x(\cdot)\neq 0$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(T,\mu)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(T,\mu)$, $j=1,\dots,n$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}\le K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu)}\left(\max_{1\le j\le n}\|\omega_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}\right)^{1-\gamma}, \tag{5}$$

где

$$K=I_1^{-\gamma/p}I_2^{-(1-\gamma)/r}(I_1+nI_2)^{1/q}. \tag{6}$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются две леммы. Первая из них по сути является достаточным условием экстремума из теоремы Каруша–Куна–Таккера (см., например, [9, с. 39] (в силу простоты ее доказательства, состоящего из одной выкладки, оно приведено).

Пусть $f_j\colon A\to\mathbb{R}$, $j=0,1,\dots,k$, — функции, определенные на некотором множестве A. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x)\to\max,\quad f_j(x)\le 0,\quad j=1,\dots,k,\quad x\in A, \tag{7}$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,\lambda)=-f_0(x)+\sum_{j=1}^k\lambda_j f_j(x),\quad \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k).$$

Лемма 1. *Пусть существуют $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $j = 1, \dots, k$, и допустимый в задаче (7) элемент $\widehat{x} \in A$, для которых*

$$(a) \quad \min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_k),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_j f_j(\widehat{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Тогда $\widehat{x}$ — экстремальный элемент в задаче (7).

Доказательство. Для любого допустимого в задаче (7) элемента $x \in A$ имеем

$$-f_0(x) \ge \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) \ge \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = -f_0(\widehat{x}).$$

□

Вторая лемма — частный случай леммы 3 из работы [7].

Лемма 2. *Для всех $a, b \ge 0$ таких, что $a + b > 0$, и всех $1 \le q < p, r < \infty$ существует единственное решение $\widehat{u} > 0$ уравнения*

$$q + pau^{p-q} + rbu^{r-q} = 0.$$

При этом для всех $u \ge 0$

$$-\widehat{u}^q + a\widehat{u}^p + b\widehat{u}^r \le -u^q + au^p + bu^r.$$

Доказательство теоремы 1. Положим

$$\widehat{x}(t) = |w_0(t)|^{-\frac{p}{p-q}} \left(\frac{q|w(t)|^q}{p\lambda_0} \right)^{\frac{1}{p-q}} k^{\frac{1}{p-q}}(\xi t),$$

где параметры $\lambda_0, \xi > 0$ подберем так, чтобы выполнялись равенства

$$(8) \qquad \int_T |w_0(t)|^p \widehat{x}^p(t)\, d\mu(t) = \delta^p, \quad \int_T |w_j(t)|^r \widehat{x}^r(t)\, d\mu(t) = 1,\ j = 1, \dots, n.$$

Сделав замену $z = \xi t$ и учитывая однородность функций $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$, $w_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, n$, а также меры $\mu(\cdot)$, получаем

$$\int_T |w_0(t)|^p \widehat{x}^p(t)\, d\mu(t) = \left(\frac{q}{p\lambda_0} \right)^{\frac{p}{p-q}} I_1 \xi^{(\theta_0 - \theta)\frac{qp}{p-q} - d}.$$

Аналогично находим

$$\int_T |w_j(t)|^r \widehat{x}^r(t)\, d\mu(t) = \left(\frac{q}{p\lambda_0} \right)^{\frac{r}{p-q}} I_{j+1} \xi^{(\theta_0 - \theta)\frac{qr}{p-q} + r(\theta_0 - \theta_1) - d}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, равенства (8) имеют вид

$$\left(\frac{q}{p\lambda_0} \right)^{\frac{p}{p-q}} I_1 \xi^{(\theta_0 - \theta)\frac{qp}{p-q} - d} = \delta^p,$$

$$\left(\frac{q}{p\lambda_0} \right)^{\frac{r}{p-q}} I_{j+1} \xi^{(\theta_0 - \theta)\frac{qr}{p-q} + r(\theta_0 - \theta_1) - d} = 1,\ j = 1, \dots, n.$$

Нетрудно убедиться, что при

$$\xi = \left(\delta I_1^{-1/p} I_2^{1/r} \right)^{\frac{1}{\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)}},$$

$$\lambda_0 = \frac{q}{p} I_1^{1 - q/p} \xi^{(\theta_0 - \theta)q - d(1 - q/p)} \delta^{q - p},$$

эти равенства выполняются.

Рассмотрим экстремальную задачу, эквивалентную задаче (2)

$$(9)\qquad \int_T |w(t)|^q|x(t)|^q\,d\mu(t)\to\max,\quad \int_T |w_0(t)|^p|x(t)|^p\,d\mu(t)\le\delta^p,$$
$$\int_T |w_j(t)|^r|x(t)|^r\,d\mu(t)\le 1,\quad j=1,\dots,n.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\overline{\lambda}))=\int_T L(t,x(t),\overline{\lambda})\,d\mu(t),\quad \overline{\lambda}=(\lambda_0,\lambda_1,\dots\lambda_n),$$

где

$$L(t,x(t),\overline{\lambda})=-|w(t)|^q|x(t)|^q+\lambda_0|w_0(t)|^p|x(t)|^p+|x(t)|^r\sum_{j=1}^n\lambda_j|w_j(t)|^r.$$

Из определения функции $\widehat{x}(\cdot)$ получаем

$$(10)\qquad p\lambda_0|w_0(t)|^p\widehat{x}^{p-q}(t)=q|w(t)|^qk(\xi t)$$

и

$$r\sum_{j=1}^n|w_j(t)|^r\widehat{x}^{r-q}(t)=r\sum_{j=1}^n|w_j(t)|^r|w_0(t)|^{-\frac{p(r-q)}{p-q}}\left(\frac{q|w(t)|^q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{r-q}{p-q}}k^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t).$$

Из (3) и однородности функций $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$, $w_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, вытекает, что

$$k^{\frac{r-q}{p-q}}(\xi t)=\left|\frac{w(\xi t)}{w_0(\xi t)}\right|^{\frac{q(p-r)}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{w_j(\xi t)}{w_0(\xi t)}\right|^r\right)^{-1}(1-k(\xi t))$$
$$=\xi^{(\theta-\theta_0)\frac{q(p-r)}{p-q}-(\theta_1-\theta_0)r}\left|\frac{w(t)}{w_0(t)}\right|^{\frac{q(p-r)}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{w_j(t)}{w_0(t)}\right|^r\right)^{-1}(1-k(\xi t)).$$

Таким образом,

$$r\sum_{j=1}^n|w_j(t)|^r\widehat{x}^{r-q}(t)=r\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{\frac{r-q}{p-q}}\xi^{(\theta-\theta_0)\frac{q(p-r)}{p-q}-(\theta_1-\theta_0)r}|w(t)|^q(1-k(\xi t)).$$

Положим

$$\lambda=\frac{q}{r}\left(\frac{q}{p\lambda_0}\right)^{-\frac{r-q}{p-q}}\xi^{(\theta_0-\theta)\frac{q(p-r)}{p-q}+(\theta_1-\theta_0)r}.$$

Тогда

$$(11)\qquad r\lambda\sum_{j=1}^n|w_j(t)|^r\widehat{x}^{r-q}(t)=q|w(t)|^q(1-k(\xi t)).$$

Складывая (10) и (11), получаем

$$(12)\qquad p\lambda_0|w_0(t)|^p\widehat{x}^{p-q}(t)+r\lambda\sum_{j=1}^n|w_j(t)|^r\widehat{x}^{r-q}(t)=q|w(t)|^q.$$

Из леммы 2 вытекает тогда, что для всех допустимых в (9) функций $x(\cdot)$ и почти всех $t\in T$ при $\overline{\lambda}=(\lambda_0,\lambda,\dots,\lambda)$ имеет место неравенство

$$L(t,\widehat{x}(t),\overline{\lambda})\le L(t,x(t),\overline{\lambda}).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot),\overline{\lambda})) \le \mathcal{L}(x(\cdot),\overline{\lambda})).$$

Учитывая выполнение равенств (8), из леммы 1 получаем, что $\widehat{x}(\cdot)$ — экстремальная функция в задаче (9). Принимая во внимание равенства (12) и (8), находим

$$\sup_{\substack{\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\le\delta\\ \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}\le 1,\ j=1,\dots,n}} \|w(\cdot)x(\cdot)\|^q_{L_q(T,\mu)} = \int_T |w(t)|^q|\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t) \tag{13}$$

$$= q^{-1}\int_T\left(p\lambda_0|w_0(t)|^p\widehat{x}^p(t) + r\lambda\sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r\widehat{x}^r(t)\right)d\mu(t)$$

$$= \frac{p\lambda_0\delta^p + nr\lambda}{q} = I_1^{1-q/p}\xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)}\delta^q + n\left(\frac{p\lambda_0}{q}\right)^{\frac{r-q}{p-q}}\xi^{(\theta_0-\theta)\frac{q(p-r)}{p-q}+(\theta_1-\theta_0)r}$$

$$= I_1^{1-q/p}\xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)}\delta^q + nI_1^{r/p-q/p}\xi^{(\theta_0-\theta)q-d(r/p-q/p)+(\theta_1-\theta_0)r}\delta^{q-r}$$

$$= \delta^{q\gamma}K^q.$$

Пусть $x(\cdot)\ne 0$, $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(T,\mu)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(T,\mu)$, $j=1,\dots,n$. Положим

$$A = \max_{1\le j\le n}\|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}, \quad \delta = A^{-1}\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}.$$

Тогда из (13) вытекает, что

$$A^{-q}\|w(\cdot)x(\cdot)\|^q_{L_q(T,\mu)} \le \delta^{q\gamma}K^q.$$

Отсюда вытекает неравенство (5). Если предположить, что существует постоянная $K_1 < K$, для которой тоже выполняется неравенство (5), то тогда

$$\sup_{\substack{\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\le\delta\\ \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}\le 1,\ j=1,\dots,n}} \|w(\cdot)x(\cdot)\|^q_{L_q(T,\mu)} \le K_1^q\delta^{q\gamma} < K^q\delta^{q\gamma},$$

что противоречит (13). □

При $n=1$ утверждение теоремы 1 было доказано в [7].

3. Однородные весовые функции на конусе в $\mathbb{R}^d$

Пусть T — конус в $\mathbb{R}^d$, $d\mu(t) = dt$, $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$ — однородные функции порядков θ, θ_0, а $|w_j(\cdot)|$, $j=1,\dots,n$, — однородные функции порядка θ_1. Будем по-прежнему предполагать, что $w(t), w_0(t)\ne 0$ и $\sum_{j=1}^n|w_j(t)|\ne 0$ для почти всех $t\in T$. Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned}
t_1 &= \rho\cos\omega_1,\\
t_2 &= \rho\sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_{d-1} &= \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\
t_d &= \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Положим $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_{d-1})$. Для любой функции $f(\cdot)$, заданной на $\mathbb{R}^d$, введем следующее обозначение

$$\widetilde{f}(\omega) = |f(\cos\omega_1,\dots,\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|.$$

Заметим, что если $|f(\cdot)|$ однородная функция порядка κ, то $f(\omega) = \rho^{-\kappa}|f(t)|$. Обозначим через Ω область изменения ω, когда $t \in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ. Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2}\omega_1 \sin^{d-3}\omega_2 \dots \sin\omega_{d-2}.$$

Переходя к сферическим координатам, для функции $k(\cdot)$ будем иметь равенство

$$\frac{k^{\frac{1}{p-q}}(\rho,\omega)}{(1-k(\rho,\omega))^{\frac{1}{r-q}}} = \rho^{\frac{(\theta-\theta_0)q(p-r)-(\theta_1-\theta_0)r(p-q)}{(p-q)(r-q)}} \frac{\widetilde{w}^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}(\omega)\widetilde{w}_0^{\frac{p}{p-q}}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{\frac{1}{r-q}}}. \tag{14}$$

Предположим, что $\gamma \in (0,1)$, где γ определено формулой (4). Положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Нетрудно убедиться, что $q^* > q \ge 1$. Кроме того,

$$q^* = \frac{pqr(\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p))}{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}.$$

Теорема 2. *Пусть $1 \le q < p, r < \infty$ и $\gamma \in (0,1)$. Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \frac{\widetilde{w}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{w}_0^{q^*\gamma}(\omega)\left(\sum_{k=1}^n \widetilde{w}_k^r(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega)\,d\omega < \infty$$

и $I_1' = \ldots = I_n'$, где

$$I_j' = \int_\Omega \frac{\widetilde{w}^{q^*}(\omega)\widetilde{w}_j^r(\omega)}{\widetilde{w}_0^{q^*\gamma}(\omega)\left(\sum_{k=1}^n \widetilde{w}_k^r(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}} J(\omega)\,d\omega,\ j = 1,\ldots,n.$$

Тогда для всех $x(\cdot) \ne 0$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, $j = 1,\ldots,n$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \le \widetilde{K}\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^\gamma \left(\max_{1\le j\le n}\|\omega_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}\right)^{1-\gamma},$$

где

$$\widetilde{K} = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}}\left(\frac{1-\gamma}{n}\right)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B\left(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r\right) I}{|\theta_1-\theta_0+d(1/p-1/r)|(\gamma r+(1-\gamma)p)}\right)^{1/q^*}, \tag{15}$$

а $B(\cdot,\cdot)$ — B-функция Эйлера.

Доказательство. Вычислим величину I_1 из теоремы 1 с помощью перехода к сферическим координатам. Имеем

$$I_1 = \int_T \left|\frac{w(z)}{w_0(z)}\right|^{\frac{pq}{p-q}} k^{\frac{p}{p-q}}(z)\,dz$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\widetilde{w}(\omega)}{\widetilde{w}_0(\omega)}\right)^{\frac{qp}{p-q}} J(\omega)\,d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qp}{p-q}+d-1} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho.$$

Из (14) следует, что

$$\rho^{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)} = \frac{(1-k(\rho,\omega))^{p-q}}{k^{r-q}(\rho,\omega)} \frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}}.$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qp}{p-q}+d} &= \left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}} \right)^{\zeta} d\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}} \\ &= -\zeta \left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}} \right)^{\zeta} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk, \end{aligned}$$

где

$$\zeta = \frac{(\theta-\theta_0)qp + d(p-q)}{(p-q)((\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r))} = \frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)}.$$

Если ρ меняется от 0 до $+\infty$, то k будет меняться от 0 до 1 при $(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r) < 0$ и от 1 до 0 при $(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r) > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qp}{p-q}+d-1} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho \\ &\quad= \frac{p-q}{(\theta-\theta_0)qp+d(p-q)} \int_0^{+\infty} k^{\frac{p}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qp}{p-q}+d} \\ &\quad= \frac{1}{|(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)|} \left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}} \right)^{\zeta} \\ &\qquad\times \int_0^1 k^{\frac{p}{p-q}} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk \\ &= \frac{1}{|(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)|} \left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}} \right)^{\zeta} (K_1+K_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= (r-q)\int_0^1 k^{\widehat{p}}(1-k)^{\widehat{q}-1}\,dk = (r-q)B(\widehat{p}+1,\widehat{q}), \\ K_2 &= (p-r)\int_0^1 k^{\widehat{p}+1}(1-k)^{\widehat{q}-1}\,dk = (p-r)B(\widehat{p}+2,\widehat{q}) \\ &\qquad\qquad = (p-r)\frac{\widehat{p}+1}{\widehat{p}+\widehat{q}+1}B(\widehat{p}+1,\widehat{q}), \\ \widehat{p} &= \frac{(\theta_1-\theta)qr - d(r-q)}{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)} = q^*\frac{\gamma}{p}, \\ \widehat{q} &= \frac{(\theta-\theta_0)qp + d(p-q)}{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)} = q^*\frac{1-\gamma}{r}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_1+K_2=p\frac{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}{(\theta_1-\theta_0)pr+d(p-r)}B(\widehat{p}+1,\widehat{q})=\frac{pq}{q^*}B(\widehat{p}+1,\widehat{q})$$
$$=\frac{q\gamma}{q^*}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q}).$$

Отсюда

$$I_1=\frac{\gamma}{pr|\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)|}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})I.$$

Теперь найдем I_2. Имеем

$$I_2=\int_T\frac{|w(z)|^{\frac{qr}{p-q}}}{|w_0(z)|^{\frac{pr}{p-q}}}|w_1(z)|^rk^{\frac{r}{p-q}}(z)\,dz$$
$$=\int_\Omega\frac{\widetilde{w}^{\frac{qr}{p-q}}(\omega)}{\widetilde{w}_0^{\frac{pr}{p-q}}(\omega)}\widetilde{w}_1^r(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{+\infty}\rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qr}{p-q}+(\theta_1-\theta_0)r+d-1}k^{\frac{r}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho.$$

Зафиксируем $\omega\in\Omega$. Тогда

$$d\rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qr}{p-q}+(\theta_1-\theta_0)r+d}=\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n\widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}}\right)^{\zeta_1}d\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1}}{k^{(r-q)\zeta_1}}$$
$$=-\zeta_1\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n\widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}}\right)^{\zeta_1}\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1-1}}{k^{(r-q)\zeta_1+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk,$$

где

$$\zeta_1=\frac{(\theta-\theta_0)qr+((\theta_1-\theta_0)r+d)(p-q)}{(p-q)((\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r))}=\frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)}+\frac{1}{p-q}.$$

Имеем

$$\int_0^{+\infty}\rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qr}{p-q}+(\theta_1-\theta_0)r+d-1}k^{\frac{r}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho$$
$$=\frac{p-q}{(\theta-\theta_0)qr+((\theta_1-\theta_0)r+d)(p-q)}\int_0^{+\infty}k^{\frac{r}{p-q}}(\rho,\omega)\,d\rho^{\frac{(\theta-\theta_0)qr}{p-q}+(\theta_1-\theta_0)r+d}$$
$$=\frac{1}{|(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)|}\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n\widetilde{w}_j^r(\omega)\right)^{p-q}}\right)^{\zeta_1}(L_1+L_2),$$

где

$$L_1=(r-q)\int_0^1k^{\widehat{p}-1}(1-k)^{\widehat{q}}\,dk=(r-q)B(\widehat{p},\widehat{q}+1),$$
$$L_2=(p-r)\int_0^1k^{\widehat{p}}(1-k)^{\widehat{q}}\,dk=(p-r)B(\widehat{p}+1,\widehat{q}+1)$$
$$=(p-r)\frac{\widehat{p}}{\widehat{p}+\widehat{q}+1}B(\widehat{p},\widehat{q}+1).$$

Таким образом,

$$L_1 + L_2 = r\frac{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}{(\theta_1-\theta_0)pr+d(p-r)}B(\widehat{p},\widehat{q}+1) = \frac{qr}{q^*}B(\widehat{p},\widehat{q}+1)$$
$$= \frac{q(1-\gamma)}{q^*}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q}).$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{1-\gamma}{pr|\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)|}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})I_1'.$$

Из того, что

$$I_1' + \ldots + I_n' = I,$$

вытекает, что $I_j' = I/n$, $j = 1,\ldots,n$. Тем самым

$$I_2 = \frac{1-\gamma}{pr|\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)|}\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\right)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})\frac{I}{n}.$$

Остается подставить выражения для I_1 и I_2 в формулу (6). $\square$

При $n=1$ утверждение теоремы 2 было доказано в [5].

Приведем пример весов, для которых выполнены условия теоремы 2. Пусть $T=\mathbb{R}_+^d$,

(16)
$$w(t) = (t_1^2+\ldots+t_d^2)^{\theta/2}, \quad w_0(t) = (t_1^2+\ldots+t_d^2)^{\theta_0/2}, \quad w_j(t) = t_j^{\theta_1},\ j=1,\ldots,d.$$

Будем считать, что $\gamma \in (0,1)$. Это эквивалентно тому, что $\theta_1 + d(1/r-1/q) > \theta > \theta_0 + d(1/p-1/q)$ или $\theta_1 + d(1/r-1/q) < \theta < \theta_0 + d(1/p-1/q)$.

Нетрудно убедиться, что $\widetilde{w}(\cdot) = \widetilde{w}_0(\cdot) = 1$, а $\widetilde{w}_j(\omega) = \widetilde{t}_j^{\,\theta_1}(\omega)$, $j=1,\ldots,d$, где

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}_1(\omega) &= \cos\omega_1,\\
\widetilde{t}_2(\omega) &= \sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\widetilde{t}_{d-1}(\omega) &= \sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\
\widetilde{t}_d(\omega) &= \sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega) = 1.$$

Для величины I из теоремы 2 имеем

$$I = \int_{\Pi_+^{d-1}} \frac{J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r}}, \quad \Pi_+^{d-1} = [0,\pi/2]^{d-1}. \tag{17}$$

Если $r\theta_1 \le 2$, то

$$\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega) \ge \sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega) = 1. \tag{18}$$

Если же $r\theta_1 > 2$, то по неравенству Гельдера

$$1 = \sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega) \le \left(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega)\right)^{\frac{2}{r\theta_1}} d^{1-\frac{2}{r\theta_1}}.$$

Тем самым

$$\sum_{k=1}^{d}\widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega)\ge d^{1-\frac{r\theta_1}{2}}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает, что $I<\infty$.

Для I'_j имеем

$$I'_j=\int_{\Pi_+^{d-1}}\frac{\widetilde{t}_j^{\,r\theta_1}J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^{d}\widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}},\ j=1,\dots,d.$$

Рассмотрим интегралы

$$M_j=\int_{\mathbb{R}_+^d\cap\mathbb{B}^d}\frac{\left(\sum_{k=1}^{d}t_k^2\right)^{\theta_1 q^*(1-\gamma)/2}t_j^{r\theta_1}}{\left(\sum_{k=1}^{d}t_k^{r\theta_1}\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}}\,dt,\ j=1,\dots,d,$$

где $\mathbb{B}^d$ — единичный шар в $\mathbb{R}^d$. Если сделать замену переменных в интеграле M_j, поменяв местами переменные t_j и t_k, то интеграл M_j перейдет в интеграл M_k. Следовательно, $M_1=\ldots=M_d$. Переходя к сферическим координатам, получим, что $M_j=I'_j/d$, $j=1,\dots,d$. Таким образом, $I'_1=\ldots=I'_d$.

Для рассматриваемого случая из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Пусть $1\le q<p,r<\infty$ и выполнено неравенство $\theta_1+d(1/r-1/q)>\theta>\theta_0+d(1/p-1/q)$ или $\theta_1+d(1/r-1/q)<\theta<\theta_0+d(1/p-1/q)$. Тогда для весов* (16) *и всех $x(\cdot)$, для которых $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}_+^d)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(\mathbb{R}_+^d)$, $j=1,\dots,d$, имеет место точное неравенство*

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)}\le\widetilde{K}\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^{\widetilde{\gamma}}\left(\max_{1\le j\le d}\|\omega_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}\right)^{1-\widetilde{\gamma}},$$

где величина $\widetilde{K}$ определена равенством (15), *в котором значение I определено равенством* (17).

Приведем еще одно результат для весов (16).

Следствие 2. *Пусть $1\le q<p,r<\infty$. Веса* (16) *таковы, что $\theta=d(1-1/q)$, $\theta_0=d-(\lambda+d)/p$, $\theta_1=d+(\mu-d)/r$, где $\lambda,\mu>0$. Положим*

$$\alpha=\frac{\mu}{p\mu+r\lambda},\quad\beta=\frac{\lambda}{p\mu+r\lambda}.$$

Тогда для всех $x(\cdot)$, для которых $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}_+^d)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(\mathbb{R}_+^d)$, $j=1,\dots,d$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)}\le C\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}^{p\alpha}\left(\max_{1\le j\le d}\|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R}_+^d)}\right)^{r\beta},$$

где

$$C=\frac{d^\beta}{(p\alpha)^\alpha(r\beta)^\beta}\left(\frac{I}{\lambda+\mu}B\left(\frac{\alpha}{1/q-\alpha-\beta},\frac{\beta}{1/q-\alpha-\beta}\right)\right)^{1/q-\alpha-\beta},$$

а

$$I=\int_{\Pi_+^{d-1}}\frac{J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^{d}\widetilde{t}_k^{\,r(d-1)+\mu}(\omega)\right)^{\frac{\beta}{1/q-\alpha-\beta}}}.$$

При $d = 1$ и $q = 1$ утверждение следствия 2 было получено в [2].

Список литературы

[1] **Carlson F.** Une inégalité // Ark. Mat. Astr. Fysik. 1934. Vol. 25B. P. 1–5.

[2] **Левин В.И.** Точные константы в неравенствах типа Карлсона // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. С. 635–638.

[3] **Андрианов Ф.И.** Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщения // Изв. вузов. Мат. 1967. №1. С. 3–7.

[4] **Арестов В. В.** Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1975. Т. 138. С. 29–42.

[5] **Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E.** Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights // Math. Ineq. Appl. 1998. Vol. 1, no. 1. P. 53–67. doi: 10.7153/mia-01-04

[6] **Luo M.-J., Raina R. K.** A new extension of Carlson's inequality // Math. Ineq. Appl. 2016. Vol. 19, no. 2. P. 417–424. doi: 10.7153/mia-19-33

[7] **Osipenko K. Yu.** Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities // J. Complexity. 2016. Vol. 32, no. 1. P. 53–73. doi: 10.1016/j.jco.2015.07.004

[8] **Osipenko K. Yu.** Inequalities for derivatives with the Fourier transform // Appl. Comp. Harm. Anal. 2021. Vol. 53. P. 132–150. doi: 10.1016/j.acha.2021.02.001

[9] **Осипенко К. Ю.** Выпуклый анализ. М.: УРСС, 2022. 144 с.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН